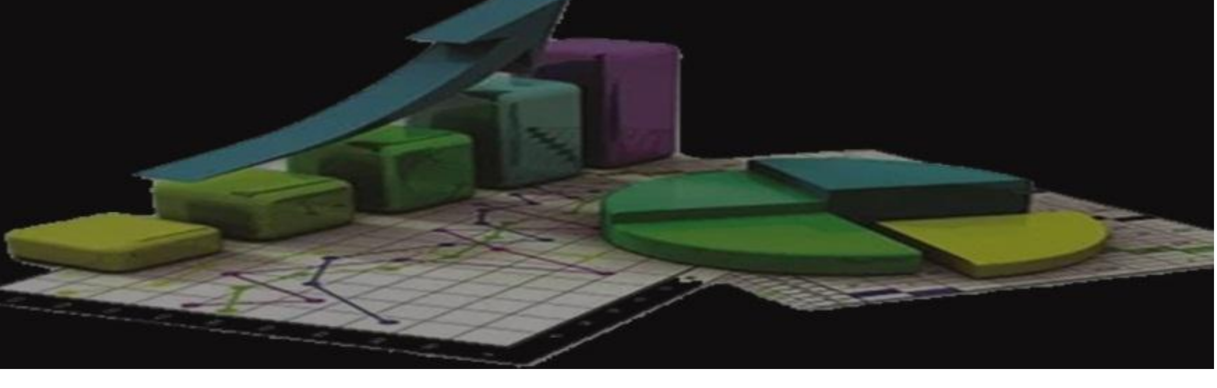
EKA KHAIRANI HASIBUAN MPD

STATASTIKA

MATEMATIKA



KATA PENGANTAR

Segala puji bagi ALLAH SWT, Tuhan semesta alam yang telah memberikan kesehatan, waktu, ruang dan kesempatan untuk menyelesaikan penulisan buku ajar ini. Shalawat berangkaikan salam penulis hadiahkan kepada Baginda Rasullah, Nabi Muhammad SAW.

Buku ajar ini berjudul **STATISTIKA MATEMATIKA,** ditulis dengan tujuan agar para mahasiswa memiliki pengetahuan yang mumpuni dan mendalam, juga wawasan yang luas mengenai pembahasan dan penjelasan statistika secara matematis. Buku ajar ini terdiri atas 5 bab, dengan rincian sebagai berikut:

a. BAB I membahas mengenai himpunan yang merupakan dasar pengetahuan dalam pembahasan teori peluang.
b. BAB II membahas mengenai jenis-jenis teknik membilang.
c. BAB III membahas mengenai teori peluang.
d. BAB IV membahas mengenai macam-macam distribusi satu peubah acak.
e. BAB V membahas mengenai macam-macam distribusi dua peubah acak.

Adapun pada setiap bab, materi dijelaskan secara terinci dan disertai dengan rangkuman materi di setiap babnya. Penulis juga menyertai soal-soal latihan di setiap babnya, disertai dengan jawaban soal-soal latihan tersebut, untuk mendorong dan menyemangati para mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal tersebut.

Penulis menyadari bahwa buku ajar **PENGANTAR STATISTIKA MATEMATIS I** masih sangat jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak untuk dapat menyempurnakan buku ajar ini. Dan akhirnya penulis mengharapkan kiranya buku ajar ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa khususnya dan para peminat statistika matematika umumnya.

Hormat Saya,

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I TEORI HIMPUNAN

1.1. Pengertian Himpunan

Himpunan adalah kumpulan semua objek yang mungkin bersifat tertentu menurut aturan tertentu yang telah ditetapkan[1]. Setiap objek yang terdapat di dalam suatu objek disebut anggota atau elemen himpunan. Penamaan suatu himpunan dituliskan dengan menggunakan huruf kapital, seperti : A, B, C, D, E, kemudian anggota-anggota atau elemen-elemen himpunan dituliskan dengan menggunakan huruf kecil seperti a, b, c, d .[2]

Apabila b termasuk ke dalam elemen himpunan D, maka kita menuliskannya dengan notasi $b \in D$, namun andaikan b bukan elemen himpunan D, maka kita menuliskannya dengan notasi $b \notin D$. Apabila b dan e keduanya merupakan elemen himpunan D, maka kita menuliskannya dengan notasi $b, e \in D$. Terdapat 3 cara untuk menyatakan suatu himpunan, yaitu:

- Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan menggunakan kalimat

  Contoh. Himpunan B terdiri atas bilangan bulat positif 2,3,4,5.

- Suatu himpunan, elemen-elemen himpunannya dapat didaftarkan. Cara ini disebut cara mendaftar.

  Contoh. Penulisan elemen-elemen himpunan B adalah $B = \{2,3,4,5\}$

- Suatu himpunan, elemen-elemen himpunannya dapat dituliskan berdasarkan karakteristik yang dimiliki oleh elemen himpunan tersebut. Cara ini disebut cara sifat.

  Contoh. Jika E adalah himpunan bilangan real antara 2 sampai 5, maka hi $B = \{x; x = 2,3,4,5\}$

Definisi. Himpunan Semesta

> Himpunan Semesta adalah himpunan yang terdiri atas semua himpunan bagian yang dibentuk darinya.[3]

Himpunan semesta dilambangkan dengan menggunakan huruf S atau U.

Contoh.

a. S adalah himpunan bilangan bulat dari 2 sampai 8.
b. S adalah himpunan bilangan bulat negatif
c. S adalah himpunan bilangan genap positif.

---

1. Nar Herrhyanto &Tuti Gantini (2012), *Pengantar Statistika Matematis*, Bandung: Yrama Widya.
2. Ibid
3. Ibid

Definisi. Dua Himpunan Sama

Dua himpunan C dan D dikatakan sama, jika dan hanya jika setiap anggota di C juga anggota di D dan setiap anggota di D juga anggota di C. [4]

Dengan perkataan lain, dua himpunan disebut sama, apabila dua himpunan itu mempunyai anggota yang sama. Dua himpunan sama dituliskan dengan menggunakan tanda "=". Pengertian dua himpunan yang sama ditegaskan melalui contoh di bawah ini :

Contoh.

Apabila $C = \{1,3,5,a\}$ dan $D = \{4,6,8\}$ dan $E = \{4,6,8,8,8,8,4,6\}$ dan $F = \{a,1,3,5\}$ maka $C = F$ dan $D = E$.

Definisi. Himpunan Bagian

Andaikan C dan D adalah dua buah himpunan.

C dikatakan himpunan bagian dari D, jika dan hanya jika setiap anggota pada C juga anggota pada D. [5]

Notasi sebuah himpunan yang merupakan himpunan bagian dituliskan "$\subset$". Pengertian himpunan bagian ditegaskan melalui contoh di bawah ini :

Contoh .

