DIKTAT

FUNGSI KOMPLEKS

Oleh:

HENDRA CIPTA, S.Pd.I, M.Si

NIDN: 2002078902

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUMATERA UTARA
MEDAN
2020

SURAT REKOMENDASI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	:	Dr. Rina Filia Sari, M.Si
NIP.	:	197703012005012002
Pangkat/ Gol.	:	Lektor (III/d)
Unit Kerja	:	Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sumatera Utara

menyatakan bahwa diktat saudara

Nama	:	Hendra Cipta, S.Pd.I, M.Si
NIDN	:	2002078902
Pangkat/ Gol.	:	Penata Muda Tk. I / III b
Unit Kerja	:	Program Studi Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sumatera Utara
Judul Diktat	:	Fungsi Kompleks

Telah memenuhi syarat sebagai suatu karya ilmiah (Diktat) dalam mata kuliah Fungsi Kompleks pada Program Studi Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sumatera Utara Medan.

Demikianlah rekomendasi ini diberikan untuk dapat dipergunakan seperlunya.

Medan, Agustus 2020
Yang Menyatakan,

Dr. Rina Filia Sari, M.Si
NIP. 197703012005012002

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillah segala puji hanya milik Allah Tuhan sekalian alam. Atas berkat rahmat dan karuniaNya, saya dapat menyelesaikan penulisan diktat ini dengan judul “Fungsi Kompleks”. Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada Muhammad SAW beserta kerabat, sahabat, para pengikutnya sampai akhir zaman, adalah sosok yang telah membawa manusia dan seisi alam dari kegelapan ke cahaya sehingga kita menjadi manusia beriman, berilmu, dan tetap beramal shaleh agar menjadi manusia yang berakhlak mulia.

Penulisan diktat ini bertujuan untuk melengkapi persyaratan pengusulan kenaikan pangkat di Program Studi Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sumatera Utara Medan. Diktat ini juga diharapkan dapat menambah wawasan ilmu pengetahuan, khususnya matematika dalam instalasi nilai-nilai Islam yang terpadu dalam proses pembelajaran di lingkungan Universitas Islam Negeri Sumatera Utara Medan.

Dalam penulisan diktat ini, saya sangat menyadari bahwa masih banyak kekurangan yang perlu perbaikan di sana sini, sumbangan pemikiran yang membangun sangat penulis harapkan dari rekan-rekan sejawat terutama dari dosen-dosen senior yang terhimpun dalam mata kuliah serumpun. Juga usulan dari para pengguna bahan ajar ini terutama mahasiswa program studi matematika, semoga konten pembelajaran matematika dapat diperkaya melalui evaluasi terus menerus. Atas segala budi baik yang telah penulis terima dari semua pihak untuk itu saya ucapkan ribuan terima kasih. Semoga Allah SWT membalas kebaikan seluruh rekan sekalian dengan ganjaran yang berlipat ganda, Amiin.

Medan, Agustus 2020
Penulis

Hendra Cipta, S.Pd.I, M.Si
NIDN. 2002078902

DAFTAR ISI

BAB I
BILANGAN KOMPLEKS

A. Konsep Dasar Bilangan Kompleks

Sistem bilangan yang riil adalah suatu sistem bilangan yang telah dikenal sebelumnya, didalam sistem bilangan yang riil masih tidak cukup untuk memecahkan sebuah bentuk persamaan. Oleh karena itu, suatu jenis baru bilangan baru yang dikatakan bilangan kompleks. Bilangan riil perlu untuk ditambahkan dengan suatu jenis baru. Bilangan ini dikatakan suatu bilangan khayal atau nomor jumlah kompleks.[1]

Untuk $x, y \in \mathbb{R}$ maka bentuk umum bilangan kompleks adalah $z = x + iy$ dengan $y \neq 0$, i dinamakan satuan khayal *(imaginary unit)* yang bersifat $i^2 = -1$. x dinamakan bilangan real dari z dan y dikatakan bagian khayal dari z yang dinyatakan masing-masing dengan $\operatorname{Re}(z)$ dan $\operatorname{Im}(z)$.

Beberapa hal yang perlu sebagai syarat dalam bilangan kompleks yaitu:[2]

1. $C =$ himpunan bilangan kompleks

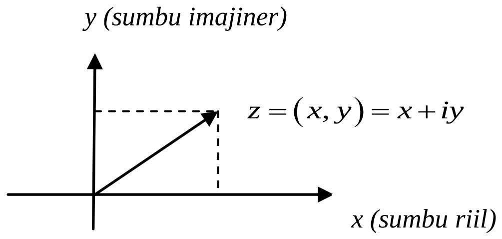
   $C = \{z \mid z = x + iy, x, y \in \Re, i^2 = -1\}$
2. Jika $\operatorname{Re}(z) = 0$ dan $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ maka z dinamakan bilangan imajiner murni.
3. Jika $\operatorname{Re}(z) \neq 0$ dan $\operatorname{Im}(z) = 0$ maka z dinamakan bilangan real.
4. Terdapat kesamaan bilangan kompleks.

Pasangan berurut (x, y) dikatakan bilangan kompleks secara geometri dapat disajikan sebagai titik (x, y) pada bidang kompleks (bidang xy) dengan sumbu x sumbu riil dan sumbu y sumbu imajiner. Bilangan kompleks $z = x + iy = (x, y)$ disajikan sebagai vektor pada bidang kompleks dengan titik asal dan ujung vektor (x, y).

---

[1] Ravi P, Agarwal, et.al, 2010, *An Introduction to Complex Analysis.* Springer New York Dordrecht Heidelberg London.

[2] B. Choudry, 1983, *The Element of Complex Analysis*. New Delhi: Wiley Eastern Limited.



Bidang Kompleks

B. Operasi Dasar dan Sifat Bilangan Kompleks

Operasi dasar pada bilangan kompleks antara lain:[3]

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka $z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

a. Penjumlahan

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

b. Pengurangan

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

c. Perkalian

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

d. Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, z_2 \neq 0$$

Dengan persyaratan:

- $-z$ (negatif z), jika $z = x + iy$ maka $-z = -x - iy$
- $z^{-1} = \frac{1}{z}$ (invers z)

---

[3] Ravi P, Agarwal, et.al, 2010, *An Introduction to Complex Analysis.* Springer New York Dordrecht Heidelberg London.

Jika $z = x + iy$ maka $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$

e. Hukum komutatif

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$z_1 z_2 = z_2 z_1$

f. Hukum asosiatif

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

g. Hukum distributif

$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

h. Elemen netral dalam penjumlahan

$(0 = 0 + 0i)$

$z + 0 = 0 + z = z$

i. Eleman netral dalam perkalian

$(1 = 1 + 0i)$

$z.1 = 1.z = z$

C. Modulus dan Bilangan Konjuget

Definisi 1.1

Modulus (nilai mutlak) $z = x + iy$ *dikatakan sebagai jarak antara z dan sumbu koordinat yang ditulis sebagai* Modulus $z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sedangkan bilangan kompleks sekawan dari $z = x + iy$ *dikatakan sebagai* $\bar{z} = x - iy$.[4]

[4] Saff, E.B. & A.D. Snider, 2003, *Fundamentals Of Complex Analysis, With Applications, 3nd Edition,* Prentice Hall. Inc.

Contoh:

a) Jika $z=-1-i$, maka $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

b) Jika $z=\dfrac{2+3i}{1-i}$, maka $|z|=\dfrac{1}{2}\sqrt{26}$

Sifat-sifat modulus dan bilangan kompleks sekawan (konjuget):

a. $|z|=|-z|=z$

b. $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$

c. $\mathrm{Re}(w)\le|\mathrm{Re}(w)|\le|w|$

d. $\mathrm{Im}(w)\le|\mathrm{Im}(w)|\le|w|$

e. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

f. Peridaksamaan segitiga $|w_1+w_2|\le|w_1|+|w_2|$

g. $|w_1+w_2|\ge|w_1|-|w_2|$

h. $|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$

i. $|z_1+z_2+...+z_n|\le|z_1|+|z_2|+...+|z_n|$

j. $\overline{\overline{z}}=z$

k. $|\overline{z}|=|z|$

l. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

m. $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

n. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

o. $z\overline{z}=|z|^2$

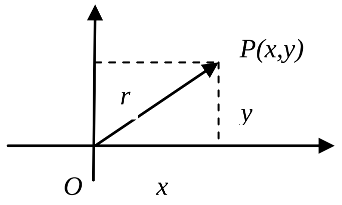
p. $z\overline{z}=|\mathrm{Re}(z)|^2+|\mathrm{Im}(z)|^2$

q. $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$

r. $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

D. Bentuk Kutub (Polar) Bilangan Kompleks

Perhatikan gambar berikut:

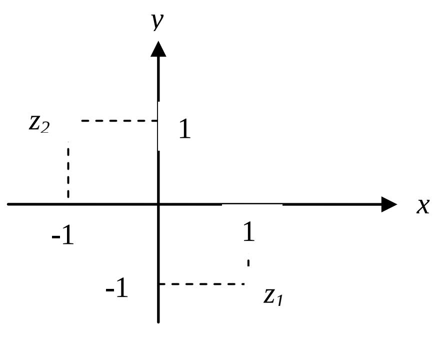


Andaikan $z = x + iy$ merupakan suatu titik (x, y) pada bidang kompleks, berdasarkan gambar $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ dimana $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ditulis $r = \operatorname{mod} z$, dan θ dinamakan argumen dari z ditulis $\arg z = arc\ \tan\frac{y}{x}$ yang menyatakan suatu sudut antara garis *OP* dengan sumbu *x* positif.[5]

Sehingga mengakibatkan $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ yang dinamakan bentuk kutub (polar) bilangan kompleks, r dan θ dinamakan koordinat kutub (polar). Dapat ditulis dalam bentuk $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\ cis\theta$.

Contoh:

1. Diketahui $z_1 = 1 - i, z_2 = -1 + i$,
   a. Gambarkan kedua bilangan kompleks dalam bidang kompleks



[5] Thomas, George. B, Ross L. Finney, 1998, *Calculus and Analytic Geometry 9th Edition*, Massachasetts Institute of Technology: Addison-Wesley Publishing Company.

b. Carilah modulus dan argumen

$Modulus:$

$|z_1| = r_1 = \sqrt{2}$ atau $\mod z_1 = \sqrt{2}$

$|z_2| = r_2 = \sqrt{2}$ atau $\mod z_2 = \sqrt{2}$

$Argumen:$

$\tan\theta_1 = \frac{-1}{1} = -1$ $\qquad$ $\tan\theta_2 = \frac{1}{-1} = -1$

$\theta_1 = 315^0$ $\qquad$ $\theta_2 = 135^0$

$Arg\ z_1 = 315^0$ $\qquad$ $Arg\ z_2 = 135^0$

c. Bentuk kutub (polar)

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos 315^0 + i\sin 315^0\right)$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$z_1 = 1 - i$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos 135^0 + i\sin 135^0\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$z_2 = -1 + i$

E. Teorema De'Moivre

Perkalian geometri antara z_1 dengan z_2 ditunjukkan dengan:[6]

$$
\begin{aligned}
z &= r\ cis\ \theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
z_1 \cdot z_2 &= r_1\ cis\ \theta_1 \cdot r_2\ cis\ \theta_2 \\
&= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1\ i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2 (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))
\end{aligned}
$$

[6] Agarwal, Ravi P, et.al, 2010, *An Introduction to Complex Analysis.* Springer New York Dordrecht Heidelberg London.

Jika $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = ... = z_n$ maka secara induksi matematika diperoleh:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 ... z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 ... r_n \left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n\right) + i \sin\left(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n\right)\right)$$

$z^n = r^n \left(\cos n\ \theta + i \sin n\ \theta\right)$ dinamakan Teorema De 'Moivre

Contoh:

Buktikan dengan Teorema De'Moivre bahwa:

a) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

b) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

Penyelesaian:

$$z^n = r^n \left(\cos n\theta + i \sin n\theta\right)$$

$$z^2 = r^2 \left(\cos 2\theta + i \sin 2\theta\right)$$

$$\frac{z^2}{r^2} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$$\cos 2\theta = \frac{r^2\left(\cos 2\theta + i \sin 2\theta\right)}{r^2} - i \sin 2\theta$$

$$\cos 2\theta = \frac{\cancel{r^2} \cos 2\theta + \cancel{i \sin 2\theta} - \cancel{i \sin 2\theta}}{\cancel{r^2}}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \cos 2\theta \\
&= \cos\left(\theta + \theta\right) \\
&= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta
\end{aligned}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= \cos^2\theta - \left(1 - \cos^2\theta\right) \\
&= 2\cos^2\theta - 1
\end{aligned}$$

F. Rumus Euler

Ingat kembali Deret Taylor:

Misalkan fungsi *f* dan semua turunannya $f', f'', f''', \ldots$ berada pada interval $[a,b]$.

Misalkan $x_0 \in [a,b]$ maka nilai *x* disekitar x_0 adalah:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \ldots$$

Sedangkan deret Mac Laurin merupakan bentuk deret yang diperoleh saat $x_0 = 0$ pada deret Taylor:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^m}{m!} f^{(m)}(0) + \ldots$$

menyebabkan $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} x^n + \ldots$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \ldots$$

Misalkan $e^x = e^{i\theta}$, maka:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} x^n + \ldots$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \frac{1}{6!}(i\theta)^6 + + \frac{1}{7!}(i\theta)^7 + \ldots \\ &= 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - i\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + i\frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{6!}\theta^6 - i\frac{1}{7!}\theta^7 + \ldots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \ldots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \ldots\right) \end{aligned}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ dinamakan Rumus Euler

dengan komponen $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ dan $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

Sehingga bentuk kutub (polar) pada Rumus Euler dapat ditulis:

$$z = r\ cis\ \theta$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = re^{i\theta}$$

Komponen Rumus Euler

a. Untuk $\sin\theta$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \sin\theta + i\sin\theta - \left(\sin\theta - i\sin\theta\right)$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

b. Untuk $\cos\theta$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

c. Untuk $\tan\theta$

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \times \frac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)}\end{aligned}$$

Contoh:

1) Buktikan dengan rumus Euler bahwa $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$?

$$\sin^2\theta = \left(\sin\theta\right)^2$$

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2} \\ &= 1 - \cos^2\theta\end{aligned}$$

2) Buktikan dengan rumus Euler bahwa $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$?

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
&= 3\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) - 4\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= 3\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) - 4\left(\frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i}\right) \\
&= 3\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}\right) \\
&= \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} \\
&= \sin 3\theta
\end{aligned}$$

G. Akar Bilangan Kompleks

Teorema 1.1

Diberikan $z, w \in \mathbb{C}$ *dengan* $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ dan $z^n = w$ *maka:*

$z_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ *dengan* $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.[7]

Bukti:

Andaikan $z = p(\cos q + i\sin q)$ dan $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
&z^n = w \\
&p^n(\cos nq + i\sin nq) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&p^n = r \\
&p = r^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

[7] Churchil, R.V, 2009, *Complex Variable & Application 8th Edition*, Mc Graw-Hill.

$nq = \theta + 2k\pi$ dengan $k \in z$ maka

$q = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{N}$

sehingga $z = p\left(\cos q + i \sin q\right)$

$z_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

dengan $k = 0,1,2,3,...,n-1$ (terbukti)

Contoh:

Carilah akar-akar persamaan bilangan kompleks dari $z = i^{\frac{1}{3}}$?

Penyelesaian:

$z^3 = i \qquad \sin\theta = 1, \theta = 90^0$

$z = i^{\frac{1}{3}} \qquad \cos\theta = 0, \theta = 90^0$

$r = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1$

$z_k = r^{\frac{1}{n}}\left\{\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\}$

$z_k = 1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

Dengan dengan $k = 0,1,2,3,...,n-1$

$k_1 = 0, z_1 = \cos\left(\dfrac{90^0}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{90^0}{3}\right)$

$z_1 = \cos 30^0 + i \sin 30^0$

$z_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}i$

$k_2 = 1, z_2 = \cos\left(\dfrac{450^0}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{450^0}{3}\right)$

$z_2 = \cos 150^0 + i \sin 150^0$

$z_2 = -\dfrac{1}{2}\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}i$

$k_3 = 3, z_3 = \cos\left(\dfrac{810^0}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{810^0}{3}\right)$

$z_3 = \cos 270^0 + i \sin 270^0$

$z_3 = -i$

sehingga diperoleh akar-akarnya:

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ dan $z_3 = -i$

H. Persamaan Suku Banyak *(Polinomial)*

Definisi 1.2

Persamaan suku banyak (polinomial) berbentuk:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0$$

dimana $a_0 \neq 0, a_1, ..., a_n$ *merupakan bilangan kompleks dan n merupakan sebuah bilangan bulat positif. Persamaan suku banyak memiliki n akar kompleks. Jika* $z_1, z_2, ..., z_n$ *adalah n buah jmlah dari akar-akarnya, maka* $a_0 (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) = 0$ *dikatakan pemfaktoran bentuk suku banyak (polinomial).*[8]

Contoh:

Selesaikan persamaan suku banyak dari $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$ agar diperoleh akar-akar persamaannya?

