DIKTAT

STATISTIKA MATEMATIKA

Edisi Revisi

Rina Widyasari, M.Si

NIDN. 0118078801

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUMATERA UTARA

SUMATERA UTARA

MEDAN

2020

SURAT REKOMENDASI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	:	Dr. Sajaratud Dur, ST, MT.
NIP.	:	19731013 200501 2 005
Pangkat/ Gol.	:	Penata Tk.I (III/d)
Unit Kerja	:	Fakultas Sains dan Teknologi

menyatakan bahwa diktat saudara

Nama	:	Rina Widyasari, M.Si
NIDN	:	0118078801
Pangkat/ Gol.	:	Penata Muda Tk I/ III b
Unit Kerja	:	Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sumatera Utara
Judul Diktat	:	Statistika Matematika Edisi Revisi

Telah memenuhi syarat sebagai suatu karya ilmiah (Diktat) dalam mata kuliah Statistika Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sumatera Utara.

Demikianlah rekomendasi ini diberikan untuk dapat dipergunakan seperlunya.

Medan, Oktober 2020
Yang Menyatakan,

Dr. Sajaratud Dur, ST, MT
NIP. 19731013 200501 2 005

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah segala puji hanya milik Allah Tuhan sekalian alam. Atas berkat rahmat dan karuniaNya, saya dapat menyelesaikan penulisan diktat ini dengan judul "**Statistika Matematika Edisi Revisi**". Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada Muhammad SAW beserta kerabat, sahabat, para pengikutnya sampai akhir zaman, adalah sosok yang telah membawa manusia dan seisi alam dari kegelapan ke cahaya sehingga kita menjadi manusia beriman, berilmu, dan tetap beramal shaleh agar menjadi manusia yang berakhlak mulia.

Penulisan diktat ini bertujuan untuk melengkapi persyaratan pengusulan kenaikan pangkat di Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sumatera Utara. Diktat ini juga diharapkan dapat menambah wawasan ilmu pengetahuan, khususnya matematika dalam instalasi nilai-nilai Islam yang terpadu dalam proses pembelajaran di lingkungan Universitas Islam Negeri Sumatera Utara.

Dalam penulisan diktat ini, saya sangat menyadari bahwa masih banyak kekurangan yang perlu perbaikan di sana sini, sumbangan pemikiran yang membangun sangat penulis harapkan dari rekan-rekan sejawat terutama dari dosen-dosen senior yang terhimpun dalam mata kuliah serumpun. Juga usulan dari para pengguna bahan ajar ini terutama mahasiswa matematika, semoga konten pemodelan matematika dapat diperkaya melalui evaluasi terus menerus. Atas segala budi baik yang telah penulis terima dari semua pihak untuk itu saya ucapkan ribuan terima kasih. Semoga Allah SWT membalas kebaikan seluruh rekan sekalian dengan ganjaran yang berlipat ganda, Amiin.

Medan, Oktober 2020
Penulis

Rina Widyasari, M.Si
NIDN. 0118078801

Bab 1

Landasan Teori Probabilitas

1.1 Himpunan

1.1.1 Pengertian Himpunan

Dewasa ini, kata-kata yang memuat himpunan sudah sering kita dengarkan, bahkan secara langsung disadari maupun tidak disadari telah pernah kita ucapkan. Hanya saja barangkali, karena perkataan tersebut bukan merupakan kata yang baru maupun terdengar asing untuk kita, maka jarang dipertanyakan bahwa apakah yang dimaksud dengan himpunan. Sebagai gambaran tentang hal ini perhatikan cerita berikut ini:

Seorang Pelajar Sekolah Dasar pada suatu mala Senin, mengambil buku-buku pelajaran mereka sesuai roster hari senin. Buku-buku tersebut disusun di atas meja belajar, ataupun di dalam tas sekolah. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa si pelajar telah membuat suatu penghimpunan beberapa benda, yaitu buku-buku pelajaran SD untuk hari Senin, yang satu dengan lainnya dibedakan oleh judul buku tersebut. Dalam hal ini misal buku matematika, metode didaktik, dll. Jadi satu dengan yang lain, dari semua buku pelajaran tersebut mempunyai ciri-ciri pembeda tertentu. Satu dengan lainnya, buku-buku tersebut disusun sedemikian sehingga membentuk satu kesatuan, yaitu kesatuan buku pelajaran SD pada hari Senin.

Dari ucapan "Himpunan buku pelajaran SD untuk hari Senin" maka dapat di tulis kesan-kesan yang cukup dan perlu yaitu:

a. Adanya objek/ benda sebagai pembentuk himpunan
b. Adanya ciri/ tanda pembeda dari masing-masing objek / benda tersebut sebagai pembeda satu sama lainnya dengan jelas.

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa himpunan adalah suatu kesatuan benda-benda yang memiliki ciri pembedaan tertentu. Setiap objek/benda yang membentuk dan termuat di dalam himpunan disebut anggota / unsur /elemen himpunan tersebut.

Contoh:

- Himpunan harta karun keluarga pak Somat
- Himpunan batu bersurat kerajaan Babilonia
- Kelompok murid SMP yang gemar belajar matematika

1.1.2 Himpunan Bagian

Himpunan A disebut himpuan bagian dari himpunan B, jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A juga anggota B, Andaikan

$$A= \{1,2,3\}$$

$$B=\{a,1,2,b,c,3\}$$

Maka setiap anggota A, yaitu 1,2 dan 3 juga anggota B. Jadi dikatakan bahwa A adalah himpunan bagian dari himpunan B. Dengan lambang himpunan bagian, hal ini bisa ditulis sebagai berikut:

$$A \subset B$$

Dibaca " A himpunan bagian B". Istilah lain bagi himpunan bagian ialah *subset*. Sebaliknya bisa di tulis juga dengan $B \supset A$

Dibaca "B superset A". Dalam contoh di atas tidak semua anggota B yang menjadi anggota A.

Untuk hal yang seperti ini, maka dikatakan bahwa A himpunan bagian sejati dari B.

Dalam hal

$$C=\{1,2,3,4\}$$

$$B=\{2,1,4,3\}$$

Terlihat bahwa setiap anggota C termuat dalam D, sehingga $C \subset D$. Tetapi juga setiap D termuat dalam C sehingga $D \subset C$. Untuk hal seperti ini maka bisa ditulis sebagai berikut:

$$C \subseteq D; \text{(C = exhaustive subset of D)}$$

Jadi berbeda dengan himpunan bagian sejati.

1.1.3 Jumlah Himpunan Bagian Suatu Himpunan

Setiap suatu himpunan akan memuat paling sedikit satu himpunan bagian. Hal ini terjadi karena setiap himpunan merupakan himpunan bagian terhadap dirinya sendiri, yaitu

$\emptyset \subseteq A$ Umumnya, bila suatu himpunan mempunyai banyak anggota ialah n maka jumlah himpunan bagiannya adalah 2^n. Bila disusun ke dalam suatu daftar maka himpunan-himpunan ini ialah:

Himpunan	#Himpunan	#Himp.Bagian	Himpunan Bagian
$\emptyset$	0	$2^0=1$	$\emptyset$
{a}	1	$2^1=2$	$\emptyset$,{a}
{a,b}	2	$2^2=4$	$\emptyset$,{a,},{b},{a,b}
{a,b,c}	3	$2^3=8$	$\emptyset$,{a},{b},{c},{a,b}, {a,c},{b,c},{a,b,c}

#dibaca : Banyak anggota

Ingat bahwa {a,b} = {b,a}. Juga {a,c} = {c,a}.

Contoh 1. Tentukanlah semua himpunan bagian dari himpunan bendera negara Republik Indonesia.

Penyelesaian:

Sebutlah nama himpunan itu A, maka

A = {merah, putih}

Jadi jumlah anggota A ialah 2. Oleh karena itu, jumlah himpunan bagian $2^2 = 4$. Sehingga himpunan bagian tersebut ialah

{$\emptyset$,{merah},{putih}, {merah, putih}}

Contoh 2. Ditentukan A= {2,4,6,8,10,12,14}. Tentuka himpunan bagian A yang

a. Anggotanya habis dibagi 3
b. Anggotanya berjumlah 8

Penyelesaian

A={2,4,6,8,10,12,14}

a. Anggota-anggota A yang habis dibagi 3 adalah 6 dan 12. Oleh karena itu himpunan bagian A yang anggotanya habis dibagi 3 ialah {6}, {12} dan {6,12}.
b. Himpunan bagian A yang anggotanya berjumlah 8 adalah {2,6} dan {8}.

1.1.4 Himpunan Kuasa Suatu Himpunan

Himpunan kuasa himpunan adalah suatu himpunan yang memuat setiap himpunan bagian dari A dan hanya himpunan bagian A. Lambang himpunan kuasa dari suatu himpunan $\wp(A)$ ditulis atau 2^A

Contoh

Tentukan $\wp(A)$ dari A = {1,2}

Penyelesaian

Dari A={1,2} maka semua himpunan bagian ialah $\varnothing, \{1\}, \{2\}$ dan {1,2}. Sehingga $\wp(A)$ ={$\varnothing, \{1\}, \{2\}$,{1,2}}. Jadi anggota hanyalah semua himpunan bagian A. Bila dihitung jumlah anggota dari $\wp(A)$ maka jumlahnya sama dengan himpunan bagian yang dapat terjadi dari A. Oleh karena itu untuk $\wp(A)$ sering ditulis sebagai 2^A. Jadi dari

A={1.2}

Maka pernyataan himpunan kuasa tersebut dapat ditulis sebagai

2^A= { $\varnothing, \{1\}, \{2\}$ dan {1,2}}

Perlu diingat bahwa 2^n berbeda dengan 2^A, dalam hal 2^A untuk A menyatakan suatu himpunan dalam hal 2^n maka n menyatakan banyak anggota suatu himpunan.

1.1.5. Operasi pada himpunan

a. Irisan Antar Himpunan

Yang dimaksud dengan irisan himpunan A dan himpunan B ialah suatu himpunan yang memuat anggota A sekaligus juga anggota B. Hal ini dimaksud bahwa kalau x adalah anggota irisan tersebut, maka x harus termuat di A dan juga termuat di B.

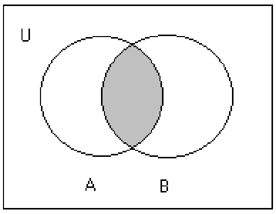
Lambang irisan antara himpunan A dan B ditulis

$$A \cap B$$

Dibaca A irisan B. Bila himpunan $A \cap B$ ditulis menurut cara perincian, maka didapat bentuk sebagai berikut

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \},$$

Dengan daerah Venn, keadaan di atas bisa diperlihatkan sebagai berikut



Gambar 1.1

Diagram yang diarsir menyatakan $A \cap B$

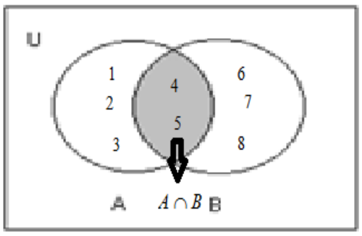
Contoh

Untuk himpunan A={1,2,3,4,5} dan B={4,5,6,7,8}, maka

1. Tentukan $A \cap B$
2. Tunjukkan dengan diagram Venn

Penyelesaian

1. $A \cap B$ = {1,2,3,4,5} $\cap$ {4,5,6,7,8}. Jadi A $\cap$ B adalah suatu himpunan dengan anggota 4 dan 5. Sebab, hanya bilangan 4 dan 5 yang sekaligus termuat pada kedua himpunan tersebut.
2. Diagram Venn. Dalam penggambaran diagram Venn ini maka harus diperhatikan bahwa bilangan 4 dan 5 harus berada pada irisan kedua himpunan tersebut, yaitu sebagai berikut:



Gambar 1.2

Contoh

Tentukan A∩B∩C bila diketahui A = {1,2,3}, B={2,4,a,b}, C={a,b,d,2}. Selanjutnya tunjukkan dengan denah / diagram Venn.

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan bentuk $A \cap B \cap C$ ini, maka agar dapat lebih terhindar dari kemungkinan kesilapan, maka terlebih dahulu dikerjakan irisan antara dua himpunan. Kemudian hasil irisan ini diiriskan dengan himpunan ketiga.

$$A \cap B = \{1,2,3\} \cap \{2,4,a,b\} = \{2\}$$

Hasil ini kemudian diiriskan dengan C sehingga

$$(A \cap B) \cap C = \{2\} \cap \{a,b,d,2\} = \{2\}$$

Jadi

$$A \cap B \cap C = \{2\}$$

Perlu diketahui bahwa dalam pengelompokkan tersebut dapat saja dilakukan seperti $(A \cap B) \cap C$ atau $A \cap (B \cap C)$ atau $(A \cap C) \cap B$ atau $B \cap (A \cap C)$ atau $C \cap (A \cap B)$ atau $(B \cap C) \cap A$, dan lain-lain.

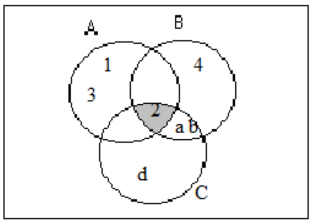
Hal yang sama untuk A dan C serta B dan C. Dari soal di atas ternyata bahwa:

$A \cap B \neq \varnothing$ berarti berpotongan

$A \cap C \neq \varnothing$ berarti berpotongan

$A \cap B \neq \varnothing$ berarti berpotongan

Oleh karena itu gambaran di atas dapat dinyatakan sebagai berikut.

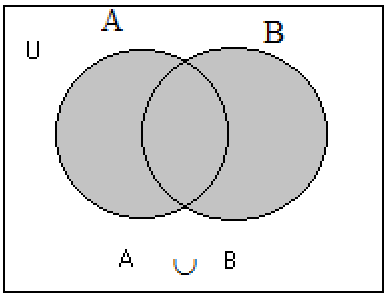


Gambar 1.3

b. Gabungan Antar Himpunan

Yang dimaksud dengan gabungan himpunan A dengan himpunan B adalah suatu himpunan yang memuat semua anggota A atau semua anggota B. Dalam hal ini jika x anggota gabungan himpunan tersebut, maka x adalah semua anggota A berikut semua anggota B. Lambang gabungan antara himpunan ditulis A ∪ B. Gabungan antara himpunan A dan B ditulis A∪B, dibaca A gabungan B. Jika A∪B ditulis dengan cara pencirian maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$$



Gambar 1.4

Diagram yang diarsir menyatakan denah A∪ B

Contoh

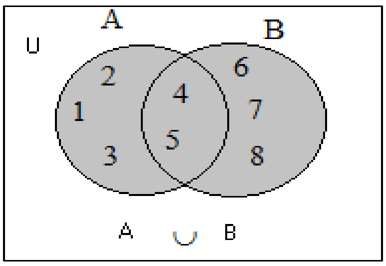
Untuk himpunan-himpunan berikut, tentukan himpunan gabungan dan perlihatkan dengan diagram Venn

1. A={1,2,3,4,5}, B={4,5,6,7,8}
2. C={1,2,3,4,5}, D={2,3,4}
3. E={1,2}, F={a,b,c}

Penyelesaian

1. A∪B = {1,2,3,4,5} ∪ {4,5,6,7,8} = {1,2,3,4,5,6,7,8}. Terlihat bahwa A∪B memuat semua anggota A dan B. Tetapi dalam penulisan keanggotaan himpunan, disyaratkan bahwa setiap anggota hanya dapat muncul satu kali.
2. Diagram Venn

   Dalam menggambarkan disgram Venn, himpunan A dan Bharus digambarkan berpotongan, sebab ada anggota-anggota yang sama, yaitu 4 dan 5. Anggota 4 dan 5 ini berada di dalam perpotongan diagram tersebut.



Gambar 1.5

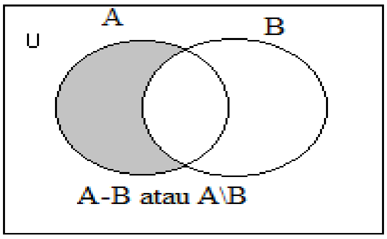
c. Komplemen Relatif

Komplomen relatif himpunan A dengan B ialah suatu himpunan yang memuat semua anggota A yang tidak termuat di dalam himpunan. Hal ini bermaksud bahwa jika x adalah anggota selisih himpunan A dan B, maka x anggota A saja, jadi tidak ikut anggota A yang sekaligus anggota B. Juga anggota B sajapun tidak termasuk sebagai x. Sebagai lambang untuk menyatakan pernyataan ini digunakan simbol A – B atau A\B. Menurut lambang pencirian bisa dinyatakan sebagai berikut:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x$$

Umumnya A-B ≠ B – A

Dengan diagram Venn dapat dinyatakan sebagai berikut



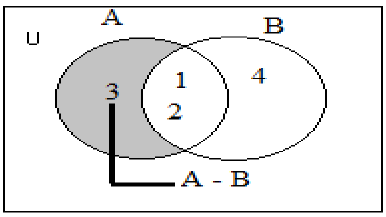
Gambar 1.6

Contoh

Diketahui A= {1,2,3}, B = {1,2,4}. Tentukan A – B dan perlihatkan dengan diagram Venn.

Penyelesaian

A – B = {1,2,3} – {1,2,4} = {3}, sebab hanya bilangan 3 saja yang termuat di A tetapi tidak termuat di B. Dengan demikian, bentuk diagram Venn bisa di nyatakan sebagai berikut:



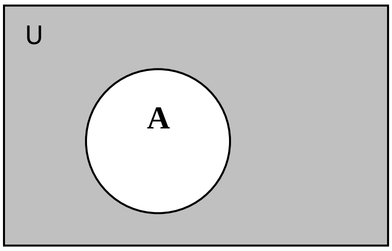
Gambar 1.7

d. Komplemen Himpunan

Yang dimaksud dengan komponen (*absolute complement*) himpunan A adalah suatu himpunan yang beranggotakan bukan anggota A. Komplemen himpunan A ditulis dengan lambang A'. Cari penulisan lain yang biasa digunakan ialah A^C. Jika dituliskan dengan cara perincian maka bisa dinyatakan sebagai berikut:

$$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

Dengan diagram venn dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 1.8

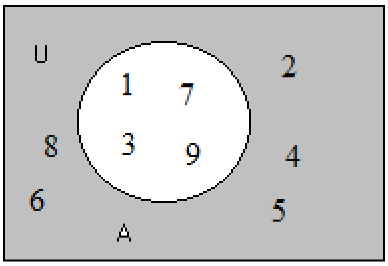
Contoh:

Misalkan U = {1,2,3,…,9}

A = {1,3,7,9} carilah A' dan sajikan dalam diagram Venn!

Penyelesaian

A' = {2,4,5,6,8}



Gambar 1.9

1.1.6 Perbedaan Simetris pada Himpunan

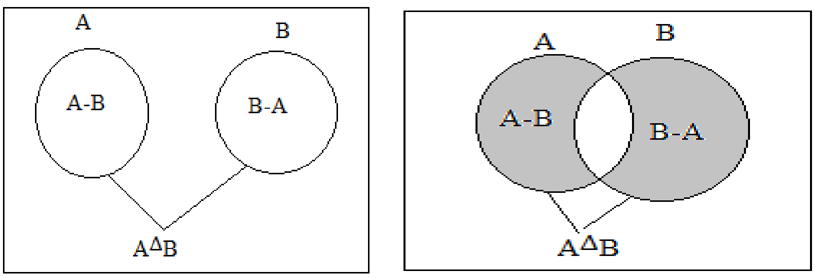
Yang dimaksud dengan perbedaan simetris antar himpunan A dan B ialah suatu himpunan yang beranggotakan semua anggota A yang bukan anggota B serta semua anggota B yang bukan anggota A. Kalau x anggota himpunan yang merupakan perbedaan simetris antar himpunan A dan B, maka x adalah anggota B dan juga x adalah anggota B yang bukan anggota A. Oleh karena itu anggota $A \cap B$ tidak menjadi x. Lambang perbedaan simetris himpunan A dan B ditulis A∆B. Dengan cara pencirian perbedaan simetris ini bisa dinyatakan dalam bentuk

$$A \Delta B = \{x|x \in A \text{ tetapi } x \notin B \text{ atau } x \in (B - A)\}$$

Dengan cara singkat dapat ditulis sebagai berikut:

$$A \Delta B = \{x|x \in (A - B) \text{ atau } x \in (B - A)\}$$

Dengan diagram Venn dapat diperlihatkan sebagai berikut:



Gambar 1.10

Bila yang dimaksud dengan perbedaan simetris ini kita kaitkan dengan operasi gabungan terhadap A dan B, maka dapat ditulis bahwa

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Bila pengertian A∆B dikaitkan dengan operasi komplemen himpunan, maka dapat kita tulis bahwa:

$A \Delta B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$ →dengan absolute complement dan juga

$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ →dengan relatif complement ingat bahwa A-B sama artinya dengan A\B.

Contoh

Untuk A={1,3,4,6,9};B={2,3,4,5,9}. Dengan himpunan semesta pembicaraan S={x|x=bilangan asli yang kurang dari 10}, maka

a. Tentukan A∆B!

b. Perlihatkan dengan diagram Venn!

Penyelesaian

a. S={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, A={1,3,4,6,9}, maka A'={2,5,7,8}

Selanjutnya B={2,3,4,5,9}, maka B'={1,6,7,8} oleh karena itu

$$A \cap B = \{1,3,4,6,9\} \cap \{1,6,7,8\} = \{1,6\}$$

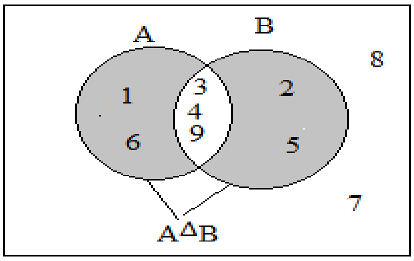
$$A \cap B = \{2,5,7,8\} \cap \{2,3,4,5,9\} = \{2,5\}$$

Sehingga

$$A \Delta B = (A \cap B') \cup (A' \cap B = \{1,6\} \cup \{2,5\} = \{1.6.2.5\}$$

Coba tentukan $A \Delta B$ dari hubungan $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, hasilnya harus sama dengan {1,6,2,5}

b. Selanjutnya diagram vennya adalah sebagai berikut:



Gambar 1.11

1.1.7 **Perkalian Cartesius**

Menggandakan suatu himpunan terhadap himpunan lain merupakan bentuk Perkalian yang membentuk satu himpunan baru. Himpunan baru tersebut adalah suatu himpunan dengan anggota terdiri dari anggota-anggota himpunan yang dipergandakan, dengan susunan dalam bentuk pasangan secara terurut.