Andaikan $D = \{3,5,7,9,11\}$, $E = \{5,7\}$ dan $F = \{9\}$. Dengan demikian, kita sebut $E \subset D$ dan $F \subset D$, karena setiap elemen pada E juga elemen pada D, dan setiap elemen pada F juga elemen pada D. Adapun relasi antara dua himpunan yang sama dan himpunan bagian adalah sebagai berikut:

Dua himpunan disebut sama, jika dua himpunan tersebut satu sama lain adalah himpunan bagian. Jika $C = D$, maka $C \subset D$ dan $D \subset C$.

Definisi. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen atau anggota himpunan. [6]

Notasi himpunan kosong ∅ atau $\{\ \}$.Pengertian himpunan kosong ditegaskan melalui contoh dibawah ini

4. Ibid
5. Ibid
6. Ibid

Contoh.

a. Misalkan $E = \{x : x^2 = 25, 2x = 14\}$. Nilai x tidak ada yang memenuhi $x^2 = 25$ dan $2x = 14$. Sehingga E merupakan himpunan kosong dan dituliskan dengan $E = \{\ \}$ atau E = ∅.
b. Misalkan $F = \{x : x^2 = 16, x = bil.ganjil\}$. Nilai x tidak ada yang memenuhi $x^2 = 16$ dan $x = bil.ganjil$. Jadi F merupakan himpunan kosong dan dituliskan dengan $F = \{\ \}$ atau F = ∅.

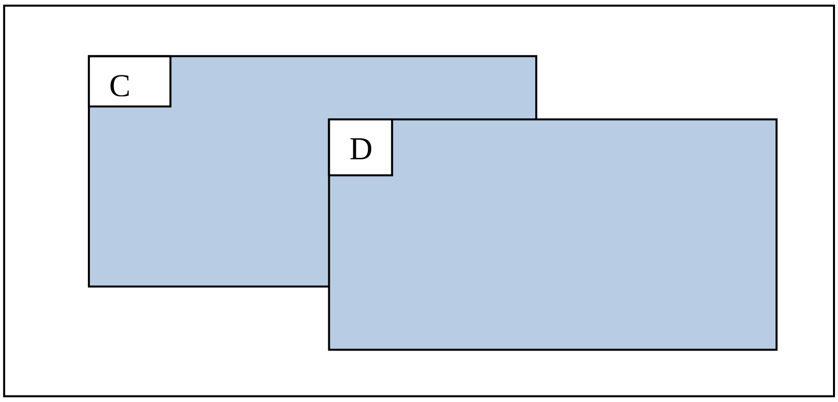
1.2 Operasi-operasi Himpunan

Bentuk operasi-operasi himpunan adalah gabungan, irisan, komplemen, dan perkalian.

Definisi. Gabungan Dua Himpunan

Gabungan antara dua himpunan C dan D (ditulis $C \cup D$) adalah himpunan yang terdiri dari semua anggota C dan D atau keduanya, atau himpunan dari semua anggota paling sedikit satu dari C dan D.

Gabungan dari C dan D dituliskan sebagai berikut:



Pemahaman gabungan dua buah himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini :

Contoh. Andaikan $B = \{x : x = 2,3,4,5,6,7,8,9\}$ dan $C = \{x : x = 6,7,8,9,10\}$ maka $B \cup C = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Contoh. Andaikan $D = \{x : 0 \le x \le 1\}$ dan $E = \{x : -1 \le x \le 2\}$. Maka $D \cup E = \{-1 \le x \le 2\}$, $D \cup E = E$.

Secara umum, gabungan dari beberapa himpunan dituliskan seperti di bawah ini :

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{x : x \in E_i untukpalingsedikitsatu, i = 1,2,3,.....n\}$$

Pemahaman gabungan pada lebih dari dua himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini:

.

Misalkan $E_i = \left\{ x : \frac{1}{(k+1)} \le x \le 1 \right\}, k = 1,2,3,....$

Untuk $k = 1$, maka $E_1 = \left\{ x : \frac{1}{2} \le x \le 1 \right\}$

Untuk $k = 2$, maka $E_2 = \left\{ x : \frac{1}{3} \le x \le 1 \right\}$

Untuk $k = 3$, maka $E_3 = \left\{ x : \frac{1}{4} \le x \le 1 \right\}$

Untuk $k \to \infty$, maka $\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \left\{ x : \left(\frac{1}{k+1} \right) \le x \le 1 \right\} = \{ x : 0 < x \le 1 \}$

Sehingga $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ...... = \{ x : 0 < x \le 1 \}$

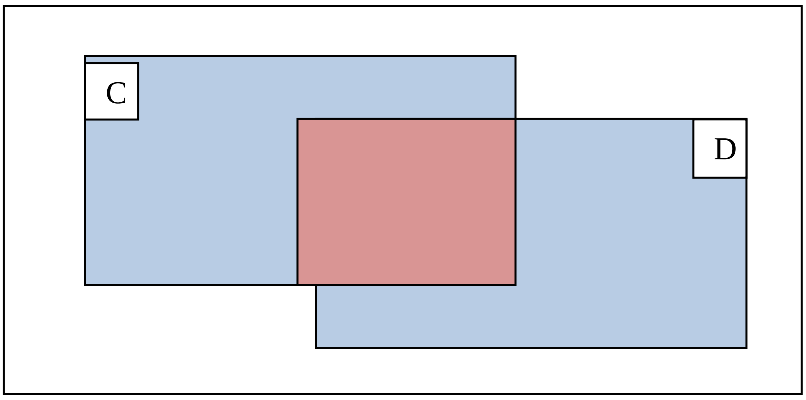
Definisi. Irisan Dua Himpunan

Irisan dari dua himpunan C dan D $(C \cap D)$ adalah himpunan yang terdiri atas semua anggota C dan D.[7]

Irisan dari C dan D ditulis sebagai berikut.

$$C \cap D = \{ x : x \in C, dan, x \in D \}$$

Diagram Venn irisan dari C dan D dapat dilihat seperti gambar di bawah ini.



Gambar $C \cap D$ adalah daerah yang diarsir.

Contoh. Andaikan $C = \{(x, y) : (x, y) = (0,0), (0,1), (1,1)\}$ dan $B = \{(x, y) : (x, y) = (1,1), (1,2), (2,1)\}$

Maka $C \cap D = \{(x, y) : (x, y) = (1,1)\}$

7. Ibid

.

Irisan dari beberapa himpunan ditulis sebagai berikut:

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \{x : x \in C_i, untuksemua, i = 1,2,3,....., n\}$$

Pemahaman mengenai irisan lebih dari dua buah himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini.