Penyelesaian:

$z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$

$a = \frac{a_n}{a_0} = \frac{\pm 4}{\pm 1} = \pm 4, \pm 2, \pm 1$

$a = -1, -2, -4, 1, 2, 4$

---

[8] Saff, E.B. & A.D. Snider, 1993, *Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd edition,* Prentice Hall, Inc.

Dengan menggunakan metode Horner diperoleh:

$z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -2 & -1 & 0 & 6 & -4 \\
1 & & 1 & -1 & -2 & -2 & 4 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & -2 & 4 & 0 \\
2 & & 2 & 2 & 0 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & -2 & 4 & \\
1 & & 1 & 2 & 2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & 0 & &
\end{array}
$$

Maka:

$(z-1)(z-1)(z-2)\left(z^2+2z+2\right)=0$

Sehingga diperoleh akar-akar persamaannya:

$p_1 = 1,\ p_2 = 1,\ p_3 = 2,\ p_4 = -1+i,$ dan $p_5 = -1-i$

Latihan:

1. Selesaikan operasi yang diberikan:
   a. $z = 3(-1+4i) - 2(-4-i)$
   b. $z = \dfrac{3(-1+4i)(-4-i)}{(2-3i)}$
   c. $i^{123} - 4i^{9} - 4i$
   d. $\dfrac{i^4 + i^9 - i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$
   e. $z = 2\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 - 3\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

2. Tunjukkan apakah:
   a. $z = -i - 1$ maka $z^2 + 2z + 2 = 0$
   b. $z = -\dfrac{1}{2}i - 2$ maka $2z^2 - z - 2 = 0$

4. Jika diketahui $z = 1 + \sqrt{3}i$,
   a. Gambarkan *z* dalam bidang kompleks
   b. Tentukan modulus dan argument dari *z*
   c. Tentukan bentuk kutub (polar)

5. Carilah nilai *z* sehingga $z = \sqrt{2}$ dan $Arg\ z = \dfrac{3\pi}{4}$?

6. Jika $z_1 = 14 + i$ dan $z_2 = \sqrt{3} + i$ dan $z_2 = \sqrt{3} - 2i$
   a. $\mathrm{mod}(z_1 z_2)$ dan $\mathrm{Arg}(z_1 z_2)$?
   b. Bentuk kutub (polar) $z_1 z_2$
   c. Bentuk kutub (polar) $\dfrac{z_1}{z_2}$

8. Dengan teorema De'Moivre buktikanlah:
   a. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$
      $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
   b. $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

$$\sin 3\theta = 2\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

c. $$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$$\tan 3\theta = \tan\theta\left(\frac{3\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right)$$

d. $$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{3}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{4}\sin^3\theta$$

9. Dengan Teorema De'Moivre buktikan apakah

$\cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta = \frac{1}{2}$ dengan $\theta = \frac{\pi}{7}$?

10. Jika diketahui $z_1 = re^{i\theta_1}, z_2 = re^{i\theta_2}$ dan $z_3 = re^{i\theta_3}$. Tentukanlah:

a. $z_1 z_2$

b. $z_1 z_2 z_3$

c. $\frac{z_1 z_2}{z_3}$

d. Bentuk kutub (polar) $z_1 z_2$ dan $z_1 z_2 z_3$

11. Tunjukkan bahwa:

a. $$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

b. $$\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 8\cos^3\theta - 4$$

c. $$\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 2\cos 3\theta + 6\cos\theta - 4$$

12. Tentukan akar-akar bilangan kompleks dari:

a. $2z^3 - 2i = 0$

b. $z = \left(2 + 2i\sqrt{3}\right)^2$

c. $z^6 = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

13. Tentukan semua akar-akar polinomial dari:

    a. $z = (-256)^{\frac{1}{4}}$

    b. $z^4 + 81 = 0$?

14. Tentukan semua akar-akar polinomial dari $z^4 - 7z^3 + 5z^2 + 31z - 30 = 0$?

15. Jika persamaan polinomial $z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 8z + k = 0$, jika salah satu faktornya adalah $(z+1)$. Tentukan:

    a. Faktor-faktor yang lainnya

    b. Semua akar-akar persamaannya

16. Jika persamaan polinomial $p_1 = 3z^3 + az^2 + 5z + 1 = 0$ dan $p_2 = z^3 - 7z^2 + bz - 3 = 0$ dibagi dengan $(z+1)$ dan memberikan sisa yang sama.Tentukan:

    a. Nilai *a* dan *b*

    b. Semua akar-akar persamaannya

BAB II

FUNGSI KOMPLEKS

A. Konsep Fungsi Kompleks

Suatu fungsi kompleks dengan variable kompleks *z* dinyatakan oleh $w = f(z)$ dengan $w = f(z)$ dengan $z = x + iy$ sebagai domain dari *w* dan fungsi kompleks terdiri dari bilangan riil dan imaginer sehingga fungsi kompleks dapat dinyatakan:[9]

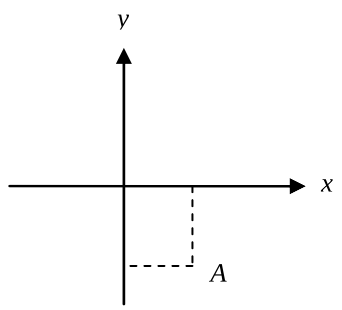
$$w(z) = u(z) + v(z)i \text{ atau } w(z) = u(x, y) + v(x, y)i$$

dimana $u(x, y)$ adalah bilangan riil dan $v(x, y)$ adalah bilangan imaginer.

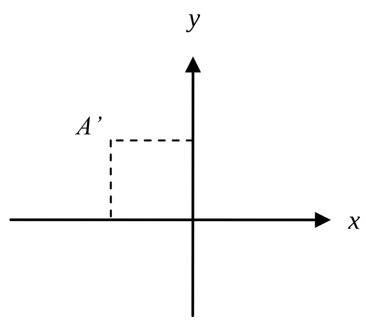
Dalam bentuk koordinat kutub (polar) (r, θ) dapat juga dinyatakan dengan mengganti *x* dan *y* yaitu:

$$w(z) = u + iv = f(z) = f(x + iy) = r\cos\theta + ir\sin\theta \text{ sehingga}$$

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$



Bidang *xy*



Bidang *w*

Contoh:

1) Jika $f(z) = 4x^2 - iy$. Tentukan fungsi kompleks dalam *z* ?

   Penyelesaian:

   Terlebih dahulu kita mencari nilai *x* dan *y* untuk fungsi kompleks.

---

[9] Spiegel, M.R. 1994. *Peubah Kompleks dengan Pengenalan Pemetaan Konvormal dan Penerapannya*. Terjemahan Koko Martono. Erlangga, Jakarta.

$$z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$$
$$(x+iy)+(x-iy)=2\operatorname{Re}(z)$$
$$x=\operatorname{Re}(z)$$
$$x=\frac{z+\overline{z}}{2}$$
$$z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$$
$$(x+iy)-(x-iy)=2i\operatorname{Im}(z)$$
$$y=\operatorname{Im}(z)$$
$$y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

maka:

$$f(z)=4x^2-iy$$
$$=4\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2-i\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$
$$=4\left(\frac{z+2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\right)-\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right)$$
$$f(z)=\overline{z}^2+2z\overline{z}+\overline{z}$$

2) Jika diketahui $f(z)=x+iy+\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}$

a. Nyatakan fungsi tersebut dalam bentuk z

$$f(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}+i\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)+\frac{\dfrac{z+\overline{z}}{2}+i\left(\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right)}{\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2}$$
$$=z+\frac{1}{z}$$

b. Tentukan nilai u dan v

$$f(z)=x+iy+\frac{x+iy}{x^2+y^2}$$
$$f(z)=\frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2}+i\,\frac{x^2y+y^3+y}{x^2+y^2}$$

diperoleh:

$$u=\frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2}\ \text{dan}\ v=\frac{x^2y+y^3+y}{x^2+y^2}$$

c. Tentukan $f\left(1+2i\right)$

$$\begin{aligned} f\left(z\right) &= z+\frac{1}{z} \\ &= \left(1+2i\right)+\frac{1}{1+2i} \\ &= \frac{\left(1+2i\right)\left(1+2i\right)+1}{1+2i} \\ &= \frac{4i-2}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i} \\ &= \frac{6}{5}+\frac{8}{5}i \end{aligned}$$

B. Operasi Pada Fungsi Kompeks

Antara lain:

a) $\left(f+g\right)\left(z\right)=f\left(z\right)+g\left(z\right)$

b) $\left(f-g\right)\left(z\right)=f\left(z\right)-g\left(z\right)$

c) $\left(f*g\right)\left(z\right)=f\left(z\right)*g\left(z\right)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)\left(z\right)=\dfrac{f\left(z\right)}{g\left(z\right)}$

Contoh:

Diberikan $f\left(z\right)=2z+i$ dan $g\left(z\right)=z^2-2z$. Tentukanlah:

$$\begin{aligned} a.\left(f-g\right)\left(z\right) &= f\left(z\right)-g\left(z\right) \\ &= \left(2z+i\right)-\left(z^2-2z\right) \\ &= -z^2+4z+i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b.\left(f*g\right)\left(z\right) &= f\left(z\right)*g\left(z\right) \\ &= \left(2z+i\right)\left(z^2-2z\right) \\ &= 2z^3-4z^2+i\left(z^2-2z\right) \end{aligned}$$

$$d.\left(\frac{f}{g}\right)(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$$
$$=\frac{2z+i}{z^2-2z}$$
$$=\frac{2z^3+4z^2+z^2i-2zi}{z^4-2z^3}$$

C. Fungsi Elementer

Macam-macam fungsi elementer akan dibicarakan pada bagian ini.[10]

1. Fungsi Eksponensial

Defisi 2.1

Didefinisikan $w=e^z$ *dengan* $z=x+iy$ *sehingga*

$w=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

Teorema 2.1

Diberikan $z\in w\in C$. *Sifat-sifat eksponensial bilangan kompleks adalah:*

1) $e^z\neq 0$

Bukti:

Ambil $z=x+iy$ sebarang, akan ditunjukkan $e^z\neq 0$.

Andaikan $e^z=0$ maka $e^x\cos y+ie^x\sin y=0$.

Berdasarkan persamaan bilangan kompleks diperoleh $e^x\cos y=0$ dan $ie^x\sin y=0$. e^x tidak nol, maka $\cos y=0$ dan $\sin y=0$. dan setiap nilai y dimana $e^z\neq 0$ untuk semua *z*.

2) $e^0=1$

Bukti:

$e^0=e^0(\cos 0-i\sin 0)$

$e^0=1(1-0)$

$e^0=1$

---

[10] Wunsch, A. D., 1994, *Complex Variables With Applications, 2nd Edition.* Addison-Wesley.

3) Misalkan $z = x + iy$ maka $z = x - iy$

$$
\begin{aligned}
e^{\bar{z}} &= e^{x-iy} \\
&= e^{x}\left(\cos(-y) + i\sin(-y)\right) \\
&= e^{x}\left(\cos y - i\sin y\right) \\
&= \overline{e^{z}}
\end{aligned}
$$

4) $e^{z+w} = e^{z}e^{w}$

Bukti:

Misalkan $z = x + iy$ dan $w = a + ib$

$$
\begin{aligned}
e^{z+w} &= e^{(x+a)+i(y+b)} \\
&= e^{x+a}\left(\cos(y+b) + i\sin(y+b)\right) \\
&= e^{x+a}\left(\cos y\cos b - \sin y\sin b + i\left(\sin y\cos b + \cos y\sin b\right)\right) \\
&= e^{x}e^{a}\left(\cos y\cos b + \sin y\cos b + i\cos y\sin b - \sin y\sin b\right) \\
&= e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)e^{a}\left(\cos b + i\sin b\right) \\
&= e^{z}e^{w}
\end{aligned}
$$

5) $e^{z-w} = \dfrac{e^{z}}{e^{w}}$

6) Jika $z = x + iy$ maka $\left|e^{z}\right| = e^{x}$

7) Jika $z = x + iy$ maka $\arg\left(e^{z}\right) = y$

Contoh:

Carilah nilai z dari setiap persamaan dengan fungsi eksponensial:

1) $e^{z} = -3i$

$$
\begin{aligned}
e^{z} &= -3i \\
e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right) &= -3i \\
e^{x}\cos y + ie^{x}\sin y &= 0 - 3i
\end{aligned}
$$

diperoleh:

$$
\begin{aligned}
e^{x}\cos y &= 0 \\
\cos y &= 0 \\
y &= Arc\ \cos 0 \\
y &= 90^{0} \\
y &= \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z
\end{aligned}
$$

$ie^x \sin y = -3i$

$e^x \sin y = -3$

$\pm e^x = -3$

$e^x = 3$

$x = \ln 3$

maka $z = x + iy$

$$z = \ln 3 + i\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

2) $e^z = 1 + i$

$e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = 1 + i$

$e^x \cos y + ie^x \sin y = 1 + i$

diperoleh:

$e^x \cos y = 1 \ \wedge \ ie^x \sin y = i$

$e^x \sin y = 1$

$\left(e^x \cos y = 1\right)^2 \wedge \left(e^x \sin y = 1\right)^2$

$e^{2x}\cos^2 y = 1 \ \wedge \ e^{2x}\sin^2 y = 1$

$e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y = 1 + 1$

$e^{2x}\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right) = 2$

$e^{2x} = 2$

$e^{2x} = e^{\ln 2}$

$2x = \ln 2$

$x = \frac{1}{2}\ln 2$

substitusikan nilai x kepersamaan:

$e^x \cos y = 1$

$e^{\frac{1}{2}\ln 2} \cos y = 1$

$\sqrt{2} \cos y = 1$

$\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$

maka $z = x + iy$

$$z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in Z$$

2. Fungsi Trigonometri

Ingat kembali rumus Euler yakni $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$[11]

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \text{ dan } e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \qquad (2.1)$$

Dari (2.1) diatas, maka fungsi sinus dan cosinus dengan perubah kompleks didefinisikan:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ dan } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (2.2)$$

Ditunjukkan bahwa $\sin(-z) = -\sin z$ dan $\cos(-z) = \cos z$.

Dari (2.2) , bahwa $\sin z$ dan $\cos z$ adalah kombinasi linear fungsi utuh e^{iz} dan e^{-iz}. Dari (2.2) memberikan:

$$\frac{d(\sin z)}{dz} = \cos z \text{ dan } \frac{d(\cos z)}{dz} = -\sin z \qquad (2.3)$$

Diberikan fungsi sinus dan cosinus hiperbolik yakni:

$$\sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2i} \text{ dan } \sinh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \qquad (2.4)$$

untuk setiap $y \in \mathbb{R}$. Berdasarkan persamaan (2.4) ditunjukkan:

$$\sin(iy) = i \sinh y \text{ dan } \cos(iy) = \cosh y \qquad (2.5)$$

[11] R. Courant, 1950, *Differential and Integral Calculus* New York: Interscience Publishers, Inc.

Identitas-identitas trigonometri juga berlaku untuk peubah kompleks. Maka akan ditunjukkan:

$$2\sin z_1 \cos z_2 = \sin\left(z_1 + z_2\right) + \sin\left(z_1 - z_2\right) \qquad (2.6)$$

$$\sin\left(z_1 + z_2\right) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad (2.7)$$

$$\cos\left(z_1 + z_2\right) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \qquad (2.8)$$

Misalkan sebarang $z = x + iy$. Apabila pada (2.7) dan (2.8) diambil $z_1 = x$ dan $z_2 = hy$, diperoleh:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\ \sin z &= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \\ \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \qquad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \cos z &= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \qquad (3.0) \end{aligned}$$

Contoh:

Selesaikan $\sin z = i$ dengan fungsi trigonometri?

$$\begin{aligned} &\sin z = i \\ &\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ &\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0 + i \\ &\sin x \cosh y = 0 \;\wedge\; i \cos x \sinh y = i \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cos x \sinh y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sin x \cosh y = 0 \\ &\sin x = 0 \\ &x = Arc\ \sin 0 \\ &x = 0^0 \\ &x = 2k\pi \text{ atau } x = \pi\left(2k + 1\right) \end{aligned}$$

$\cos x \sinh y = 1$

$\sinh y = 1$

$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = 1$

$e^y - e^{-y} - 2 = 0$

$e^{2y} - e^0 - 2e^y = 0$

$e^{2y} - 2e^y - 1 = 0$

$\left(e^y - 1\right)^2 = 2$

$e^y - 1 = \sqrt{2}$

$e^y = 1 + \sqrt{2}$

$y = \pm \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

Maka $z = x + iy$

$z = 2k\pi \pm i \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

3. Fungsi Hiperbolik

Definisi dari fungsi hiperbolik diberikan:[12]

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ dan } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (3.1)$$

Kedua fungsi diatas merupakan fungsi lengkap dan diberikan:

$$\frac{d(\sinh z)}{dz} = \cosh z \text{ dan } \frac{d(\cosh z)}{dz} = \sinh z \quad (3.2)$$

Dari definisi $\sin z$ dan $\cos z$ pada fungsi trigonometri, maka diperoleh:

$$\sin(iz) = i \sin z \text{ dan } \cos(iz) = \cos z \quad (3.3)$$

$$\sin(iz) = i \sinh z \text{ dan } \cos(iz) = \cosh z \quad (3.4)$$

Menggunakan identitas-identitas pada (3.3) dan (3.4), diperlihatkan rumus identitas

[12] R. Courant, 1950, *Differential and Integral Calculus* New York: Interscience Publishers, Inc.

$$\sinh(-z) = -\sinh z \text{ dan } \cos(-z) = \cosh z \qquad (3.5)$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \qquad (3.6)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 \qquad (3.7)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \qquad (3.8)$$

Dan jika $z = x + iy$, maka persamaan (3.7) dan (3.8) dihasilkan:

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \qquad (3.9)$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \qquad (4.0)$$

Akibatnya,

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y \qquad (4.1)$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y \qquad (4.2)$$

Contoh:

Diberikan $\cosh z = i$, maka akar-akar persamaannya adalah?