Perkalian antar himpiunan sering juga disebut Perkalian silang, karena memakai operasi Perkalian dengan silang (cross). Tetapi pergandan ini lebih dikenal dengan nama Perkalian Cartesius, yaitu sebagai penghormatan atas jasa-jasa ilmiah dari Renatus Cartesius (1596-1650)

Dalam bagian ini kita perlu membendakan {a,b} = {b,a} sebagai himpunan, dengan (a,b) ≠ {b,a} sebagai pasangan berurut (order-pair). Dalam pasangan berurut, maka masalah urutan, sangat menentukan maknanya, tetapi kalau pada pada urutan tersebut keangotaan sebagai anggota himpunan, maka masalah urutan tidak mempengaruhi arti himpunan tersebut. Sebagai gambaran dapat diperhatikan bahwa:

1. Titik (1,2) ≠ titik (2,1) sebab

   Titik (1,2) mempunyai absis 1 dan ordinal 2

   Titik (2,1) mempunyai absis 2 dan ordinat 1

Sehingga titik (1,2) dan titik (2,1) mempunyai letak yang berbeda di bidang.

Hubungan antara A x B dengan B x A dengan B x A adalah

$$A \times B \sim B \times A$$

Tetapi umumnya

$$A \times B \neq B \times A$$

Dari uraian di atas, maka dapatlah kita buat batasan dari Perkalian antar himpunan sebagai berikut:

Perkalian Cartesius antar himpunan A dan B adalah suatu bentuk Perkalian yang membentuk suatu himpunan yang memuat semua pasangan berurut (a,b) dimana a$\in$A dan b $\in B$. Dengan cara pencirian bisa ditulis sebagai berikut:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

1.1.8 Beberapa Hukum pada Operasi Antar Himpunan

Himpunan di bawah operasi gabungan, irisan dan komplemen memenuhi berbagai hukum aljabar. Tabel berikut menampilkan hukum-hukum yang berlaku pada operasi himpunan tersebut.

Hukum Asosiatif	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Hukum Komutatif	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Hukum Distributif	$A \cup (B \cap C) = (A \cup$	$A \cap (B \cup C) = (A$

	B) $\cap$ (A $\cup$ C)	$\cap$ B) $\cup$ (A $\cap$ C)
Hukum Involusi	(A') ' = A	
Hukum Idempoten	A $\cup$ A = A	A $\cap$ A = A
Hukum Identitas	A $\cup \varnothing$ = A	A $\cap$ S = A
Hukum Komplemen	A $\cup$ A' = S	A $\cap$ A' = $\varnothing$
Hukum de Morgan	(A $\cup$ B) ' = A' $\cap$ B'	(A $\cap$ B)'= A' $\cup$B'

Contoh:

Perlihatkan bahwa A\(B$\cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$

Penyelesaian

Untuk suatu elemen x$\in A(B \cup C)$ maka dapat ditulis

$$
\begin{aligned}
x \in A\backslash(B\cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ tetapi } x \notin (B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \notin B \text{ dan x} \notin \text{c}\\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \notin B \text{ dan } x \in A \text{ dan } x \notin C\\
&\Leftrightarrow x \in A\backslash B \text{ dan } x \in A\backslash C\\
&\Leftrightarrow x \in (A\backslash B)\cap A\backslash C
\end{aligned}
$$

1.1.10. Notasi Umum

Untuk suatu barisan $\{A_n\}_{n=1}$ dari himpunan $A_1, A_2, \ldots$. Notasi-notasi yang biasa digunakan berkaitan dengan hal ini ialah

a. Irisan

$$\bigcap_{n=1}^{x} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \rightarrow \text{ tidak terbatas}$$

$$\bigcap_{I=1}^{x} A_I = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \rightarrow \text{ terbatas}$$

b. Gabungan

$$\bigcup_{n=1}^{x} A_n = A_1 \cup A_2 \cup ... \rightarrow \text{ tidak terbatas}$$

$$\bigcup_{I=1}^{x} A_I = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \rightarrow \text{ terbatas}$$

1.2 Ring

Definisi

Ring sebagai satu struktur aljabar adalah suatu himpunan $\Re \neq \varnothing$ dengan dua hukum komposisi yang disajikan dengan notasi penjumlahan dan notasi perkalian yang memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:

a. Untuk semua elamen a,b,c yang termuat dalam $\Re$, sehingga a + b =c atau ditulis

$$(\forall a, b \in \Re).(\exists c \in \Re) a + b = c$$

(tertutup terhadap operasi penjumlahan)

b. Untuk semua elamen a,b,c yang termuat dalam $\Re$, berlaku (a + b) + c = a + (b +c). Aksioma ini ditulis sebagai berikut:

$$(\forall a, b, c \in \Re).(a + b) + c = a + (b + c)$$

Assosiatif terhadap operasi penjumlahan

c. Untuk setiap elemen $a \in \Re$ terdapat suatu elemen yang disebut elemen 0, sehingga a = 0 = 0 +a, ditulis

$$(\exists a \in \Re)(\forall a \in \mathrm{Re}).a + 0 = 0 + a$$

(0 sering disebut elemen netral)

d. Untuk setiap elemen $a \in \Re$, terdapat satu elemen $-a \in \Re$, sehingga a+(-a)=(-a)+a=0. Elemen (-a) disebut negatif dari a. Elemen ini juga sering disebut elemen invers. Aksioma ini biasa ditulis sebagai berikut:

$$(\forall a \in \Re)(\exists (-a) \in \Re).a + (-a) = (-a) + a = 0$$

e. Untuk semua elamen $a, b \in \Re$ berlaku a+b = b+a

$$(\forall a, b \in \Re).a + b = b + a$$

Komutatif terhadap operasi penjumlahan

f. Untuk semuan elemen $a,b,c \in \Re$ berlaku operasi perkalian $ab = c \in \Re$, ditulis

$$(\forall a,b,c \in \Re).ab = c$$

Tertutup pada operasi perkalian

g. Untuk semua elemen $a,b,c \in \Re$ berlaku operasi secara assosiatif, sehingga (ab)c=a(bc), ditulis

$$(\forall a,b,c \in \Re).(ab)c = a(bc)$$

Assostif perkalian.

Apabila operasi perkalian pada ring $\Re$ adalah komutatif, maka ring $\Re$ disebut ring komutatif. Istilah "penjumlahan" dan "perkalian" pada definisi ini, pada hakikatnya hanya sebatas simbol saja. Pada dasarnya operasi tersebut seperti misalnya * atau Δ, dan sebagainya.

Definisi

Power set (himpunan kuasa) dari satu himpunan A dengan operasi biner didefinisikan sebagai berikut:

Untuk semua $x, y \in \wp(A)$, maka

$$x + y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$$
$$xy = x \cap y$$

Contoh

Untuk himpunan A = {0,1} mempunyai $\wp(A) = \{\varnothing$, {0}, {1}, {0,1}}. Dengan operasi biner,

$$\chi + \gamma = (\chi \cup \gamma) \setminus (\chi \cap \gamma)$$

$$\chi\gamma = \chi \cap \gamma$$

Untuk setiap $(\chi\gamma) \in \wp(A)$ adalah suatu ring komutatif. Unsur identitas $\wp(A)$ adalah $\varnothing$. Unsur {0} dan {1} adalah unsur pembagi nol, sebab {0} $\cap$ {1} = $\varnothing$

Contoh

Silahkan periksa bahwa

a. Himpunan bilangan riel $\Re$

b. Himpunan bilangan rasional Q

c. Himpunan bilangan bulat Z

d. Himpunan matriks berordo (2 x 2) elemen riel

Masing-masing adalah juga suatu ring

1.3 Sima Ring (σ -Ring)

Definisi

Suatu koleksi *S* dari subset-subset himpunan *X* disebut σ -ring bila memenuhi

a. *S* adalah ring dari himpunan-himpunan

b. Untuk setiap barisan $\{A_n\}_1^\infty$ anggota dari *S*, diperoleh $\bigcup_1^n A_n \in S$

Contoh

Diberikan A dan B adalah himpunan-himpunan bagian dari himpunan X, serta *S* = $\{\varnothing, A, B, A\cap B, A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A, A\Delta B\}$ maka *S* adalah suatu σ -ring.

Untuk menunjukkan *S* adalah σ -ring maka akan diperiksa sebagai berikut:

a. *S* adalah suatu ring dapat diperiksa apakah memenuhi aksioma-aksioma ring.

a1. Tertutup terhadap operasi $\cup$

$$(A\cup B) = (A\cup B) \in \Re$$

a2. Assosiatif terhadap operasi $\cup$

$$A\cup(B\cup A) = (A\cup B)\cup A$$

$$= (A\cup B) \in \Re$$

a3. Elemen netral

$A\cup\varnothing = \varnothing\cup A$

= $A \in \Re \rightarrow \varnothing$ adalah elemen netral

A4. Elemen Invers

$$A \setminus A = \varnothing$$

$$B \setminus B = \varnothing$$

$$(A \cap B) \setminus (A \cap B) = \varnothing$$

$$(A \cup B) \setminus (A \cup B) = \varnothing$$

$$(A \Delta B) \setminus (A \Delta B) = \varnothing$$

$$(A \setminus B) \setminus (A \setminus B) = \varnothing$$

Jadi setiap elemen mempunyai invers. Demikian seterusnya untuk aksioma ring, sehingga himpunan *S* memenuhi aksioma-aksioma ring. Dengan kata lain, *S* adalah suatu ring.

b. Jika $\{A_n\}_1^\infty$ adalah suatu barisan anggota-anggota *S*, sementara *S* adalah suatu himpunan dengan anggota berhingga, maka $\bigcup_1^\infty A_n$ harus direduksi ke suatu gabungan yang berhingga. Dengan suatu induksi sederhana dapat dibuktikan bahwa suatu ring adalah tertutup untuk gabungan-gabungan yang berhingga.

1.4 Sigma Aljabar (σ -aljabar)

Definisi

Untuk *X* suatu himpunan dan didefinisikan himpunan kuasa $\wp(X)$ sebagai anggota dari semua subset *X* maka $\wp(X)$ adalah suatu σ -ring

Jika $\Re$ adalah suatu ring dan himpunan-himpunan dari *X* itu sendiri adalah anggota dari $\Re$, maka $\Re$ disebut suatu aljabar dari himpunan-himpunan. Suatu σ -ring dari subset-subset dari *X* yang memuat *X* itu juga, atau dengan kata lain $\wp(X)$ yang memenuhi σ -ring, maka σ -ring itu disebut sigma aljabar (σ -aljabar).

Contoh

Ambil *X* adalah suatu himpunan; maka $\wp(X)$ adalah suatu σ -aljabar, sering disingkat dengan menggunakan notasi alphabet Yunani $\sum$.

Contoh

Perlihatkan bahwa setiap σ-aljabar, $\sum$ adalah himpunan tertutup di bawah *countable intersection,* misalnya kalau $\{A_n\}_1^\infty$ adalah barisan dalam, sehingga juga ditulis $\bigcup_1^\infty A_n \in \sum$

Latihan

1. Buktikan bahwa setiap ring terbatas adalah σ-ring
2. $\Re$ adalah suatu himpunan bilangan tak kosong dari himpunan-himpunan bagian *X* sedemikian sehingga
   a. Jika $\{A_n\}_1^\infty$ adalah suatu balisan dalam $\Re$ maka $\bigcup_1^n A_n \in \Re$
   b. $A \in \Re, B \in \Re \Rightarrow A \backslash B \in \Re$, maka $\Re$ adalah sebuah σ-ring

1.5 Integral Riemann

Definisi

Dengan suatu partisi P dari integral [a,b] dimaksud sebagai himpunan yang terbatas dari titik-titik $x_0, x_1, ..., x_n$ yang mana

$$a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$$

Diketahui fungsi *f* yang terbatas pada [a,b]. Untuk setiap partisi dari [a,b] ditentukan

$$M_i = \sup f(x) \text{ untuk } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$m_i = \inf\ f(x) \text{ untuk } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1};\ (i = 1,2,...,n)$$

dan jumlah

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Selanjutnya didefinisikan

$$\int_{a}^{-b} fdx = \inf U(P, f)$$

dan

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = \sup L(P, f)$$

yang mana inf dan sup yang diambil meliputi semua partisi dari [*a*,b] dan berturut-turut dinamakan Integral Riemann Atas dan Integral riemann bawah dari *f* yang meliputi [*a,b*].

Jika integral Riemann atas = integral Riemann bawah dikatakan bahwa *f* dapat diintegralkan menurut Riemann pada [*a*,b], dan ditulis $f \in R$ (dengan *R* yang dimaksud adalah *integrable function*) dan nilai yang sama itu dinyatakan dengan

$$\int_{a}^{b} fdx \text{ atau } \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Ini adalah integral dari *f* pad [*a*,b] . Karena *f* terbatas, maka terdapat bilangan *m* dan *n* sehingga $m \leq f(x) \leq M$ untuk $a \leq x \leq b$. Jadi untuk setiap partisi P berlaku

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a),$$

Sehingga bilangan-bilangan *L(P,f)* dan *U(P,f)* membentuk suatu *bounded set*. Ini memperlihatkan bahwa untuk setiap fungsi terbata, integral atas dan integral bawah tertentu.

Teorema 1

Andaikan *f* ∈*R* pada [*a*,b] dan $F(x) = \int_{a}^{x} dt$ untuk $a \leq x \leq b$, maka *F* kontinu pada [*a*,b] dan selanjutnya jika *f* kontinu pada suatu titik $x_0 \in [a,b]$ maka *F* terdiferensiasi di x_0 dan $F'(x_0) = f(x_0)$

Teorema 2

Andaikan diketahui bahwa *F* terdiferensiasi pada [*a*,b] dan $F'(x) = f(x)$, jika $f \in R$ pada [*a*,b] maka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1.6 Integral Euler

Dari bentuk-bentuk integral definite, dua bentuk khusus integral dikenal dengan nama

a. Integral Euler Pertama

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx;\ m,n \text{ positif}$$

Integral di atas dikenal dengan sebutan fungsi beta

b. Integral Euler Kedua

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-1}x^{n-1}dx;\ n \text{ positif}$$

Integral ini dikenal dengan sebutan fungsi gamma.

1.6.1 Fungsi Gamma

Dari $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-1}x^{n-1}dx;$ maka

a. Untuk n = 1

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}x^0dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}dx$$

$$=-\int_0^\infty e^{-x}d(-x)$$

$$=[-e]_0^\infty$$

b. Untuk n = n + 1

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^{(n+1)-1}dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}x^ndx$$

$$=-\int_0^\infty x^nde^{-x}$$

$$=[-x^ne^x]_0^\infty+n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

$$= [-x^n e^{-x}]_0^\infty + \Gamma(n)$$

Untuk

$$[-x^n e^{-x}]_0^\infty = \left[-\frac{x^n}{e^x}\right]_0^\infty$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{e^x} = 0, \text{ atau}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} x^n \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^n . \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^n . \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^n .0 = 0$$

Sehingga

$$\Gamma(n+1) = 0 + n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

Dari $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$ maka

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n-1) = (n-1)\Gamma(n-2)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2)$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1)$$

Sedangkan

$$\Gamma(1) = 1, \text{ maka}$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1.1. = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1. = 2$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2. = 6$$

Selanjutnya

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$= (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$
$$= (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3)$$
$$= (n-1)(n-2)(n-3)...1\Gamma(1)$$
$$= (n-1)(n-2)(n-3)...2.1$$
$$= n!$$

Oleh karena itu

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Dengan formula ini maka

$$\Gamma(1) = (1-1)! = 1$$
$$\Gamma(2) = (2-1)! = 1$$
$$\Gamma(3) = (3-1)! = 2$$
$$\Gamma(4) = (4-1)! = 6$$
$$\Gamma(5) = (5-1)! = 24$$

Dan seterusnya

c. Untuk n =1/2

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

Subtitusi

$$x = \varnothing^2 \to dx = 2\varnothing d(\varnothing);\ x = 0 \to \varnothing = 0,\ x = \infty \to \varnothing = \infty$$

Sehingga

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-\varnothing^2} \varnothing^0 d\varnothing = 2\int_0^\infty e^{-\varnothing^2} \varnothing^{2n-1} d\varnothing$$

Subtitusikan n = ½

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-\varnothing^2} \varnothing^0 d\varnothing = 2\int_0^\infty e^{-\varnothing^2}$$

Subtitusi $\varnothing = \lambda\varphi \to d\varnothing = \lambda d\varphi$

Dengan mengandaikan bahwa $I = \int_0^\infty e^{-\varnothing^2} d\varnothing$, maka

$$I = I = \int_0^\infty e^{-\lambda^2\varphi^2} d\varphi$$

Kalikan kedua ruas dengan $e^{-\lambda^2}$, maka diperoleh

$$Ie^{-\lambda^2} = \int_0^\infty e^{-\lambda^2} \varphi^2 \lambda d\varphi$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda^2} . e^{-\lambda^2 \varphi^2} \lambda d\varphi$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda^2 (1+\varphi^2)} \lambda d\varphi$$

Dengan mengintergralkan kedua ruas diperoleh

$$I \int_0^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda^2 (1+\varphi\ )} \lambda d\lambda d\varphi$$

Atau $$I \int_0^\infty e^{-\lambda^2} d\varnothing = \int_0^\infty \left[-1/2 \frac{e^{-\lambda^2 (1+\varphi^2)}}{1+\varphi^2} \right]_0^\infty d\varphi$$

$$I^2 = 1/2 \int_0^\infty \frac{d\varphi}{1+\varphi^2}$$

$$= 1/2 [\arctan \varphi]_0^\infty$$

$$= 1/2 \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} \rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Oleh karena itu

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^\infty e^{-\varphi^2} d\phi$$

$$= 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

d. Untuk n = -1/2

Dari $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, maka dapat ditulis $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$. Dengan mensaubtitusikan n= -1/2, persamaan ini bisa disajikan sebagai berikut.

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{-1/2}$$

$$= \frac{\Gamma(+1/2)}{-1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{-1/2}$$

$$= -2\sqrt{\pi}$$

Berdasarkan hal ini maka dapat ditentuka bahwa

$$\Gamma(-3/2) = \frac{-1/2}{-3/2}$$

$$= -\frac{2}{3}(-2\sqrt{\pi})$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Demikian seterusnya untuk yang lain.

1.7 Dasar-Dasar Kombinatorik

1.7.1 Faktorial

Untuk n suatu bilang positif, maka perkalian bilangan tersebut dari 1 hingga n secara berurut adalah wajar, disebut n faktorial dan dinotasikan dengan $n!$. Oleh karena itu

$$n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1$$

Dengan komutatif perkalian dapat ditulis sebagai berikut:

$$n! = 1.2.3...(n-2)(n-1)n$$

Berdasarkan hal ini maka dapat diperlihatkan bahwa 1!=1 dan 0!=1

1.7.2 Permutasi

Sekumpulan unsur sebanyak n yang berbeda, dapat dibuat susunan dengan urutan tata letak yang berbeda dimana setiap susunannya memuat n unsur tersebut disebut dengan permutasi. Sebagai contoh huruf “SDR”. Dalam hal ini jelas ada 3 unsur yang berbeda, yaitu S, D dan R. Dengan menyusun unsur-unsur yang memuat semua unaur ini maka akan terjadi 6 susunan, yaitu SDR, DSR,SRD,DRS,RDS,dan RSD. Seterusnya untuk mencari jumlah susunan yang digunakan beberapa pendekatan sebagai berikut

a. Diagram Pohon

b. Dengan tabulasi silang

□	S	D	R
S		SD	SR
D	DS		DR
R	RS	RD	

Kemudian

□	SD	SR	DS	DR	RS	RD
S				SDR		SRD
D		DSR			DRS	
R	RSD		RDS			

c. Dengan perkalian kartesius

Sama saja dengan bagian a) dan b)

1.7.3 Permutasi *n* Unsur dari *n* Unsur

Permutasi ini ditulis $P_{(n,n)}$, didefinisikan sebagai $P_{(n,n)} = n!$

1.7.4 Permutasi *r* Unsur dari *n* Unsur

Permutasi ini disimbolkan dengan $P_{(n,r)}$, dirumuskan dengan $P_{(n,r)} = n(n-1(n-2)...(n-r+1).$ Rumusan ini dapat dijabarkan dengan

$$P_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh

Permutasi 2 unsur dari 3 unsur adalah

$$P_{(3,2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

1.7.5 Permutasi dari *n* Unsur dengan *k* Unsur yang sama

Kalau di dalam *n* unsur terdapat *k* unsur yang sama maka

$$P_{(n,n)} = \frac{n!}{k!}$$

Kalau dalam *n* unsur terdapat *k*,*l*, dan *m* unsur yang sama, maka

$$P_{(n,n)} = \frac{n!}{k!l!m!}$$

Contoh

$P_{(3,3)}$ dari kata UINSU. Dalam contoh ini U ada 2, I,N dan S ada 1, Oleh karena itu permutasi ini adalah

$$P_{(3,3)} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Dalam hal ini susunan tersebut ialah USU,UUS,dan SUU

1.7.6 Kombinasi

Pada susunan kombinasi, susunan AB dipandang sama dengan BA. Sehingga dengan *n* unsur, susunan *r* unsur dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = 3$$

Yang menyatakan jumlah susunan kombinasi (*r* – *r*) dari *n* unsur.