Contoh. Andaikan $C_k = \left\{x : \frac{1}{(k+1)} \leq x \leq 1\right\}, k = 1,2,3,....$

Untuk $k = 1, maka\ C_1 = \left\{x : \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$

Untuk $k = 2, maka, C_2 = \left\{x : \frac{1}{3} \leq x \leq 1\right\}$

Untuk $k = 3, maka, C_3 = \left\{x : \frac{1}{4} \leq x \leq 1\right\}$

Untuk $k \to \infty$ maka $\lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty}\left\{x : \left(\frac{1}{k+1}\right) \leq x \leq 1\right\} = \{x : 0 < x \leq 1\}$

Sehingga $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap .... = \left\{x : \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$

Definisi. Komplemen Himpunan

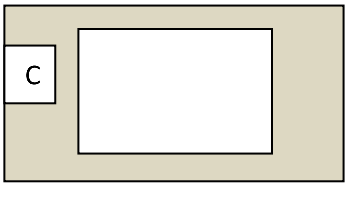
Andaikan S himpunan semesta dan C adalah himpunan bagian S. Himpunan yang terdiri atas semua elemen S yang bukan merupakan elemen C disebut komplemen dari C.[8]

Adapun komplemen dari himpunan C dilambangkan dengan C^C

Komplemen dari C didefenisikan sebagai berikut.

$$C^C = \{x : x \in S, x \notin C\}$$

Dan diagram venn untuk komplemen dari C adalah sebagai berikut :



Perhatikan gambar diagram di atas, C^C adalah daerah yang diarsir, berwarna abu-abu.

8. Ibid

.

Pemahaman mengenai pengertian sebuah komplemen himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini.

Misalkan $S = \{x : x = 5,6,7,8,9,10\}$ dan $C = \{x : x = 9,10\}$. Maka $C^C = \{5,6,7,8\}$

Definisi. Perkalian Dua Himpunan

Perkalian himpunan B dan C, dinotasikan dengan $B \times C$, adalah himpunan yang terdiri atas semua pasangan (x_1, x_2) yang mungkin, dimana $x_1 \in B$ dan $x_2 \in C$ [9]

Perkalian himpunan $B \times C$ dinotasikan sebagai berikut.

$$B \times C = \{(x_1, x_2) : x_1 \in B, x_2 \in C\}$$

Pehaman perkalian dua himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini.

Contoh.

Jika $B = \{3,4,5\}$, $C = \{6,7\}$ dan $D = \{4\}$, maka :

a. $B \times C = \{(3,6),(3,7),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7)\}$
b. $B \times D = \{(3,4),(4,4),(5,4)\}$
c. $C \times D = \{(6,4),(7,4)\}$
d. $C \times B = \{(6,3),(6,4),(6,5),(7,3),(7,4),(7,5)\}$
e. $D \times B = \{(4,3),(4,4),(4,5)\}$
f. $D \times C = \{(4,6),(4,7)\}$
g. $B \times B = \{(3,3)(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$
h. $C \times C = \{(6,6),(6,7),(7,6),(7,7)\}$
i. $D \times D = \{(4,4)\}$

Kemudian , kita beranjak pada operasi-operasi pada himpunan yang memenuhi beberapa sifat. Jika A,B, dan C merupakan himpunan-himpunan bagian dari S, maka beberapa sifat yang dipenuhinya dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Hukum Komutatif	
1.a. $A \cup B = B \cup A$	1.b. $A \cap B = B \cap A$
Hukum Asosiatif	
2.a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2.b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Hukum Distributif	
3.a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3.b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Hukum Identitas	
4.a. $A \cup \emptyset = A$ **5.a.** $A \cup S = S$	4.b. $A \cap S = A$ 5.b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
Hukum Komplemen	
6.a. $A \cup A^C = S$	6.b. $A \cap A^C = \emptyset$

10. Ibid

7.a. $\left(A^{C}\right)^{C} = A$	7.b. $S^{C} = \emptyset \quad \emptyset^{C} = S$
Hukum De Morgan	
8.a. $(A \cup B)^{C} = A^{C} \cap B^{C}$	8.b. $(A \cap B)^{C} = A^{C} \cup B^{C}$
Hukum Idempoten	
9.a. $A \cup A = A$	9.b. $A \cap A = A$ [10]

1.3 Rangkuman

1. Sebuah himpunan bisa dinyatakan dengn menggunakan tiga cara, yaitu : cara dengan menggunakan kata-kata, cara sifat, cara mendaftarkan.
2. Himpunan semesta adalah himpunan dari semua objek yang termasuk kedalamnya, dan biasanya dilambangkan dengan S atau U.
3. Dua himpunan disebut sama, apabila kedua himpunan tersebut memiliki elemen-elemen yang sama. Penulisan dua buah himpunan yang sama menggunakan tanda "=".
4. Sebuah himpunan disebut himpunan bagian dari himpunan lainnya, apabila setiap elemen pada himpunan tersebut juga elemen pada himpunan lainnya. Penulisan sebuah himpunan yang merupakan himpunan bagian menggunakan tanda $"\subset"$.
5. Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki elemen, dan biasanya ditulis dengan menggunakan tanda $\emptyset$ atau $\{\ \}$.
6. Gabungan dari dua buah himpunan adalah himpunan yang terdiri atas semua elemen paling sedikit satu dari dua buah himpunan tersebut, dan biasanya dilambangkan dengan tanda $"\cup"$.
7. Irisan dari dua buah himpunan adalah himpunan yang terdiri atas semua elemen kedua himpunan tersebut, dan biasanya dilambangkan dengan tanda $"\cap"$.
8. Komplemen dari sebuah himpunan adalah himpunan yang terdiri atas semua elemen himpunan semesta yang bukan elemen himpunan tersebut, dan biasanya dilambangkan dengan tanda $"C"$ pada pangkat notasi himpunannya.
9. Perkalian dua buah himpunan adalah himpunan yang terdiri atas semua pasangan

   (x_1, x_2) yang mungkin, dengan x_1 adalah elemen himpunan yang pertama, dan x_2 adalah elemen himpunan yang kedua.

10. Beberapa sifat pada aljabar himpunan terdiri atas Hukum Komutatif, Hukum Asosiatif, Hukum Distributif, Hukum Identitas, Hukum Komplemen, Hukum De Morgan, Hukum Idempoten.

.

10. Ibid

BAB II TEKNIK MEMBILANG

2.1.Pendahuluan

Pada BAB ini akan memuat materi-materi mengenai penentuan banyaknya cara atau susunan yang mungkin dalam sebuah permasalahan yang dikaitkan dengan materi peluang. Beberapa teknik tersebut meliputi aturan permutasi, kombinasi, aturan perkalian, dan sampel yang berurutan.

2.2. Permutasi

Definisi. Permutasi

Permutasi adalah susunan dari sekumpulan objek dengan memperhatikan urutan objek-objek tersebut.[11]

Penghitungan banyak susunan atau cara berdasarkan aturan permutasi bergantung kepada banyaknya objek yang ada, banyaknya objek yang diambil, dan jeni-jenis permutasi.