$\cosh z = i$

$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$\cosh x \cos y + i \sinh x \sin y = 0 + i$

$\cosh x \cos y = 0 \;\wedge\; i \sinh x \sin y = i$

$\sinh x \sin y = 1$

$\cosh x \cos y = 0$

$\cos y = 0$

$y = Arc\ \cos 0$

$y = 90^0$

$y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$y = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad (1)$

$\sinh x \sin y = 1$

$\sinh x = 1$

$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$

$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$

$\left(e^x - 1\right)^2 = 2$

$e^x - 1 = \sqrt{2}$

$x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \qquad (2)$

$y = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ maka $\sin y = -1.$ Maka $\sinh x \sin y = 1$ adalah:

$\sinh x = -1$

$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -1$

$e^{2x} + 2e^x - 1 = 0$

$\left(e^x + 1\right)^2 = 2$

$e^x + 1 = \sqrt{2}$

$x = -\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \qquad (3)$

Persamaan (1), (2), dan (3) diperoleh:

$z = x + iy$

$z = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ atau

$z = -\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + i\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

Latihan:

1. Jika $f(z) = z^2$. Tentukan pemetaan dari bidang *xy* ke *w* jika:

    a. $i - 2$

    b. $1 - 3i$

    c. $1 - 3i = -2 - 2i$

2. Jika $f(z) = z^3$. Tentukan pemetaan dari bidang *xy* ke *w* jika:

    a. $i - 3$

    b. $1 - 3i$

    c. $2 - 3i = -2 - 2i$

3. Jika diberikan $z = 1 + 2i$. Tentukanlah:

    a. $f(z) = \dfrac{x - iy}{1 + z}$

    b. $f(z) = \dfrac{1}{2|z|}$

    c. $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{2|z|}$

4. Jika $f(z) = \dfrac{z+2}{2z-1}$. Tentukanlah:

    a. $f(0), f(i),$ dan $f(1+i)$

    b. Nilai *z* sehingga $f(z) = i,$ dan $f(z) = 2 - 3i$

    c. Nilai *z* sehingga $f(z) = -2i - 3,$ dan $f(z) = 2 - 3i$

5. Carilah semua nilai *z* yang persamaan dengan fungsi eksponensial?

    a. $e^z = -3i$

    b. $e^z = -2 - 2i$

    c. $e^z = 1 - i\sqrt{3}$

    d. $e^{1-2z} = -2$

    e. $e^{z+2} = -1 - e^{-z}$

5. Selesaikan persamaan berikut dengan fungsi trigonometri:
   a. $\cos w = 2i$
   b. $\sin w = -3i$
   c. $\tan z = 2$

6. Buktikan bahwa:
   a. $\sinh 2z = 2\sinh z \cosh z$
   b. $|\sinh x| \leq |\cosh z| \leq \cosh x$

7. Dengan fungsi hiperbolik, tentukanlah:
   a. $\dfrac{d(\coth z)}{dz} = ...$

8. Dengan fungsi hiperbolik, hitunglah:
   a. $\cosh z = -2$
   b. $\sinh z = 2i$
   c. $\tan z = -i$

BAB III
TRANSFORMASI ELEMENTER

Bab ini membicarakan definisi dari geometri fungsi kompleks. Suatu fungsi dikatakan sebagai suatu proses sebagian dalam bidang *Z* yang dipetakan kebidang *W*. Hal ini memberikan pernyataan bahwa transformasi sebagai suatu fungsi f memetakan z_0 ke w_0 dengan w_0 adalah peta z_0 dibawah *f* dan z_0 adalah prapeta dari w_0.

A. Transformasi Linear

Transformasi yang berbentuk $w = f(z) = az + b, a, b \in C$ dikatakan transformasi linear. Sebelum membicarakan lebih jauh mengenai transformasi linear, perhatikan beberapa syarat-syarat berikut.[13]

(1) Misalkan $f(z) = iz$ dengan $z = x + iy$, maka

$$f(z) = iz = i(x+iy) = -y + ix, |i| = 1 \text{ dan } Arg\ i = \frac{\pi}{2}$$

Fungsi $f(z) = iz$, jika dituliskan dalam bentuk pengaitannya diperoleh

$$z \to iz$$
$$x + iy \to u + iv = -y + ix$$

Hal ini memperlihatkan bahwa setiap titik (x, y) dibidang *Z* ditransformasikan oleh $f(z) = iz$ ke bidang *W* dititik $(-y, x)$, diperoleh dengan rotasi $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(2) Misalkan $f(z) = 2iz$ dengan $z = x + iy$, maka

$$f(z) = 2iz = 2i(x+iy) = -2y + 2ix = 2(-y+ix), |2i| = 2 \text{ dan } Arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

Fungsi $f(z) = 2iz$ bila ditulis dalam bentuk pengaitannya diperoleh

$$z \to 2iz$$
$$x + iy \to u + iv = 2(-y + ix)$$

[13] Andrilli, Stephen and David Hecker. 2010. *Elementary Linear Algebra Fourth Edition*. Canada: Elsevier.

Hal ini memperlihatkan bahwa setiap titik (x,y) dibidang Z ditransformasikan oleh $f(z)=2iz$ ke bidang W di titik $(-2y,2x)$ diperoleh dengan rotasi $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ di dilatasi oleh faktor 2.

Secara umum fungsi $w=f(z)=az, a\neq 0$ mentransformasikan z ke bidang W dengan cara:

(1) Merotasikan z sebesar $Arg\ a$, dan

(2) Didilatasi oleh faktor $|a|$

Faktor dilatasi $|a|$ menentukan jenis transformasi z ke bidang W yaitu:

(1) Jika $|a|=1$, maka z ditransformasikan ke bidang W dengan rotasi $(0, Arg\ a)$

(2) Jika $|a|>1$, maka z ditransformasikan ke bidang W dengan rotasi $(0, Arg\ a)$ kemudian didilatasi (diperbesar) oleh faktor $|a|>1$

(3) Jika $|a|<1$, maka z ditransformasikan ke bidang W dengan rotasi $(0, Arg\ a)$ kemudian didilatasi (diperkecil) oleh faktor $|a|<1$

Transformasi $w=az+b$ sebagai dua transformasi berurutan yaitu :

$$s=az \text{ dan } w=s+b$$

Jadi transformasi linear $w=az+b; a,b\in C$ mentransformasikan z ke bidang W dengan cara :

(1) Merotasikan z sebesar $(0, Arg\ a)$

(2) Dilatasi oleh faktor $|a|$

(3) Translasi sejauh $b=(b_1,b_2)$

Transformasi linear $w=az+b; a,b\in C$, bila dituliskan dalam bentuk pengaitannya diperoleh seperti berikut:

$$z \xrightarrow{rotasi\ (0,\ Arg\ a)\ dan\ dilatasi\ oleh\ faktor\ |a|} az \xrightarrow{translasis\ sejauh\ b=(b_1,b_2)} az+b$$

Contoh:

Tentukan peta dari kurva $y = x^2$ oleh transformasi linear $w = 2iz + \left(1 - i\right)$?

Penyelesaian**:**

Cara 1

$Arg(2i) = arc\cot 0 = \dfrac{\pi}{2}$ dan $\left|2i\right| = 2.$ Transformasi linear $w = 2iz + (1 - i)$ bila ditulis dalam bentuk pengaitannya, diperoleh

$$z \xrightarrow{R\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} iz \xrightarrow{dilatasi\ oleh\ faktor\ 2} 2iz \xrightarrow{translasi\ sejauh\ (1-i)} 2iz + (1 - i)$$

Kurva $y = x^2$ bila ditulis dalam bilangan kompleks $z = x + ix^2$ diperoleh

(1) $z = x + ix^2 \xrightarrow{R\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} w = x + iy$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

Jadi, $z = x + ix^2$

$w = -x^2 + ix = -y^2 + iy$

Dengan demikian kurva $y = x^2$ dirotasi sejauh $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ petanya adalah $x = -y^2$

(2) Kurva $x = -y^2$ didilatasi oleh faktor 2, diperoleh

$$z = -x^2 + ix \rightarrow w = -2x^2 + ix = \frac{1}{2}y^2 + iy$$

Jadi, kurva $x = -y^2$ didilatasi oleh faktor 2, petanya adalah $x = -\dfrac{1}{2}y^2$

(3) Kurva $x = -\frac{1}{2}y^2$ ditranslasi oleh vector (1, -1) diperoleh

$$z = -2x^2 + 2xi \to w = \left(-2x^2 + 1\right) + i\left(2x - 1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\left(y+1\right)^2 + 1\right) + iy$$

Jadi, kurva $x = -\frac{1}{2}y^2$ ditranslasi oleh vector (1, -1) petanya adalah

$$x = -\frac{1}{2}\left(y+1\right)^2 + 1$$

Dari (1), (2) dan (3) diperoleh peta dari kurva $y = x^2$ oleh transformasi linear $w = 2iz + (1-i)$ ke bidang W adalah $u = -\frac{1}{2}(v+1)^2 + 1$

Cara 2

Kurva $y = x^2$ oleh transformasi linear $w = 2iz + \left(1 - i\right)$

$$y = x^2$$
$$z = x + ix^2$$
$$x + iy = x + ix^2$$
$$iy = ix^2$$
$$y = x^2$$

$$w = 2iz + \left(1 - i\right)$$
$$u + iv = 2i\left(x + iy\right) + \left(1 - i\right)$$
$$u + iv = 2ix - 2y + 1 - i$$
$$u + iv = \left(-2y + 1\right) + i\left(2x - 1\right)$$
$$u = -2y + 1 \qquad v = 2x - 1$$
$$y = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \qquad x = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}$$

$$y = x^2$$

$$-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}$$

$$u - 1 = -\frac{1}{2}v^2 - v - \frac{1}{2}$$

$$u - 1 = -\frac{1}{2}\left(v^2 + 2v + 1\right)$$

$$u - 1 = -\frac{1}{2}\left(v + 1\right)^2$$

$$u = -\frac{1}{2}\left(v + 1\right)^2 + 1$$

B. Transformasi Kebalikan

Transformasi kebalikan merupakan sebuah transformasi yang memiliki bentuk $w = \frac{1}{z}$. Untuk mencari peta $z \in C$ oleh transformasi $w = \frac{1}{z}$ dilakukan dengan cara sebagai berikut. Jika $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)} \\ &= \frac{1}{r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)} \times \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \\ &= \frac{1}{r}\left(\cos\left(-\theta\right) + i\sin\left(-\theta\right)\right) \end{aligned}$$

Transformasi kebalikan merupakan pemetaan suatu titik dari bidang Z dengan modulus sama dengan r dan argumennya θ menjadi sebuah titik pada bidang W dengan modulus $\frac{1}{r}$ dan argumennya $\left(-\theta\right)$.

Adapun prosesnya dalam menentukan peta dari garis lurus dan lingkaran di R^2 oleh transformasi kebalikan $w = \frac{1}{z}$ sebagai berikut:[14]

1. Misalkan PGL di R^2 adalah $ax + by + c = 0, a$ dan b tak bersama- sama nol ditransformasikan oleh $w = \frac{1}{z}$. Namakan $z = x + iy$ dan $w = u + iv$ maka:

   $$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$$

   Sehingga diperoleh

   $$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ dan } v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

   Jika x dan y dinyatakan dalam u dan v maka:

   $$u^2 + v^2 = \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

   sehingga diperoleh

   $$x = u\left(x^2+y^2\right) = \frac{u}{u^2+v^2} \text{ dan } y = -v\left(x^2+y^2\right) = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

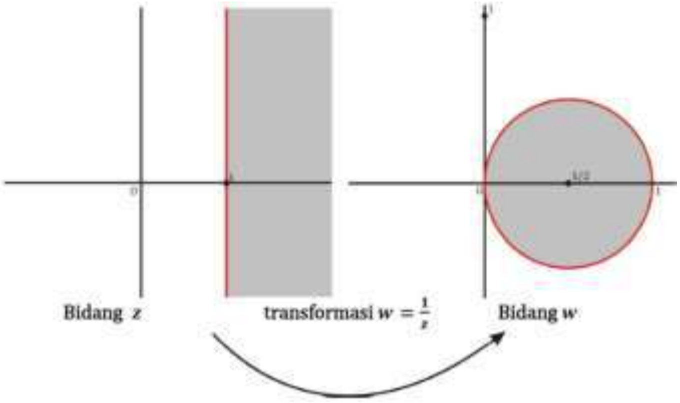
   Maka peta garis lurus di R^2 oleh $w = \frac{1}{z}$ adalah:

   $$ax + by + c = 0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} a\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) + b\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right) + c = 0$$
   $$c\left(u^2+v^2\right) + au - bv = 0$$

   Jika $c = 0$, maka petanya berupa garis lurus. Tetapi jika $c \neq 0$, petanya berupa suatu lingkaran.

[14] Paliouras, John D., Wibisono Gunawan. 1987. *Peubah Kompleks Untuk Ilmuan Dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga.

Seperti pada gambar di bawah ini:



2. Misalkan persamaan lingkaran di R^2 adalah

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ditransformasikan oleh $w = \dfrac{1}{z}$ diperoleh:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} \frac{1}{u^2+v^2} + \frac{Au}{u^2+v^2} - \frac{Bv}{u^2+v^2} + C = 0$$

$$C\left(u^2+v^2\right) + Au - Bv + 1 = 0$$

$$1 + Au - Bv + C\left(u^2+v^2\right) = 0$$

Jika $c = 0,$ maka petanya berupa garis lurus. Tetapi jika $c \neq 0,$ petanya berupa suatu lingkaran.

Contoh:

1. Diberikan garis $x = 1$ oleh transformasi $w = \dfrac{1}{z}$, maka peta nya adalah?

   Penyelesaiaan:

   $ax + by + c = 0$
   $x = 1$
   $x - 1 = 0$
   $a = 1, b = 0,$ dan $c = -1$

$$ax+by+c=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} a\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)+b\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)+c=0 \quad \times u^2+v^2$$

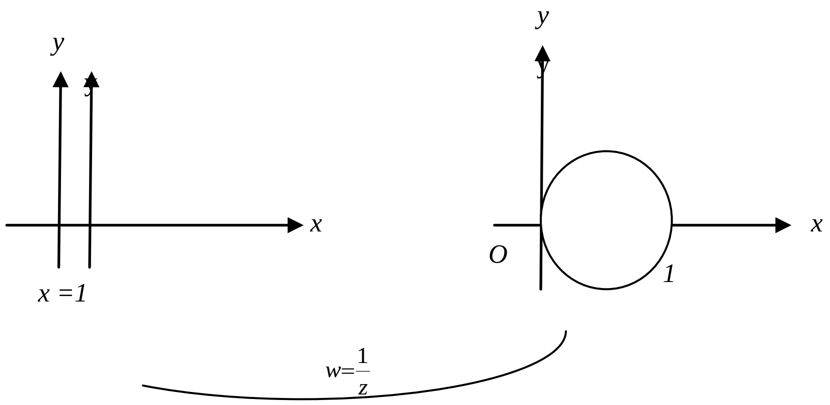
$$au-bv+c\left(u^2+v^2\right)=0$$

$$1(u)-0(u)+(-1)\left(u^2+v^2\right)=0$$

$$u-\left(u^2+v^2\right)=0$$

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4}$$

Jadi garis $x=1$ bidang *Z* dipetakan $w=\frac{1}{z}$ ke bidang *W* menjadi lingkaran dengan pusat $\left(\frac{1}{2},0\right)$ dan jari-jari $\frac{1}{2}$



Contoh:

Tentukan peta dari lingkaran $x^2+y^2-x=0$ oleh transformasi $w=\frac{1}{z}$?

Penyelesaiaan:

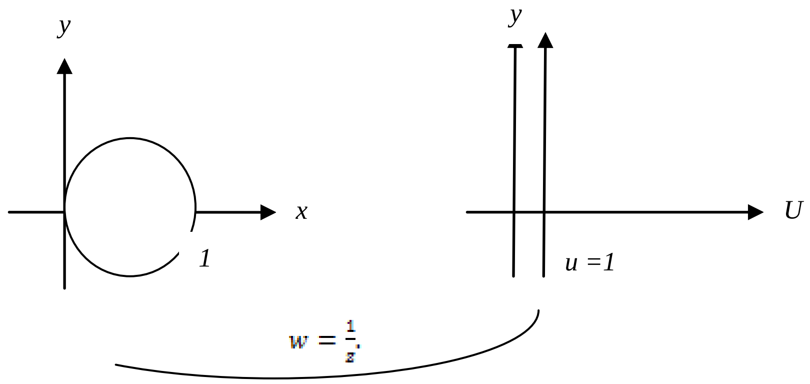
$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} C\left(u^2+v^2\right)+Au-Bv+1=0$$

$$x^2+y^2-x=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} 0\left(u^2+v^2\right)+(-1)u-0.v+1=0$$

$$-u+1=0$$

$$u=1$$

Jadi lingkaran $x^2+y^2-x=0$ di bidang *Z* dipetakan oleh $w=\frac{1}{z}$ ke bidang *W* menjadi garis $u=1$.