Contoh

$$C_3^3 = \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1$$

1.7.7 Binomial Newton

Koefisien Binomial ($x + y$)^n untuk n yang diketahui dapat dilihat pada segitiga pascal. Namun jika n idak ditentukan maka alas segitiga pascal tidak jelas.

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ \text{dan seterusnya} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (x+y)^1 &= x + y \\ (x+y)^2 &= x^2 + 2\,x\,y + y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3\,x^2y + 3\,x\,y^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6\,x^2y^2 + 4\,x\,y^3 + y^4 \\ (x+y)^5 &= x^5 + 5\,x^4y + 10\,x^3y^2 + 10\,x^2y^3 + 5\,x\,y^4 + y^5 \\ (x+y)^n &= \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} (x+y)^1 \rightarrow n=1 \\ (x+y)^2 \rightarrow n=2 \\ (x+y)^3 \rightarrow n=3 \\ (x+y)^4 \rightarrow n=4 \\ (x+y)^5 \rightarrow n=5 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{c} {}_1C_0 \quad {}_1C_1 \\ {}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2 \\ {}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3 \\ {}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4 \\ {}_5C_0 \quad {}_5C_1 \quad {}_5C_2 \quad {}_5C_3 \quad {}_5C_4 \quad {}_5C_5 \end{array}$$

Gambar 1.18

Sehingga

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

Formula di atas dikenal sebagai Binomial Newton.

1.7.8 Multinomial

Untuk satu integer $n \geq 2$ dan $r \geq 3$ maka

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2}, \ldots x_r^{n_r}$$

Contoh

a. Dalam pernyataan $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{10}$. Tentukan koefisien dari $x_1^4 . x_2^3 . x_3^2 . x_4$. Koefisien tersebut ialah

$$\binom{10}{4,3,2,1} = \frac{10!}{4!3!2!1!} = 12600$$

b. Dengan contoh yang sama, tentukan koefisien dari $x_1^{\ 2}.x_2^{\ 3}.x_3^{\ 4}.x_4^{\ 5}$. Dari persoalan ini diketahui bahwa 2+3+ 4+5 = 14, sedangkan 14≠10. Oleh karena itu koefisien $x_1^{\ 2}.x_2^{\ 3}.x_3^{\ 4}.x_4^{\ 5}$ adalah 0. Dengan perkataan lain suku berbentuk $x_1^{\ 2}.x_2^{\ 3}.x_3^{\ 4}.x_4^{\ 5}$ ini tidak terdapat dalam penyelesaian $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{10}$ tersebut.

1.8 Bilangan Euler

1.8.1 Ekspansi Deret MacLaurin

Untuk suatu fungsi *f(*θ), menurut MacLaurin, bisa diekspansikan ke dalam bentuk deret disekitar θ=0 dengan ekspansi sebagai berikut:

$$f(\theta) = 1 + \frac{\theta}{1!} f'(0) + \frac{\theta^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{\theta^n}{n!} f_{(0)}^{(n)} + \ldots$$

Sehingga untuk $f(\theta) = e^{\theta}$ dapat ditulis dalam bentuk

$$e^{\theta} = 1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} + \ldots + \frac{\theta^n}{n!} \text{ atau}$$

$$e^{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!}$$

1.8.2 Bilangan Imajiner

Suatu bilangan i=$\sqrt{-1}$ disebut sebagai bilangan imajiner. Simbol *i* kadang-kadang ditukar dengan *j*, terutama penulisan dalam buku-buku elektronika. Oleh karena itu $i = j = \sqrt{-1}$. Dengan ketentuan ini maka dapat dilihat bahwa

$$i^2 = i.i = \sqrt{(-1)}.\sqrt{(-1)} = -1$$

$$i^3 = i^2.i = i.(-1) = -1$$

dan seterusnya

1.8.3 Fungsi Trigonometri

Untuk fungsi-fungsi trigonometri seperti $f(\theta) = \sin\theta$ dan $f(\theta) = \cos\theta$ bila diekspansikan ke bentuk deret Maclaurin diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ...$$

1.8.4 Rumus Euler untuk Bilangan Kompleks

Suatu bilangan kompleks bentuk aljabar

$$x = x + iy$$

Dapat ditulis ke dalam bentuk eksponensial yang disebut bilangan kompleks berbentuk eksponensial

$$z = re^{i\theta}$$

Dengan hubungan

$$\text{Modulus } z = |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Argument } z = \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Untuk r = 1 maka $z = e^{i\theta}$, e bilangan Napier, sedangkan $e^{i\theta}$ disebut bilangan Euler.

Dari ekspansi deret Maclaurin untuk e^{θ} disubtitusikan $\theta = i\theta,$ maka

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ...\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} - ...\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta \text{ dan juga}$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Dari $e^{i\theta}$ dan $e^{-i\theta}$ ini diperoleh:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$$

Persamaan di atas dikenal sebagai rumus Euler dalam bilangan kompleks

Bab2

Ruang Ukur Probabilitas

2.1 Sejarah dan Perkembangan Teori Probabilitas

Setiap suku bangsa yang berkomunikasi dengan bahasa tertentu. Barangkali memiliki istilah Probabilitas (“probability” dalam bahasa Inggris). Terlebih istilah yang mempunyai pengertian yang sama atau mirip dengan maksud probabilitas tertentu. Istilah-istilah tersebut di antaranya ialah **chance, likely, possible, perhaps, uncertainty,** dan lain-lain, tentu sudah sering terucap sezak zaman purbakala.

“probabilitas”, sebagai satu istilah, kapan pertama kali diucapkan, oleh siapa, untuk apa, dimana, adalah pernyataan-pernyataan yang belum terjawab atas dasar bukti-bukti yang otentik, kalau didasari pada bukti tertulis, maka hal ini menjadi lebih sulit, mengingat sampai kapan ini, ternyata tidak setiap suku bangsa memiliki aksara tulis tersendiri.

Untuk suku-suku bangsa Indonesia saja, yang memiliki aksara tulis tersendiri, antara lain adalah suku Batak, suku Jawa dan lain-lain. Sedangkan suku *A*ceh, Minang dan lain-lain barangkali belum memiliki aksara tulis tersendiri, walaupun sudah memiliki bahasa lisan tersendiri.

Pengambilan keputusan sejarah seperti hal ini seyogyanya harus hati-hati. Hal seperti ini antara lain tergambar dalam pengambilan keputusan tentang siapa sebenarnya yang berhak disebut sebagai penemu metode kuadrat terkecil (*least squares methods*). Tampaknya metode ini ditemukan secara terpisah oleh **Carl Frederich Gauss** (1777-1855) dan **Adrien Marie Legendre** (1752-1833). Namun Gauss sudah mulai menggunakannya sebelum tahun 1803 tersebut. Sedangkan publikasi pertama tercatat adalah atas nama Legendre pada tahun 1805.

Ketika Gauss menulis pada tahun 1800, bahwa ia telah menggunakan metode itu lebih dulu dari pada Legendre, katanya. Kontroversi mengenai hal penemu metode kuadrat terkecil ini mulai mencuat. Kesemuaan ini dibahas secara menarik dan berhati-hati oleh **R.L.Plackett** dalam tulisannya **Studies ini history of probability and statistics.** Sedangkan istilah “regresi”, sepakat menyatakan bahwa **Sir Francis Galton** (1822-1911), seorang Antropolog dan ahli metreologi memperkenalkan istilah “regression” yang muncul pada pidatonya (18550. Sebelum itu (tidak dipublikasikan) ia menggunakan istilah “reversion”.

Terlepas dari istilah probabilitas, pertama kali diucapkan oleh siapa dan kapan, namun probabilitas sebagai suatu pengetahuhan, sudah dikenal sejak berabad-abad lamanya. Sekitar abad ke 17, surat-menyurat diantara **Blaire Pascal** dengan **Fermat**, dianggap sebagai pengetahuan dasar bagi ilmu pengetahuan tentang probabilitas. Isi pokok surat menyurat kedua ilmuan tersebut adalah seputar hal-hal yang dipertanyakan solusinya oleh bangsawan Prancis (**Chavelier de M’ere**) kepada Pascal tentang masalah-masalah bisnisnya. Pascal membuat pemikiran secara teoritis tentang observasi dari pengalaman lapangan Chavelier de M’ere.

Isi surat menyurat Pascal-Fermat terbaca oleh seorang ilmuan Belanda, yaitu **Huygens** (1625-1695). Huygen tertarik dengan materi suratnya dan menulis buku tentang probabilitas yang berjudul **De Ratio Ciniis in Ludo aleae.**

Dalam buku ini, Huygens memuat penjelasan tentang cara-cara menyelesaikan persoalan yang menyangkut probabilitas. Termasuk tentang pengertian **Mathematical Expectation** (harapan matematika). Materi tentang harapan matematika ini merupakan sandaran utama dalam distribusi probabilitas modern.

Pada awal abad ke 18, **Jacob Bernoulli** (1654-1705), bukunya yang berjudul **Ars Conjectendi** diterbitkan setelah sekitar 8 tahun ia meninggal, yaitu sekitar tahun 1713. Isi buku ini merupakan kristalisasi hasil renungan Bernoulli tentang probabilitas, selama 20 tahun masa hayatnya. Teoremanya yang diberi nama teorema Bernoulli mempunyai andil yang cukup penting selama diskusi probabilitas, selama 20 tahun masa hayatnya. Teoremanya yang diberi nama teorema Bernoulli mempunyai andil yang cukup penting selama diskusi probailitas. Kalangan ilmuwan barat menyambut hangat terbitnya buku beliau tersebut.

Buku yang terbit tahun 1718 **The Doctrine of Chances** karya **Abraham de Moivre**(1667-1754) mengemukakan banyaknya gambaran dalam menyelesaikan persoalan-persoalan dalam probabilitas.

Pada permulaan abad 19, teori probabilitas mencapai puncak kecermelangannya dan hampir mencapai titik jenuhnya pada masa **Laplace**(1749-1827) dengan karyanya antara lain ialah pada tahun 1812 **Theorie Analytique des Probabilitas**. Dalam karyanya ini, banyak philosopis, metode analisis, yang memberikan sumbangan ke dunia matematika. Karya-karyanya banyak mempengaruhi karya-karya tentang probabilitas dari ilmuanilmua setelah tahun 1827. Karya-karya tentang probabilitas setelah era Laplace hanya bersifat revisi, eksplanasi, deskripsi, dan pengembangan pokok-pokok masalah yang telah dicetuskan oleh Laplace.

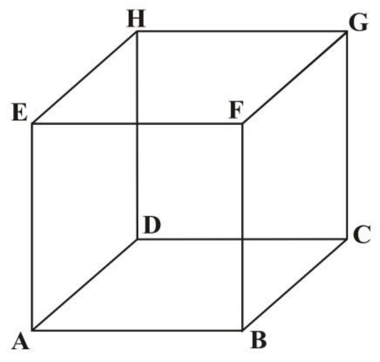
Setelah pertengahan abad 19, perkembangan probabilitas bergeser ke ilmuan-ilmuan Uni Soviet (Rusia), antara lain **Tchebycheff** (1812-1894) yang kemudian diikuti oleh dua orang mahasiswanya, yaitu **A.Markov** (1865-1922) dan **Liapounoff** (1858-1918).

Pada abad 20, sebagian besar sumbangan pemikiran dan karya pada bidang probabilitas tercatat nama-nama seperti **S. Bernistein, A. Khintchine** dan **A.N. Kolmogorov.** Karya penulis akhir ini yang paling terkenal ialah tentang *probability measure space* yang berjudul **Axiomatic probability**.

Pada era abad 21, tren perkembangan probabilitas dominan ke arah perluasan dan peningkatan yang bersifat aplikasi. Penggunaan rantai Markov dalam perencanaan, seperti perencanaan universitas di Amerika, pengambilan keputusan seperti pada projek angkasa luar dan lain-lain.

2.2 Definisi Probabilitas

Suatu kubus yang homogen, setiap sisinya diberi label,



Gambar 2.1

Sisi ABFE diberi label a

Sisi ABCD diberi label b

Sisi BCGF diberi label c

Sisi EFGH diberi label d

Sisi CDHG diberi label e

Sisi ADHE diberi label d

Andaikan dilakuakn percobaan melambungkan satu kubus ABCDEFGH, maka hasil eksperimen ini akan mendapatkan ada posisi sisi yang berbeda sebelah bawah, sebelah atas dan yang lain tegak. Dalam pelaksanaan percobaan ini, dpat ditimbulkan pertanyaan-pertanyaan antara lain.

- Berapa probabilitas bahwa sisi sebelah bawah berlabel a?
- Berapa probabilitas bahwa sisi sebelah atas berlabel b?

Jawaban pertanyaan ini barangkali sulit kalau yang dimaksudkan adalah jawaban yang pasti secara tertentu. Namun kalau dilaksanakan percobaannya, misalnya pelambungan kubus berulang-ulang dan dicatat hasil pelambungan ini; berapa kali label a, label c sebelah bawah posisinya, dan seterusnya. Jika dilakukan pelambungan sebanyak 60 kali, boleh jadi hasil pengamatannya adalah sebagai berikut.

Tabel 2.1 **Label Posisi Atas**

Label	a	b	c	d	e	F
Jumlah	12	10	8	10	12	8

Atau boleh jadi hasilnya adalah sebagai berikut:

Tabel 2.2 **Label Posisi Bawah**

Label	A	B	c	d	e	F
Jumlah	10	14	6	14	10	6

Kalau percobaannya diulang, boleh jadi hasil yang diperoleh akan tetap atau berbeda sama sekali.

Dari tabel 2.2 terlihat bahwa label a posisi bawah terjadi sebanyak 10 kali dari 60 kali pelambungan. Ini berarti bahwa hanya 10/60 bagian dari 60/60 bagian. Kalau dipersenkan maka

$$10/60 = (10/60).1$$

= (10/60)/(100/100)

= (10/60).100%

≈ 16,67%

Berdasarkan ilustrasi di atas bisa dikatakan bahwa probabilitas label a pada posisi bawah pada percobaan pelambungan kubus tersebut adalah 0,166. Seterusnya dari Tabel 2.1, label b posisi atas terjadi sebanyak 10 kali dari 60 kali pelambungan. Ini berarti bahwa label b pada posisi atas dalam pelambungan tersebut adalah (10/60).100%≈16,67%.

Untuk ukuran probabilitas ditulis P dan kejadian (peristiwa) bawah label a pada posisi sebelah bawah ditulis E_1 sedankan E_2 menyatakan peristiwa bahwa label b pada posisi atas maka dituliskan

$P(E_1) = 16{,}67\%$ dan $P(E_2) = 16{,}67\%$.

Telah dijelaskan sebelum ini bahwa hasil percobaan pelambungan kubus di atas bisa saja berubah, yaitu jumlah kali label yang di atas atau dibawah tidak sama. Ini berarti frekuensi setiap label sisi kubus ABCDEFGH pada percobaan lain kondisinya adalah relatif. Oleh karena itu hasil pengamatannya disebut frekuensi relatif. Akibatnya ukuran probabilitas yang diperolehpun adalah ukuran probabilitas frekuensi relatif. Percobaan frekuensi relatif ini pada abad-abad perkembangan probabilitas telah dilakukan oleh para ilmuan, antara lain:

1. **Karl Person** (Inggris)

   Melakukan percobaan melambungkan sekeping koin sebanyak 12000 kali dengan hasil.

$$P(H) = \frac{6019}{12000} = 0{,}502 \text{ dan } P(T) = \frac{5981}{12000} = 0{,}498$$

2. **Buffon** (Prancis)

   Melakukan pelambungan sekeping koin sebanyak 4040 kali dengan hasil sebagai berikut:

$$P(H) = \frac{2048}{4040} = 0{,}507 \text{ dan } P(T) = \frac{1992}{4040} = 0{,}493$$

3. **J.E. Kenik** (Denmark)

Melakukan percobaan yang sama sebanyak 10.000 kali yang hasilnya adalah

$$P(H) = \frac{5067}{10000} = 0,5067 \text{ dan } P(T) = \frac{4933}{10000} = 0,49833$$

Dari percobaan ketiga ilmuan tersebut terlihat gambaran bahwa terjadinya *H* tidak ada yang sama persis, persentasenya masing-masing ialah:

- Karl Person; *P(H)* = 50,2%
- Buffon; *P(H)* = 50,7%
- J.E Kenik *P(H)* = 50,67%

Tetapi satu sama lain meliki kesamaan dalam hasilnya tersebut, masing-masing *P(H)* nya relatif sedikit melibihi 50% dan saat yang sama,*P(T)*nya relatif sedikit kurang dari 50%. Jika percobaan diteruskan hingga jumlah yang sangat besar maka akan tercapai keseimbangan sehingga diperoleh bahwa *P(H) = P(T)* = 50%.

Definisi 2.2.1 jika *m* adalah jumlah kejadian (peristiwa) *E* dalam serangkaian *n* percobaan dalam jumlah yang cukup besar, maka probabilitas frekuensi relatif dirumuskan sebagai

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}, \text{ jika } \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} \text{ ada}$$

Definisi 2.2.2 Secara intuisi yang dimaksud dengan eksperimen adalah satu prosedur yang sedang dijalankan pada kondisi tertentu yang dapat diulang dalam jumlah tertentu dan hasilnya dapat diamati.

Definisi 2.2.3 Suatu eksperimen dikatakan eksperimen deterministik jika pada kondisi tertentu hasil eksperimen tersebut adalah tertentu, tidak acak.

Definisi 2.2.4 Suatu eksperimen yang hasilnya merupakan satu kemungkinan dari semua kemungkinan dikatakan sebgai eksperimen acak

Definisi 2.2.5 Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu eksperimen acak disebut ruang sampel, ditulis *S*. Eksperimen $s \in S$ disebut titik sampel.

Definisi 2.2.6 Himpunan bagian dari suatu ruang sampel disebut kejadian (peristiwa).

Definisi 2.2.7 Himpunan bagian ruang sampel dapat membentuk σ -aljabar yang ditulis Σ yang disebut σ -aljabar

Definisi 2.2.8 Kejadian yang berbentuk *s* = singleton disebut kejadian sederhana.

Definisi 2.2.9 Kejadian yang memuat sedikitnya dua titik sampel disebut kejadian majemuk.

Definisi 2.2.10 *S* (ruang sampel) disebut kejadian pasti.

Definisi 2.2.11 ϕ (himpunan kosong) disebut kejadian yang tidak mungkin terjadi.

Definisi 2.2.12 Jika suatu eksperimen acak menghasilkan *s* dan $s \in S$, *E* = kejadian, dikatakan *E* terjadi.

Definisi 2.2.13 Kalau *E* adalah suatu kejadian, maka E^c juga adalah suatu kejadian.

Definisi 2.2.14 Untuk E_j ; *j* = 1,2,... adalah kejadian, maka

a. $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ adalah kejadian juga.

b. $\bigcup_{j=1}^{n} E_j$ terjadi jika paling sedikit satu di antara kejadian E_j tejadi

c. $\bigcap_{j=1}^{n} E_j$ terjadi jika semua E_j terjadi.

Definisi 2.2.15 Untuk *S* suatu himpunan yang tak kosong dan Σ adalah σ -aljabar dari himpunan-himpunan bagian *S*. Serta *P* adalah suatu fungsi himpunan dari Σ ke himpunan bilangan riel, yang memenuhi.

a. *P* adalah non negatif. Untuk setiap $E \in \Sigma$. $P(E) \geq 0$

b. *P* adalah 2-*additive*, jika $E_1 \in \Sigma$ dan $E_2 \in \Sigma$, serta $E_1 \bigcup E_2 = \varnothing$ maka $P(E_1 \bigcup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

c. *P* adalah norm. *P* (*S*) = 1.

d. *P* adalah *countable additive.* Jika $\{E_n\}_1^{\infty}$ adalah suatu barisan dalam Σ.

Sedemikian sehingga $E_i \bigcup E_j = \varnothing; \quad i \neq j$ Maka

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

Sehingga

- (S, Σ, P) disebut ruang ukuran probabilitas (*probability measure space*). Disingkat p.m.s.
- S disebut ruang sampel (*sample space*).
- Anggota-anggota Σ disebut kejadian-kejadian (*events*) dan Σ disebut σ -aljabar.
- P disebut ukuran probabilitas (*probability measure*)
- *P (E)* biasa dibaca probabilitas *E, E* adalah kejadian.

2.3 **Konsukuensi Definisi Ruang Ukuran Probabilitas**

2.3.1 $P(\phi) = 0$

Telah diketahui bahwa

$$\begin{aligned} S &= S \\ &= S \cup \phi \\ &= S \cup \phi \cup \phi \cup ... \\ P(S) &= P(S \cup \phi \cup ...) \\ P(S) &= P(S) + P(\phi) + P(\phi) + ... \\ 1 &= 1 + P(\phi) + P(\phi) + ... \end{aligned}$$

Hubungan ini benar jika $P(\phi) = 0$. Jadi terbukti bahwa $P(\phi) = 0$.

2.3.2 *P* adalah *finite additive*

Jika $\{E_n\}_1^n$ suatu himpunan kejadian saling asing berpasangan di dalam $\Sigma_i (E_i \cap E_j) = \phi$ untuk $i \neq j$.

Maka $P\left(\bigcup_1^n E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$

Bukti

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Untuk setiap $E_i = \phi$ pada setiap $i \geq n+1$. Maka

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(E_i)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) + P(\phi) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\phi)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) + 0 = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) + 0$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

1.3.3 P adalah suatu fungsi *non-decreasing*. Bahwa untuk $E_1 \in \Sigma$ dan $E_2 \in \Sigma$ serta $E_1 \subseteq E_2$ maka $P(E_1) \leq P(E_2)$. Bahwa

$$\begin{aligned} E_2 &= E_2 \\ &= E_2 \cup \phi \\ &= E_2 \cup (E_1 \setminus E_1) \\ &= E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P\{E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)\} \\ &= P(E_1) + P(E_2 \setminus E_1) \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa $P(E_2) \geq P(E_1)$ atau $P(E_2) \leq P(E_1)$. Dengan kata lain P adalah suatu fungsi *non-decreasing*.