A. Permutasi Tanpa Pengulangan

Dalil. Semua Objek Dibentuk

Apabila kita memiliki *n* objek yang berbeda, maka banyaknya permutasi yang dapat dibentuk dari semua objek itu adalah[12] : ${}_nP_n = n!$

Adapun ${}_nP_n = n!$ dibaca *"Permutasi n objek dari n objek sama dengan n faktorial"*. ${}_nP_n$ dapat ditulis $P(n,n)$. Pemahaman Dalil diatas diperjelas melalui contoh di bawah ini:

Contoh 1. Diketahui tiga abjad yaitu : *d, e, f*. Berapa banyak permutasi yang dapat dibentuk dari tiga abjad tersebut?

Penyelesaian :

Posisi ketiga abjad *d,e,f* dapat diilustrasikan melalui gambar kotak di bawah ini :

POSISI I	**POSISI II**	**POSISI III**

Posisi I dapat di\]] tiga abjad yaitu *d,e,f*.

Posisi II dapat ditempati tiga abjad yaitu *d,e,f*.

Posisi III dapat ditempati tiga abjad yaitu *d,e,f*.

---

11. Ibid
12. Ibid

Sehingga banyaknya susunan yang dapat dibentuk (berdasarkan aturan permutasi) adalah ${}_3P_3 = (3 \times 2 \times 1) = 6$ susunan. Adapun keenam susunan tersebut adalah: *def, dfe, edf, efd, fde, fed.*

Dalil. Sebagian Objek Dibentuk

Andaikan kita memiliki *n* objek yang berbeda. Apabila m objek diambil dari *n* objek, maka banyak susunan mungkin (berdasarkan aturan permutasi) yang dapat dibentuk adalah[13] :

$$ {}_nP_m = P(n,m) = \frac{n!}{(n-k)!} $$

${}_nP_m = P(n,m) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ dibaca *"Permutasi m objek dari n objek sama dengan n faktorial dibagi dengan n kurang m difaktorialkan".* Pemahaman Dalil. Sebagian Objek Dibentuk diperjelas melalui contoh di bawah ini :

Contoh 2.

Hitunglah $P(n,m)$, apabila :

a. $n = 4, m = 2$

b. $n = 6, m = 4$

c. $n = 7, m = 3$s

Penyelesaian :

a. $P(4,2) = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$

b. $P(6,4) = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 360$

c. $P(7,3) = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

Contoh 3. Apabila diketahui $P(n,2) = 56$. Hitunglah nilai *n*.

Penyelesaian:

$P(n,2) = 56$

$\dfrac{n!}{(n-2)!} = 56$

13. Ibid

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{(n-2)} = 56$$

$$n \cdot (n-1) = 56$$

$$n^2 - n = 56$$

$$n^2 - n - 56 = 0$$

$$(n-8) \cdot (n+7) = 0$$

$n_1 = 8$ atau $n_2 = -7$

Sehingga nilai *n* yang memenuhi adalah 8.

Contoh 4.

Apabila diketahui empat abjad d,e,f,g. Kemudian diambil dua abjad dari empat abjad tersebut. Berapa banyak susunan permutasi yang dapat dibentuk?

Penyelesaian: Diketahui $n = 4$ dan $m = 2$. Sehingga $P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$ susunan huruf. Sehingga banyaknya susunan permutasi yang dapat dibentuk adalah sebanyak 12 susunan, dimana susunannya sebagai berikut: *de, ed, df, fd, dg, gd, ef, fe, eg, ge, fg, gf.*

B. Permutasi Dengan Pengulangan

Dalil. Objek Yang Sama. Apabila kita memiliki n objek, diman n_1 adalah banyaknya objek pertama yang sama, n_2 adalah banyaknya objek kedua yang sama, n_3 adalah banyaknya objek ketiga yang sama $\ldots . n_k$ adalah banyaknya objek $ke-m$ yang sama, maka banyaknya susunan permutasi yang dapat dibentuk ada[14]:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots \ldots . \cdot n_k!}$$

Contoh 5. Berapa banyak susunan permutasi (susunan huruf) yang dapat dibentuk dari kata "SAYA"?

Penyelesaian: Kita membedakan dua huruf A yang trdapat pada kata *SAYA* yaitu "A_1" dan "A_2". Banyaknya susunan permutasi keseluruhan yang dapat dibentuk adalah $4!$ susunan = 24 susunan huruf. Banyaknya susunan permutasi dari huruf *A* yang sama adalah 2! susunan = 2 susunan huruf. Banyaknya susunan permutasi dari huruf *S* adalah 1! susunan = 1 susunan. Banyaknya susunan permutasi dari huruf *Y* adalah 1! susunan = 1 susunan. Sehingga banyaknya susunan permutasi yang dapat dibentuk dari kata *SAYA* adalah :

$$= \frac{24!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} \text{ susunan } = 12 susunan$$

14. *Ibid*

Dalil. Permutasi Melingkar

Apabila kita memiliki I objek yang berbeda, maka banyaknya susunan permutasi melingkar yang dapat dibentuk adalah[15] :

$$(n-1)!$$

Tabel 2.1. Banyak Susunan Permutasi Melingkar

Banyak Objek	Hasil	Bentuk Penulisan
2	1	$(2-1)!$
3	2	$(3-1)!$
4	6	$(4-1)!$

2.3. Kombinasi

Definisi. Kombinasi

Kombinasi adalah sebuah susunan dari sekumpulan objek tanpa memperhatikan urutan-urutan objeknya[16].

Perhitungan banyaknya susunan berdasarkan aturan kombinasi bergantung pada objek yang ada dan banyaknya objek yang terambil.

Dalil. Semua Objek Dibentuk

Apabila kita mempunyai n objek yang berrbeda, maka banyak kombinasi yang dapat dibentuk dari semua objek tersebut ada satu cara [17].

Contoh.Apabila kita memiliki tiga abjad yaitpau, *d,e,f*. Berapa banyak susunan yang dapat dibentuk berdasarkan kombinasi dari semua objek?

Penyelesaian:

Dalam kombinasi, penyusunan objek tidak memperhatikan urutan, maka banyak susunan yang dapat dibentuk hanya satu susunan, yaitu : *def, dfe, edf, efd, fde, fed.*

Dalil. Sebagian Objek Dibentuk

Andaikan kita memiliki n objek yang berbeda. Jika m objek diambil dari n objek, maka banyak susunan berdasarkan aturan kombinasi yang mungkin ada[18]:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ susunan}$$

15. Ibid
16. Ibid
17. Ibid
18. Ibid

Simbol $\binom{n}{m}$ dibaca sebagai "kombinasi *m* dari *n*", dengan *n* dan *m* masing-masing adalah bilangan bulat positif $(m < n)$.

Simbol $\binom{n}{m}$ kadang-kadang ditulis dengan $C(n,m)$.

Perumusan kombinasi di atas diperoleh berdasarkan uraian berikut.