C. Transformasi Bilinear

Definisi 3.1

Jika a, b, c, dan d konstanta kompleks maka:

$w=\frac{1}{z}, ad-bc\neq 0$ dan $c\neq 0$ *untuk dinamakan transformasi bilinear (mobius).*[15]

Misalkan $c\neq 0$ guna menghindari persamaan bilinear berubah menjadi persamaan linear. Transformasi bilinear juga memetakan garis dan lingkaran menjadi sebuah garis atau lingkaran.

Pemetaan dari transformasi bilinear $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=(g\circ h\circ k)(z)$ merupakan komposisi dari fungsi berikut :

$$k(z)=cz+d,\qquad h(z)=\frac{1}{z'},\qquad g(z)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}z$$

Teorema 3.1

Jika $z_1\neq z_2\neq z_3$ *sebarang titik pada bidang Z dan* $w_1\neq w_2\neq w_3$ *sebarang titik pada bidang W, maka terdapat fungsi transformasi bilinear yang memetakan* z_j ke w_j dengan $j=1,2,3$ *adalah:*

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

Bukti:

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, w_1=\frac{az_1+b}{cz_1+d}, w_2=\frac{az_2+b}{cz_2+d}, w_3=\frac{az_3+b}{cz_3+d}$$

[15] Hidayat, Sardi. 1989. Fungsi Kompleks. Jakarta: Karunika.

dengan $ad - bc \neq 0$

$$w - w_1 = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d}$$

$$= \frac{(az+b)(cz_1+d) - (az_1+b)(cz+d)}{(cz+d)(cz_1+d)}$$

$$= \frac{aczz_1 + bcz_1 + adz + bd - aczz_1 - bcz - adz_1 - bd}{(cz+d)(cz_1+d)}$$

$$= \frac{-bc(z-z_1) + ad(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)}$$

$$= \frac{(ad-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)}$$

$$w_2 - w_3 = \frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}$$

$$= \frac{acz_2z_3 + az_2d + bcz_3 + bd - acz_2z_3 - bcz_2 - az_3d - bd}{(cz_2+d)(cz_3+d)}$$

$$= \frac{ad(z_2-z_3) - bc(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}$$

$$= \frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}$$

$$w - w_3 = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}$$

$$= \frac{aczz_3 + bcz_3 + adz + bd - aczz_3 - bcz - adz_3 - bd}{(cz+d)(cz_3+d)}$$

$$= \frac{-bc(z-z_3) + ad(z-z_3)}{(cz+d)(cz_3+d)}$$

$$= \frac{(ad-bc)(z-z_3)}{(cz+d)(cz_3+d)}$$

$$w_2 - w_1 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}$$
$$= \frac{acz_2z_1 + az_2d + bcz_1 + bd - acz_2z_1 - bcz_2 - az_1d - bd}{\left(cz_2 + d\right)\left(cz_1 + d\right)}$$
$$= \frac{ad\left(z_2 - z_1\right) - bc\left(z_2 - z_1\right)}{\left(cz_2 + d\right)\left(cz_1 + d\right)}$$
$$= \frac{\left(ad - bc\right)\left(z_2 - z_1\right)}{\left(cz_2 + d\right)\left(cz_1 + d\right)}$$

$$\frac{\left(w - w_1\right)\left(w_2 - w_3\right)}{\left(w - w_3\right)\left(w_2 - w_1\right)} = \frac{\dfrac{\left(ad - bc\right)\left(z - z_1\right)}{\left(cz + d\right)\left(cz_2 + d\right)} \times \dfrac{\left(ad - bc\right)\left(z_2 - z_3\right)}{\left(cz_2 + d\right)\left(cz_3 + d\right)}}{\dfrac{\left(ad - bc\right)\left(z - z_3\right)}{\left(cz + d\right)\left(cz_3 + d\right)} \times \dfrac{\left(ad - bc\right)\left(z_2 - z_1\right)}{\left(cz_2 + d\right)\left(cz_1 + d\right)}}$$
$$= \frac{\left(ad - bc\right)\left(z - z_1\right)\left(ad - bc\right)\left(z_2 - z_3\right)\left(cz + d\right)\left(cz_3 + d\right)\left(cz_2 + d\right)\left(cz_1 + d\right)}{\left(cz + d\right)\left(cz_2 + d\right)\left(cz_2 + d\right)\left(cz_3 + d\right)\left(ad - bc\right)\left(z - z_3\right)\left(ad - bc\right)\left(z_2 - z_1\right)}$$
$$= \frac{\left(z - z_1\right)\left(z_2 - z_3\right)}{\left(z - z_3\right)\left(z_2 - z_1\right)}$$

Contoh:

1) Carilah transformasi bilinear dari titik $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = 1$ ke titik $w_1 = 2i, w_2 = 1 + i, w_3 = -i$?

   Penyelesaian**:**

   Dengan menggunakan teorema 3.1

$$\frac{\left(w - w_1\right)\left(w_2 - w_3\right)}{\left(w - w_3\right)\left(w_2 - w_3\right)} = \frac{\left(z - z_1\right)\left(z_2 - z_3\right)}{\left(z - z_3\right)\left(z_2 - z_1\right)}$$
$$\frac{\left(w - 2i\right)\left(1 + i - \left(-i\right)\right)}{\left(w - \left(-i\right)\right)\left(1 + i - 2i\right)} = \frac{\left(z + i\right)\left(0 - 1\right)}{\left(z - 1\right)\left(0 + i\right)}$$
$$\left(w - 2i\right)\left(1 + 2i\right)\left(z - 1\right)\left(i\right) = \left(w + i\right)\left(1 - i\right)\left(z + i\right)\left(-1\right)$$
$$\left(w - 2wi - 2i + 4\right)\left(zi - i\right) = \left(-z - i\right)\left(w - wi + i + 1\right)$$
$$-wi + wzi + 2w - 2wz - 2 + 2z - 4i + 4zi = -wi - w + 1 - i - wz + wzi - zi - z$$
$$-wi + wzi + 2w - 2wz + wi + w + wz - wzi = -2z - z - 4zi - zi + 4i - i + 2 + 1$$
$$3w - wz = -3z - 5zi + 3i + 3$$
$$w\left(3 - z\right) = z\left(-3 - 5i\right) + 3i + 3$$
$$w = \frac{z\left(-3 - 5i\right) + 3i + 3}{\left(3 - z\right)}$$

Jadi transformasi bilinear yang memetakan adalah:

$$w = \frac{z(-3-5i)+3i+3}{(3-z)}$$

2) Diberikan $I(z) > 0$ transformasi bilinear, tentukan peta dari $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$?

Penyelesaian:

(1) Bentuk $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$$w = f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

$$w = \frac{z+i-2i}{z+i}$$

$$w = \frac{z+i}{z+i} - \frac{2i}{z+i}$$

$$w = 1 - \frac{2i}{z+i}$$

(2) Bentuk $k(z) = cz + d$

$$k(z) = z + i$$

Misalkan: $a = z = 1 + 0i$

$b = i$

Maka:

* $a = z = 1 + 0i$

$|a| = 1 \rightarrow$ dilatasi sebesar 1 kali

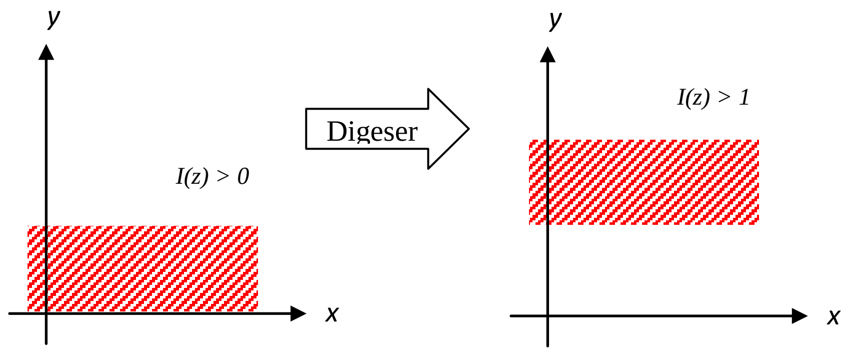
$$Arga = Arc\tan\frac{y}{x}$$

$$Arga = Arc\tan\frac{0}{1}$$

$$Arga = Arc\tan 0$$

$a = 0^0 \rightarrow$ dirotasi sebesar $a = 0^0$

* $b = i \rightarrow$ ditranslasi/digeser 1 satuan



⟹ dirotasi gambar tetap

(3) Bentuk $h(z) = \frac{1}{z}$

$I(z) > 1$

$$h(z) = \frac{1}{z}$$
$$y = 1$$

$$y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$
$$-\frac{v}{u^2 + v^2} = 1$$
$$-\frac{v}{u^2 + v^2} - 1 = 0$$
$$-\frac{v - (u^2 + v^2)}{u^2 + v^2} = 0$$
$$u^2 + v^2 + v = 0$$
$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$
$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Jadi diperoleh lingkaran dengan pusat $P\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ dan $r = \frac{1}{2}$

(4) Bentuk $g\left(z\right)=\frac{a}{c}+\left(\frac{bc-ad}{c}\right)z$

$$g\left(z\right)=\frac{1}{1}+\frac{(-i)(1)-(1)(i)}{1}\left(z\right)$$

$$g\left(z\right)=1-2iz$$

Misalkan:

* $a=-2iz$

$a=0-2i$

$\left|a\right|=\left|-2\right|=2\rightarrow$ didilatasi 2 kali

Arg a = Arc tan $\frac{y}{x}$

Arg a = Arc tan $\left(-\frac{2}{0}\right)$

Arg a = - Arc tan ∞

a = 270^0 $\rightarrow$ dirotasi 270^0

*$b=i$ $\rightarrow$ digeser 1 satuan

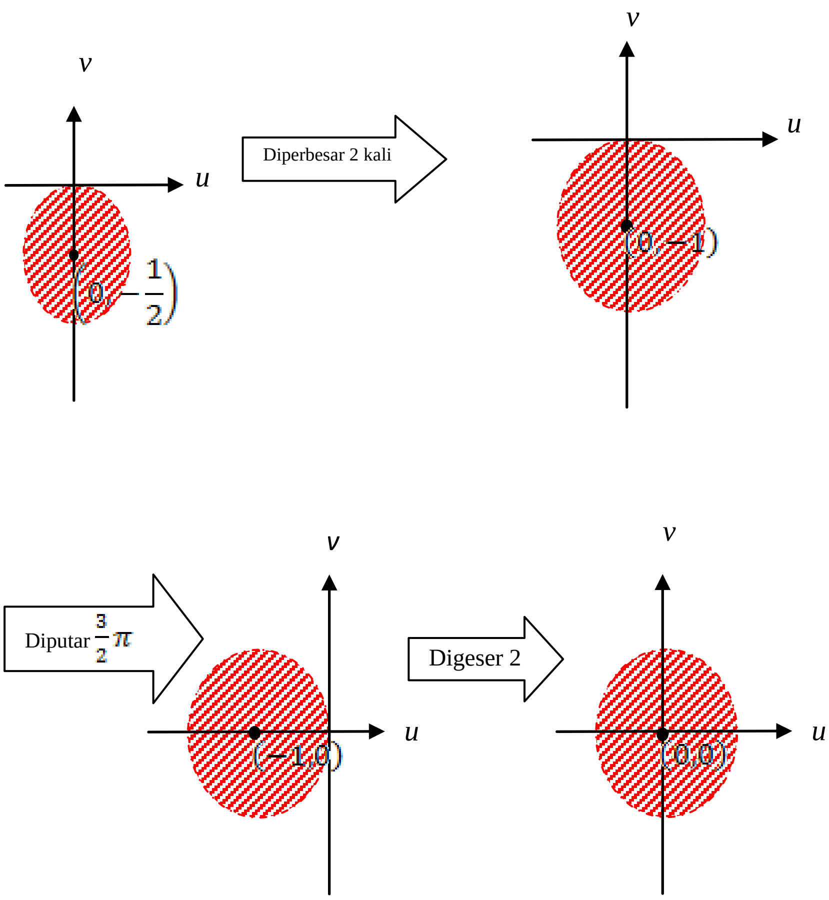
Rotasi $\left(0,270^0\right)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 270^0 & -\sin 270^0 \\ \sin 270^0 & \cos 270^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 270^0 & -\sin 270^0 \\ \sin 270^0 & \cos 270^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



v
u
Diperbesar 2 kali
$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$
v
u
$(0,-1)$
Diputar $\frac{3}{2}\pi$
v
u
$(-1,0)$
Digeser 2
v
u
$(0,0)$

Latihan:

1. Tentukan peta himpunan $\left\{ z \mid 0 < \arg z < \frac{1}{6}\pi \right\}$ oleh transformasi linear $w = -2z - 2i$?

2. Tentukan bayangan dari $R(2,-6)$ oleh transformasi linear $w(z) = -3iz + (-3+2i)$

3. Tentukan bayangan dari $P(-2,-4)$ oleh transformasi linear $w(z) = -6iz + (-8+20i)$

4. Tentukan peta kurva $y = -x^3$ oleh transformasi linear:
   a. $w = -2z + 2i$
   b. $w = -z - 2i$

4. Tentukan peta dari:
   a. Sumbu *x* dan sumbu *y* oleh $w = \frac{1}{z}$
   b. Lingkaran $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ oleh transformasi kebalikan $w = \frac{1}{z}$
   c. Lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 8 = 0$ oleh transformasi kebalikan $w = \frac{1}{z}$

5. Tentukan peta dari:
   a. Sumbu *x* dan sumbu *y* oleh $w = \frac{1}{z}$
   b. Lingkaran $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 16$ oleh transformasi kebalikan $w = \frac{1}{z}$

6. Lingkaran $2p^2 - 4q^2 - 12p + 6q + 8 = 0$ oleh transformasi kebalikan $w = \frac{1}{z}$

7. Lingkaran $-2x^2 - 6y^2 - 18x + 24y + 8 = 0$ oleh transformasi kebalikan $w = \frac{1}{z}$

8. Tentukan peta dari:

   a. $2x+5y=1$ oleh $w=\frac{1}{z}$

   b. $2x-5y+10=0$ oleh $w=\frac{1}{z}$

6. Tentukan peta dari garis $I(z)=\frac{1}{2}$ oleh transformasi bilinear $w=\frac{4z}{2iz+i}$

7. Tentukan peta dari separuh bidang $I(z)\geq 0$ dengan transformasi bilinear $w=\frac{z}{z+1}$?

8. Carilah transformasi bilinear dari titik $z_1=-2i, z_2=0, z_3=-1$ ke titik $w_1=-2i, w_2=-1-2i, w_3=-2i$?

BAB IV
FUNGSI ANALITIK

A. Topologi Dalam Bidang Kompleks

1. Persekitaran (*neighbor*)

Persekitaran z_0 merupakan himpunan semua titik z yang berada didalam lingkaran dengan pusat di z_0, berjari-jari r, $r > 0$. Ditulis $N(z_0, r)$ atau $|z - z_0| < r$.[16]

Bukti:

$|z - z_0| < r$

$-r < z - z_0 < r$

$z_0 - r < z < z_0 + r$

Maka :

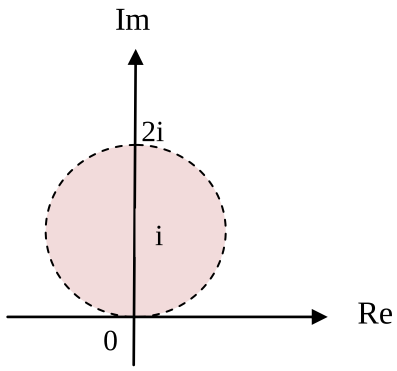
$$
\begin{aligned}
V_r(z_0) &= \{z \in C \,|z - z_0| < r\} \\
&= \{z \in C \mid z_0 - r < z < z_0 + r\} \\
&= (z_0 - r,\ z_0 + r)
\end{aligned}
$$

Contoh:

Gambarkan persekitaran dari $N(i,1)$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
V_r(z_0) &= \{z \in C \,|z - z_0| < r\} \\
V_r(i,1) &= \{z \in C \,|z - i| < 1\} \\
&= i - 1 < z < i + 1 \\
&= i - i < z < i + i \\
&= 0 < z < 2i
\end{aligned}
$$



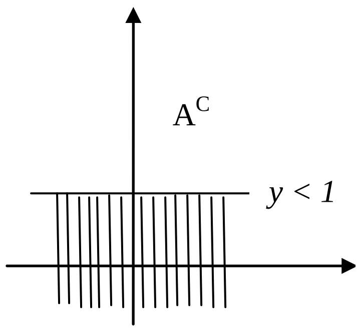
[16] Bilyar, H, L., 1989, *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New Jersey.