1.3.4 Kalau $E \in \Sigma$, maka $P(E^c) = 1 - P(E)$.

Bahwa

$$E^c = (S \setminus E)$$

$$P(E^c) = P(S \setminus E)$$

$$P\left(E^c\right) = P(S) - P(E)$$

$$P(S) = 1$$

$$P\left(E^c\right) = 1 - P(E)$$

1.3.5 Kalau $E_1 \in \Sigma$ dan $E_2 \in \Sigma$, maka

$$P\left(E_2 \setminus E_1\right) = P\left(E_2\right) - P\left(E_1\right)$$

1.3.6 Untuk suatu kejadian $E_1 \in \Sigma$ dan $E_2 \in \Sigma$ maka

$$P\left(E_1 \cup E_2\right) = P\left(E_1\right) + P\left(E_2\right) - P\left(E_1 \cap E_2\right)$$

1.3.7 Untuk kejadian $E \in \Sigma$ maka $0 \leq P(E) \leq 1$

Teorema 3 Pada suatu ruang ukur probabilitas (S, Σ, P), untuk $A \in \Sigma$ dan $\{E_n\}_1^\infty$ adalah suatu barisan dalam Σ sedemikian sehingga $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_{n-1} \subseteq E_n \subseteq \ldots$ dan $A = \bigcup_1^\infty E_n$ maka $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) P$ adalah kontinu dari bawah pada A.

Bukti

Pilih $B_1 = E_1$ dan untuk $n > 1$, pilih $B_n = E_n \setminus E_{n-1}$. Kalau $i \neq j$, maka $B_i \cap B_j = \phi$. Juga $\bigcup_1^\infty B_n = \bigcup_1^\infty E_n = A$. Dengan menggunakan *countably additivity* maka

$$P(A) = \sum_1^\infty P(B_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_2^\infty P(B_n) + P(B_1) \\
&= \sum_2^\infty P\left(E_n \setminus E_{n-1}\right) + P\left(E_1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_2^\infty \left\{P\left(E_n\right) - P\left(E_{n-1}\right)\right\} + P\left(E_1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(E_n\right) - P\left(E_1\right) + P\left(E_1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(E_n\right)
\end{aligned}$$

Teorema 4 Pada suatu ruang ukur probabilitas (S, Σ, P), untuk $A \in \Sigma$ dan $\{E_n\}_1^\infty$ adalah suatu barisan dalam Σ sedemikian sehingga $E_1 \supseteq E_2 \supseteq ... \supseteq E_{n-1} \supseteq E_n \supseteq ...$ dan $A = \bigcap_1^\infty E_n$ maka $P(A) = \lim_{n \to \infty} P(E_n)$, P adalah kontinu dari atas pada A.

Bukti

Untuk setiap $n \in N$, pilih $B_n = E_1 \setminus E_n$, sehingga

$$\phi = B_1 \subseteq B_2 \subseteq ... \subseteq B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq ...$$

Dan

$$\bigcup_1^\infty B_n = \bigcup_1^\infty (E_1 \setminus E_n) = E_1 \setminus \bigcup_1^\infty E_n = E_1 \setminus A$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} P(E_1) - P(A) = P(E_1 \setminus A) & \\ &= \lim_{n \to \infty} P(B_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} (E_1 \setminus E_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \{P(E_1) - P(E_n)\} \\ &= P(E_1) - \lim_{n \to \infty} P(E_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -P(A) &= -\lim_{n \to \infty} P(E_n) + P(E_1) - P(E_1) \\ P(A) &= \lim_{n \to \infty} P(E_n) \end{aligned}$$

Definisi 2.3.16 Untuk S adalah ruang yang tidak kosong dan $\sum = \wp(S)$; $\wp(S)$ adalah himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan *S,* yaitu himpunan yang terbentuk dari himpunan-himpunan bagian *S*, didefinisikan bahwa untuk suatu peristiwa $E \in \sum$,

$$P(E) = \frac{\text{banyaknya elemen dalam } E}{\text{banyaknya elemen dalam } S}$$

Maka *P* adalah ukuran *equiprobable* pada $\sum$. Kalau banyaknya elemen dalam *E* dinotasikan dengan #(*E*) dan banyaknya elemen dalam *S* dinotasikan dengan *#(S)*, maka persamaan di atas bisa disajikan sebagai berikut:

$$P(E)=\frac{\#(E)}{\#(S)}$$

Bahwa untuk sejumlah #(S) kejadian yang mungkin terjadi dan kejadian tersebut lengkap terbatas jumlahnya (*exhaustive*), eksklusif secara bersama (*mutual exclusive*), serta memiliki kesempetan yang sama untuk terjadi (*equally likely*), maka sejumlah #(*E*) dari kejadian tersebut merupakan kejadian *E*, dengan ukuran *equiprobable P(E)*. Ukuran probabilitas ini memenuhi ketentuan (a), (b), (c) pada definisi ruang ukur probabilitas definisi 2.2.15. juga untuk ketentuan (d) definisi tersebut secara trivial (dengan sendirinya) berlaku, karena *countable pairwise disjoint union* daripada anggota-anggota $\sum$ dikurangi menjadi suatu gabungan terbatas. Hal ini dapat dilakukan dengan memperhatikan ketentuan-ketentuan sebagai berikut:

a. Jika $A\in\Re$ dan $B\in\Re$; $\Re$ =ring, dan $\left(A\cap B\right)=\phi$, maka $\#\left(A\cup B\right)=\#(A)+\#(B)$. # disebut 2.*additive*.

b. Jika $A_1,A_2,...,A_n\subseteq\Re$ untuk setiap $n\in N$ dan $A_i\bigcap A_j=\phi;i\neq j$, maka berlaku

$$\#(A_1\bigcup A_2\bigcup...\bigcup A_n)=\#(A_1)+\#(A_2)+...+\#(A_n)$$

c. Jika $A\in\Re$ dan $B\in\Re$ dan $A\subseteq B$, maka $\#(A)\leq\#(B).$ # disebut *monotone* atau *non-decreasing*.

d. Jika $A\in\Re$ dan $B\in\Re$ dan $A\subseteq B$, maka

$$\#(B\setminus A)=\#(B)-\#(A)$$

disebut *substractive*

e. Jika $A\in\Re$ dan $B\in\Re$ maka

$$\#(A\bigcup B)=\#(A)+\#(B)-\#(A\bigcap B)$$

disebut modular

1.4 Beberapa Contoh

2.4.1 pelambungan sekeping koin

S = { H, T }

$\wp(S) = \{\phi, H, T, (H,T)\}$

Bahwa $\wp(S)$ adalah suatu ring $\Re$ dapat diselidiki dengan stelsel axioms dari $\Re$.

Sebut $E_1 = \phi; E_2 = H$ dan $E_3 = T$, sehingga $S = \{E_1, E_2, E_3\}$

$\Re_I$: bahwa $\wp(S)$ adalah Abelian grup terhadap tanda

-*closed* (tertutup)

-Assosiatif

-Adanya elemen netral, yaitu $E_1 = \phi \in \wp(S)$

-Adanya elemen invers, misalnya invers E_2 adalah E_2 sebab $\left(E_2 \setminus E_2\right) = \phi$.

$\Re_I$: bahwa $\wp(S)$ terhadap tanda $\bigcap$ memenuhi axioma.

-tertutup: $E_2 \bigcap E_3 = E_1 \in \wp(S)$

-assosiatif: $E_1 \bigcap (E_2 \bigcap E_3) = (E_1 \bigcap E_2) \bigcap E_3 = \phi \in \wp(S)$

Selanjutnya bahwa ring $\Re$ tersebut adalah suatu σ-ring, yaitu untuk setiap barisan $\{E_n\}_1^3 \in \Re$ berlaku $\bigcup_1^3 E_n \in \Re$.Sampai di sini berarti $\wp(S)$ adalah σ-ring. Selanjutnya bahwa dalam σ-ring tersebut, semua himpunan bagian *S* dan *S* sendiri termuat didalamnya. Ini berarti σ-ring tersebut adalah suatu σ-aljabar. Dengan kata lain bahwa pelambungan satu koin dengan *S* = { *H*, *T* } membentuk suatu $\sum = \sigma$-ring.

Apakah $\left(S, \Sigma, P\right)$ pelambungan satu koin tersebut adalah ruang ukur probabilitas, dapat dilihat ketentuan pada definisi ruang ukur probabilitas;

a. *P* adalah non negatif sebab $P(H) \geq 0$ ataupun $P(T) \geq 0$

b. *P* adalah 2-*additive*. $H \in \Sigma; T \in \Sigma; H \bigcap T = \phi$, maka $P\left(H \bigcup T\right) = P(H) + P(T)$

c. *P* adalah norm, *P* (*S*)=1

d. *P* adalah *countably additive*

$$P\left(\bigcup_{1}^{n} E_n\right) = \sum_{1}^{3} P\left(E_n\right)$$

$$= P\left(\phi\right) + P\left(H\right) + P\left(T\right)$$

2.4.2 Dua keping koin dilambungkan secara serentak. Didefenisikan kejadian *E* adalah kejadian yang menghasilkan minimal satu *H*. Kalau *P* adalah ukuran probabilitas yang mana setiap sisi koin tersebut mempunyai kesempatan yang sama untuk muncul pada percobaan acak tersebut, tentukan *P(E)*.

Penyelesaian

Ruang sampel percobaan dapat disusun dengan tabel

	H	T
H	(H,H)	(H.T)
T	(T,H)	(T,T)

Cara Cartesian Product

{ *H*, *T* } x { *H*, *T*} = { (*H*,*H*), (*H*,*T*), (*T*,H), (*T*,*T*)}

Jadi

S = { (*H*,*H*), (*H*,*T*), (*T*,H), (*T*,*T*)}

E = { (*H*,*H*), (*H*,*T*), (*T*,H)}

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)} = \frac{3}{4}$$

Ukuran probabilitas untuk minimal satu *H* pada percobaan pelambungan 2 koin secara serentak adalah 75%.

2.4.3 Setiap sisi suatu kubus diberi label {1,2,3,4,5,6}. Dua kubus dilambungkan secara serentak. Tentukan $P(E)$ untuk $\{(x, y) \mid x = y\}$.

x = label sisi kubus pertama

y = label sisi kubus kedua

Setiap kubus adalah homogen. *P* adalah ukuran *equiprobable.*

Penyelesaian

$S=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 6, 1\le y\le 6\}, \#(S)=36$

$E=\{(x,y)-x=y\}, \#(E)=6$

$P(E)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Jadi probabilitas untuk mendapat salam satu pasangan $\{(x,y)\,x=y\}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ adalah $\frac{1}{6}$ atau 16,67%

2.4.4 Dari suku kata yang membentuk kata majemuk “MATAHARI”, apabila dibentuk kata-kata yang bersuku dua, lalu dituliskan pada sehelai kertas, kemudian kertas-kertas tersebut masing-masing digulung dan dimasukkan ke dalam suatu kotak. Setelah dikocok, lalu diambil satu gulungan kertas tersebut secara acak. Tentukan probabilitas tulisan pada kertas tersebut bertuliskan MAHA.

Penyelesaian

Jumlah suku kata MATAHARI adalah 4. Akan dibentuk kata-kata bersuku dua. Jumlah kata yang bersuku dua yang terbentuk adalah:

$$P_{(2,4)}=\frac{4!}{(4-2)!}=12 \text{ macam}$$

(walaupun belum tentu semua kata bersuku dua tersebut mempunyai arti dalam bahasa Indonesia). Jadi $\#(S)=12, \#(E)=1, P(E)=\frac{1}{12}$

2.4.5 kalau pada contoh soal (2.4.4) yang diambil acak adalah dua gulungan kertas sekaligus, berapa probabilitas bahwa yang terambil tersebut adalah tulisan MATAHARI.

Penyelesaian diserahkan kepada pembaca.

2.5 Soal-soal latihan

1. Untuk (S,Σ,P) adalah suatu ruang ukur probabilitas, perlihatkan bahwa hal-hal yang berikut ini adalah ekuivalen

a. *P* adalah *countably additive*

b. *P* adalah kontinu dari atas pada *S*.

2. Diketahui bahwa $\sum$ adalah σ-aljabar dari himpunan-himpunan bagian tidak kosong *S* dan P_1 serta P_2 adalah ukuran probabilitas $\sum$.

   Untuk $0 \le \lambda \le 1$ maka $P(E) = \lambda P_1(E) + (1-\lambda)P_2(E)$ untuk $E \in \sum$ disebut *P* adalah *Convex Combination* dari P_1 dan P_2. Buktikan bahwa *P* adalah ukuran probabilitas.

3. (*Finite Modularity*). Diketahui $(S, \sum, P)$ adalah suatu ruang ukuran probabilitas dan $\{E_i\}_1^n$ maka berlaku

$$P\left(\bigcup_1^n E_i\right) \le \sum_1^n P(E_i)$$

4. (*Countably subadditive*). Diketahui $(S, \sum, P)$ suatu ruang ukuran probabilitas dan $\{E_i\}_1^\infty$ suatu barisan dalam $\sum$ maka

$$P\left(\bigcup_1^\infty E_i\right) \le \sum_1^\infty P(E_i)$$

5. (*Finite Modularity*) Diketahui $(S, \sum, P)$ suatu ruang ukuran probabilitas, dan $\{E_i\}_1^n$ suatu himpunan dalam $\sum$, maka buktikan bahwa

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

$$-\{P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)\}$$

6. Untuk $(S, \sum, P)$ suatu ruang ukur probabilitas dan *S* = { *a,b,c* } dan $\sum = \wp(S)$ serta $P\{(a,b)\} = 1/2 = P\{(b,c)\}$. Tentukan P({*a*}),P({b}) dan P({c}).

7. Bila di dalam suatu asrama terdapat 130 penghuni, terdiri dari 70 orang berpendidikan SMA, 35 orang berpendidikan D3 dan 25 orang berpendidikan lainnya. Berapa probabilitas bahwa keempat orang tersebut berpendidikan SMA?

8. Dari soal no.7, kalau kebetulan ada dari penghuni asrama tersebut sedang bercakap-cakap sebanyak 4 orang di suatu taman, berapa probabilitas bahwa keempat orang tersebut berpendidikan SMA?

9. Dari soal no.8, tentukan probanilitas bahwa

   a. Keempat orang tersebut bukan berpendidikan SMA?

   b. Keempat orang tersebut bukan berpendidikan D3?

   c. Keempat orang tersebut bukan berpendidikan yang lainnya?

2.6. Asas Perhitungan Probabilitas

Pada perhitungan probabilitas pada dasarnya hal-hal yang menyangkut ruang sampel, kejadian (peristiwa) dan ukuran probabilitasnya seyogyanya sudah jelas. Selain itu hubungan antara suatu kejadian E_i dengan kejadian E_j yang berada dalam $\sum$ dalah merupakan hal yang penting diketahui secara jelas. Keadaan antara suatu kejadian dengan kejadian lain dalam $\sum$ tersebut adalah sebagai asas dalam perhitungan probabilitas.

2.6.1. Probabilitas Bersyarat

Definisi 2.3.1

Untuk $(S, \sum, P)$ suatu ruang ukur probabilitas dan $E \in \sum$ sedemikian sehingga $P(E) \neq 0$, maka untuk setiap $A \in \sum$, didefinisikan probabilitas bersyarat. A dengan E telah terjadi adalah

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

Bahwa $P(A|E) \geq 0$ untuk setiap $A \in \sum$, $E \in \sum$, P (E) > 0

$$P(S \mid E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)}$$
$$= \frac{P(E)}{P(E)}$$
$$P(S \mid E) = 1$$

Untuk $A_j \in \sum$, j = 1,2,... A_j = Kejadian, serta $A_i \cap A_j = \varnothing$ diperoleh:

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \mid E\right) = \frac{P\{(\sum_{j=1}^{\infty} A_j) \cap E\}}{P(E)}$$
$$= \frac{P\{\sum_1^{\infty} (A_j \cap E)\}}{P(E)}$$
$$= \frac{1}{P(E)} \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \cap E)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P(A_j \cap E)}{P(E)}$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \mid E)$$

Teorema 5 (*teorema pergandaaan*). Untuk kejadian-kejadian $A_j \in \sum$, j = 1, 2, ..., n berlaku

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) > 0$$

Sehingga

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) = P(A_n \mid A_1 \cap A_2 ... \cap A_{n-1}).P(A_{n-1} \mid A_1 \cap A_2 ... \cap A_{n-1})$$
$$... \times P(A_2 \mid A_1).P(A_1)$$

Contoh

Suatu kantongan berisi 10 bola yang identik (kecuali warna bola) yang terdiri dari 5 bola berwarna hitam, 3 bola berwarna merah, 2 bola berwarna putih. Empat bola diambil satu persatu secara acak, tanpa pengembalian. Tentukan probabilitas bahwa secara berturut-turut bola yang terambil berwarna hitam, merah, putih dan hitam.

Sebut bahwa

E_1 = kejadian pengambilan pertama, bola berwarna hitam

E_2 = kejadian pengambilan kedua, bola berwarna merah

E_3 = kejadian pengambilan ketiga, bola berwarna putih

E_4 = kejadian pengambilan keempat, bola berwarna hitam

Maka

$P(\bigcap E_i) = P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3).P(A_3 \mid A_1 \cap A_2).P(A_2 \mid A_1).P(A_1)$

Sedangkan $P(A_1) = \frac{5}{10}, P(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{9}, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{2}{8}$ dan $P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{7}$. Oleh karena itu $P\left(\bigcap_1^4 A_j\right) = \frac{1}{42} \approx 2{,}38\%$.

Contoh

Status 130 orang penguni suatu asrama adalah sebagai berikut:

Tkt. Pdk	Tetap	Tdk tetap	Jumlah
D-3	24	46	70
SMA	25	10	35
Lainnya	5	20	25
Jumlah	54	76	130

Sekarang andaikan

E_1 = kejadian bertemu 1 orang penghuni asrama yang berpendidikan D-3

E_2 = kejadian bertemu 1 orang penghuni asrama yang berpendidikan SMA

E_3 = kejadian bertemu 1 orang penghuni asrama yang status pekerjaannya tetap

E_4 = kejadian bertemu 1 orang penghuni asrama yang status pekerjaannya tidak tetap

k

Maka

$$P\left(E_4 \mid E_1\right)=\frac{P(E_4 \cap E_1)}{P(E_1)}=\frac{\frac{24}{130}}{\frac{70}{130}}=\frac{12}{35}\approx 34,29\%$$

$$P\left(E_1 \mid E_4^c\right)=\frac{P(E_1 \cap E_4^c)}{P(E_4^c)}=\frac{\frac{46}{130}}{\frac{76}{130}}=\frac{23}{38}\approx 60,53\%$$

$$P\left(E_2 \mid E_4\right)=\frac{P(E_2 \cap E_4)}{P(E_4)}=\frac{\frac{25}{130}}{\frac{54}{130}}=\frac{25}{54}\approx 46,30\%$$

$$P\left(E_3 \mid E_4\right)=\frac{5}{54}\approx 9,26\%$$

$$P\left(E_4 \mid E_3\right)=\frac{5}{25}\approx 20\%$$

Dengan cara yang sama, nilai probabilitas yang lain bisa diperoleh.

2.6.2 Keindependenan

Definisi

Untuk $\left(S,\sum,P\right)$ adalah suatu ruang ukur probabilitas $E_1 \in \sum, E_2 \in \sum$, maka E_1 dan E_2 dikatakan independen secara statistika jika

$$P(E_1 \cap E_2)=P(E_1).P(E_2)$$

Definisi

Kejadian-kejadian $E_j \in \sum,\ j=1,2,...,n$ disebut independent secara bersama (*mutually independent*) atau independen secara lengkap (*completely independent*) kalau hubungan yang berikut dipenuhi,

$$P(E_{ji} \cap ... \cap E_{jk})=P(E_{ji})...P(E_{jk})$$

Untuk k = 1,2,...,n dan $j_i ..., j_k$ = 1,2,...,n sedemikian sehingga

$$1 \le j_i < j_2 < ... < j_k \le n$$

Kejadian-kejadian ini disebut *pairwise independent* jika $P(E_i \cap E_j)=P(E_i).P(E_j)$ untuk semua $i \neq j$.

Berikut ini akan diuraikan satu gambaran berkenaan dengan definisi yang sudah dibicarakan diatas

Diketahui S = {1,2,3,4}, $P\{(1)\} = P\{(2)\} = P\{(3)\} = P\{(4)\} = \frac{1}{4}$. Selanjutnya didefinisikan bahwa $E_1 = \{1,2\}; E_2 = \{1,3\}; E_3 = \{1,4\}$ sehingga $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{1\}$ dan $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{1\}$, maka

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_3) = P(E_2 \cap E_3) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \tfrac{1}{4}$$

Selanjutnya perhatikan

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(E_1).P(E_2)$$

$$P(E_1 \cap E_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(E_1).P(E_3)$$

$$P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(E_2).P(E_3)$$

Tetapi

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \tfrac{1}{4} \neq \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} = P(E_1).P(E_2).P(E_3)\ .$$

Sekarang ambil S = {1,2,3,4,5} dan $P(\{1\})$ = 1/8; $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\})$= 3/16; $P(\{5\})$ = 5/16.