Andaikan kita memiliki 5 abjad , yaitu *a, b, c, d,* dan *e.*

Kemudian kita mengambil 3 abjad dari 5 abjad tersebut. Kita akan menghitung banyak susunan abjad yang mungkin berdasarkan aturan kombinasi dan permutasi. Kemudian, kita akan membandingkan setiap penyusunan abjad-abjad tersebut berdasarkan kombinasi dan permutasi. Hasil penyusunannya bisa dilihat pada tabel berikut:

Tabel. 2.2.Kombinasi dan Permutasi dari Tiga Abjad Pertama

Kombinasi	Permutasi
Abc	*abc, acb, bac, bca, cab, cba*
Abd	*abd, adb, bad, bda, dab, dba*
Abe	*abe, aeb, bae, bea, eab, eba*
Acd	*acd, adc, cad, cda, dac, dca*
Ace	*ace, aec, cae, cea, eac, eca*
Ade	*ade, aed, dae, dea, , ead, eda*
Bcd	*bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb*
Bce	*bce, bec, ceb, cbe, ebc, ecb*
Bde	*bde, bed, deb, dbe, ebd, edb*
Cde	*cde, ced, dec, dce, edc, ecd* [19]

Andaikan kita memperhatikan hasil setiap susunan pada Tabel.2.2, maka banyak susunan huruf berdasarkan permutasi diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$P(5,3) = 6C(5,3)$$

$$P(5,3) = 3! \cdot C(5,3)$$

Atau $$C(5,3) = \frac{P(5,3)}{3!}$$

Berdasarkan rumus permutasi, maka :

$$C(5,3) = \frac{1}{3!} \times \frac{5!}{(5-3)!}$$

19. Ibid

Secara umum, apabila banyak susunan objek yang memuat n buah dan banyak objek yang diambil dari n ada m buah, maka rumus kombinasi di atas menjadi seperti di bawah ini :

$$C(n,m)=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$$

Contoh. Sebuah panitia terdiri atas ketua, wakil ketua, sekertaris, dan bendahara. Berapa banyak susunan panitia yang dapat dibentuk dari 15 orang?

Penyelesaian. Diketahui : $n=15$ dan $m=4$

Sehingga $C(15,4)=\dfrac{15!}{4!(15-4)!}$

$$=\frac{15!}{4!\cdot 11!}$$

$C(15,4)=1405$ Maka banyak susunan kepanitian yang dapat dibentuk adalah 1405 susunan.

Dalil. Sekatan Golongan

Andaikan A berisi n objek, dibagi menjadi r golongan yaitu $A_1, A_2, A_3, A_4, ...A_r$. A_1 berisi n_1 objek, A_2 berisi n_2 objek, A_3 berisi n_3 objek, A_4 berisi n_4 objek, sampai A_r berisi n_r objek,dan $n_1+n_2+n_3+n_4+...........+n_r=n$. Maka banyak sekatan golongan dari A yang berbeda ada [20]:

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot n_4!\cdot.........................n_r!}$$

Dalam hal ini, pembagian sekatan golongan dari A ke dalam r golongan dinyatakan dalam bentuk $(A_1, A_2, A_3, A_4, ...A_r)$. Pemahaman **Dalil. Sekatan Golongan** diperjelas melalui contoh di bawah ini :

Contoh. Sebuah kotak A berisi 5 bola pingpong yang bernomor 1 sampai 5. Kelima bola pingpong itu dibagi menjadi sekatan golongan (A_1, A_2, A_3) dimana A_1 berisi tiga buah, A_2 berisi sebuah, dan A_3 berisi dua buah. Berapa banyak susunan sekatan golongan yang mungkin?

Penyelesaian:

Banyak susunan $A_1=\binom{5}{3} cara = 10 cara$

---

20. Ibid

.

Banyak susunan $A_2 = \binom{3}{1} cara = 3 cara$

Banyak susunan $A_3 = \binom{2}{2} cara = 1 cara$

Sehingga, banyak susunan sekatan golongan yang mungkin adalah $= (10 \times 3 \times 1) cara = 30 cara$

Adapun susunan sekatan golongan (A_1, A_2, A_3) sebagai berikut:

1. $(\{1,2\},\{3\},\{4,5\})$	2. $(\{1,2\},\{4\},\{3,5\})$	3. $(\{1,2\},\{5\},\{3,4\})$	4. $(\{1,3\},\{2\},\{4,5\})$
5. $(\{1,3\},\{4\},\{2,5\})$	6. $(\{1,3\},\{5\}\{2,4\})$	7. $(\{1,4\},\{2\},\{3,5\})$	8. $(\{1,4\},\{3\},\{2,5\})$
9. $(\{1,4\},\{5\},\{2,3\})$	10. $(\{1,5\},\{4\},\{2,3\})$	11. $(\{1,5\},\{2\},\{3,4\})$	12. $(\{1,5\},\{3\},\{2,4\})$
13. $(\{2,3\},\{1\},\{4,5\})$	14. $(\{2,3\},\{4\},\{1,5\})$	15. $(\{2,3\},\{5\},\{1,4\})$	16. $(\{2,4\},\{1\},\{3,5\})$
17. $(\{2,4\},\{3\},\{1,5\})$	18. $(\{2,4\},\{5\},\{1,3\})$	19. $(\{2,5\},\{1\},\{3,4\})$	20. $(\{2,5\},\{3\},\{1,4\})$
21. $(\{2,5\}\{4\},\{1,3\})$	22. $(\{3,4\},\{1\},\{2,5\})$	23. $(\{3,4\},\{2\},\{1,5\})$	24. $(\{3,4\},\{5\},\{1,2\})$
25. $(\{3,5\},\{1\},\{2,4\})$	26. $(\{3,5\},\{2\},\{1,4\})$	27. $(\{35\},\{4\},\{1,2\})$	28. $\{\{4,5\},\{1\},\{2,3\}\}$
29. $(\{4,5\},\{2\},\{1,3\})$	30. $(\{4,5\},\{3\},\{1,2\})$		

Rumus kombinasi dapat ditulis dalam bentuk lain, yaitu:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot (n-k+1)}{(1) \cdot (2) \cdot (3) \cdot .... \cdot (k-1) \cdot (k)}$$

Apabila diperhatikan rumus kombinasi di atas, maka banyaknya angka di pembilang dan di penyebut berjumlah sama, yaitu k buah.

2.4. Aturan Perkalian

Berikut ini akan dijelaskan dalil mengenai penentuan banyak susunan sederhana pada sebuah permasalahan yang berhubungan dengan peluang.

.