2. **Komplemen**

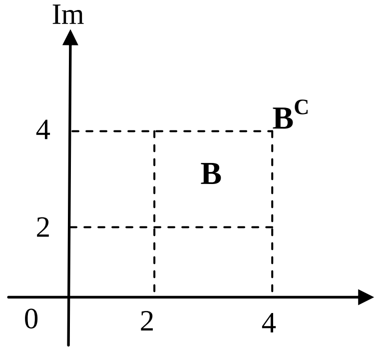
Misalkan S merupakan suatu himpunan. Komplemen dari S ditulis S^c adalah himpunan semua titik dalam bidang Z yang tidak termuat di S.

Contoh:

1) Gambarkan $A = \{z \mid \mathrm{Im}(z) < 1\}$ maka $A^c = \{z \mid \mathrm{Im}(z) \geq 1\}$



2) Gambarkan $B = \{z \mid 2 < z < 4\}$ maka $B^c = \{z \mid z \leq 2 \text{ atau } z \geq 4\}$



3. **Titik Limit**

Definisi 4.1

Dimisalkan ruang topologi (X, τ), titik $p \in X$ dikatakan titik limit dari A, $A \subset X$ jika dan hanya jika untuk setiap himpunan terbuka $G_i \in \tau$ yang memuat p, memuat sekurang-kurangnya satu titik dari A yang lain dengan $p \in G_i$, maka $(G - \{p\}) \cap A \neq \varnothing$. Himpunan titik limit dari A dikatakan himpunan turunan dari A dinotasikan A'.[17]

[17] Soeparna, D., 2006, *Pengantar Analisis Real*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Contoh:

$A=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{X,\ \varnothing,\ \{a\}\ ,\{c,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d,e\}\}$ merupakan topologi dan $A_1=\{a,b,c\}$. Apakah A_1 merupakan titik limit dari A?

Penyelesaian:

$G_a=\{\{a\},\{a,c,d\},X\}$

$(G_a-\{p\})\cap A\neq\varnothing$

$\{a\}-\{a\}\cap A=\varnothing$

jadi a bukan titik limit dari A

$G_b=\{\{b,c,d,e\},X\}$

$(G_b-\{p\})\cap A\neq\varnothing$

- $\{b, c, d, e\} - \{b\}\cap A$

  $\{c, d, e\} \cap \{a, b, c\} = \{c\} \neq\varnothing$
- $\{a, b, c, d, e\} - \{b\} \cap A$

  $\{a, c, d, e\} \cap \{a, b, c\} = \{a, c\} \neq\varnothing$

  jadi b titik limit dari A

$G_c=\{\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},X\}$

$(G_c-\{p\})\cap A\neq\varnothing$

$\{c, d\} - \{c\}\cap A$

$\{d\}\cap\{a, b, c\} = \varnothing$

jadi c bukan titik limit dari A

$G_d=\{\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},X\}$

$(G_d-\{p\})\cap A\neq\varnothing$

- $\{c, d\} - \{d\} \cap A$

  $\{c\}\cap\{a, b, c\} = \{c\} \neq\varnothing$
- $\{a, c, d\} - \{d\} \cap A$

  $\{a, c\}\cap \{a, b, c\} = \{a, c\} \neq\varnothing$

- {b, c, d, e} – {d} $\cap A$

  {b, c, e} $\cap$ {a, b, c} = {b, c} $\neq \varnothing$
- {a, b, c, d, e} – {d} $\cap A$

  {a, b, c, e} $\cap$ {a, b, c} = {a, b, c} $\neq \varnothing$

  jadi d titik limit dari A

$G_e = \{\{b, c, d, e\}, X\}$

$(G_e - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$

- {b, c, d, e} – {e} $\cap A$

  {b, c, d} $\cap$ {a, b, c} = {b, c} $\neq \emptyset$
- {a, b, c, d, e} – {e} $\cap A$

  {a, b, c, d} $\cap$ {a, b, c} = {a,b,c} $\neq \emptyset$

  jadi e titik limit dari A

4. Titik Interior

Definisi 4.2

Jika (X, τ) adalah ruang topologi dan $A \subset X$. Titik $p \in A$ dikatakan titik interior A jika $p \in G \subset A$ dengan G himpunan terbuka. Himpunan titik-titik dalam A ditulis A^o atau int (A) atau interior dari A. [18]

Contoh:

A=(a, b], S = $\Re$

Int (a,b] = (a, b) dimana $b \notin G \subset A$

B = [a, b]

Int [a, b] = (a, b) dimana $a \notin G_a \subset A$ dan $b \notin G_b \subset A$

Interior dari suatu himpunan A adalah gabungan dari semua himpunan terbuka yang termuat dalam A, sehingga:

(i) A^o terbuka

(ii) A^o adalah himpunan terbuka terbesar yang termuat dalam A yaitu $G \subset A^o \subset A$.

[18] Soeparna, D., 2006, *Pengantar Analisis Real*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

(iii) A terbuka jika dan hanya jika $A = A^o$

Contoh:

X = {a, b, c, d, e} dan $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$

Misal A = {b, c, d} maka Int (A) = {c, d}

Misal B = {a, c, d} maka Int (B) = {a} $\cup$ {c, d} $\cup$ {a, c, d} = {a, c, d}

5. Titik Eksterior

Definisi 4.3

Eksterior suatu himpunan A dalam ruang topologi (X, τ). Titik eksterior dari A ditulis Eks (A) adalah interior dari komplemen A. Eks (A) = Int(A^C)[19]

Contoh:

X = {a, b, c, d, e} dan $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$

A = {b, c, d}, A^C = {a, e} maka Int(A^C) = Int({a, e}) = {a},

sehingga Eks(A) = {a}

B = {a, c, d}, B^C = {b, e} maka Int({b, e}) = $\varnothing$, sehingga Eks(B) = $\varnothing$

6. Himpunan Terbuka

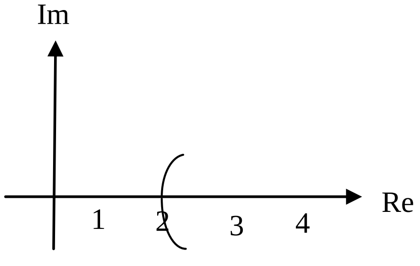
Himpunan *S* dikatakan terbuka jika semua anggota S adalah titik interior *S*.

Contoh:

$A = \{z \mid \mathrm{Re} > 1\}$

$A = \{z \mid x > 1\}$

$x > 1 = 2, 3, 4, \ldots$

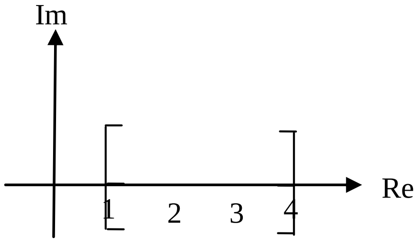


7. **Himpunan Tertutup**

Suatu himpunan *R* dikatakan himpunan tertutup jika *R* memuat semua titik limitnya.

$B = \{z \mid 1 \le \text{Re} \le 4\}$

$A = \{z \mid 1 \le x \le 4\}$



8. **Perbatasan (Boundary)**

Definisi:

Boundary merupakan himpunan titik-titik yang bukan anggota interior maupun eksterior dari A. Boundry dari A ditulis b(A).

Dengan kata lain $b(A) = (int(A) \cup eks(A))^C$

$= (int(A))^C \cap (eks(A))^C$

Contoh:

X = {a, b, c, d, e} dan $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

Misal A = {b, c, d} maka Int(A) = {c, d}

Misal B = {a, c, d} maka Int(B) ={a} $\cup$ {c, d} $\cup$ {a, c, d} = {a, c, d}

A^C = {a, e} maka Int(A^C) = Int({a, e}) = {a}, sehingga Eks(A) = {a}

B^C = {b, e} maka Int({b,e}) = $\varnothing$, sehingga Eks(B) = $\varnothing$

Jadi b(A) = $(\text{int}(A))^C \cap (\text{Eks}(A))^C$

$= \{c, d\}^C \cap \{a\}^C$

$= \{a, b, e\} \cap \{b, c, d, e\}$

$= \{b, e\}$

b(B) = $(\text{int}(B))^C \cap (\text{Eks}(B))^C$

$= \{a\}^C \cap \{\varnothing\}^C$

= {b, c, d, e} $\bigcap$ {a, b, c, d, e}

= {b, c, d, e}

9. Titik Batas

Definisi 4.4:

Jika (X, τ) adalah ruang topologi maka $p \in X$ dikatakan titik batas dari $A \subset X$ jika dan hanya jika $p \in G \in \tau$, maka $G \cap A = \varnothing \,\&\, G \cap (S - A) \neq \varnothing$

Contoh:

A = (a, b] maka Int(A) = (a,b)

$A^C = (-\infty, a] \vee (b, \infty)$ maka Eks(A) = Int(A^C) = $(-\infty, a] \vee (b, \infty)$

Sehingga b(A) = {a, b}

10. Titik Terasing

Definisi 4.5:

Jika (X, τ) adalah ruang topologi dan $A \subset X$ maka $\overline{A} = A^o \bigcup b(A)$ dan $\overline{A}^C = Eks(A)$.[20]

Contoh:

A = (a, b], Int(A) = (a, b) dan b(A) = {a, b}

$\overline{A} = A^o \bigcup b(A)$ = (a.b) $\bigcup$ {a, b} = [a, b]

A' = [a, b] maka $\overline{A} = A' \bigcup A = [a,b] \bigcup (a,b) = [a,b]$

- A dikatakan tidak rapat dimana-mana pada S jika Int($\overline{A}$) = $\varnothing$
- Titik $a \in A$ dikatakan titik terasing jika $a \in A - A'$
- Suatu himpunan bagian dari *S* dikatakan sempurna jika himpunan tersebut tertutup dan tidak mempunyai titik terasing.

Contoh:

1) *P* adalah bilangan Rasional.

$\overline{P} = P$, maka Int$\left(\overline{P}\right)$= $\varnothing$ maka P tidak rapat dimana-mana

P - $P' = \varnothing$, $P' =$ P

maka P tidak mempunyai titik terasing

2) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$

Int$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right) = \varnothing$

maka tidak rapat dimana-mana

3) A=$\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 0\right]$, titik limit dari A = 0

$A - A^{'} = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 0\right] - 0$

jadi semuanya adalah titik terasing kecuali 0

Int$\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 0\right] = \varnothing$ maka tidak rapat dimana-mana.

B. Limit Fungsi Kompleks

Fungsi $f(z)$ dikatakan memiliki limit l untuk z menuju titik z_0 dinotasikan dengan $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$. Jika nilai f dekat ke l untuk semua z dekat ke z_0, untuk setiap bilangan nyata positif $\in$, dapat ditemukan bilangan nyata positif δ sedemikian rupa sehingga untuk semua $z \neq z_0$ didalam cakram yaitu $|z \neq z_0| < \delta$ didapatkan $|f(z) - l| < \in$ untuk setiap $z \neq z_0$ didalam cakram δ, nilai f terletak dalam cakram.

Definisi 4.6

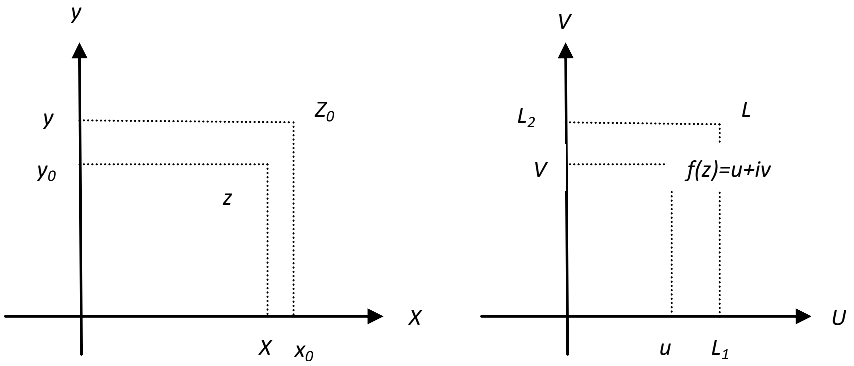
Diberikan suatu fungsi f yang terdefinisi pada daerah $D \subseteq C$ dan $z_0 \in D$.

(a) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |z - z_0| < \delta, z \in D$ berlaku $|f(z) - L| < \varepsilon$.

(b) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ *jika dan hanya jika untuk setiap lingkungan* $N(L, \varepsilon)$ *terdapat lingkunganb terhapuskan* $N^*(z_0, \delta)$ *sehingga jika* $z \in N^*(z_0, \delta) \cap D$ *berlaku* $f(z) \in N(L, \varepsilon)$.

Secara geometris definisi limit fungsi kompleks digambarkan seperti dibawah ini:

Bidang *z* Bidang *w*



Contoh:

Buktikan bahwa $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{iz}{2} = \dfrac{i}{2}$

Penyelesaian:

Misalkan $f(z) = \dfrac{iz}{2}$, maka $D_f = C$. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |z - 1| < \delta$ berlaku $\left| \dfrac{iz}{2} - \dfrac{i}{2} \right| < \varepsilon$.

Dapat ditulis $\left| \dfrac{iz}{2} - \dfrac{i}{2} \right| = \left| \dfrac{i(z-1)}{2} \right| = \left| \dfrac{z-1}{2} \right| < \dfrac{\delta}{2} < \varepsilon$

Langkah proses pembuktiannya sebagai berikut:

Diambil $\delta \leq 2\varepsilon$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |z - 1| < \delta \leq 2\varepsilon$ berlaku:

$$\left| \frac{iz}{2} - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{i(z-1)}{2} \right| = \left| \frac{z-1}{2} \right| < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{z \to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$.

Teorema 4.1

Diberikan fungsi kompleks f terdefinisi pada daerah $D \subseteq C$ *dengan* $z_0 \in D$ *dan* $L, M \in C$.

(a) *jika* $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ *dan* $\lim_{z \to z_0} f(z) = M$ *maka* $L = M$

(b) $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ *jika dan hanya jika terdapat bilangan* $k > 0$ *dan bilangan* $\delta > 0$ *sehingga berlaku* $|f(z)| < k$ *untuk setiap* $z \in N^*(z_0, \delta) \cap D$.

Bukti:

(a) coba sendiri (sebagai latihan)

(b) diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |z - z_0| < \delta, z \in D$ berlaku $|f(z) - L| < 1$. Oleh karena itu diperoleh, diperoleh

$|f(z)| = |f(z) - L + L| \le |f(z) - L| + |L| < 1 + |f(z)|$.

Diambil bilangan $k = 1 + |L| > 0$, diperoleh $|f(z)| < k$ untuk setiap $z \in N^*(z_0, \delta) \cap D$.

Teorma 4.2

Diberikan fungsi kompleks f dan g yang terdefinisi pada daerah $D = D_f \cap D_g \subseteq C$ *dengan* $z_0 \in D$. *Jika* $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ *dan* $\lim_{z \to z_0} g(z) = M$, *maka:*[21]

(a) $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = L + M$

(b) $\lim_{z \to z_0} kf(z) = kL, k \in C$

(c) $\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = LM$

[21] Saff, E.B. & A.D. Snider, 2003, *Fundamentals Of Complex Analysis, With Applications, 3nd Edition*, Prentice Hall. Inc.

(d) $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{L}{M}, M\neq 0$

Bukti (c):

Untuk kasus $L\neq 0$ dan $M\neq 0$. Hasil yang ingin dicapai ditulis:

$$\begin{aligned}\left|f(z)g(z)-LM\right| &= \left|\left(f(z)g(z)-Lg(z)\right)+\left(Lg(z)-LM\right)\right|\\ &\leq \left|f(z)g(z)-Lg(z)\right|+\left|Lg(z)-LM\right|\\ &\leq \left|g(z)\right|\cdot\left|f(z)-L\right|+\left|L\right|\cdot\left|g(z)-M\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

Diberikan bilangan $\varepsilon>0$ sebarang. Karena $\lim_{z\to z_0} g(z)=M$, maka terdapat bilangan $\delta_1>0$ dan bilangan $k>0$ sehingga berlaku sehingga berlaku $\left|g(z)\right|\leq k$ untuk setiap $z\in N^*(z_0,\delta_1)\cap D$, terdapat bilangan $\delta_2>0$ sehingga jika $0<\left|z-z_0\right|<\delta_2, z\in D$ berlaku $\left|f(z)-L\right|<\frac{\varepsilon}{2|k|}$, terdapat bilangan $\delta_3>0$ sehingga jika $0<\left|z-z_0\right|<\delta_3, z\in D$ berlaku $\left|f(z)-M\right|<\frac{\varepsilon}{2|L|}$.

Diambil $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\left|f(z)g(z)-LM\right| &= \left|\left(f(z)g(z)-Lg(z)\right)+\left(Lg(z)-LM\right)\right|\\ &\leq \left|f(z)g(z)-Lg(z)\right|+\left|Lg(z)-LM\right|\\ &\leq \left|g(z)\right|\cdot\left|f(z)-L\right|+\left|L\right|\cdot\left|g(z)-M\right|\\ &< k.\frac{\varepsilon}{2|k|}+|L|.\frac{\varepsilon}{2|L|}=\varepsilon,\ \text{bila } 0<\left|z-z_0\right|<\delta\end{aligned}$$

Dengan kata lain terbukti bahwa $\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot g(z)\right]=LM$.