Bentuklah

$$E_1 = \{ 1,2,3 \} ; E_2 = \{ 1,2,4 \}; E_3 = \{ 1,3,4 \}$$

Sehingga

$$E_1 \cap E_2 = \{1,2\}; E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{1\}$$

Maka

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} = P(E_1).P(E_2).P(E_3)$$

Tetapi

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{5}{6} \neq \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(E_1).P(E_2)$$

Proporsi

Jika (S, Σ, P) adalah ruang ukur probabilitas dan $E_1.E_2 \in \Sigma$, sedemikian sehingga E_1 dan E_2 independen, maka

a. $E_1^c = S \setminus E_1$ dan E_2 adalah indenden.

b. E_1^c dan E_2^c adalah independen

Proporsi

Untuk $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ adalah himpunan kejadian yang independen dalam ruang ukur probabilitas (S, Σ, P) maka

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = 1 - \Pi_1^n P\left(E_j^n\right) = 1 - \Pi_1^n \left(1 - P\left(A_j\right)\right)$$

Hal ini bisa dilihat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) &= 1 - P\left(\left[\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right]\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{j=1}^{n} \left[E_j\right]^c\right) \\ &= 1 - \Pi\left(E_j^c\right) \end{aligned}$$

Juga dalam hal ini { E_1^c ,..., E_n^c } adalah himpunan yang independen.

Contoh

Sekelompok anggota marinir menembak sebuah kapal dengan empat peluru torpedo. Probabilitas setiap torpedo mengenai sasaran adalah 1/5. Berapa probabilitas paling sedikit satu torpedo mengenai sasaran penembakan tersebut.

Penyelesaian

Untuk *j* = 1,2,3,4, sebut bahwa E_j adalah kejadian ke-j tembakan mengenai sasaran. Kejadian E_j adalah independen. Oleh karena itu probabilitas paling sedikit satu topedo mengenai sasaran adalah

$$P\left(\bigcup_{j=1} 4E_j\right) = 1 - \Pi_1^4\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= 1 - \Pi_1^4\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{369}{625}$$

Teorema 6. Suatu percobaan ataupun coba-coba, mempunyai r kemungkinan hasil dan P= p_i. Kemudian percobaan diulangi sebanyak n kali secara independen. Maka probabilitas

Terdapat k_1 hasil jenis 1

Terdapat k_2 hasil jenis 2

$\vdots$

Terdapat k_r hasil jenis r

Adalah

$$\frac{n!}{(k_1!.k_2!...k_r!)} p_1^{k1}.p_2^{k2}...p_r^{kr}$$

Dalam hal ini $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$. Bentuk ini disebut “multinomial”

Teorema di atas sebenarnya merupakan suatu pengembangan percobaan independen Bernoulli yang berbentuk sebagai berikut:

$$\frac{n!}{(k_1!.k_2!...k_r!)} p_1^{k1}(1 - p_1)^{n-k1}$$

atau $$\binom{n}{k_1} p_1^{k1}(1 - p_1)^{n-k1}$$

Atau juga

$$C_n^{k1} p_1^{k1}(1 - p_1)^{n-k1}$$

yang sering disebut Binomial

Contoh

Sebuah kubus, setiap sisi diberi label {1,2,3,4,5,6}, dilambungkan 6 kali. Berapa probabilitas terdapatnya sisi label 1 muncul 3 kali sebelah atas, sisi label 5 muncul 2 kali.

Penyelesaian

Pada percobaan inin ada 3 jenis outcame, yaitu $S_1 = \{1\}; S_2 = \{5\}$ dan $S_3 = \{2,3,4,6\}$. Oleh karena itu probabilitas tersebut ialah

$$\frac{6!}{(3!.2!.1!)}(1/6)^3.(1/6)^2.(4/6)^1 = 0,54\%$$

Contoh

Pada probabilitas bersyarat untuk $E_1.E_2 \in \Sigma$ dalam ruang ukur probabilitas (S, Σ, P) yang mana E_1 dan E_2 adalah independen, maka berlaku bahwa

$$\begin{aligned} P(E_1 \mid E_2) &= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}; P(E_2) \neq 0 \\ &= \frac{P(E_1)P(E_2)}{P(E_2)} \\ &= P(E_1) \end{aligned}$$

Hal yang sama untuk

$$\begin{aligned} P(E_2 \mid E_1) &= \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)}; P(E_2) \neq 0 \\ &= \frac{P(E_2)P(E_1)}{P(E_1)} \\ &= P(E_2) \end{aligned}$$

Contoh

Rumah sakit umum pusat di Jakarta telah melakukan observasi secara sampling 100 orang pasien, guna menyelidiki hubungan antara penyakit paru-paru dan merokok. Pasien dikelompokkan dengan cara sebagai berikut:

E_1 = penderita penyakit paru-paru dan merokok (40 orang)

E_2 = penderita penyakit paru-paru dan tidak merokok (20 orang)

E_3 = bukan penderita penyakit paru-paru dan merokok (30 orang)

E_4 = bukan penderita penyakit paru-paru dan tidak merokok (10 orang)

Berdasarkan hal diatas maka diperoleh

$P(E_1) = 0.40, P(E_2) = 0.20, P(E_3) = 0.30, P(E_4) = 0{,}10$.

Selanjutnya sebut saja

Penderita penyakit paru-paru = P

Bukan penderitan penyakit paru-paru = P^c

Pasien merokok = M

Pasien tidak merokok = M^c

Maka

$$P(P) = P(E_1) + P(E_2) = 0.40 + 0.20 = 0.60$$

$$P(P \cup M) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 0.90$$

$$P(P^c \cup M^c) = P(E_3) + P(E_4) + P(E_2) = 0.60$$

$$P(P \cup M) = 1 - P(P^c \cup M^c) = 1 - 0.10 = 0.90$$

$$P(P \cup M) = P(P) + P(M) - P(P \cap M) = 0.60 + 0.70 - 0.40 = 0.90$$

2.6.3 Ekslusif Secara Bersama

Definisi

Untuk (S, Σ, P) suatu ruang ukur probabilitas $E_1, E_2 \in \Sigma$ antara E_1 dan E_2 dikatakan dua kejadian yang eksklusif secara bersama bila $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ (lihat ketentuan definisi, serta ketentuan countably additive), sehingga berlaku

$$P\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right) = \sum_{1}^{n} P(E_i)$$

2.7 Soal – Soal Latihan

1. Jika A dan B dua kejadian saling asing, tunjukkan bahwa A dan B independen, jika dan hanya jika, paling sedikit dari *P* (A), *P*(B) sama dengan nol.

2. Jika satu kubus label sisi {1,2,3,4,5,6} dilambungkan ke atas, tentukan probabilitas sisi dibawah kubus berlabel

a. 5

b. dapat dibagi 3

3. Dua puluh bola bernomor 1 s/d 20 diaduk dalam satu kotak, kemudian dua bola diambil berurutan tanpa pengembalian. Jika x1 dan x2 masing-masing adalah nomor-nomor yang tertulis pada bola pertama dan kedua, berapa probabilitas bahwa

a. $x1 + x2 = 8$

b. $x1 + x2 \leq 5$

4. Tiga mesin I, II dan III, masing-masing menghasilkan 30%; 30% dan 40% dari seluruh jumlah produksi. Dari itu, masing-masing terdapat 4%, 3% dan 2% produk yang cacat. Satu produk diambil secara acak, lalu diperiksa, ternyata cacat. Berapa probabilitas bahwa produk tersebut dihasilkan oleh

a. mesin I

b. mesin II

c. mesin III

5. satu kiriman 20 tube radio, terdiri dari 16 tube yang baik dan 4 tube yang cacat. Tiga tube diambil secara acak, lalu dites secara berurutan. Berapa probabilitas bahwa,

a. tube ketiga baik, jika dua tube pertama baik

b. tube ketiga cacat, jika satu dari kedua tube yang pertama cacat.

6. Anton mengikuti ujian Surat Izin Mengemudi (SIM), tulis dan praktik, berulang kali sampai dia lulus. Diketahui bahwa probabilitas dia bisa lulus ujian tulis 0.9 dan lulus ujian praktik 0.6. Jika bentuk ujian tersebut adalah independen. Berapa probabilitas bahwa Anton akan lulus (kedua bentuk ujian) setelah mengulang *n* kali. Ketentuan ujian yang harus dipatuhi adalah ujian praktik tidak dapat diikuti sebelum ujian tulis lulus. Hasil lulus ujian tulis tidak akan batal (diulang) jikalau ujian praktik tidak lulus.

7. Nomor telepon terdiri dari 7 digit. Tiga diantaranya dikelompokkan bersama dan empat sisanya juga demikian. Berapa banyak nomor telepon yang dapat dibentuk jika

a. tanpa ada pembatasan

b. tiga angka pertama harus 262

8. Kunci kombinasi bisa dibuka dengan memutar tombolnya kekiri dan berhenti pada kode a. Kemudian memutarnya ke kanan dan berhenti pada koed b. Akhirnya memutarnya ke kiri dan berhenti pada kode c. Jika kode a, b dan c (satu dengan lainnya berbeda)dipilih dari angka 0,1,2,3...,9. Berapa jumlah kombinasi yang mungkin?

9. Huruf C, E, F, I dan O dituliskan pada potongan-potongan kertas, lalu digulung dan dimasukkan ke dalam satu kotak. Kemudian dikocok lalu satu demi satu diambil. Berapa probabilitas kata OFICE akan terbentuk?

10. Dari 10 angka positif dan 6 angka negatif, pilih 3 angka secara acak. Berapa probabilitas bahwa hasil kalinya adalah negatif?

11. Seorang mahasiswa diberi ujian dengan 30 pertanyaan. Untuk setiap pertanyaan terdiri dari jawaban, yang mana hanya satu jawaban yang benar. Untuk lulus, harus menjawab minimal 25 pertanyaan yang benar. Jika ia tahu jawaban pasti benar untuk 20 pertanyaan pertama, dan selanjutnya ia memilih jawaban secara acak untuk pertanyaan-pertanyaan berikutnya, berapa probabilitas ia akan lulus?

12. Perlihatkan bahwa

a. $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

b. $P(A \bigcup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \bigcap B \mid C)$

Bab 3

Variabel Acak Diskrit dan Distribusi Probabilitasnya

Variabel acak merupakan suatu fungsi yang memetakan ruang kejadian (daerah fungsi) ke ruang bilangan real (wilayah fungsi). Fungsi variabel acak merupakan suatu langkah dalam statistika untuk mengkuantifikasi kejadian-kejadian alam.

Pendefinisian fungsi variabel acak harus mampu memetakan setiap kejadian dengan tepat ke satu bilangan real.

Definisi

Misalkan *E* adalah suatu eksperimen acak, S adalah ruang kejadian (ruang sampel). Variabel acak adalah suatu fungsi *x* yang mengaitkan dengan tepat satu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel (S).

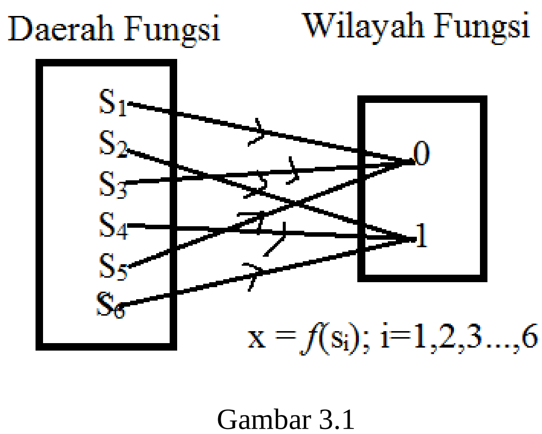
Sebagai ilustrasi; dalam percobaan pelemparan sebuah dadu bersisi 6 yang homogen. Ruang sampelnya ialah

$$S = \{s_1, s_2, ..., s_6\}$$

Dari percobaan ini dapat didefinisikan beberapa variabel acak yang mampu memetakan kejadian-kejadiannya ke dalam bilangan real. Salah satu variabel acak yang dapat dibuat adalah

X = munculnya sisi dadu yang bermata genap

= {0,1}



Gambar 3.1

3.1 Variabel Acak Diskrit

Variabel acak diskrti berkaitan dengan ruang sampel diskrit

Definisi

Ruang sampel diskrit adalah ruang sampel yang memuat titik sampel berhingga atau tidak berhingga tapi terhitung. Sebagai contoh yang berkaitan dengan hal ini ialah

- Beras di dalam sebuah gudang
- Batu kerikil dalam truk
- Dan lain-lain

Suatu variabel acak disebut variabel acak diskrit bila himpunan kemungkinan hasilnya terhitung. Jadi, jika nilai yang mungkin dari variabel acak X adalah R_x, terhingga atau tidak terhingga tetapi terhitung, maka X disebut variabel acak diskrit. Variabel acak X berkorespondensi dengan suatu himpunan nilai diskrit dari $x_1, x_2, ..., x_k$.

Contoh

Jika tiga suku cadang elektronik diuji, maka ruang sampel yang memberikan secara rinci setiap kemungkinan hasil dari pengujian barang elektronik tersebut adalah:

$S = \{ BBB, BBC, BCB, CBB, BCC, CBC, CCB, CCC \}$

B = menyatakan baik

C = manyatakan cacat

Setiap titik di ruang sampel dikaitkan dengan satu bilangan real yang sesuai dengan banyaknya barang (suku cadang) yang cacat, seperti skema berikut:

$(BBB) \xrightarrow{dikaitkan}$ bilangan real 0

$(BBC) \xrightarrow{dikaitkan}$ bilangan real 1

$(BCB) \xrightarrow{dikaitkan}$ bilangan real 1

$(BCC) \xrightarrow{dikaitkan}$ bilangan real 2

$\vdots$

$(CCC) \xrightarrow{dikaitkan}$ bilangan real 3

3.2 Distribusi Probabilitas Diskrit

Variabel acak diskrit X = { $x_1, x_2, ..., x_n$ } dengan probabilitas masing-masing nilai adalah $p_1, p_2, ..., p_n$ dengan $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ dikatakan distribusi probabilitas diskrit untuk variabel acak *x* telah terdefinisi

Fungsi *f* (*x*) yang mempunyai nilai probabilitas masing-masing $p_1, p_2, ..., p_n$ untuk X = $x_1, x_2, ..., x_n$ disebut fungsi probabilitas dari *X*. Sesuatu dikatakan sebagai fungsi probabilitas maka fungsi tersebut haruslah memenuhi 3 syarat probabilitas berikut ini.

Definisi

Himpunan pasangan berurutan (*x* , *f* (*x*)) merupakan distribusi probabilitas variabel acak diskrit *x* bila untuk setiap probabilitas variabel acak diskrit *x* bila untuk setiap probabilitas *x* memenuhi persyaratan sebagai berikut:

1. $f(x) \geq 0$ atau $0 \leq p(x_i) \leq 1; i = 1, 2, ..., n$
2. $\Sigma_x f(x) = 1$ atau $\Sigma_x p(x) = 1$ $\Sigma_x f(x) = 1$ atau $\Sigma_x p(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$ atau $p(A_1 + ... + A_n) = p(A_1) + ... + p(A_n)$, jika $A_1, ..., A_n$ adalah kejadian-kejadian yang independen.

Terdapat beberapa distribusi probabilitas yang biasa dibicarakan, di antaranya ialah:

1. Distribusi Bernoulli dan Binomial
2. Distribusi Multinomial
3. Distribusi Hipergeometrik
4. Distribusi Poisson

3.3. Distribusi Bernoulli

Adakalanya suatu percobaan hanya mempunyai kemungkinan hasil, seperti sukses atau gagal; mata genap atau ganjil dalam pelemparan satu dadu; sisi muka atau gambar dalam pelemparan satu koin mata uang, dan masih banyak lagi contoh- contoh lain. Untuk lebih jelas berikut ini akan diurai satu contoh.

Tinjaulah percobaan pelemparan sekeping mata uang logam. Hasil percobaan yang mungkin adalah munculnya sisi gambar (*G*) atau sisi angka (A). Dalam hal ini tidak mungkin muncul angka dan gambar secara bersama-sama. Apabila kita tertarik untuk memperhatikan salah satu sisi, misalnya kita tertarik dengan munculnya sisi gambar, maka kita dapat mengatakan sukses apabila muncul sisi gambar sebagai hasil percobaan tersebut. Sebaliknya kita bisa mengatakan gagl apabila yang muncul adalah sisi angka. Berdasarkan hal di atas kita dapat memisalkan variabel acak X adalah munculnya sisi gambar dan jika probabilitas X adalah ($1 - p$). Karena pelemparan dilakukan hanya sekali, nilai X yang mungkin adalah 0 atau 1. Oleh karena itu probabilitas sisi gambar muncul atau P (X = 1) adalah p, sedangkan probabilitas sisi angka muncul sebagai hasil percobaan atau P (X = 0) adalah ($1 - p$). Dengan demikian secara matematika distribusi probabilitas Bernoulli dapat ditulis sebagai berikut:

$$p(X = x) = p^x (1 - p)^{(1-x)}; x = 0,1$$

X = 0 berarti peristiwa gambar tidak terjadi

X = 1 berarti peristiwa munculnya gambar terjadi

3.4 Distribusi Binomial

Misalkan satu percobaan dilakukan secara berulang-ulang sebanyak n kali. Setiap percobaan hanya menghasilkan 2 kejadian yaitu A dan A^c (sukses atau gagal). Probabilitas munculnya A pada setiap pengulangan akan selalu sama yaitu p karena hasil pada pengulangan tidak akan mempengaruhi hasil pada pengulangan yang lain. Dengan kata lain kejadiannya merupakan kejadian yang independen.

Percobaan-percobaan yang dilakukan dengan kondisi seperti di atas disebut percobaan Binomial. Percobaan binomial memenuhi persyaratan sebagai berikut:

1. Percobaan dilakukan berulang-ulang sebanyak n kali, n = 1,2,..., n
2. Setiap percobaan hanya menghasilkan dua hal yaitu S = sukes atau G = gagal.
3. P (sukses) = p dan P (gagal) = (1 – p) = q
4. Tiap percobaan bebas satu dengan yang lain.

Dengan demikian secara matematis distribusi probabilitas Binomial dapat dituliskan sebagai berikut:

$$B(x; n, p) = p(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; x = 0,1,\ldots,n; 0 \leq p \leq 1$$

Dengan rata-rata $\mu = np$ dan varians $\sigma^2 = npq$.

BAB IV
DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

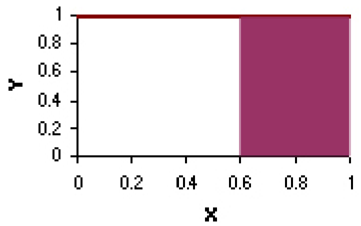
Jika variabel acak berupa variabel kontinu, distribusi peluangnya disebut distribusi peluang kontinu. Distribusi peluang kontinu berbeda dari distribusi peluang diskrit dalam beberapa cara.

- Peluang bahwa variabel acak kontinu akan mengasumsikan nilai tertentu adalah nol.
- Akibatnya, distribusi peluang kontinu tidak dapat dinyatakan dalam bentuk tabel.
- Sebagai gantinya, sebuah persamaan atau rumus digunakan untuk menggambarkan distribusi peluang kontinu.

Persamaan yang digunakan untuk menggambarkan distribusi probabilitas kontinu disebut *fungsi kepadatan probabilitas (pdf)*. Semua fungsi kepadatan probabilitas memenuhi syarat-syarat berikut

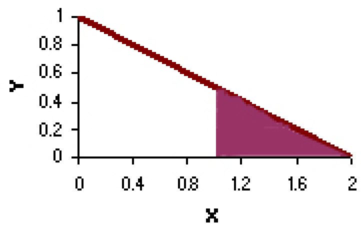
- Variabel acak *Y* adalah fungsi *X*; yaitu, $y = f(x)$.
- Nilai *y* lebih dari atau sama dengan nol untuk semua nilai *x*.
- Luas total di bawah kurva fungsi sama dengan satu.

Bagan di bawah ini menunjukkan dua distribusi probabilitas kontinyu. Bagan pertama menunjukkan fungsi kepadatan probabilitas yang digambarkan oleh persamaan $y = 1$ di atas kisaran 0 sampai 1 dan $y = 0$ di tempat lain.



y = 1

Bagan berikutnya menunjukkan fungsi kepadatan probabilitas yang digambarkan oleh persamaan y = 1 - 0,5x pada kisaran 0 sampai 2 dan y = 0 di tempat lain. Area di bawah kurva sama dengan 1 untuk kedua grafik.



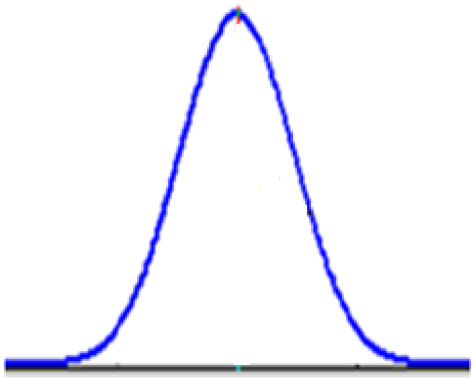
y = 1 - 0.5x

Probabilitas bahwa variabel acak kontinyu turun dalam interval antara a dan b sama dengan area di bawah kurva pdf antara a dan b. Sebagai contoh, pada bagan pertama di atas, area yang diarsir menunjukkan probabilitas bahwa variabel acak X akan turun antara 0,6 dan 1,0. Probabilitas itu adalah 0,40. Dan pada grafik kedua, area yang diarsir menunjukkan probabilitas turun antara 1,0 dan 2,0. Probabilitas itu adalah 0,25.

4.1 Distribusi Normal

Distribusi normal merupakan salah satu distribusi peluang yang populer dan banyak digunakan dalam berbagai keperluan baik dalam ilmu sosial, ilmu alam atau teknik. Pada dasarnya distribusi ini dapat dijelaskan dari distribusi frekuensi relatif. Penjelasannya adalah sebagai berikut. Apabila dalam sebuah distribusi frekuensi kita memperbanyak jumlah kelas intervalnya atau panjang kelasnya dipersempit, maka kita akan memperoleh titik tengah yang lebih banyak dan akhirnya akan diperoleh sebuah kurva frekuensi yang lebih halus yang dapat dianggap sebagai gambaran atau model populasi yang sedang di amati. Dengan memanfaatkan distribusi normal maka kita dapat menghitung berapa peluang variabel acak diantara nilai-nilai yang kita tetapkan. Misalnya saja ingin diketahui berapa peluang seorang karyawan yang dipilih secara acak memiliki berat badan antara 56 dan 60 kilogram atau tingginya lebih kecil dari 170 cm.