Dalil.Aturan Perkalian Secara Khusus

Andaikan suatu proses terdiri atas 3 tahap, dengan tahap pertama dilakukan dengan n_1 cara, dengan masing-masing cara ini tahap kedua dapat dilakukan dengan n_2 cara, tahap ketiga dapat dilakukan dengan n_3 cara, sehingga ini secara keseluruhan dapat dilakukan dengan :

$$= n_1 \times n_2 \times n_3 \text{ cara}$$ [21]

Contoh. Sekelompok wisatawan akan melakukan perjalanan ke tiga kota wisata, Bandung, Jogjakarta, dan Surabaya. Para wisatawan menuju kota-kota wisata trsebutdapat menggunakan tiga macam alat transportasi, yaitu kereta api, bus dan pesawat terbang. Berapa cara para wisatawan melakukan perjalanan wisata tersebut?

Penyelesaian. Mengenai hal ini, banyaknya cara para wisatan melakukan perjalanan wisata tersebut. Pertamaberupa banyaknya kota wisata yang dapat dituju, yaitu Bandung, Jogjakarta, dan Surabaya, sehingga $n_1 = 3$. Kedua berupa macam alat transportasi ke kota-kota wisata tersebut, yaitu kereta api, bus dan pesawat terbang. Sehingga n_2.

Oleh karena itu, cara para wisatawan melakukan perjalanan wisata $= n_1 \times n_2 = 3 \times 3 = 9 cara$

. **Dalil.Aturan Perkalian Secara Umum**

Andaikan suatu proses terdiri atas k tahap, dengan tahap pertama dilakukan dengan n_1 cara, dengan masing-masing cara ini tahap kedua dapat dilakukan dengan n_2 cara, tahap ketiga dapat dilakukan dengan n_3 cara, dan seterusnya sampai tahap ke-k dapat dilakukan dengan n_k cara, sehingga ini secara keseluruhan dapat dilakukan dengan [22] :

$$= n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_k \text{ cara}$$

Contoh. Sebuah rumah makan menyediakan menu makanan pagi yang terdiri atas nasi, telur, kerupuk, dan minum. Nasi terdiri atas nasi putih, nasi kuning, dan nasi goreng. Telur terdiri atas telur dadar, telur mata sapi, telur asin, dan telur rebus. Kerupuk terdiri atas kerupuk tempe, kerupuk ikan, dan kerupuk udang. Minuman terdiri atas air putih, kopi, susu, kopi susu, teh. Berapa banyak susunan menu makanan pagi yang bisa disajikan?

Penyelesaian:

Mengenai hal ini, kita akan mencari banyak susunan menu makanan pagi yang bisa disajikan. Pertama berupa jenis nasi yang terdiri atas atas nasi putih, nasi kuning, dan nasi goreng sehingga $n_1 = 3$. Kedua berupa jenis telur yang Telur terdiri atas telur dadar, telur mata sapi, telur asin, dan telur rebus sehingga $n_2 = 4$. Ketiga berupa jenis kerupuk yang terdiri atas kerupuk tempe, kerupuk ikan, dan kerupuk udang sehingga $n_3 = 3$. Keempat berupa jenis minuman yang terdiri atas air putih, kopi, susu, kopi susu, teh sehingga $n_4 = 5$.

21. Ibid
22. Ibid

Oleh karena itu, banyak susunan menu makanan pagi yang bisa disajikan $= n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 3 \times 4 \times 3 \times 5 = 180 cara$.

2.5. Sampel Berurutan

Andaikan di sebuah kotak berisi *n* bola pingpong. Kemudian, kita mengambil sebuah bola pingpong secara acak dari kotak tersebut. Selanjutnya, kita mengambil sebuah lagi dari kotak terrsebut lagi secara acak setelah pengambilan bola pingpong sebelumnya. Demikian seterusnya kita mengambil bola pingpong secara acak sampai pengambilan bola pingpong ke-*r*. Pengambilan bola pingpong seperti itu disebut pengambilan sebuah sampel yang berurutan berukuran *r*.

2.5.1. Sample Dengan Pengembalian

Bola pingpong yang sudah terambil disimpan kembali kedalam kotak, sebelum bola pingpong selanjutnya diambil. Sehingga banyak bola pingpong yang terdapat di dalam kotak tetap. Dengan demikian, pengambilan setiap bola pingpong kedalam kotak mempunyai *n* cara atau kemungkinan dan kita memiliki sampel yang berurutan berbeda berukuran *r* dengan pengembalian sebanyak:

$$\underbrace{n_1 \times n_2 \times n_3 \times ...... \times n}_{\text{Ada } r \text{ kali}} = n^r \text{ buah}$$

2.5.1. Sample Tanpa Pengembalian

Bola pingpong yang sudah terambil tidak disimpan kembali ke dalam kotak sebelum bola pingpong berikutnya terambil. Sehingga, banyak bola pingpong yang ada di dalam kotak berukuran sesuai dengan banyaknya pengambilan bola pingpong. Maksudnya, pengambilan bola pingpong pertama ada *n* cara, pengambilan bola pingpong kedua ada *(n-1)* cara, pengambilan bola pingpong ketiga ada *(n-2)* cara dan berikutnya sampai pengambilan bola pingpong ke-*r* terdapat $[n-(r-1)]$ cara. Sehingga, kita mempunyai sampel berurutan yang berbeda ukuran *r* tanpa pengembalian sebanyak:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot [n-(r-1)] = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ buah}$$

2.6.Rangkuman

1. Apabila suatu proses terdiri atas p tahap, dengan masing-masing tahap dapat dilakukan dalam $n_i \ (i = 1,2,3,......p)$ cara, maka proses tersebut keseluruhannya dapat dilakukan dalam $\prod_{i=1}^{p} n_i$ cara $= n_1 \times n_2 \times n_3 \times ....\times n_p$ cara.
2. Sebuah susunan dari sekelompok objek dengan memperhatikan urutannya disebut permutasi.
3. Banyak susunan yang mungkin berdasarkan permutasi dari n objek yang berbeda terdapat *n!* Cara.
4. Banyak susunan yang mungkin berdasarkan permutasi dari s objek yang diambil dari n objek ada $P(n,s) = \frac{n!}{(n-s)!}$ cara
5. Banyak susunan yang mungkin berdasarkan aturan permutasi dengan pengulangan dari n objek dengan banyak objek yang sama untuk s kelompok masing-masing n_i $(i = 1,2,3,....s)$ ada $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot ....n_k!}$ cara.
6. Banyak susunan yang mungkin berdasarkan aturan permutasi melingkar dari m objek yang berbeda ada $(m-1)!$ cara.
7. Banyak sampel yang berurutan dengan pengembalian berkuran r dari n objek yang berbeda ada n^r buah.
8. Banyak sampel yang berurutan tanpa pengembalian berukuran r dari n objek yang berbeda ada $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot .....\cdot[n-(r-1)] = \frac{n!}{(n-r)!}$ buah.
9. Sebuah susunan dari sekelompok objek yang berbeda tanpa memperhatikan urutannya disebut kombinasi.
10. Banyak susunan yang mungkin berdasarkan kombinasi dari n objek yang berbeda ada sebuah cara.
11. Banyak susunan yang mungkin berdasarkan kombinasi dari k objek yang diambil dari n objek ada $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ cara.
12. Banyak sekatan golongan $(A_1, A_2, A_3, A_4,..........A_r)$ yang mungkin, dengan A_1 berisi n_1 objek, A_2 berisi n_2 objek dan seterusnya sampai A_r berisi n_r objek serta $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + ... + n_r = n$ ada $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot n_4!\cdot ....n_r!}$

.