Teorema 4.3

Diberikan fungsi $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *terdefinisi pada daerah* $D\subseteq C$ *dan* $z_0=a+ib\in D'$. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A+iB$ *jika dan hanya jika* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)=A$ *dan* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y)=B$.[22]

Bukti (c):

Diberikan bilangan $\varepsilon>0$ sebarang.

Diketahui $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A+iB$ berarti terdapat $\delta>0$ sehingga jika $0<|z-z_0|<\delta$ berlaku $|f(z)-(A+iB)|<\varepsilon$. Dengan kata lain terdapat bilangan $\delta>0$ sehingga jika $0<\|(x,y)-(a,b)\|<\delta$ berlaku $|(u(x,y)+iv(x,y))-(A+iB)|<\varepsilon$ atau $|u(x,y)-A|+|v(x,y)-B|<\varepsilon$.

Jadi untuk bilangan $\varepsilon>0$ diatas terdapat bilangan $\delta>0$ sehingga jika $0<\|(x,y)-(a,b)\|<\delta$ berlaku $|u(x,y)-A|<\varepsilon$ dan $|v(x,y)-B|<\varepsilon$. Jadi terbukti bahwa $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)=A$ *dan* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y)=B$.

Contoh:

1) Selidiki apakah $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{x+y-1}$ ada?

   Penyelesaian:

   $$\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{x+y-1}=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\left(\frac{x^2-y^2+1}{x+y-1}+\frac{2xyi}{x+y-1}\right)$$

   Misalkan $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2+1}{x+y-1}$ dan $v(x,y)=\dfrac{2xy}{x+y-1}$.

[22] Saff, E.B. & A.D. Snider, 1993, *Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd edition*, Prentice Hall, Inc.

Diperhatikan $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} u(x,y)$, misalkan $(x,y)\to(0,1)$ sepanjang garis $x=0$,

maka $u(0,y)=\dfrac{-y^2+1}{y-1}$.

Jadi sepanjang garis $x=0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} u(x,y)=\lim_{y\to1}\frac{-y^2+1}{y-1}=\lim_{y\to1}(-y-1)=-2.$$

Misalkan $(x,y)\to(0,1)$ sepanjang dua garis yang berbeda menghasilkan nilai limit yang berbeda menghasilkan nilai limit yang berbeda maka $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} u(x,y)$ tidak ada. Akibatnya $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{x+y-1}$ tidak ada.

2) Limit dari fungsi kompleks untuk z menuju i dari $f(z)=\dfrac{z\left(z^2+(2-i)z-2i\right)}{z-i}, z\neq i$ adalah...

Penyelesaian:

Substitusikan $z=i$ sehingga bentuk limit $f(z)$ menjadi $\dfrac{0}{0}$, berarti berlaku Dalil L'Hospital (turunan), sehingga:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to i} f(z) &= \lim_{z\to i} f'(z)\\ &=\lim_{z\to i}\frac{3z^2+2(2-i)z-2i}{1}\\ &=3(i)^2+2(2-i)(i-2i)\\ &=-1+2i\end{aligned}$$

C. Turunan Fungsi Kompleks

Definisi 4.4

Diberikan fungsi f terdefinisi pada region $D \subseteq C$ *dan* $z_0 \in D$. *Turunan fungsi f di* z_0 *didefinisikan dengan* $f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ *jika limit ada.*[23]

Pada definisi diatas, misalkan $z - z_0 = \Delta z$. Diperoleh $z = z_0 + \Delta z$ dan $z \to z_0$ sehingga turunan fungsi *f* di z_0 ditulis

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Definisi 4.5

Diberikan fungsi f terdefinisi pada region $D \subseteq C$. *Turunkan fungsi f pada D didefinisikan dengan* $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ *jika limit ini ada.*

Misalkan $z + \Delta z = w$ maka $\Delta z = w - z$. Karena $\Delta z \to 0$ jika dan hanya jika $w \to z$, sehingga definisi turunan diatas dapat ditulis dalam bentuk $f'(z_0) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ jika limit ini ada.

Teorema 4.4

(a) *Diberikan fungsi f dan g dapat diturunkan pada region* $D \subseteq C$, *maka fungsi* $f + g$, $f - g$, *kf (k konstanta), dan fg dapat diturunkan pada D dan ditentukan oleh turunan:*

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

$$(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z)$$

$$(kf)'(z) = kf'(z)$$

$$(fg)'(z) = f'(z) + f(z)g'(z)$$

[23] Saff, E.B. & A.D. Snider, 1993, *Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd edition*, Prentice Hall, Inc.

(b) *Jika fungsi f dan g dapat diturunkan pada region* $D \subseteq C$, *dan* $g(z) \neq 0$ *pada D, maka fungsi* $\frac{f}{g}$ *dapat diturunkan pada D dan ditentukan oleh turunan* $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$.

Bukti (b):

Misalkan:

$h(z) = \frac{1}{g(z)}, g(z) \neq 0,$ diperoleh:

Sehingga diperoleh,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \left(f.\frac{1}{g}\right)'(z)$$

$$= f'(z).\frac{1}{g(z)} + f(z).\left[\frac{-g'(z)}{\left(g(z)\right)^2}\right]$$

$$= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$$

Jadi terbukti bahwa

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$$

Teorema 4.5

Diberikan fungsi f yang dapat diturunkan pada C.

(a) *Jika* $f(z) = k$ *untuk setiap* $z \in C$ *dengan k suatu konstanta, maka* $f'(z) = 0$

(b) *Jika* $f(z) = z$ *untuk setiap* $z \in C$, *maka* $f'(z) = 1$

(c) *Jika* $f(z) = z^n$ *untuk setiap* $z \in C, n \in N$, *maka* $f'(z) = nz^{n-1}$

(d) *Jika* $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n$ *untuk setiap* $z \in C, n \in N$, *maka* $f'(z) = a_0 z^{n-1} + a_1 (n-1) z^{n-2} + ... + a_{n-1}$

Bukti (c)

Untuk $n \in N$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^n + \frac{n}{1!} z^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2!}(\Delta z)^2 + \ldots + (\Delta z)^n - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z\left(nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}\Delta z + \ldots + (\Delta z)^{n-1} \right)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \left(nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}\Delta z + \ldots + (\Delta z)^{n-1} \right) \\
&= nz^{n-1}
\end{aligned}$$

Contoh:

1) Misalkan fungsi f didefinisikan dengan $f(z) = z^2$. Carilah $f'(z)$?

   Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \\
&= \lim_{w \to z} \frac{w^2 - z^2}{w - z} \\
&= \lim_{w \to z} (w + z) \\
&= 2z
\end{aligned}$$

2) Tentukan turunan dari fungsi $f(z) = (2z^2 + i)^5$?

   Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= 5(2z^2 + i)^4 .4z \\
&= 20z(2z^2 + i)^4
\end{aligned}$$

3) Tentukan turunan dari fungsi $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ pada $z = i$?

Penyelesaian:

$$f'(z) = \frac{1(z+i)-1(z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

Sehingga untuk $z = i$ diperoleh:

$$f'(i) = \frac{2i}{(i+i)^2} = \frac{2i}{4i^2} = -\frac{1}{2}i$$

D. Aturan Rantai

Teorema 4.6

Diberikan fungsi $w = g(u)$ *dan* $u = f(z)$. *Jika fungsi f dapat diturunkan di z dan fungsi g dapat diturunkan di* $u = f(z)$, *maka* $w = (g \circ f)(z) = g(f(z))$ *dapat diturunkan di z dan* $(g \circ f)(z) = g(f(z)).f(z)$.

Dari teorema 1.6, diperoleh bahwa $\frac{dw}{du} = g'(u) = g'(f(z))$ *dan* $\frac{du}{dz} = f'(z)$.

Dengan demikian teorema 1.6 dapat ditulis dalam bentuk $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dz}$.[24]

Bukti:

(i) $w = g(u)$ dapat diturunkan di $u = f(z)$, maka

$$\Delta w = g(u).\Delta u + \varepsilon(\Delta u); \lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon(\Delta u) = 0$$

$$= \frac{dg}{du}\Delta u + \varepsilon(\Delta u).\Delta u$$

Jika $\Delta z \neq 0$, maka $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta z} + \varepsilon(\Delta u).\frac{\Delta u}{\Delta z}$

(ii) $u = f(z)$ dapat diturunkan di z¸ maka $\Delta u = f(z + \Delta z) - f(z)$, sehingga diperoleh $\Delta u \to 0$ jika dan hanya jika $\Delta z \to 0$. Jadi $\lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon(\Delta u) = \lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$

---

[24] Prayudi, 2009, *Kalkulus Lanjut, Fungsi Banyak Variabel dan Penerapannya*, Yogyakarta: Graha Ilmu.

(iii) $\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta z}+\varepsilon(\Delta u).\frac{\Delta u}{\Delta z}$, maka

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{dg}{du}\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta z}\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\varepsilon(\Delta z).\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta z}$$

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz}&=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dz}+0\cdot\frac{du}{dz}\\&=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dz}\\&=\frac{dw}{du}\cdot\frac{du}{dz}\end{aligned}$$

Contoh:

Diberikan $f(z)=\left(z^{-1}+2z+3\right)^4$. Carilah $f(z)$?

Penyelesaian:

Misalkan $u=z^{-1}+2z+3$, maka

$\frac{du}{dz}=-z^{-2}+2$ dan $\frac{df}{du}=4u^3=4\left(z^{-1}+2z+3\right)^3$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}f'(z)&=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dz}\\&=4\left(z^{-1}+2z+3\right)^3\left(-z^{-2}+2\right)\\&=\left(-4z^{-2}+8\right)\left(z^{-1}+2z+3\right)^3\end{aligned}$$

E. Persamaan Cauchy Riemann

Misalkan diberikan $f(z)=z^2$, dengan menggunakan definisi turunan diperoleh:[25]

$$f'(z)=\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}=\lim_{w\to z}\frac{w^2-z^2}{w-z}=2z \qquad (1)$$

Misalkan $z=x+iy$ diperoleh $f(z)=z^2=(x+iy)^2=\left(x^2-y^2\right)+2xyi$. Jadi, $u(x,y)=x^2-y^2$ dan $v(x,y)=2xy$.

[25] Matthews, K. R. 1998. *Elementary Linear Algebra*. Department of Mathematics: University of Queensland.

Turunan parsial pertama dari *u* dan *v* adalah

$u_x(x,y)=2x,\ u_y(x,y)=-2y,\ v_x(x,y)=2y,$ dan $v_y(x,y)=2x$.

Fungsi $u, v, u_x, u_y, v_x,$ dan v_y semuanya kontinu di R^2, karena masing-masing merupakan fungsi polinom. Dari turunan parsial pertama dapat dibentuk hubungan beriku

$$u_x = v_y = 2x \text{ dan } u_y = -v_x = -2y \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) disimpulkan bahwa jika $f'(z)=2z$, diperoleh $f'(z)=2(x+iy)=2x+2iy=u_x+iv_x=v_y-iu_y$.

Teorema 4.7

Diberikan $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *terdefinisi pada region* $D \subseteq C$ *dan* $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. *Jika* $f'(z_0)$ *ada, maka* $f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$ *sehingga persamaan Cauchy Reimann berlaku yaitu*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Bukti:

Karena $f'(z_0)$ ada, maka sepanjang $\Delta y = 0$ diperoleh:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\left[u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\right]-\left[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\right]}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)\right]+i\left[v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)\right]}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)\right]}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Dengan memilih kurva $\Delta x = 0$, dengan cara yang sama akan diperoleh

$$f'(z_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Teorema 4.8

Diberikan $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *terdefinisi pada region* $D\subseteq C$ *dan* $z_0=x_0+iy_0\in D$. *Jika*

(1) fungsi $u(x,y),v(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y),v_x(x,y)$, dan $v_y(x,y)$ *semuanya kontinu di* $z_0=(x_0,y_0)$

(2) memenuhi persamaan Chauchy Reimann

$u_x(p_0,q_0)=v_y(p_0,q_0)$ dan $u_y(p_0,q_0)=-v_x(p_0,q_0)$ *maka* $f'(z_0)$ *ada dan*

$f'(z_0)=u_x(p_0,q_0)+iv_x(p_0,q_0)=v_y(p_0,q_0)-iu_y(p_0,q_0)$

Bukti:

Misalkan $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, maka untuk sebarang titik $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ pada $N(z_0,r)$ diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta u&=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y\end{aligned}$$

dengan $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha(\Delta x,\Delta y)=0$ dan $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\beta(\Delta x,\Delta y)=0$

Selain itu diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta v&=v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)\\&=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\gamma(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\delta(\Delta x,\Delta y)\Delta y\end{aligned}$$

dengan $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\gamma(\Delta x,\Delta y)=0$ dan $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\delta(\Delta x,\Delta y)=0$

Menurut hipotesis, dua relasi diatas menjadi:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \qquad \text{(i)}$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y+\gamma\Delta x+\delta\Delta y \qquad \text{(ii)}$$

Oleh karena itu diperoleh,

$$
\begin{aligned}
& f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)=\ldots \\
& =\left[u\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)+i v\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)\right]-\left[u\left(x_0, y_0\right)+i v\left(x_0, y_0\right)\right] \\
& =\left[u\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0, y_0\right)\right]+i\left[v\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-v\left(x_0, y_0\right)\right] \\
& =\Delta u+i \Delta v
\end{aligned}
$$

Dengan (i) dan (ii), persamaan ini menghasilkan

$$
\begin{aligned}
& \frac{f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)}{\Delta z}=\ldots \\
& =\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{\Delta x}{\Delta z}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{\Delta y}{\Delta z} i+(\alpha+i \gamma) \frac{\Delta x}{\Delta z}+(\beta+i \delta) \frac{\Delta y}{\Delta z} \\
& =\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}+\frac{\Delta y}{\Delta z} i\right)+(\alpha+i \gamma) \frac{\Delta x}{\Delta z}+(\beta+i \delta) \frac{\Delta y}{\Delta z} \\
& =\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i \frac{\partial v}{\partial x}\right)+(\alpha+i \gamma) \frac{\Delta x}{\Delta z}+(\beta+i \delta) \frac{\Delta y}{\Delta z} \qquad \text{(iii)}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan relasi (iii), diambil limitnya untuk $\Delta z \rightarrow 0$ sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)}{\Delta z} &=\lim_{\Delta z \rightarrow 0}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i \frac{\partial v}{\partial x}+(\alpha+i \gamma) \frac{\Delta x}{\Delta z}+(\beta+i \delta) \frac{\Delta y}{\Delta z}\right] \\
f'\left(z_0\right) &=\lim_{\Delta z \rightarrow 0}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i \frac{\partial v}{\partial x}+(\alpha+i \gamma) \frac{\Delta x}{\Delta z}+(\beta+i \delta) \frac{\Delta y}{\Delta z}\right]
\end{aligned}
$$

Karena $\Delta z \rightarrow 0$ maka $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta y \rightarrow 0$ serta semua $\alpha, \beta, \gamma, \delta \rightarrow 0$ sehingga diperoleh $\alpha+i y \rightarrow 0$ dan $\beta+i \delta \rightarrow 0$. Karena $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leq 1$ dan $\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq 1$, diperoleh $f'\left(z_0\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i \frac{\partial v}{\partial x}$ dan $f'\left(z_0\right)=\frac{\partial v}{\partial y}-i \frac{\partial u}{\partial y}$.

Contoh:

Diberikan fungsi $f(z)=\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x},(x, y) \neq(0,0) \\ 0, \qquad (x, y)=(0,0)\end{cases}$

Perlihatkan bahwa $f'(0)$ ada tetapi $\frac{\partial u}{\partial x}$ tak kontinu di $(0,0)$.

Penyelesaian:

Misalkan $u(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \qquad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ dan $v(x,y)=0$ untuk setiap $(x,y)\in R^2$.

Diperoleh,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

$$=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

Sehingga diperoleh

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}2x\sin\frac{1}{x}-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\frac{1}{x}$$

$$=0-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\frac{1}{x}$$

$$=-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\frac{1}{x} \text{ tidak ada}$$

Karena $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\neq\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$, maka $\frac{\partial u}{\partial x}$ tak kontinu di $(0,0)$

Tetapi,

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0+\Delta z) - f(0)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\Delta z)^2 \sin \frac{1}{\Delta z}}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z \sin \frac{1}{\Delta z} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Contoh:

Selidiki dimanakan fungsi berikut dapat diturunkan, kemudian tentukan fungsi turunannya.

a. $f(z) = x^2 - iy^2$

b. $f(z) = \overline{z}$

c. $f(z) = |z|^2$

Penyelesaian:

a. $f(z) = x^2 - iy^2, Df = C$. Misalkan $u(x,y) = x^2$ dan $v(x,y) = -y^2$, maka

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$ dan $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ semuanya kontinu untuk setiap $(x,y) \in R^2$.

Misalkan persamaan Cauchy Reimann dipenuhi yaitu $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x = -2y \Leftrightarrow y = -x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$f'(z)$ ada hanya jika untuk titik $z_0 = (x_0, y_0)$.

Jadi $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = 2x_0.$

Akibatnya diperoleh $f'(z) = 2x.$

b. $f(z) = \bar{z} = x - iy, Df = C$. Misalkan $u(x,y) = x$ dan $v(x,y) = -y$, maka $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = -1$ dan fungsi $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ semuanya kontinu untuk setiap $(x,y) \in R^2$.