Suatu peubah acak kontinu X yang distribusinya berbentuk lonceng disebut peubah acak normal.



Gambar 5.1 Kurva distribusi normal

Persamaan yang memenuhi kurva tersebut dinamakan Probability Distribution Function (PDF) normal yang didefinisikan sebagai berikut:

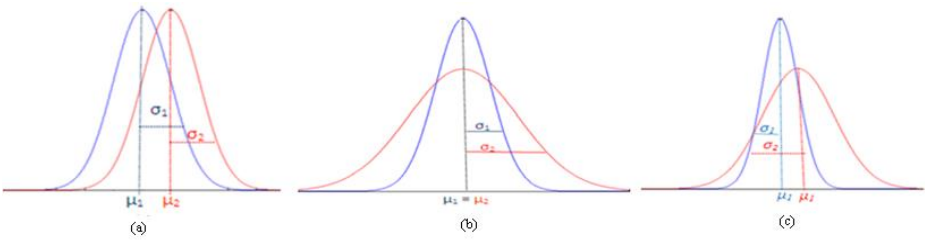
Definisi 5.1 Probabiliti Distribution Function (PDF) Normal

Jika X adalah peubah acak bebas, maka fungsi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

dengan $\pi = 3{,}14159...$ dan $e = 2{,}71828\ldots$

disebut sebagai *Probability Distribution Function* (PDF) normal atau distribusi normal dan umumnya ditulis sebagai $n(x;\mu,\sigma)$ yang berarti peubah acak X terdistribusi normal dengan parameter μ dan σ



Gambar 5.2 Kurva distribusi normal dengan (*a*) $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$; (*b*) $\mu_1 = \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$; (*c*) $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$

Pada gambar 5.1 melukiskan kurva normal yang berbentuk seperti lonceng. Begitu parameter μ dan σ diketahui, maka seluruh kurva normal dapat diketahui dan kurvanya dapat digambarkan. Misalkan jika diketahui $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$, maka ordinat $f(x)$ dapat dengan mudah dihitung untuk berbagai harga x dan kurvanya dapat digambarkan.

Pada gambar 5.2 (*a*) telah dilukiskan dua kurva normal yang mempunyai simpangan baku sama, tetapi rataannya berbeda. Kedua kurva bentuknya persis sama, tetapi titik tengahnya terletak di tempat yang berbeda di sepanjang sumbu datar.

Pada gambar 5.2(*b*) terlukis dua kurva normal dengan rataan yang sama tetapi simpangan bakunya berbeda. Kedua kurva mempunyai titik tengah sama tetapi kurva dengan simpangan baku yang lebih besar tampak kurvanya lebih landai/rendah dan lebih menyebar.

Pada gambar 4.2 (*c*) memperlihatkan lukisan dua kurva normal yang baik rataan maupun simpangan bakunya berlainan. Jelas keduanya mempunyai titik tengah yang berlainan pada sumbu datar dan bentuknyapun mencerminkan dua harga simpangan baku yang berlainan.

Lebih lanjut, mahasiswa dapat mengamati dengan lengkap sifat kurva normal tersebut dengan melakukan simulasi pada aplikasi Matlab (*Matriks Laboratorium*) dengan menggunakan perintah **disttool** pada *comand windows* Matlab.

Dengan mengamati grafik serta memeriksa turunan pertama dan kedua dari $f(x) = n(x;\mu;\sigma)$, maka dapat diperoleh lima sifat kurva normal sebagai berikut:

Sifat 4.2 SIFAT KURVA NORMAL

a. Titik pada sumbu datar yang memberikan maksimum kurva, terdapat pada $x = \mu$
b. Kurva simetris terhadap garis tegak yang melalui μ
c. Kurva mempunyai titik belok pada $x = \mu \pm \sigma$ cekung dari bawah untuk $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, dan cekung dari atas untuk harga x lainnya
d. Kedua ujung kurva normal mendekati asimtot sumbu datar, jika harga x bergerak menjauhi μ baik ke kiri maupun ke kanan;
e. Seluruh luas di bawah kurva dan di atas sumbu datar sama dengan 1.

Contoh 5.1

Seorang mahasiswa melakukan penelitian pada kelas untuk mengetahui pengaruh penggunaan media pembelajaran BINGKAI AJAIB dalam meningkatkan prestasi belajar matematika. Hasil evaluasi pembelajaran yang diperoleh sebagai berikut:

Data prestasi belajar kelas II A

12,5	75,0	53,0	64,8	80,0	27,0	87,0	35,0	25,5	38,0	40,0	47,5	42,8	45,5	43,5
46,0	47,0	45,0	42,0	43,0	45,0	48,0	49,5	54,0	58,0	69,5	65,5	66,0	64,0	93,5
64,5	72	68,5	65,0	80,0	85,0	72,5	78,5							

Data prestasi belajar kelas II B

22,5	35,0	36,5	32,0	77,5	59,0	60,0	54,0	54,0	59,0	52,5	54,0	59,5	50,0	46,0
51,5	56,0	70,0	58,0	53,0	75,0	76,5	32,0	34,0	28,0	68,5	68,0	65,0	66,5	70,0
81,5	85,0	75,5	36,0	76,5	36,0	35,0								

Selidiki apakah data prestasi belajar siswa kelas tersebut terdistribusi normal?

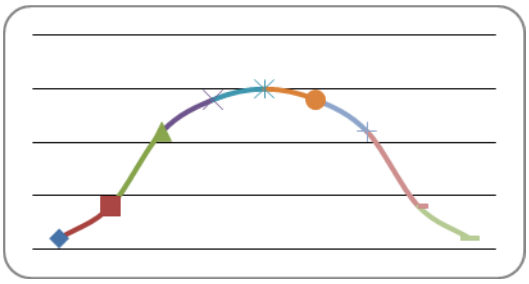
Penyelesaian:

Data prestasi belajar tersebut dapat dikatakan terdistribusi normal apabila data tersebut terdistribusi sebagaimana pada gambar 5.1. Oleh karena itu, untuk mengetahuinya, prosedur paling sederhana yang dapat ditempuh adalah dengan membuat tabel distribusi frekuensi dan menggambar grafik distribusi frekuensinya. Apabila grafiknya menyerupai gambar kurva normal sebagaimana pada gambar 5.1, maka data tersebut dapat dinyatakan sebagai data yang terdistribusi normal. Karena pengamatan adalah kelas II, maka data tersebut digabungkan dan dibuat tabel distribusi frekuensi sebagai berikut:

Tabel 5.1 Distribusi frekuensi

Interval Nilai			Frekuensi
11	-	20	1
21	-	30	4
31	-	40	11
41	-	50	14
51	-	60	15
61	-	70	14
71	-	80	11
81	-	90	4
91	-	100	1
Jumlah			75

Selanjutnya nilai pada kolom frekuensi digambar grafiknya dan diperoleh sebagai berikut:



Gambar 5.3 Distribusi frekuensi data prestasi belajar siswa

Berdasarkan gambar 5.3 di atas, maka dapat dikatakan bahwa data prestasi belajar siswa kelas menyerupai model kurva distribusi normal.

Contoh 5.2

Selidiki apakah $f(x) = n(x;\mu,\sigma)$ benar suatu fungsi peluang?

Penyelesaian:

$f(x)=n(x;\mu,\sigma)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi peluang apabila memenuhi syarat

(*i*). $0 \leq f(x) \leq 1$ dan (*ii*). $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$

Dengan menggunakan metode análisis real, berikut syarat (*i*) akan diselidiki:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow \ln f(x) = \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right] + \ln\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \ln f(x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = 2\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \ln f(x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{x-\mu}{\sigma} = \sqrt{2\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \ln f(x)\right]}$$

$$\Rightarrow x = \mu + \sigma\sqrt{2\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \ln f(x)\right]}$$

Bentuk $\sqrt{2\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \ln f(x)\right]}$

Terdefinisi jika $2\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)-\ln f(x)\right]\geq 0$, akibatnya

$$2\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)-\ln f(x)\right]\geq 0 \Rightarrow \left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)-\ln f(x)\right]\geq 0$$

$$\Rightarrow \ln\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}{f(x)}\geq 0 \Rightarrow \ln\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}{f(x)}\geq \ln e^0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}{f(x)}\geq e^0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}-e^0\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}-\frac{e^0 f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}{f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}{f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}\geq 0 \Rightarrow \left(1-f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)\left(f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)>0$$

Akar-akar karakteristik

$f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}=1$ atau $f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}=0$

Diperhatikan untuk bentuk $f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}=1$

$f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}=1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}>0$ ....(a)

Dari bentuk $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \Rightarrow f(x)\leq 1$ ....(b)

Dari bentuk $f(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}=0 \Rightarrow f(x)=0$ ....(c)

Dari (a), (b) dan (c) diperoleh syarat (*i*) $0\leq f(x)\leq 1$ terpenuhi

Selanjutnya diperiksa apakah syarat (ii) terpenuhi, yakni apakah $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

Misal $u=\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \Rightarrow 2u=\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \Rightarrow x=\mu+\sigma\sqrt{2u} \Rightarrow dx=\frac{\sigma\sqrt{2}}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$,
akibatnya

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u}\left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2}u^{-\frac{1}{2}}du\right)=\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{\sigma}{2\sqrt{\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du+\int_{0}^{\infty}e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du+\int_{0}^{\infty}u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\tau\left(\frac{1}{2}\right)+\tau\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}\right]=\frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}=1$$

Berdasarkan hasil terakhir, maka syarat (ii), yakni bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ terpenuhi

Karena syarat (i) dan (ii) terpenuhi, maka terbukti benar bahwa

$$f(x)=n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},-\infty<x<\infty$$

adalah suatu fungsi peluang.

Karena f(x) adalah suatu fungsi peluang, maka tentunya f(x) memeiliki rataan dan simpangan baku. Rataan dan simpangan baku dari PDF normal adalah sebagai berikut:

Teorema 5.1 RATAAN DAN RAGAM DISTRIBUSI NORMAL

Jika X peubah acak bebas yang terdistribusi normal, maka rataan X adalah $\mu_x=\mu$ dan dan Ragam X adalah $\sigma_x^2=\sigma^2$.

Bukti:

Berdasarkan definisi rataan bahwa $\mu_x=E(x)=\left.\frac{dM_x(t)}{dx}\right|_{t=0}$ dengan $M_x(t)$ adalah fungsi pembangkit moment yang terdefinisi sebagai $M_x(t)=E(e^{tx})$ maka diperoleh bahwa

$$M_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2-tx\right)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2-\frac{2\sigma^2}{2\sigma^2}tx\right)}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-\mu)^2-2\sigma^2tx\right)}dx$$

Sekarang perhatikan bentuk berikut:

$$\left[x-\left(\mu+t\sigma^2\right)\right]^2-2\mu t\sigma^2-t^2\sigma^4=x^2-2x\left(\mu+t\sigma^2\right)+\left(\mu+t\sigma^2\right)^2-2\mu t\sigma^2-t^2\sigma^4$$

$$=x^2-2x\mu-2xt\sigma^2+\left(\mu^2+2\mu t\sigma^2+\left(t\sigma^2\right)^2\right)-2\mu t\sigma^2-t^2\sigma^4$$

$$=x^2-2x\mu-2xt\sigma^2+\mu^2+2\mu t\sigma^2+t^2\sigma^4-2\mu t\sigma^2-t^2\sigma^4$$

$$=x^2-2x\mu+\mu^2-2xt\sigma^2$$

$$=\left(x-\mu\right)^2-2\sigma^2xt$$

Jadi $\left(x-\mu\right)^2-2\sigma^2xt=\left[x-\left(\mu+t\sigma^2\right)\right]^2-2\mu t\sigma^2-t^2\sigma^4$ sehingga diperoleh

$$M_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left[x-\left(\mu+t\sigma^2\right)\right]^2-2\mu t\sigma^2-t^2\sigma^4\right)}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left[x-\left(\mu+t\sigma^2\right)\right]^2\right)}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\mu t\sigma^2-t^2\sigma^4\right)}dx$$

$$=e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left(2\mu t\sigma^2+t^2\sigma^4\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left[x-\left(\mu+t\sigma^2\right)\right]^2\right)}dx$$

$$= e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(\mu+t\sigma^2)}{\sigma}\right)^2} dx = e^{\mu t + \frac{t^2}{2}} n(x, \mu + t\sigma^2, \sigma)$$

$$= e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}} (1) = e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$\therefore M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

sehingga diperoleh rataan sebagai berikut

$$\mu_x = E(x) = \left.\frac{dM_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.(\mu + t\sigma^2)e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}\right|_{t=0} = \mu$$

dan

$$E(x^2) = \left.\frac{d^2M_x(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left((\mu + t\sigma^2)e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}\right)\right|_{t=0} = \left[(0+\sigma^2)e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + (\mu + t\sigma^2)e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}(\mu + t\sigma^2)\right]_{t=0}$$

$$= (0+\sigma^2)e^{\mu(0) + \frac{1}{2}(0)^2\sigma^2} + (\mu + (0)\sigma^2)e^{\mu(0) + \frac{1}{2}(0)^2\sigma^2}(\mu + (0)\sigma^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

sehingga diperoleh ragam sebagai $\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$.

Contoh 5.3

Kembali lihat contoh 5.2 di atas. Tentukan berapakah peluang seoprang siswa yang tdipilih secara acak, memperoleh nilai tepat 65?

***Penyelesaian*:**

Karena data prestasi belajar tersebut terdistribusi normal, maka permasalahan pada contoh 5.2 dapat diselesaikan dengan menggunakan fungsi normal. Berasarkan contoh 5.2 di atas, telah dibuktikan bahwa $f(x) = n(x;\mu,\sigma)$ adalah suatu fungsi peluang. Oleh karena untuk suatu $X = x$, maka $P(X=x) = f(x)$. Untuk itu perlu dicari nilai rataan dan simpangan baku data prestasi belajar siswa. Karena pengamatan dalam permasalahan ini adalah seluruh kelas II dan telah dimiliki data seluruh kelas II, maka rataan dan simpangan baku diberikan sebagai berikut:

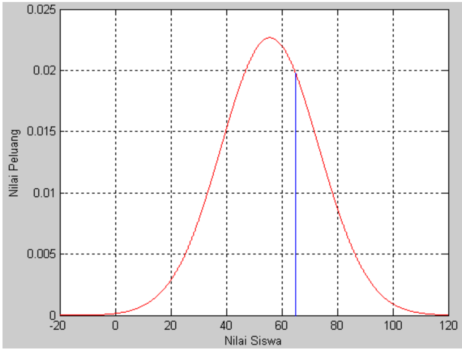
$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{75} x_i}{75} = 55{,}8$$

dan

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{75}(x_i - 55{,}8)^2}{75-1}} = 17{,}6$$

sehingga diperoleh Peluang siswa yang terpilih secara acak akan memperoleh nilai tes tepat 65 adalah

$$P(x = 65) = f(65) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(17{,}6)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{65-55{,}8}{17{,}6}\right)^2} = 0{,}02 = 2\%$$



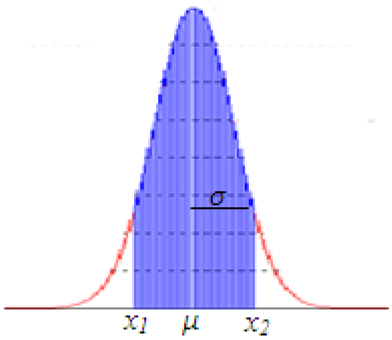
Gambar 5.4 Kurva distribusi normal dengan $\mu = 55{,}7$ dan $\sigma = 17{,}5$ serta nilai dari $P(x=65)=2\%$

4. 4 Luas di bawah Kurva Normal

Kurva setiap distribusi peluang kontinu atau fungsi padat peluang dibuat sedemikian rupa sehingga luas di bawah kurva diantara dua ordinat $x = x_1$ dan $x = x_2$ sama dengan peluang peubah acak X mendapat harga antara $x = x_1$ dan $x = x_2$. Jadi untuk kurva normal pada gambar di atas.

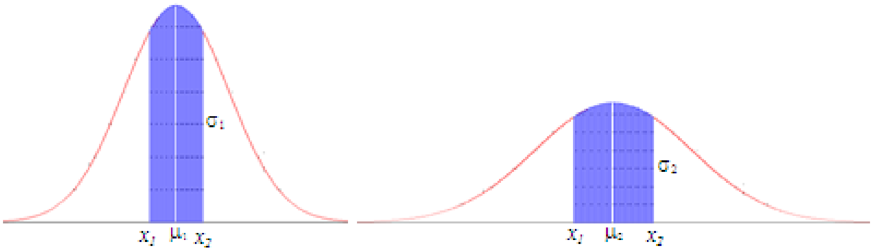
$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

menyatakan luas daerah yang diarsir.



Gambar 5.5 Luas daerah di bawah kurva normal antara x_1 dan x_2

Di depan telah ditunjukkan dengan beberapa gambar, bahwa kurva normal tergantung pada rataan dan simpangan baku distribusi. Luas daerah di bawah kurva antara dua ordinat sembarang jelas tergantung pada harga μ dan σ. Hal ini terlihat seperti gambar berikut. Pada gambar tersebut daerah yang berpadanan dengan $P(x_1 \le X \le x_2)$ untuk kedua kurva dengan rataan dan simpangan baku yang berbeda adalah daerah yang terdapat dua arsiran.



Gambar 5.6 $P(x_1<X<x_2)$ untuk kurva normal dengan rataan dan simpangan baku yang berbeda

Contoh 5.4

Lihat kembali contoh pada 5.2 di atas. Tentukan peluang seorang siswa yang terpilih secara acak akan memperoleh nilai

a. Kurang dari 65

b. Lebih dari 75

c. Diantara 65 dan 75

Penyelesaian:

a. Peluang siswa yang terpilih secara acak akan memperoleh nilai tes kurang dari 65 adalah

$$P(X < x = 65) = \int_{-\infty}^{65} f(x)dx = \int_{-\infty}^{55,8} f(x)dx + \int_{55,8}^{65} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{55,8} \frac{1}{\sqrt{2\pi(17,6)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-55,8}{17,6}\right)^2} dx + \int_{55,8}^{65} \frac{1}{\sqrt{2\pi(17,6)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-55,8}{17,6}\right)^2} dx$$

Karena $\mu = 55,8 \Rightarrow \int_{-\infty}^{55,8} f(x)dx = 0,5$ dan dengan menggunakan integral numerik metode deret Reimant untuk $\Delta x = 0.0001$, diperoleh bahwa $\int_{55,8}^{65} f(x)dx = 0,19942$ sehingga nilai dari $P(X < x = 65) = 0,5 + 0,19942 = 0,69942 = 69,94\%$

Jadi peluang siswa yang terpilih memperoleh nilai tes kurang dari 65 adalah 69,942%.

c. Peluang siswa yang terpilih secara acak akan memperoleh nilai tes lebih dari 75 adalah $P(X \geq x=75)$. Nilai ini diberikan sebagai berikut:

$$P(X \geq x = 75) = \int_{75}^{\infty} f(x)dx = \int_{55,8}^{\infty} f(x)dx - \int_{55,8}^{75} f(x)dx$$

$$= \int_{55,8}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(17,6)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-55,8}{17,6}\right)^2} dx - \int_{55,8}^{75} \frac{1}{\sqrt{2\pi(17,6)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-55,8}{17,6}\right)^2} dx$$

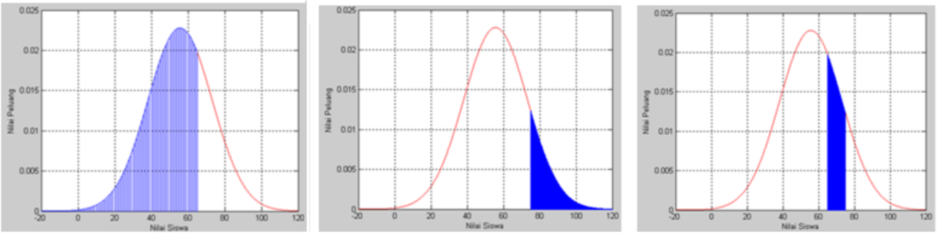
Karena $\mu = 55,8 \Rightarrow \int_{55,8}^{\infty} f(x)dx = 0,5$ dan dengan menggunakan integral numerik metode deret Reimant untuk $\Delta x = 0.0001$, diperoleh bahwa $\int_{55,8}^{75} f(x)dx = 0,36235$.

Sehingga nilai dari $P(X > x = 75) = 0,5 - 0,36235 = 0,13765 = 13,765\%$

Jadi peluang siswa yang terpilih memperoleh nilai tes lebih dari 75 adalah 13,77%.

d. Peluang siswa yang terpilih secara acak akan memperoleh nilai tes antara 65 sampai 75 adalah

$$P(65 \le X \le 75) = \int_{65}^{75} \frac{1}{\sqrt{2\pi(17.6)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-55,8}{17,6}\right)^2} dx = 0,16293 = 16,3\%$$



(a) (b) (c)

Gambar 5.7 Kurva distribusi normal dengan $\mu = 55,7$ dan $\sigma = 17,5$ serta (*a*) . P(*X*=65); (b); P(*X*>*x*=75); (*c*) *P*(65<X7*5*)

4.2 Distribusi Normal Baku

Untuk memudahkan perhitungan dalam menentukan nilai integral fungsi padat normal, maka dibuat tabel seperti tertera pada tabel 3 lampiran 3 di belakang. Akan tetapi, tidak mungkin membuat tabel yang berlainan untuk setiap nilai μ dan σ. Seluruh nilai dalam tabel merupakan hasil transformasi setiap peubah acak X menjadi himpunan pengamatan baru satu peubah acak normal Z dengan rataan 0 (nol) dan variansi 1 (satu).