BAB III. PENGHITUNGAN PELUANG

3.1. Ruang Sampel

Definisi. Ruang Sampel

Andaikan kita melakukan sebuah eksperimen, maka semua hasil yang mungkin didapatkan dari eksperimen tersebut dikatakan ruang sampel. Adapun masing-masing hasil yang mungkin dari eksperimen tersebut atau setiap anggota dari ruang sampel dikatakan tiHtik-titik sampel [23].

Ruang sampel dilambangkan dengan menggunakan huruf kapital, yaitu S. Ruang sampel terdiri atas 2 macam, yaitu ruang sampel diskrit dan ruang sampel kontinu.

Definisi. Ruang Sampel Diskrit

Ruang sampel diskrit adalah ruang sampel yang memiliki banyak anggota berhingga ataupun tidak berhingga tetapi bisa dihitung [24].

Contoh. Apabila kita melalakukan eksperimen pengundian dua mata uang logam Rp.100, maka ruang sampelnya adalah:

$$S = \{GG, GH, HG, HH\}$$

Dimana:G = Gambar “Karapan Sapi”

H = Huruf “BANK INDONESIA”

Contoh. Apabila kita melakukan sebuah eksperimen mengenai pengundian sebuah dadu, maka ruang sampel berisi salah satu hasil dari hasil eksperimen yaitu : mata 1, 2, 3, 4, 5, 6. Sehingga ruang sampelnya adalah :

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Adapun titik-titik sampelnya adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Definisi. Ruang Sampel Kontinu

Ruang sampel kontinu adalah ruang sampel yang anggota-anggota sampelnya merupakan interval pada garis bilangan real [25].

Contoh. Andaikan perusahaan bola lampu “JAYA” memproduksi sebuah bola lampu. Kita akan melihat dan menentukan masa hidup (dalam satuan jam) bola lampu tersebut.

23. Ibid
24. Ibid
25. Ibid

.

Penyelesaian:

Karena masa hidup bola lampu bernilai bilangan real positif, maka ruang sampelnya adalah sebagai berikut:

$$S = \{r, r > 0\}$$

Kita dapat menentukan berapa peristiwa dari ruang sampel *S*.

3.2 Definisi. Peristiwa

Sebuah peristiwa adalah sebuah himpunan bagian dari ruang sampel *S*. Setiap himpunan bagian dari ruang sampel *S* merupakan sebuah peristiwa[26].

Lambang untuk menyatakan sebuah peristiwa biasanya ditulis dengan huruf kapital, misalkan *A*, *B*, *C*, *D* dan lain sebagainya kecuali *S*.

Dikarenakan sebuah peristiwa itu merupakan himpunan bagian dari ruang sampel *S*, maka ada tiga kemungkinan yang bisa terjadi, yaitu:

1. S itu sendiri adalah sebuah peristiwa.
2. ∅ merupakan sebuah peristiwa.
3. Beberapa hasil yang mungkin dari *S* adalah sebuah peristiwa.

Kita telah mendaptkan infromasi dari penjelasan-penjelasan di atas bahwa jika kita mengadakan sebuah eksperimen, maka kita akan mendapatkan hasil-hasil yang mungkin dari eksperimen tersebut, yang disebut ruang sampel. Seperti halnya eksperimen, apabila kita dapat menentukan peristiwa, maka kita dapat menentukan hasil-hasil yang termasuk ke dalam peristiwa tersebut. Hasil-hasil yang didapat dari peristiwa tersebut dikatakan ruang peristiwa.

Definisi. Terjadinya Peristiwa

Sebuah peristiwa disebut terjadi, apabila terdapat anggota dari ruang peristiwanya yang merupakan hasil dari eksperimen[27].

Contoh. Apabila kita mengadakan sebuah pengundian dua mata uang logam Rp. 100 secara bersamaan, maka tentukan ruang sampelnya dan enam peristiwa beserta dengan ruang peristiwanya!

Penyelesaian:

a. A: Peristiwa munculnya H semuanya
   Ruang peristiwa dari A adalah:
   $A = \{HH\}$
b. B : Peristiwa munculnya G semuanya.

26. Ibid
27. Ibid

Ruang Peristiwa dari B adalah:

$B = \{GG\}$

c. C : Peristiwa munculnya H paling banyak sebuah

Ruang peristiwanya adalah :

$C = \{GH, HG, GG\}$

d. D : Peristiwa munculnya G paling sedikit sebuah

Ruang peristiwanya adalah:

$D = \{HG, GH, GG\}$

e. E : Peristiwa munculnya H paling sedikit dua buah.

Ruang peristiwanya adalah:

$E = \{HH\}$

f. F : Peristiwa munculnya G lebih dari dua buah

Ruang Peristiwanya adalah:

$F = \{\ \}$ atau $\emptyset$

3.2 KONSEP PELUANG

Definisi. Peluang Secara Aksioma

Andaikan S menunjukkan ruang sampel eksperimen dan A menunjukkan kumpulan semua peristiwa yang dapat dibentuk dari S. Peluang $P(\cdot)$ adalah sebuah fungsi dengan domain A dan daerah hasilnya $[0,1]$ yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut[28]:

i. $P(A) \geq 0$ untuk $A \in \mathbf{A}$

ii. $P(S) = 1$

iii. Jika $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots, A_m$ adalah m buah peristiwa yang saling lepas dalam **A** (maksudnya $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i, j = 1,2,3,\ldots, m$) dan $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots\ldots \cup A_m$

$= \bigcup_{i=1}^{m} A_i \in$ **A,** maka:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_m)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots\ldots\ldots + P(A_m)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

28. Ibid

$P(A)$ disebut sebagai " *peluang peristiwa* A" atau " *peluang terjadinya peristiwa* A" atau "*peluang bahwa peristiwa A terjadi*".

Definisi. Peristiwa Anggota Tunggal

Sebuah peristiwa anggota tunggal A adalah sebuah himpunan bagian dari ruang sampel S yang hanya mempunyai satu anggota. Dengan perkataan lain, jika ada satu $x \in S$ sedemikian sehingga $x \in A \subset S$, sehingga A disebut peristiwa anggota tunggal [29].