Karena $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$ untuk setiap $(x,y) \in R^2$, maka $f(z) = \bar{z}$ tidak mempunyai turunan pada *C*.

c. $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2, Df = C$. Misalkan $u(x,y) = x^2 + y^2$ dan $v(x,y) = 0$, maka $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ dan fungsi $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ semuanya kontinu untuk setiap $(x,y) \in R^2$.

Misalkan Cauchy Riemann hanya dipenuhi yaitu,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{dengan} \quad \begin{cases} 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{cases}$$

Persamaan Cauchy Riemann hanya dipenuhi di titik $(0,0) \in R^2$. Jadi $f'(z)$ ada hanya untuk $z = 0$ dan $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0 + i0 = 0$

Latihan:

1. Gambarlah daerah persekitaran (neighbor) dari:

    a. $P\left(-i, \frac{1}{4}\right)$

    b. $T\left(-\frac{1}{2}i, -\frac{1}{8}\right)$

    c. $T\left(-\frac{1}{4}i, -\frac{1}{16}i\right)$

2. Gambarlah komplemen dari:

    a. $P\{z \mid \mathrm{Re} \geq 4\}$

    b. $Q\{z \mid -2 < \mathrm{Re} \geq 4\}$

    c. $R\{z \mid 3 \leq \mathrm{Re} \leq 5 \text{ dan } \mathrm{Im} \leq 2\}$

    d. $S\{z \mid 2 < \mathrm{Re} \leq 5 \text{ dan } 2 \leq \mathrm{Im} < 4\}$

3. Jika $P = \{r, s, t, u, v\}$ dan $\tau = \{Z, \varnothing, \{r\}, \{r, s\}, \{r, s, t\}, \{r, s, t, u\}, \{s, t, u, v, w\}\}$

    a. Apakah *P* merupakan titik limit dari *P*

    b. Apakah $P_1 = \{s, t, u\}$ merupakan titik limit dari *P*

    c. Jika $A = \{r, s, t\}$, tentukanlah titik interior dan eksterior nya jika ada

    d. Jika $B = \{s, t, r\}$, tentukanlah titik interior dan eksterior nya jika ada

4. Dari soal nomor 3 diatas, tentukan perbatasan (boundary) dari soal 3a dan 3b jika ada?

5. Carilah batas setiap himpunan yang diberikan, kemudian tentukan apakah himpunan tersebut tertutup, terbuka atau keduanya, eksterior, dan interior dari himpunan tersebut.

    a. $1 < |z| \leq 3$

    b. $2 \leq \mathrm{Re}(\bar{z}) < 5$

    c. $|z - 1| < 2$

6. Hitunglah limit fungsi berikut:

a. $\lim\limits_{z\to 3}\dfrac{z^3-1}{z+1}$

b. $\lim\limits_{z\to -1+i}\dfrac{z^2+(3-i)z+2-2i}{z+1-i}$

7. Selidiki apakah limit berikut ada.

a. $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{x+y-1}{z-i}$

b. $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}-\dfrac{y^2}{x^2}i\right)$

8. Carilah turunan dari fungsi berikut dengan definisi atau dengan aturan rantai:

a. $f(z)=z^5+2z^3+3$

b. $f(z)=(-2z-5)^8(1-2z-z^3)^{10}$

c. $f(z)=\dfrac{(-2z-5)^8}{(1-2z-z^2)^{10}}$

d. $v(z)=\dfrac{z^{10}+1}{z^6+1}$

e. $g(z)=\sin^2(5z+2i)$

f. $g(z)=2z\sin^{-1}(\ln z)$

g. $h(z)=3\sin^2(2z-1+i)$

h. $h(z)=\ln(\sec z+\tan z)$

i. $k(z)=w^3z^{-3}-3z^2w+4\ln^2 z$

9. Tentukan $f(z_0)$ dari:

a. $f(z)=3z^2-z^{-3}$ pada $z_0=-2i$

b. $f(z)=\dfrac{-iz^2}{(-1-2i)z}$ pada $z_0=\pi i$

c. $h(z)=\ln(\sec z+\tan z)$ pada $z_0 = \frac{3}{2}\pi$

d. $h(z)=\frac{\ln(\sec z+\tan z)}{\tan z}$ pada $z_0 = \frac{\pi}{2}$

10. Jika $f(z)=|z|^3$ tidak terdifferensial di $z \neq 0$, buktikanlah?

11. Tunjukkan bahwa fungsi $f(z)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+\frac{x^3-y^2}{x^2+y^2}i, z\neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , z=0 \end{cases}$

    Memenuhi di $z=0$ tetapi tidak mempunyai turunan di *C*, maka persamaan Chauchy Riemann nya adalah?

12. Gunakan persamaan Cauchy Riemann untuk memeriksa keterdifferensialan fungsi berikut:

    a. $q(z)=x^2+y^2$

    b. $h(z)=\frac{1}{x+iy}$

    c. $g(z)=e^y(\cos x+i\sin y)$

BAB V

PENGINTEGRALAN KOMPLEKS

A. Fungsi Kompleks Dari Variabel Riil

Definisi 5.1

Misalkan $F(p)$ *adalah fungsi kompleks dari variabel riil* p *, ditulis sebagai* $F(p) = u(p) + i\ v(p)$ *dengan* $u(p)$ *dan* $v(p)$ *adalah fungsi riil. Jika* $u(t)$ *dan* $v(t)$ *kontinu pada interval tertutup* $a \leq t \leq b$*, maka:*[26]

$$\int_a^b F(p)\ dp = \int_a^b u(p)\ dp + i \int_a^b v(p)\ dp .$$

Sifat-sifat:

1. $\text{Re}\left(\int_a^b F(t)\, dt \right) = \int_a^b \text{Re}\left(F(t)\right)\, dt$
2. $\text{Im}\left(\int_a^b F(t)\, dt \right) = \int_a^b \text{Im}\left(F(t)\right)\, dt$
3. $\int_a^b k\, F(t)\ dt = k \int_a^b F(t)\ dt$
4. $\int_a^b F(t)\ dt = -\int_b^a F(t)\ dt$
5. $\left| \int_a^b F(t)\ dt \right| = \int_a^b \left| F(t) \right|\ dt$

Bukti sifat 3

$$\int_a^b k\, F(t)\ dt = \int_a^b k\, [u(t) + i\, v(t)]\ dt$$

$$= \int_a^b k\, u(t)\, dt + \int_a^b k\ i\, v(t)\, dt$$

(sifat fungsi integal riil : $\int_a^b k\ f(x)\, dx = k \int_a^b f(x) dx$

$$= k \int_a^b u(t)\, dt + k \int_a^b i\, v(t)\, dt$$

$$= k \left\{ \int_a^b u(t)\, dt + \int_a^b i\, v(t)\, dt \right\}$$

$$= k \int_a^b F(t)\, dt$$

---

[26] James Stewart, *2012, Multivariable Calculus*, University Of Toronto Seventh Edition

Bukti sifat 4

$$\int_a^b F(t)\ dt = \int_a^b u(t)\ dt\ +\ i\int_a^b v(t)\ dt$$

(sifat integral fungsi riil : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$)

$$= -\int_b^a u(t)\ dt - i\int_b^a v(t)\ dt$$

$$= -\left\{\int_b^a u(t)\ dt + i\int_b^a v(t)\ dt\right\}$$

$$= -\left\{\int_b^a [u(t) + i\ v(t)]\ dt\right\}$$

$$= -\int_b^a F(t)\ dt \quad \text{(terbukti)}$$

B. Lintasan

Himpunan titik-titik pada bidang kompleks juga dinyatakan dalam bentuk parametrik. Jika g dan h fungsi bernilai real dan kontinu di t dalam interval tertutup $a \leq t \leq b$, maka himpunan titik pada bidang xy dapat dinyatakan dalam bentuk parametrik $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \leq t \leq b$.

Definis 5.2

Kurva di bidang datar merupakan kurva mulus (smooth curve) jhj kurva tersebut dapat dinyakan dengan dua fungsi bernilai riil

$$x = g(t)\ ,\ y = h(t),\ \ \alpha \leq t \leq \beta$$

sehingga $\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ *dan* $\dfrac{dy}{dt} = h'(t)$ *ada dan kontinu pada selang* $\alpha \leq t \leq \beta$

Contoh:

Jika $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \leq t \leq \dfrac{3\pi}{2}$ merupakan sebuah kurva yang mulus. bentuk parametriknya adalah?

Bentuk parametrik dari kurva mulus adalah:

$$x = g(t)\ ,\ y = h(t),\ \ \alpha \leq t \leq \beta$$

Maka:

- titik *G* bersesuaian dengan $t = \alpha$ dikatakan titik awal *G*.
- titik *G* bersesuaian dengan $t = \beta$ dikatakan titik akhir *G*.

G dikatakan *path* bila *G* terdiri dari berhingga banyak kurva mulus,

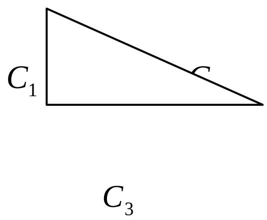
$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

dengan $G_1, G_2, \cdots, G_n$ merupakan kurva mulus.[27]

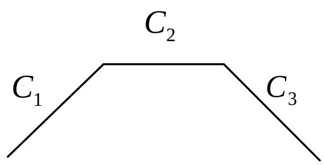
Ketentuan:

1. *G* dikatakan lintasan tertutup jika titik akhir *G* bertindihan dengan titik asal *G*,
2. *G* dikatakan lintasan terbuka jika titik akhir *G* tidak bertindihan dengan titik asal *G*.
3. *G* dikatakan lintasan sederhana jika tidak melewati dirinya sendiri.
4. *G* dikatakan lintasan berganda jika melewati dirinya sendiri.

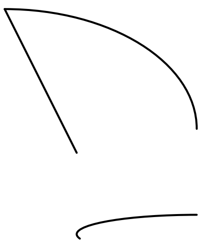
Contoh:



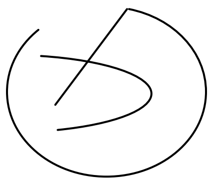
a. Lintasan tertutup



b. Lintasan terbuka



c. Lintasan sederhana



d. Lintasan berganda

---

[27] Prayudi, 2009, *Kalkulus Lanjut, Fungsi Banyak Variabel dan Penerapannya*, Yogyakarta: Graha Ilmu.

C. Integral Garis

Diberikan kurva mulus G dengan $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \le t \le b$. $g(t)$ dan $h(t)$ kontinu di $a \le t \le b$. $g'(t)$ dan $h'(t)$ kontinu di $a \le t \le b$. Kurva G mempunyai arah dari titik awal $A(g(a), h(a))$ ke titik akhir $B(g(b), h(b))$ dan $P(x, y)$ suatu fungsi yang terdefinisi di G

Teorema 5.1

1. *Jika* $P(x, y)$ *kontinu di G, maka* $\int_C P(x, y)\,dx$ *dan* $\int_C P(x, y)\,dy$ *ada dan*

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_a^b P[g(t), h(t)]\,g'(t)\,dt$$

$$\int_C P(x, y)\,dy = \int_a^b P[g(t), h(t)]\,h'(t)\,dt$$

2. $\int_A^B P(x, y)\,dx = -\int_B^A P(x, y)\,dx$

3. *Jika* $P(x, y)$ *dan* $Q(x, y)$ *kontinu di G, maka*

$$\int_C P(x, y)\,dx + \int_C Q(x, y)\,dx = \int_C \{P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dx\}$$

Teorema 5.2

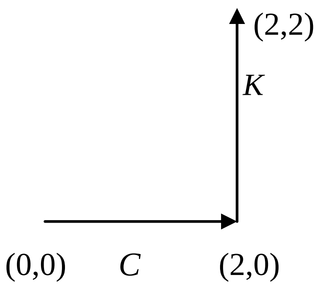
Jika $P(x, y)$ *dan* $Q(x, y)$ *serta turunan dari parsial tingkat pertama kontinu pada seluruh daerah tertutup* R *yang dibatasi lintasan tertutup G,*

$$\oint_C \{P\ dx + Q\ dy\} = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy$$

Contoh:

Tentukan integral garis fungsi $M(x, y) = x + y$ sepanjang lintasan $G + K$ dengan C : garis dari (0,0) ke (2,0) dan K : garis dari (2,0) ke (2,2).

Penyelesaian :



C : $y = 0$, $0 \le x \le 2$

K : $x = 2$, $0 \le y \le 2$

Pada kurva C : $dy = 0$ dan pada kurva $K : dx = 0$

$$\int_{C+K} M(x,y)\,dx = \int_C M(x,y)\,dx + \int_K M(x,y)\,dx$$
$$= \int_C (x+y)\,dx$$
$$= \int_0^2 x\,dx$$
$$= 2$$
$$\int_{C+K} M(x,y)\,dy = \int_C M(x,y)\,dy + \int_K M(x,y)\,dy$$
$$= \int_K (x+y)\,dy$$
$$= \int_0^2 (2+y)\,dx$$
$$= 6$$

D. Integral Fungsi Kompleks

Lintasan G bentuk parametrik $x = g(t)$, $y = h(t)$ dengan $a \le t \le b$. $g(t)$ dan $h(t)$ kontinu di $a \le t \le b$. $g'(t)$, $h'(t)$ kontinu di $a \le t \le b$. Jika $z = x + iy$, maka titik-titik z terletak G. Arah pada kurva G $(g(a), h(a))$ ke $(g(b), h(b))$ atau dari $z = \alpha$ sampai $z = \beta$ dengan $\alpha = (g(a), h(a))$ dan $\beta = (g(b), h(b))$.[28]

Definisi 5.3

Dimisalkan fungsi $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *dengan* u *dan* v *fungsi dari* t *kontinu dengan sepotong pada* $a \le t \le b$. *Integral dari fungsi* $f(z)$ *dari sepanjang lintasan G dengan arah dari* $z = \alpha$ *sampai* $z = \beta$ *ditulis*

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = \int_a^b f\left[g(t) + i\,h(t)\right]\left\{g'(t) + i\,h'(t)\right\}dt$$

Sifat-sifat:

1. $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = -\int_\beta^\alpha f(z)\,dz$
2. $\int_C k\,f(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$

[28] Prayudi, 2009, *Kalkulus Lanjut, Fungsi Banyak Variabel dan Penerapannya*, Yogyakarta: Graha Ilmu.

3. $\int_C [f(z)+g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

Contoh:

Hitung $\int_\gamma z e^{z^2}\,dz$ jika γ : garis lurus dari $z_0 = 1$ ke $z_1 = 2+i$.

Penyelesaian :

$z_0 = 1 \longrightarrow z_1 = 2+i$

(0,1) (2,1)

Persamaan garis γ : $y = 1$ dan mempunyai bentuk parametrik :

$$\begin{aligned} x &= g(t) = t \\ y &= h(t) = 1 \end{aligned} \quad , \quad t \in [0,2] \qquad (1)$$

Dari (1) diperoleh :

$z = g(t) + i\,h(t) = t + i$

$dz = \{g'(t) + i\,h'(t)\}dt = 1.\,dt$

$f(z) = z e^{z^2}$ maka $f[g(t)+i\,h(t)] = f(t+i) = (t+i)\,e^{(t+i)^2}$.