> ***Teorema 5.2***
>
> Jika X peubah acak yang terdistribusi normal dengan rataan μ dan simpangan baku σ, maka peubah acak baru $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ akan terdistribusi normal baku

Bukti:

$$X \sim n(x,\mu,\sigma) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; -\infty < x < \infty$$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = z\sigma + \mu \Rightarrow dx = \sigma dz$, akibatnya diperoleh

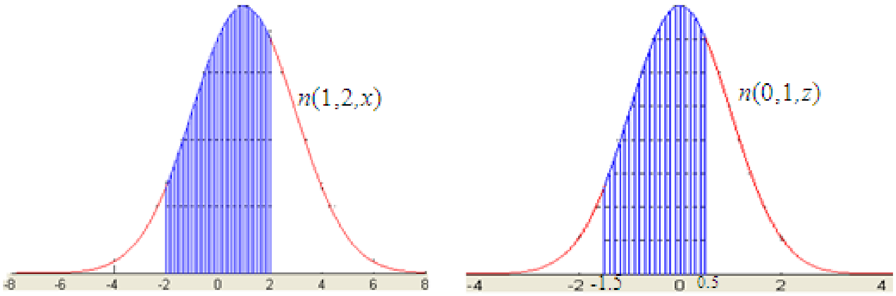
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-0}{1}\right)^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} n(z,0,1)dz$$

Bentuk integral terakhir membuktikan bahwa

$$X \sim n(x,\mu,\sigma) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim n(z,0,1)$$

Distribusi asli yang telah ditransformasikan dilukiskan pada gambar 5.5. Karena semua nilai X antara x_1 dan x_2 mempunyai nilai Z padanan antara z_1 dan z_2, maka luas daerah di bawah kurva X antara ordinat $x = x_1$ dan $x = x_2$ pada gambar 5.5 sama dengan luas daerah di bawah kurva Z antara ordinat $z = z_1$ dan $z = z_2$ yang telah ditransformasikan.



Gambar 5.8 Luas daerah di bawah kurva distribusi normal dan di bawah kurva z

Sekarang banyaknya tabel kurva normal yang diperlukan telah diperkecil menjadi satu, yaitu distribusi normal baku. Tabel 3 (lihat lampiran 3) memberikan luas di bawah normal baku yang berpadanan dengan $P(0 < z < b)$. Perlu diingat, bahwa luas adalah besaran skalar, jadi selalu positif (tidak pernah negatif). Sedangkan tanda negatif pada z menunjukkan letak daerahnya saja. Misalnya daerah antara $z =$ 0 dan $z =$ 2,15 adalah daerah luasan di sebelah kanan $\mu = 0$, sedangkan daerah antara $z =$ 0 dan z = -2,15 adalah luasan di sebelah kiri $\mu = 0$. Luas kedua daerah ini sama yang besarnya akan dihitung melalui contoh-contoh berikut.

Contoh 5.5.

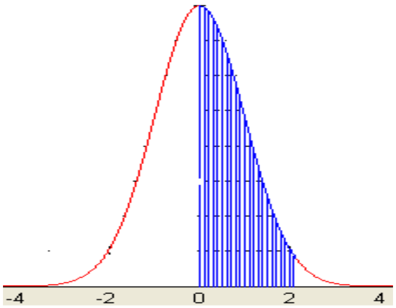
Dengan menggunakan tabel distribusi normal baku (tabel z), tentukan luas daerah

a. Antara $z =$ 0 dan $z =$ 2,15
b. Antara $z =$ 0 dan $z =$ -1,86
c. Antara z = -1,86 dan z = 2,15
d. Antara z = 1,34 dan z =2,06
e. Untuk z>1,96
f. Untuk z>1,96

Solusi:

a. Antara $z =$ 0 dan $z =$ 2,15

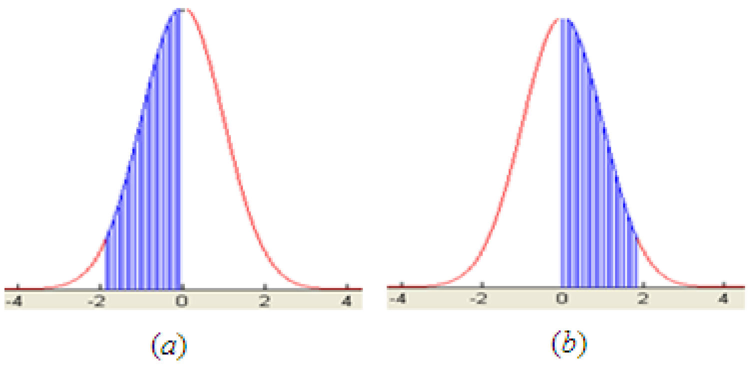
Cara menghitung luasnya adalah dengan melihat tabel z. Pada kolom paling kiri cari angka 2,1 dan cari pada baris paling atas angka 05. Dari 2,1 tarik arah ke kanan dan dari 05 tarik menurun, didapat angka 4842. Angka ini merupakan angka dibelakang koma, sehingga luas daerah yang dicari adalah 0,4842. Gambarnya adalah sebagai berikut:



Gambar 5.9 Luar daerah di bawah kurva normal baku antara $z = 0$ dan $z = 2{,}15$

b. Antara $z = 0$ dan $z = -1{,}86$

Karena z bertanda negatif, maka daerah luasannya di sebelah kiri rataan. Karena sifat simetris kurva normal, maka luas daerah antara z = -1.86 dan z = 0 sama dengan luas daerah antara $z = 0$ dan $z = 1.86$. Seperti cara mencari pada soal a, pada daftar z lihat kolom paling kiri nilai 1.8, kemudian baris paling atas lihat angka 06. Dari 1,8 tarik ke kanan dan dari .06 tarik ke bawah diperoleh angka 4686. Jadi luas daerah yang dicari adalah 0,4686

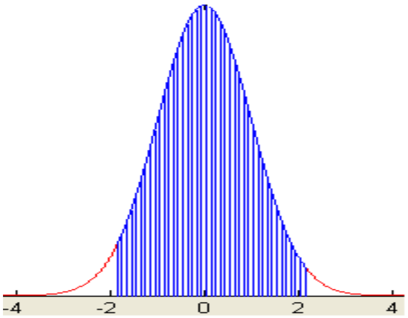


Gambar 5.10 Luar di bawah kurva normal baku antara (a) $z = -1{,}\ 86$ dan $z = 0$, (b) $z = 0$ dan $z = 1{,}86$

c. Antara z = -1,86 dan z = 2,15

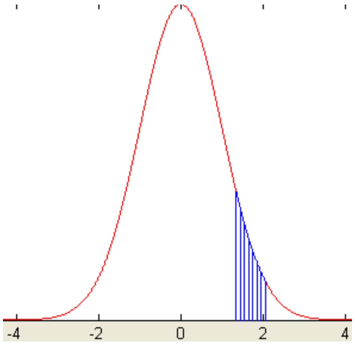
Dari grafik sebagaimana pada gambar 5.8 di bawah, terlihat bahwa kita perlu mencari luas daerah dua kali, lalu menjumlahkannya. Mengikuti cara pada soal a dan b, maka diperoleh luas daerah antara $z = -1.86 < Z < z = 2.15$ diberikan sebagai berikut:

$$z = -1.86 < Z < z = 2.15 = (z = -1.86 < Z) + (Z < z2.15) = 0.4686 + 0.4842 = 0.9528$$



Gambar 5.8 Luar daerah di bawah kurva normal baku antara z = -1.86 dan z = 2.15

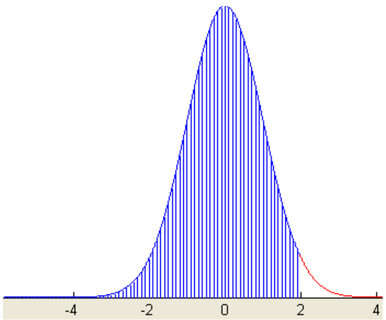
d. Antara z = 1,34 dan z =2,06



Gambar 5.9 Luas di bawah kurva normal baku antara z = 1.34 dan z = 2.06

Untuk soal ini, kita menghitung irisan antara luas z = 0 sampai z = 2,06 dan z = 0 sampai z = 1,34. Dengan mengurangi luas z =0 sampai z =2,06 dan z = 0 sampai z = 1,34. dengan cara yang sama seperti soal-soal sebelumnya, maka diperoleh luas daerah yang diarsir adalah $z_{1.36} < Z < z_{2.06} = z_{2,06} - z_{1,34}$ = 0,4803 - 0,4099 = 0,0704.

e. z< 1,96

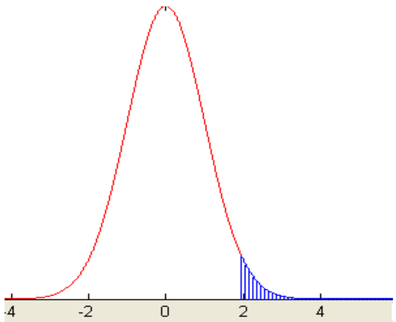


Gambar 5.10 Luas daerah di bawah kurva normal baku antara z < 1.96

Luasnya sama dengan dari z = 0 ke kiri ditambah dengan luas dari z = 0 sampai ke z = 1,96. Jadi, luasnya = 0,5000 + 0,4750 = 0.9750

f. z>1,96

Luasnya sama dengan dari z = 0 ke kanan (=0,5) dikurangi dengan luas dari z = 0 sampai ke z = 1,96. Jadi, luasnya = 0,5000 - 0,4750 = 0,0250.



Gambar 5.11 Luas dibawah kurva normal baku dengan z > 1,96

Contoh 5.6

Selesaikan permasalahan pada contoh 5.3 di atas menggunakan distribusi normal baku.

Solusi:

Untuk $x = 65 \Rightarrow z = \dfrac{65 - 55.7}{17.5} = 0,5314$ dan untuk

$x = 75 \Rightarrow z = \dfrac{75 - 55.7}{17.5} = 1,1029$ sehingga diperoleh

a. $$P(X < x = 65) = \int_{-\infty}^{65} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0,53} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{0,53} f(z)dz$$

$$= 0,5 + P(0 < Z < 0,53) = 0,5 + 0,2019 = 0,7019 = 70,19\%$$

b. $$P(X > x = 75) = \int_{75}^{\infty} f(x)dx = \int_{1,1}^{\infty} f(z)dz = \int_{0}^{\infty} f(z)dz - \int_{0}^{1,1} f(z)dz = 0,5 - 0,3643 = 0,1357 = 13,57\%$$

c. $$P(65 < X < 75) = \int_{65}^{75} f(x)dx = \int_{0,53}^{1,1} f(z)dz = \int_{0}^{1,1} f(z)dz - \int_{0}^{0,53} f(z)dz = 0,3643 - 0,2019 = 0,1624 = 16,24\%$$

Contoh 4.6.

Dari suatu penelitian di Rumah Sakit Sayang Ibu Selong, diperoleh data bahwa rata-rata berat bayi yang baru lahir adalah 3750 gram dengan simpangan baku 325 gram. Jika berat bayi berdistribusi normal, maka tentukan ada:

a. Berapa bayi yang beratnya lebih dari 4500 gram, jika ada 1000 bayi?
b. Berapa bayi yang beratnya antara 3500 gram dan 4500 gram, jika semuanya ada 1000 bayi
c. Berapa bayi yang beratnya kurang atau sama dengan 4000 gram, jika semuanya ada 1000 bayi?
d. Berapa bayi yang beratnya 4250 gram, jika semuanya ada 5000 bayi?

Penyelesaian:

a. Dengan memakai rumus transformasi, untuk $x = 4.500$ diperoleh:

$z = \dfrac{4.500 - 3.750}{325} = 2,31$ dengan menggunakan tabel Z, diperoleh nilai $z_{2,31}$

= 0,4896. Karena yang ditanyakan adalah berat bayi yang lebih dari 4.500 gram, pada grafik luasnya ada di sebelah kanan $z_{2,31}$, seperti contoh-contoh yang terdahulu, maka luasnya adalah 0,5000- 0,4896 = 0,0104. Jadi, ada 0,0104 $\times$ 1.000 = 10,4 $\approx$ 10 bayi yang beratnya lebih dari 4.500 gram.

b. Dengan x_1=3.500 dan x_2 = 4.500 diperoleh: $z_1 = \dfrac{3.500 - 3.750}{325} = -0,77$ dan $z_2 = \dfrac{4.500 - 3.750}{325} = 2,31$. Dengan bantuan tabel z diperoleh luas $z_{-0,77}$ = 0,2794 dan $z_{2,31}$= 0,4896, sehingga luas keseluruhan 0,2794 + 0,4896 = 0,7690. Jadi banyak bayi yang beratnya antara 3.500 gram sampai dengan 4.500 gram diperkirakan ada (0,7690)(1.000) = 769 bayi

c. Beratnya kurang dari atau sama dengan 4.000 gram, maka beratnya harus kurang dari 4.000,5 gram. Sehingga untuk X= 4000,5 maka $z = \dfrac{4.000,5 - 3.750}{325} = 0,77.$ dan $z_{0,77}$=0,2794. Peluang berat bayi kurang dari atau sama dengan 4.000 gram = 0,5 + 0,2794 = 0,7794. Jadi banyaknya bayi yang beratnya kurang dari atau sama dengan 4.000 gram = (0,7794)(1.000)= 779,4 $\approx$ 779 bayi

d. Berat 4.250 gram, berarti berat antara 4.249,5 dan 4.250,5 dengan x_1 = 4.249,5 dan x_2 = 4.250,5 diperoleh $z_1 = \dfrac{4.249,5 - 3.750}{325} = 1,53$ dan $z_2 = \dfrac{4.250,5 - 3.750}{325} = 1,54.$ Dengan bantuan tabel z diperoleh luas $z_{1,53}$ = 0,4370 dan $z_{1,54}$ = 0,4382, sehingga luas keseluruhan adalah 0,4382, sehingga luas keseluruhan adalah 0,4382 - 0,4370 = 0,0012. Jadi, banyaknya bayi yang beratnya 4.250 gram = (0,0012)(5000) = 6 bayi

APLIKASI DISTRIBUSI NORMAL

Dengan sedikit imajinasi, berat ayam potong seperti yang dicontohkan di atas bisa dianalogikan dengan pengukuran lainnya yang berkaitan dengan keputusan manajerial seperti hasil penjualan bulanan, pengukurann daya rentang suatu material, volume minuman dalam kemasan dan lain sebagainya. Jika data ini berdistribusi normal, maka dapat diketahui peluang setiap unsur data apakah termasuk ke dalam suatu nilai-nilai tertentu.

Distribusi normal dapat dikatakan sebagai distribusi yang paling banyak digunakan dalam analisis statistika lanjutan. Banyak analisis statistika lanjutan untuk keperluan penaksiran parameter maupun pengujian hipotesis yang mensyaratlkan bahwa data yang dikumpulkan harus berdistribusi normal. Olehkarena itu, pemahaman yang mendalam tentang distribusi ini perlu dimiliki oleh seorang manajer agar informasi yang dihasilkan dari analisis data statistika dapat digunakan secara benar dalam proses pengambilan keputusan.

PENDEKATAN NORMAL TERHADAP BINOMIAL

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa apabila n sangat besar (di luar tabel binomial) dan p sangat kecil (seperti $np \leq 5$), maka distribusi binomial dapat didekati oleh distribusi Poisson. Akan tetapi apabila n di luar nilai tabel dan p bernilai sangat kecil atau sangat besar, maka distribusi binomial dapat didekati oleh distribusi normal. Sebagai petunjuk dalam melakukan pendekatan normal dari binomial adalah :

$$n \geq 30$$
$$np \text{ dan } n(1 - p) \geq 5$$

Contoh 4.7 :

Anggota suatu dewan juri berisikan 55% wanita. Berapa peluang terpilihnya 50 anggota juri yang dipilih secara acak akan berisikan anggota wanita sebanyak 30 orang atau lebih. Pemilihan ini jelas merupakan proses binomial dengan $n = 50$, $p = 0{,}55$ dan $x \geq 30$. Tabel binomial tidak mempunyai nilai untuk $n = 50$. Pendekatan Poisson juga tidak dapat dilakukan karena $np = 27{,}5$.Demikian pula tehnik menggunakan $1 - p$ untuk p tidak dapat dilakukan juga karena $n(1 - p) = 23{,}5$. Akan tetapi kriteria untuk pendekatan normal sudah dipenuhi dimana parameter binomial untuk mendekati distribusi normal adalah :

$$\mu_B = np = 27{,}5$$
$$\sigma_B = \sqrt{np(1-p)} = 3{,}52$$

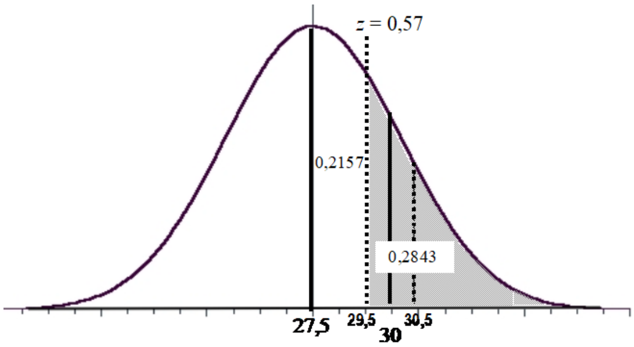
Sebelum menghitung peluang distribusi normal, terlebih dahulu perlu dihitung suatu koreksi yang memperkenankan kita melakukan pendekatan dari distribusi diskrit ke distribusi kontinu. Dalam distribusi kontinu, nilai 29 didefinisikan mengambil nilai antara "28,5 sampai 29,5", nilai 30 di antara nilai 29,5 sampai 30,5 dan seterusnya. Dengan demikian, nilai-nilai diskrit yang sama atau lebih besar dari 30 dapat diperlihatkan dalam Gambar 4.3. Akhirnya persoalan di atas dapat diselesaikan sebagaimana persoalan distribusi normal biasa yaitu :

$$z = \frac{29{,}5 - 27{,}5}{3{,}52} = 0{,}57$$

Luas area dari 0 sampai 0,57 adalah 0,2157. Jadi :

$$P(X \geq 29{,}5) = 0{,}5 - 0{,}2157 = 0{,}2843$$

Artinya peluang (pendekatan) terpilihnya anggota juri wanita lebih dari 30 orang adalah 0,2843.(Jika dihitung dengan distribusi binomial diperoleh 0,2862).



Gambar 4.12 Pendekatan normal terhadap binomial

PENDEKATAN NORMAL TERHADAP POISSON

Apabila rata-rata distribusi Poisson lebih dari 10, maka mustahil untuk menggunakan tabel peluang Poisson (meskipun sebenarnya dapat dilakukan dengan komputer). Oleh karenanya pendekatan normal kepada binomial dapat diperluas kepada distribusi Poisson (dalam hal ini $\lambda > 10$).

Contoh 5.8 :
Rata-rata jumlah kendaraan yang mengunjungi bengkel pada jam 16.00 – 17.00 di akhir pekan adalah 16. Berapa peluang bahwa kurang dari 20 kendaraan akan mengunjungi bengkel pada jam yang sama di hari Selasa mendatang.
Rata-rata distribusi Poisson λ lebih dari 10, sehingga pendekatan normal dapat dilakukan. Parameter Poisson yang ekivalen dengan distribusi normal adalah :

$$\mu_P = \lambda = 16$$
$$\sigma_P = \sqrt{\lambda} = 4$$

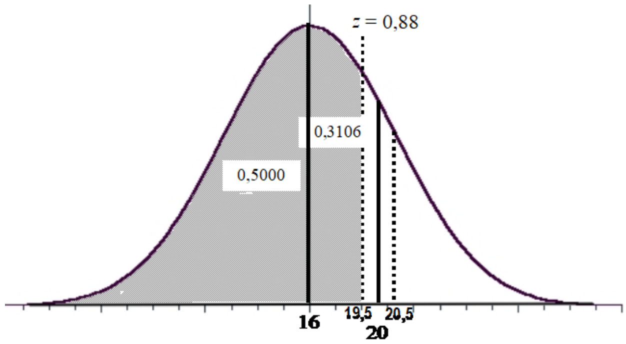
Koreksi dari distribusi diskrit ke kontinu perlu dilakukan seperti yang dicontohkan sebelumnya. Jadi dalam hal ini peluang "kurang dari 20" dapat kita didefinsikan sebagai "kurang atau sama dengan 19,5". Luas area di bawah kurva normal lihat Gambar 4.4) dapat dihitung dengan :

$$z = \frac{19{,}5 - 16}{4} = 0{,}88$$

Dengan menggunakan tabel diperoleh luas areanya adalah 0,3106. Karena nilai z positif, maka luas area yang dicari adalah mulai dari z = 0,88 ke arah kiri atau :

$$P(X \leq 19{,}5) = 0{,}5 + 0{,}3106 = 0{,}8106$$

Jadi peluang (pendekatan) kendaraan yang mengunjungi bengkel di hari Selasa kurang dari 20 buah adalah 0,8106 (perhitungan secara eksak dengan menggunakan distribusi Poisson adalah 0,8122).



Gambar 4.13. Pendekatan normal terhadap Poisson

LATIHAN

1. Pengukuran tinggi yang dilakukan oleh lembaga pendidikan tentara terhadap sejumlah besar calon prajurit ternyata berdistribusi normal. Anggaplah rata-rata tinggi yang diperoleh adalah 168 cm dengan simpangan baku 4 cm. Berapakah peluang seseorang yang diambil secara acak tingginya :

    a. Kurang dari 165 cm
    b. Lebih dari 170 cm

2. Jika rata-rata daya tahan lampu pijar adalah 3 tahun dengan simpangan baku satu tahun. Gunakanlah metode kurva normal untuk menghitung peluang satu bola lampu yang dipilih secara acak memiliki daya tahan 4 tahun atau lebih.

3. Berikut ini adalah nilai statistika dari 200 bagi mahasiswa non-eksakta :

Nilai	Jml. Mhs	Nilai	Jml. Mhs	Nilai	Jml. Mhs	Nilai	Jml. Mhs

99	1	87	2	75	14	64	2
98	1	85	3	74	12	63	3
97	1	84	4	73	11	62	4
96	2	83	5	72	10	61	2
95	1	82	6	71	6	60	2
94	1	81	5	70	9	59	1
93	1	80	6	69	7	57	1
92	2	79	8	68	5	55	2
90	2	78	8	67	3	54	2
89	2	77	10	66	5	53	1
88	3	76	16	65	3	52	2
						50	3

Jika seorang profesor menganggap bahwa nilai ujiannya berdistribusi normal dan menetapkan bahwa pembagian skor mutu adalah A = 5%, B = 20%, C = 50%, D = 20% dan E = 5% (biasanya disebut penetapan nilai dengan basis 5-20-50-20-5). Tentukanlah berapa mahasiswa yang mendapat nilai A, B, C, D dan E.

4.2 Distribusi t Student

Distribusi *t* (atau sering disebut distribusi *t* Student) adalah distribusi probabilitas yang digunakan untuk memperkirakan parameter populasi bila ukuran sampel kecil dan / atau bila ragam populasi tidak diketahui.

Mengapa Menggunakan Distribusi t?

Menurut teorema batas pusat, distribusi sampling statistik (seperti mean sampel) akan mengikuti distribusi normal, selama ukuran sampel cukup besar. Oleh karena itu, ketika kita mengetahui standar deviasi populasi, kita dapat menghitung nilai *z*, dan menggunakan distribusi normal untuk mengevaluasi probabilitas dengan mean sampel.

Tapi ukuran sampel terkadang kecil, dan seringkali kita tidak tahu standar deviasi populasi. Ketika salah satu dari masalah ini terjadi, statistikawan mengandalkan distribusi statistik *t* (juga dikenal sebagai nilai t.

Derajat kebebasan

Sebenarnya ada banyak distribusi t yang berbeda. Bentuk distribusi t tertentu ditentukan oleh derajat kebebasannya. Derajat kebebasan mengacu pada jumlah observasi independen dalam sekumpulan data.

Ketika memperkirakan skor rata-rata atau proporsi dari satu sampel, jumlah pengamatan independen sama dengan ukuran sampel dikurangi satu. Oleh karena itu, distribusi statistik t dari sampel berukuran 8 akan dijelaskan oleh distribusi t yang memiliki 8 - 1 atau 7 derajat kebebasan. Demikian pula, distribusi t yang memiliki 15 derajat kebebasan akan digunakan dengan sampel berukurn 16.

Sifat dari Distribusi t

Distribusi t memiliki sifat sebagai berikut: Rata-rata distribusi sama dengan 0.

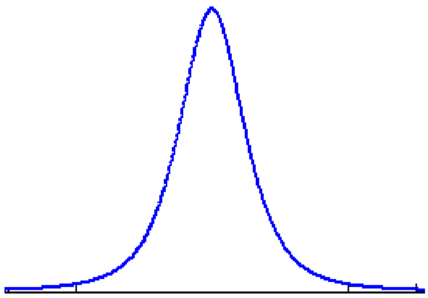
- Ragamnya sama dengan v / (v - 2), di mana v adalah derajat kebebasan (lihat bagian terakhir) dan v> 2.
- Ragamnya selalu lebih besar dari 1, meski mendekati 1 bila ada banyak derajat kebebasan. Dengan derajat kebebasan yang tak terbatas, distribusi t sama dengan distribusi normal standar.

Kapan harus menggunakan distribusi t

Distribusi t dapat digunakan dengan statistik yang memiliki distribusi berbentuk lonceng (yaitu kira-kira normal). Distribusi sampling statistik harus berbentuk lonceng jika ada persyaratan berikut yang berlaku.

- Distribusi populasi normal.
- Distribusi populasi simetris, unimodal, tanpa outlier, dan ukuran sampel paling sedikit 30.
- Distribusi populasi agak miring, tidak rata, tanpa outlier, dan ukuran sampel paling sedikit 40.
- Ukuran sampel lebih besar dari 40, tanpa outlier.

Suatu peubah acak kontinu X yang terdistribusi sebagaimana pada gambar 5.14 berikut disebut sebagai distribusi Studen's-*t*



Gambar 4.14 Kurva distribusi Studen's-*t*

Persamaan yang memenuhi kurva tersebut diberikan diberikan sebagai berikut:

Definisi 4.2 PROBABILITY DENSITY FUNCTION (PDF) STUDENT'S *t*

Peubah acak X terdistribusi studen's t jika fungsi padatnya diberikan oleh

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{\frac{(n+1)}{2}}}. & \textit{untuk } -\infty < t < \infty \\ 0 & \textit{Untuk x lainnya} \end{cases}$$

dengan n bilangan bulat positif yang disebut sebagai derajat kebebasan

Peluang P ($a \leq T \leq b$) dicari seperti pada fungsi densitas yang lain, yaitu :

P (a$\leq$ $T\leq$ b) = $\int_a^b f(t)dt.$ Karena menghitung integralnya cukup sulit, maka dalam mencari probalitias digunakan tabel distribusi student's t (lihat Tabel 5. lampiran 5).

Contoh 4.9

Tulislah fungsi densitas student's t, jika derajat kebebesannya $n = 4$

Penyelesaian:

Diketahui bahwa $n = 4$, maka diperoleh

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{4+1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{8\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}};\ untuk\ -\infty < t < \infty$$

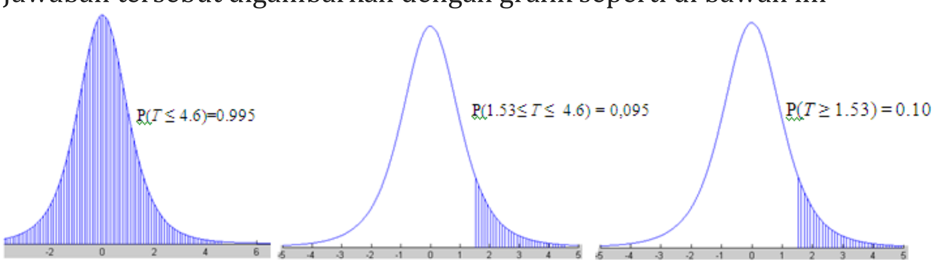
Contoh 4.10: Hitunglah dengan menggunakan tabel distribusi t:

a. $P(T \leq 4{,}6)$
b. $P(1,53 \leq T \leq 4{,}6)$
c. $P(T \geq 1{,}53)$

Penyelesaian:

a. Untuk menjawab soal ini maka, perlu kita melihat tabel distribusi t, cari kolom paling kiri, temukan angka 4 (sesuai dengan derajat kebebasan-4), dari angka 4 ini kita tarik ke kanan, sehingga menemukan angka 4,6. Dari 4,6 ini kita tarik ke atas, maka kita temukan angka $t_{0,\ 995}$. Jadi, P ($T\leq$ 4,6) = 0, 995.
b. Seperti langkah soal a, tetapi kita temukan dahulu P($T\leq$1,53) = 0,9 dan P($T\leq$4,6) = 0,995, Jadi, P(1,53 <T<4,6) = P($T\leq$4,6) - P($T\leq$1,53) = 0.995 - 0,90 = 0,095
c. P (T$\geq$ 1,53) = 1-P (T<1,53) = 1- 0,90 = 0,10

Jawaban tersebut digambarkan dengan grafik seperti di bawah ini



Gambar 5.15 Grafik luas daerah di bawah kurva distribusi student's t

Teorema 4.3 RATA-RATA DAN RAGAM DISTRIBUSI STUDENT'S t
Jika X terdistribusi student's t dengan derajat kebebasan n, maka rata-rata dan ragam diberikan oleh $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = \frac{n}{n-2}, n > 2$

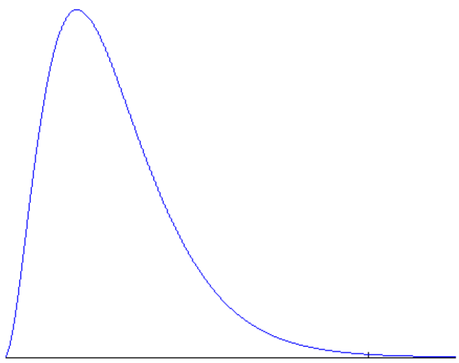
Bukti teorema ini diberikan sebagai latihan bagi mahasiswa. Cara penyelesaian dapat menyesuaikan dengan pembuktian pada teorema 5.1 di atas.

Contoh 5.11

Dari contoh 5.10 di atas, jika kita hitung rataan dan ragaminya, maka diperoleh $\mu = 0$ untuk $n = 4$ dan $\sigma^2 = \frac{4}{4-2} = 2$ untuk $n = 4$.

4.3 Distribusi Chi-Kuadrat

Suatu peubah acak kontinu X yang terdistribusi sebagaimana pada gambar 4.16 berikut disebut sebagai distribusi eksponensial, dengan parameter β,



Gambar 4.16 Kurva distribusi Chi-Kudrat

Persamaan yang memenuhi kurva tersebut diberikan dengan memilih $\alpha = n/2$ dan $\beta = 2$ pada PDF gamma.

Definisi 5.3 PROBABILITY DENSITY FUNCTION (PDF) GAMMA
Peubah acak X terdistribusi chi-kuadrat jika fungsi padatnya diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan n bilangan bulat positif yang disebut sebagai derajat kebebasan
Distribusi Chi-Kudrat ini juga dilambangkan dengan χ^2.

Seperti juga pada fungsi densitas, maka probabilitasnya dicari dengan $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx$ atau dapat dicari lewat tabel distribusi Chi-Kuadrat (lihat Tabel 4 pada Lampiran 4).

Contoh 4.12

Tulislah fungsi densitas chi-kuadrat dengan derajat kebebasan 4.

Penyelesaian:

Diketahui bahwa derajat kebebasan 4, berarti n = 4. jadi fungsi densitasnya adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^2\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-x/2} = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} & Untuk\ x > 0 \\ 0 & Untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

***Contoh* 4.13**

Dari fungsi densitas soal contoh 4.7 di atas, hitunglah:

a. $P(4 \le X \le 8)$

b. $P(X \le 8)$

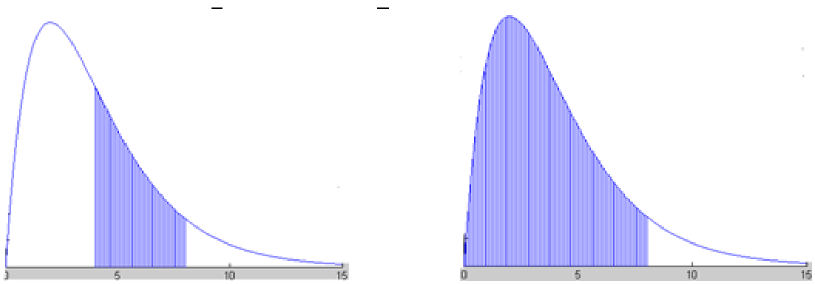
Penyelesaian:

Telah diperoleh bahwa fungsi densitasnya adalah $f(x) = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$, untuk x>0, maka diperoleh

a.

$$P(4 \le X \le 8) = \int_4^8 \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{4}\int_4^8 2x d(e^{-\frac{x}{2}}) = -\frac{1}{2}\left[x e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{x}{2}} \Big|_4^8 \right] = 3e^{-2} - 5e^{-4} = 0.0578$$

b. $P(X \le 8) = \int_0^8 \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} dx = -\frac{1}{2}\left[x e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^8 \right] = 1 - 5e^{-4} = 0.9084$



(a) (b)

Gambar 5.17 Luas daerah di bawah kurva chi-kuadrat antara (*a*) x_1=4 dan x_2=8; (*b*) $X < 8$

Contoh 4.14

Diketahui peubah acak X berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan 8. Dengan menggunakan tabel distribusi chi-kuadrat, hitunglah:

a. $P(X < 17{,}5)$

b. $P(X > 15{,}5)$

c. $P(15{,}5 < X < 17{,}5)$

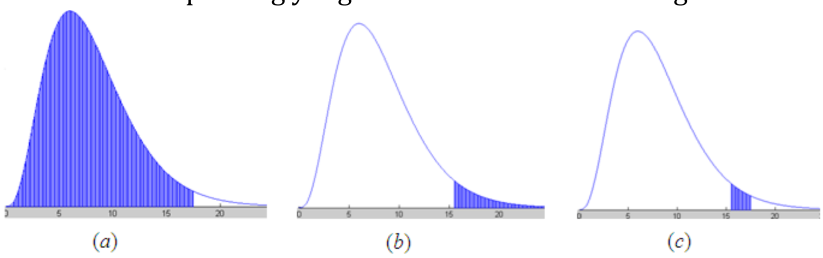
Penyelesaian:

a. Pada kolom pertama (kolom derajat kebebasan) pada tabel, pilih angka 8, kemudian tarik ke kanan hingga diperoleh angka 17,5. Selanjutnya tarik ke atas dan diperoleh nilai 0.975. Jadi $P(X < 17.5) = 0.975$

b. Dengan cara yang sama, dari angka 8, tarik kekanan hingga diperoleh nilai 15,5. Selanjutnya tarik ke atas dan diperoleh nilai 0.95. Nilai tersebut adalah $P(X<15{,}5)$. Hubungan antara $P(X<15{,}5)$ dengan $P(X > 15{,}5)$ adalah $P(X<15{,}5) + P(X > 15{,}5) = 1$. Jadi nilai dari $P(X > 15{,}5) = 1 - P(X<15{,}5) = 1 - 0.95 = 0.05$

c. $P(15{,}5 < X < 17{,}5) = P(X < 17.5) - P(X<15{,}5) = 0.975 - 0.95 = 0.70$

Gambar dari kurva peluang yang dimaksud diberikan sebagai berikut:



Gambar 4.18 Luas daerah di bawah kurva chi-kuadrat dengan (*a*) $P(X < 17.5) = 0.975$; (*b*) $P(X<15{,}5) = 0.95$ dan (*c*) $P(15{,}5 < X < 17{,}5) = 0.7$

Teorema 4.4 RATAAN DAN RAGAM DISTRIBUSI CHI-KUADRAT
Jika X terdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan n, maka rataan dan ragami diberikan oleh $\mu = n$ dan $\sigma^2 = 2n$

Bukti teorema ini diberikan sebagai latihan bagi mahasiswa. Cara penyelesaian dapat menyesuaikan dengan pembuktian pada teorema 5.1 di atas.

Contoh 5.15

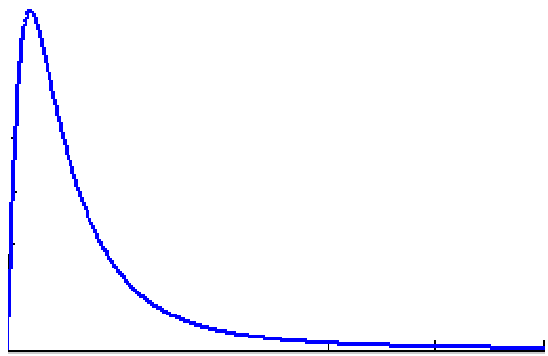
Tentukan rataan dan variasi dari contoh 5.14 di atas

Penyelesaian:

Dari soal diperoleh nilai $n = 8$, maka $\mu = 8$ dan $\sigma^2 = 2.8 = 16$

4.4 Distribusi F

Suatu peubah acak kontinu X yang terdistribusi sebagaimana pada gambar 5.19 berikut disebut sebagai distribusi F.



Gambar 5.19 Kurva distribusi F

Persamaan yang memenuhi kurva tersebut diberikan diberikan sebagai berikut:

Defiinis 4.4: PROBABILITY DENSITY FUNCTION (PDF) *F*

Peubah acak terdistribusi F jika fungsi padatnya diberikan oleh

$$f(F) = \begin{cases} \dfrac{\tau\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\tau\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\tau\left(\dfrac{n_2}{2}\right)} \dfrac{F^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{n_1F}{n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & 0 < F < \infty \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan n_1 , n_2 bilangan bulat positif dimana n_1 disebut sebagai derajat kebebasan pembilang dan n_2 disebut sebagai debagai derajat kebebasan penyebut.

Seperti juga distribusi lainya, untuk keperluan perhitungan dengan distribusi F, daftar (tabel) distribusi F telah disediakan, seperti dalam lampiran 6. Tabel tersebut berisiskan nilai-nilai F untuk peluang 0,01 dan 0,05 dengan derajat kebebasan V_1 dan V_2. peluang ini sama dengan luas daerah ujung kanan yang diarsir, sedangkan $dk = V_1$ ada pada baris paling atas dan $dk = V_2$ pada kolom paling kiri. Untuk tiap $dk =$

V_2, daftar terdiri atas dua baris, yang di atas untuk peluang $P = 0{,}05$ dan yang bawah untuk $P = 0{,}01$.

Contoh 5.16

Untuk pasangan derajat kebebasan $V_1 = 24$ dan $V_2 = 8$, ditulis juga $(V_1, V_2) = (24{,}8)$, maka untuk $P = 0{,}05$ didapat $F = 3{,}12$, sedangkan untuk $P = 0{,}01$, didapt $F = 5{,}28$ (lihat tabel 6, lampiran 6). Ini diperoleh dengan cara mencari 24 pada baris atas dan 8 kolom kiri. Jika dari 24 turun dan dari 8 ke kanan, maka diperoleh angka-angka tersebut. Yang atas untuk $P = 0{,}05$ dan yang bawah untuk $P = 0{,}01$. Notasi lengkap untuk nilai-nilai F daftar distribusi F dengan peluang P dan $dk = (V1, V2)$ adalah $F_{P(V1 \text{ dan } V2)}$. Sehingga pada contoh ini, $F_{0.05(24.8)} = 3.12$ dan $F_{0.01\,(24.8)} = 5.28$.

Meskipun daftar yang diberikan hanya untuk peluang $P = 0.05$ dan $P = 0.01$, tetapi sebenarnya masih bisa didapat nilai-nilai F dengan peluang 0,99 dan 0,95.

Untuk itu diperlukan hubungan $F_{(1-P)(V2,V1)} = \dfrac{1}{F_{P(V1,V2)}}$. Dalam rumus di atas, perhatikan antara P dan (1-P) dan pertukaran antara derajat kebebasan (V_1, V_2) menjadi (V_2, V_1).

Contoh 5.17

Telah didapat $F_{0.05\,(24,8)} = 3{,}12$, maka $F_{0.95\,(8,24)} = \dfrac{1}{F_{0.05(24,8)}} = \dfrac{1}{3{,}12} = 0{,}321$

Teorema 5.5 RATAAN DAN RAGAM DISTRIBUSI *F*

Jika X terdistribusi F dengan derajat kebebasan n_1 dan n_2, maka rataan dan ragami diberikan oleh $\mu = \dfrac{n_2}{n_2 - 2}$ dan $\sigma^2 = \dfrac{2n_2^2(n_2 + n_1 - 2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

Bukti teorema ini diberikan sebagai latihan bagi mahasiswa. Cara penyelesaian dapat menyesuaikan dengan pembuktian pada teorema 5.1 di atas.

Latihan

1. Seorang dipilih dari 10 dosen untuk mengawasi suatu ujian penyaringan dengan cara memilih suatu gulungan kertas dari sebuah kantong berisi 10 gulungan bernomor 1 sampai 10. Jika X adalah peubah acak yang menyatakan bilangan yang terlulis dalam gulungan kertas yang diambil secara acak,
   a. tentukan rumus distribusi peluang X
   b. berapakah peluang mengambil bilangan lebih kecil dari 4
   c. rataan peubah acak X
   d. ragami peubah acak X
2. Dalam suatu penelitian di Kota X, diperoleh data bahwa 75% dari pencurian karena alasan profesi. Tentukan peluangnya bahwa diantara 5 kasus pencurian selanjutnya yang dilaporkan di daerah tersebut
   a. tepat 2 karena alasan profesi

b. paling banyak 3 karena alasan profesi

3. Seorang petani bawang merah mengeluh karena $\frac{2}{3}$ dari panen bawang merahnya terserang sejenis virus. Tentukan peluangnya bahwa diantara 4 bawang merah yang diperiksa dari hasil panen ini
   a. semuanya terserang virus
   b. antara 1 sampai 3 yang terserang virus.
4. Peluang seorang mahasiswa lulus pada ujian mata kuliah Statistik matematika adalah 0,9.
   a. Berapakah peluang tepat 5 dari 7 yang mengikuti ujian akan lulus ?
   b. Hitung rataanya
   c. Hitung ragaminya
5. Seorang insinyur pengawas lalu lintas melaporkan bahwa 75% kendaraaan yang melintasi daerah Masbagik adalah berasal dari kota Selong. Berapakah peluang bahwa kurang dari 4 dari 9 kendaraan mendatang yang melalui pemeriksaan tersebut berasal dari luar kota ?
6. Suatu penelitian tentang kesukaan warna sepeda motor di kota Sakra menunjukkan bahwa 20% lebih menyenangi warna hitam dari pada warna lainnya.
   a. Berapakah peluang bahwa lebih dari setengah dari 20 sepede motor yang akan dibeli warga kota Sakra akan berwarna hitam.
   b. Hitunglah rataanya!
   c. Hitunglah ragaminya!
7. Menurut teori genetika, persilangan tertentu sejenis marmut akan menghasilkan keturunan berwarna merah,, hitam, dan putih dalam perbandingan 8 : 4: 4. Tentukan peluang bahwa 5 dari 8 turunan akan berwarna 2 merah, 2 hitam, dan 1 putih.
8. Seseorang menanam 6 bibit bunga di pekarangannya, yang diambil secara acak dari sebuah kotak berisi 5 bibit bunga matahari, dan 4 bibit bunga mawar, berapakah peluang dia menanam 2 bibit bunga matahari. Dan 4 bibit bunga mawar ?