Sehingga,

$$\begin{aligned} \int_\gamma z e^{z^2}\,dz &= \int_0^2 (t+i)e^{(t+i)^2}\,1\,dt \\ &= \int_0^2 (t+i)\,e^{(t+i)^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{3+4i} - e^{-1}\right] \end{aligned}$$

Contoh:

Hitunglah $\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y+x^2)dx + (3x-y)dy$ sepanjang:

a. Parabola $x = 2t, y = t^3 + 3$

b. Garis lurus dari $(0,3)$ ke $(2,3)$ dan kemudian dari $(2,3)$ ke $(2,4)$

c. Garis lurus dari $(0,3)$ ke $(2,4)$

Penyelesaian:

a. Titik $(0,3)$ dan $(2,4)$ pada parabola berkaitan dengan $t=0$ dan $t=1$. Maka integral yang diberikan:

$$\int_{t=0}^{1}\left\{(2t^2+3)+(2t^2)^2\right\}2dt+\left\{3(2t)-(t^2+3)\right\}2dt=\int_0^1\left((24t^2+12-2t^3)-6t\right)$$
$$=\frac{33}{2}$$

b. Sepanjang garis lurus dari $(0,3)$ ke $(2,3)$, $y=3, dy=0$ dan integral garisnya:

$$\int_{x=0}^{2}(6+x^2)dx+(3x-3)0=\int_{x=0}^{2}(6+x^2)dx$$
$$=\frac{44}{3}$$

Sepanjang garis lurus dari $(2,3)$ ke $(2,4), x=2, dx=0$, maka integral garisnya:

$$\int_{y=3}^{4}(2y+4)0+(6-y)dy=\int_{y=3}^{4}(6+y)dy$$
$$=\frac{5}{2}$$

c. Suatu pers. garis yang menghubungkan $(0,3)$ dan $(2,4)$ yakni $2y-x=6$. Selesaikan untuk *x*, maka $x=2y-6$. Jadi integral garisnya:

$$\int_{y=3}^{4}\left\{2y+(2y-6)^2\right\}2dy+\left\{3(2y-6)-y\right\}dy=\int_3^4(8y^2-39y+54)dy$$
$$=\frac{97}{6}$$

Contoh:

Hitunglah $\int_c (x^2+iy^2)dz,$ jika:

a. C adalah parabola $y=4x-x^2$ dari titik $(0,0)$ ke $(2,4)$

b. C adalah garis lurus dari $(0,0)$ ke $(2,4)$ dilanjutkan dari $(2,4)$ ke $(4,0)$

Penyelesaian:

a. Diketahui:

$y=0\rightarrow 4$
$x=0\rightarrow 2$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$2y=4x$$

$$y=2x$$

$$dy=2dx$$

$$\begin{aligned}\int_c \left(x^2+iy^2\right)dz &= \int_c \left(x^2+iy^2\right)\left(dx+idy\right)\\ &= \int_c x^2dx+\int_c ix^2dy+\int_c iy^2dx-\int_c y^2dx\\ &= \int_c x^2dx-\int_c y^2dy+i\left(\int_c x^2dy+\int_c y^2dx\right)\\ &= \int_0^2 x^2dx-\int_0^4 y^2dy+i\left(\int_0^2 x^2\left(2\right)dx+\int_0^2\left(2x\right)dx\right)\\ &= -\frac{8}{3}+\frac{64}{3}+i\left(-\frac{16}{3}-4\right)\\ &= \frac{56}{3}+7i\end{aligned}$$

b. Diketahui:

$$c_1 = x = 0 \to 2$$

$$y = 0 \to 4$$

$$y=2x, dy=2dx$$

$$c_2 = x = 2 \to 4$$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-4}{0-4}=\frac{x-2}{4-2}$$

$$2y-8=-4x+8$$

$$2y=-4x+16$$

$$y=-2x+8$$

$$dy=-2dx$$

$$y = 0 \to 4$$

$$\int_{c} \left(x^2 + iy^2\right) dz = \int_{c_1} \left(x^2 + iy^2\right) dt + \int_{c_2} \left(x^2 + iy^2\right) dz$$

$$\int_{c_1} \left(x^2 + iy^2\right) dz = \frac{56}{3}$$

$$\begin{aligned}
\int_{c_2} \left(x^2 + iy^2\right) dz &= \int_{c_2} x^2 dx - \int_{c_2} y^2 dy + i\left(\int_{c_2} x^2 dy + \int_{c_2} y^2 dx\right) \\
&= \int_0^2 x^2 dx - \int_0^4 y^2 dy + i\left(\int_0^2 x^2 \left(-2\right) dy + \int_0^2 y^2 dx\right) \\
&= 2 - 8 + i\left(-\frac{16}{3} + \frac{8}{3}\right) \\
&= -6 - \frac{8}{6} i
\end{aligned}$$

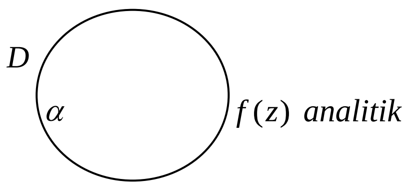
E. Integral Tak Tentu Dan Tentu

Diberikan sebuah fungsi f analitik domain terhubung sederhana D, maka $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$ mempunyai turunan untuk setiap titik z di dalam D dengan $F'(z) = f(z)$, asalkan lintasan pengintegralan dari z_0 ke z seluruhnya terletak di dalam D. Jadi $F(z)$ juga analitik di dalam D.[29]

Teorema 5.7

Jika α dan β di dalam D, maka

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\, dz = F(\beta) - F(\alpha)$$



Contoh:

$$\int_{i}^{2+i} z\, dz = \left[\frac{1}{2} z^2\right]_{i}^{2+i} = 2 + 2i\ .$$

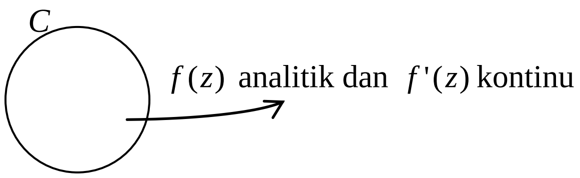
[29] Spiegel, M.R. 1990. *Advanced Calculus*. McGraw-Hill, New York.

(Karena $f(z) = z$ merupakan fungsi utuh, maka dapat dibuat sebarang domain terhubung sederhana D yang memuat lintasan pengintegralan dari $z = i$ ke $z = 2 + i$.

F. Integral *Cauchy*

Teorem 1.3 (Teorema *Chauchy*)

Diberikan $f(z)$ analitik dan $f'(z)$ kontinu pada lintasan tertutup sederhana C, sehingga $\oint_C f(z)\,dz = 0$.[30]



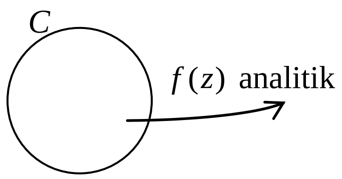
Contoh:

Misalkan diberikan C sebarang lintasan tertutup dalam bidang kompleks.

1. $f(z) = z^2 \longrightarrow \oint_C z^2\,dz = 0$
2. $f(z) = 1 \longrightarrow \oint_C dz = 0$

Teorema 5.4 (Teorema *Cauchy-Goursat*)

Diberikan $f(z)$ analitik pada lintasan tertutup sederhana C, dengan $\oint_C f(z)\,dz = 0$.



[30] Yue, Kuen Kwok, 2010, *Applied Complex Variables for Scientists and Engineers* Second Edition, New York: Cambridge University Press.

Contoh:

Diketahui $C : |z| = 1$. Hitunglah $\int_C f(z)\,dz$ jika $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$.

Penyelesaian :

$f'(z) = -\dfrac{1}{(z-3)^2}$, $f(z)$ *non*-analitik di $z = 3$ dan $z = 3$ terletak diluar C. Oleh karena itu, $f(z)$ analitik di dalam dan pada lintasan C, sehingga $\oint_C \dfrac{1}{(z-3)}\,dz = 0$.

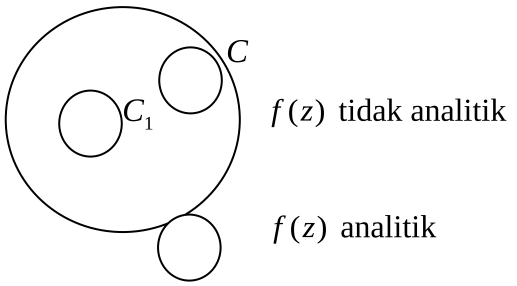
Teorema 5.5 (Bentuk lain Teorema *Cauchy Goursat*)

Jika fungsi $f(z)$ *analitik di seluruh domain terhubung sederhana* D*, maka untuk setiap lintasan tertutup* C *di dalam* D*, berlaku* $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

Teorema 5.6 (Teorema *Cauchy Goursat* yang diperluas)

Diberikan suatu lintasan tertutup C*, sedangkan* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *adalah lintasan-lintasan tertutup yang terletak di interior* C *sedemikian sehingga* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *tidak saling berpotongan. Jika fungsi* $f(z)$ *analitik di dalam daerah tertutup yang terdiri dari titik-titik pada* C *dan titik-titik di dalam* C*, kecuali titik-titik interior* $C_1, C_2, \ldots, C_n$*, maka*

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$$



Contoh:

Diberikan $C : \left| z-2 \right| = 2$, hitunglah $\int_C \dfrac{dz}{(z-3)}$?

Penyelesaian:

$f(z) = \dfrac{1}{z-3}$ tidak analitik di $z = 3$ dalam interior C. Dalam lintasan tertutup C_1 dengan C berpusat di $z = 3$ yaitu $C_1 : \left| z-3 \right| = \dfrac{1}{2}$. Diperoleh $z = 3 + \dfrac{1}{2} e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ dan $dz = \dfrac{1}{2} e^{it}\, dt$. Menurut Teorema Cauchy Goursat,

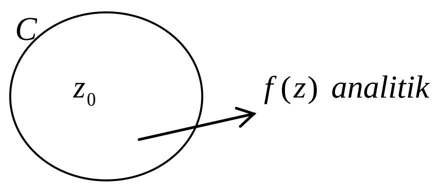
$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{dz}{(z-3)} &= \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-3)} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} i e^{it}\ dt}{\frac{1}{2}\ e^{it}} \\
&= i \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$

Teorema 5.7 (Rumus Integral *Cauchy*)

Diberikan $f(z)$ *analitik pada lintasan tertutup* C *dan* z_0 *sebarang titik di dalam* C*, maka*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \quad atau$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i \,.\, f(z_0)$$



Differensial Analitiknya adalah:[31]

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz = 2\pi i \,.\, f'(z_0)$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\, dz$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} \,.\, f''(z_0)$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} \,.\, f^{n}(z_0)$$

Contoh:

1) Diberikan $C : |z-2| = 2$, Hitung $\oint_C \frac{dz}{z-3}$?

   Penyelesaian:

   Ambil $f(z) = 1$ ($f(z)$ analitik didalam dan pada C

   $z_0 = 3$ di dalam C

   $f(z_0) = f(3) = 1$

   Dengan integral Cauchy,

$$\oint_C \frac{dz}{z-3} = 2\pi i \,.\, f(z_0)$$
$$= 2\pi i (1)$$
$$= 2\pi i$$

[31] Spiegel, Murray R.,Koko Martono. 1964. *Teori dan Soal-soal Peubah Kompleks* Jakarta: Erlangga.

2) Diberikan dengan $C : \left| z-3 \right| = 2$, Hitung $\oint_C \dfrac{dz}{z^3\ (z-2)^2}$?

Penyelesaian**:**

Ambil: $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$ ($f(z)$ analitik didalam dan pada C

$z_0 = 2$ didalam C

$$f'(z) = -\frac{3}{z^4}$$

$$f'(z_0) = f'(2)$$

$$= -\frac{3}{16}$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^3\,(z-2)^2} = \frac{2\pi i}{1!}\, f(z_0) = \frac{2\pi i}{1}\left(-\frac{3}{16}\right) = -\frac{3}{8}\pi i$$

3) Jika C adalah persegi dengan titik sudut $2+2i, -2+2i, -2-2i$, dan $2-2i$ dengan C berorientasi positif, maka nilai dari $\oint \dfrac{\cos z}{z\,(z^2-8)}\, dz$ adalah...

Penyelesaian:

C adalah kurva yang membentuk bangun persegi pada bidang kompleks. Perhatikanlah bahwa titik singular integran, yaitu $z = 0$ berada dalam C, sedangkan $z^2 - 8 = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{8}$ tidak berada dalam C, jadi dapat ditulis:

$$\oint \frac{\cos z}{z\,(z^2-8)}\, dz = \oint \frac{\cos z}{z^2-8} \times \frac{dz}{z}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\cos z}{z^2-8} \right]_{z=0}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\cos 0}{0-8} \right]$$

$$= -\frac{1}{4}\pi i$$

4) Hitunglah $\oint\limits_C \dfrac{z^3-6}{2z-i}\, dz$ dengan menggunakan integral *Cauchy*?

Penyelesaian:

$$\oint_C \frac{z^3-6}{2z-i}dz = \oint_C \frac{\frac{z^3-6}{2}}{z-\frac{i}{2}}dz$$

$$= 2\pi i\left[\frac{z^3-6}{2}\right]_{z=\frac{i}{2}}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{\frac{i}{8}-6}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{8} - 6\pi i$$

5) Integralkan $\oint \frac{1}{4z+i}dz$ dengan arah berlawanan jarum jam sepanjang lingkaran satuan?

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa C adalah kurva berupa lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ beradius 1 lingkaran satuan.

$$\oint \frac{1}{4z+i}dz; C:|z|=1$$

$$\oint \frac{1}{4z+i}dz = \oint \frac{\frac{1}{4}}{z+\frac{i}{4}}dz$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{4}\right]_{z=-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\pi i}{2}$$

Untuk setiap kontur melingkungi $z=-\frac{i}{4}$ termasuk dalam kasu ini $C:|z|=1$.

Latihan:

1. Hitung $\int_{\gamma} z e^{z^2}\, dz$ jika γ : kurva $y = x^2$ dari $z_0 = 0$ ke $z_1 = 1 + i$

2. Tentukan $\int_C f(z)\,dz$ jika $f(z) = z^3$ dimana C: setengan lingkaran $|z| = 2$ dari $z = -2i$ ke $z = 2i$

3. Tentukan integral fungsi $f(z)$ diman sepanjang dari lintasan tertutup C dari $f(z) = \dfrac{z e^z}{(4z + \pi i)^2}$, $C : |z| = 1$ (*counter clock wise*)

4. Tentukan $f(z)$ sepanjang lintasan tertutup C dari $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2 (z^2 + 4)}$, C: ellips $x^2 + 4y^2 = 4$ (*counter clock wise*)

5. Tentukan integral fungsi $f(z)$ sepanjang lintasan tertutup C dari $f(z) = \dfrac{Ln(z+3) + \cos z}{(z+1)^2}$, C: spersegi dengan titik sudut $z = \pm 2$ dan $z = \pm 2i$ (*counter clock wise*)

4. Hitunglah $\int_c \left(x^2 - 2iy^2\right) dz$, jika:
   a. C adalah parabola $y = -x - x^3$ dari titik $(0,0)$ ke $(2,4)$
   b. C adalah garis lurus dari $(0,0)$ ke $(2,4)$ dilanjutkan dari $(2,4)$ ke $(4,0)$

5. Hitung $\int_C \dfrac{dz}{(-2z-2)}$, jika $C : |z - 3| = 3$?

6. Tentukan nilai dari integral kompleks $\int_C \cos z dz$ jika C adalah setengah lingkaran $|z| = \pi, x \geq 0$ dari $-\pi i$ ke πi ?

7. Nilai dari $\int_C f(z)dz$ jika $f(z) = y - x + 6ix^2$ dan C terdiri atas dua penggal garis $z = 0$ sampai $z = i$ dan dari $z = i$ sampai $z = 1 + i$ adalah...

8. Tentukan $\int_C \bar{z}dz$ dari $z = 0$ ke $z = 6 + 2i$ sepanjang kurva C yang diberikan oleh:
   a. $z = t^2 + it$
   b. Garis $z = 0$ ke $z = 2i$ kemudian dari $z = 2i$ $z = 6 + 2i$

9. Tentukan integral kompleks $\int_C ze^{z^2}dz$ adalah kurva dari 2 menuju 2i sepanjang sumbu kompleks.

10. Hitunglah $\oint_C \frac{e^z}{2z-1}dz$ dengan integral *Cauchy* ?

11. Hitunglah $\oint_C \frac{z^2-6}{z-i}dz$ dengan integral *Cauchy* ?

12. Hitunglah $\oint_{|z|=2} z^2 de^{3z} z$ dengan integral *Cauchy* ?

13. Hitunglah $\oint_{|z|=4} 2z^2 de^{3z} z$ dengan integral *Cauchy* ?

14. Hitunglah integral kompleks dari $\oint_C e^{-2x} e^{-iy} dz$ jika C adalah persegi dengan titik-titik sudut 0, 1, 1 + *i*, *i*

15. Integralkan $\oint \frac{2}{2z-i}dz$ berhubungan dengan arah jarum jam yang berlawanan?

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, , 2010, *An Introduction to Complex Analysis.* Springer New York London.

Andrilli, Stephen and Hecker D. 2010. *Elementary Linear Algebra Fourth Edition*. Canada: Elsevier.

Choudry, B., 1983, *The Element of Complex Analysis*. New Delhi: Wiley Eastern Limited.

Churchil, 2009, *Complex Variable & Application 8th Edition*, Mc Graw-Hill.

Howard Anton, IRL Bivens, Stephen Davis, 2009. *Multivariables Calculus*, 9^{th} Edition, Jhon Wiley & Sons, Inc, Singapore.

James Stewart, *2012, Multivariable Calculus*, University Of Toronto Seventh Edition.

Matthews, 1998. *Elementary Linear the Algebra*. Dept. of Mathematics: Univ. of Queensland.

Poliouras, 1990. *Complex the Variable For Scientists And Engineers,* 2^{nd} *Edition*, Coll Div.

Prayudi, 2009, *Kalkulus Lanjut, Fungsi Banyak Variabel dan Penerapannya*, Yogyakarta: Graha Ilmu.

R. Courant, 1950, *Differential and Integral Calculus* New York: Interscience Publishers, Inc.

Royden, H, L., 1989, *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York.

Saff, E.B. & A.D. Snider, 2003, *Fundamentals Of Complex Analysis, With Applications,* 3^{nd} *Edition,* Prentice Hall. Inc.

Spiegel, 1990. *Advanced Calculus*. New York: McGraw-Hill.

Spiegel, Murray R.,Koko Martono. 1964. *Teori dan Soal-soal Peubah Kompleks* Jakarta: Erlangga.

Thomas, George. B, 1998, *Calculus and Analytic Geometry* 9^{th} *Edition,*: Addison-Wesley Publishing Company: Massachasetts Institute of Technology.

Wunsch, , 1994, *Complex Variables With Applications 2nd Edition.* Addison-Wesley.

Yue, Kuen, 2010, *Applied Complex Variables for Scientists and The Engineers* Second Edition, New York: Cambridge