Dalil. Peluang Peristiwa Himpunan Kosong

Apabila peristiwa himpunan kosong dinyatakan dengan $\emptyset$, maka $P(\emptyset) = 0$ [30]

Dalil. Peluang Komplemen Peristiwa

Apabila A adalah sebuah peristiwa dalam A, maka [31]:

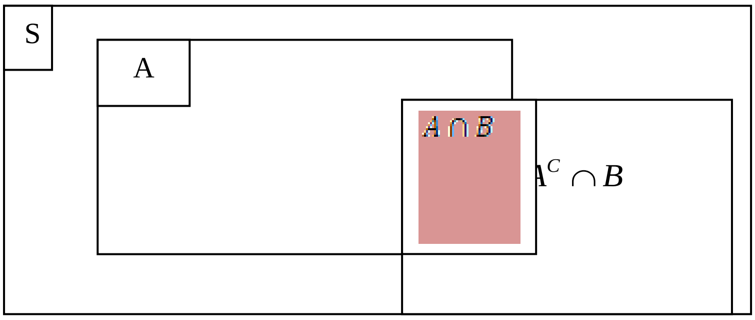
$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Dalil. Peluang Dua Peristiwa Inklusif

Untuk setiap dua peristiwa A dan B dalam $\boldsymbol{A}$ berlaku [32]:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bukti :



Gambar di atas diperoleh:

$A \cup B = A \cup (B \cap A^C)$; *dan*

$B = (A \cap B) \cup (B \cap A^C)$

29. Ibid 30. Ibid 31. Ibid 32. Ibid

.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^C)$, karena $(A \cap B)$ dan $(B \cap A^C)$ merupakan dua peristiwa yang saling lepas, maka $P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^C)$

$P(A \cup B) = P(A) + [P(B) - P(A \cap B)]$, jadi $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Terbukti)

Dalil. Peluang Peristiwa Bagian

Jika A dan $B \in A$ dan $A \subset B$ maka:

$$P(A) \leq P(B)$$ [33]

Dalil. Sifat Peluang

Jika S memiliki n anggota, maka:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$ [34]

Contoh.

Misalkan kita mengadakan pengundian dua buah uang logam Rp. 100 secara bersamaan sekaligus. Apabila D adalah peristiwa tidak akan diperolehnya gambar “HURUF BANK INDONESIA”, maka hitunglah $P(D^c)$.

Penyelesaian. Ruang sampel dua buag uang logam Rp. 100

$$S = \{GG, GH, HG, HH\}$$

Dimana:

G = Gambar “KARAPAN SAPI”

H = Huruf “BANK INDONESIA”

Dikarenakan dua buah mata uang logam Rp. 100 diundi bersamaan dan seimbang, maka setiap titik sampel memiliki nilai peluang yang sama, yaitu $\frac{1}{4}$.

D : Peristiwa tidak akan diperolehnya gambar “HURUF BANK INDONESIA”.

Ruang peristiwa dari D adalah: $D = \{GG\}$, dan nilai peluang D

$P(D) = \frac{1}{4}$, karena $P(D) + P(D^c) = 1$, maka:

33. *Ibid*
34. *Ibid*

$$P(D^c) = 1 - P(D)$$
$$P(D^c) = 1 - \frac{1}{4}$$
$$P(D^c) = \frac{3}{4}$$

3.4 **Peluang Berdasarkan Teknik Membilang**

1.Aturan Perkalian

Penghitungan nilai peluang sebuah peristiwa berdasarkan aturan perkalian digunakan rumus sebagai berikut:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Dimana.

$P(A)$: Nilai peluang peristiwa A

$n(A)$: Banyak anggota peristiwa A yang didapatkan berdasarkan aturan perkalian

$n(S)$: Banyak anggota keseluruhan berdasarkan aturan perkalian.

Contoh.

Sebuah rumah makan menyediakan menu makanan pagi yang terdiri atas nasi, telur, kerupuk, dan minuman. Nasi terdiri atas nasi kuning, nasi putih, dan nasi goreng. Telur terdiri atas telur dadar, ceplok, asin, dan rebus. Kerupuk terdiri atas kerupuk aci, ikan, dan udang. Minuman terdiri atas air putih, kopi, susu, kopi susu, dan teh. Berapa peluang bahwa menu makanan pagi itu terdiri atas nasi kuning, telur, kerupuk, dan minum?

Penyelesaian:

Andaikan A : Peristiwa bahwa menu makanan pagi itu terdiri atas nasi kuning, telur, kerupuk, dan minum.

Makan: $n(A)$ = Banyak susunan menu makanan pagi yang terdiri atas nasi kuning, telur, kerupuk dan minum.

$= (1 \times 4 \times 3 \times 5) cara$

$n(A) = 60$ cara

$n(S) =$ Banyak susunan menu makanan pagi keseluruhan yang terdiri atas nasi, telur, kerupuk dan minuman.

.

$$n(S) = (3 \times 4 \times 3 \times 5) cara$$
$$n(S) = 180 cara$$

Maka $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$

1.Permutasi

Penghitungan nilai peluang sebuah peristiwa berdasarkan aturan permutasi digunakan rumus sebagai berikut:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Dimana.

$P(A)$: Nilai peluang peristiwa A

$n(A)$: Banyak anggota peristiwa A yang didapatkan berdasarkan aturan permutasi

$n(S)$: Banyak anggota keseluruhan berdasarkan aturan permutasi.

Contoh. Diketahui ada tiga abjad berurutan yaitu a,b dan c. Hitunglah nilai peluang bahwa dua abjad tertentu selalu terletak berdampingan, apabila kita membentuk permutasi dari tiga abjad itu.

Penyelesaian:

Andaikan E adalah peristiwa bahwa dua abjad tertentu selalu berdampingan, apabila kita akan membentuk permutasi dari tiga abjad tersebut. Dikarenakan dua abjad tertentu selalu terletak berdampingan, maka banyak abjad yang akan dibentuk ada 2 buah. Maka permutasi yang mungkin $= 2!$. Banyak permutasi yang dibentuk dari dua abjad yang berdampingan $= 2!$, maka:

$n(E) =$ Banyak susunan dua abjad tertentu yang selalu terletak berdampingan.

$$n(E) = (2! \times 2!)$$
$$n(E) = 4 cara$$

$n(S) = 3!$, yaitu banyak susunan keseluruhan berdasarkan permutasi yang dapat dibentuk.

$n(S) = 6 cara$, sehingga

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

.

2.Sampel Yang Berurutan.

Penghitungan nilai peluang sebuah peristiwa berdasarkan sampel yang berurutan dilakukan dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Dimana.

$P(A)$: Nilai peluang peristiwa A

$n(A)$: Banyak anggota peristiwa A yang didapatkan berdasarkan sampel yang berurutan

$n(S)$: Banyak anggota keseluruhan berdasarkan sampel yang berurutan

3.Kombinasi

Penghitungan nilai peluang sebuah peristiwa berdasarkan aturan kombinasi dilakukan dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Dimana.

$P(A)$: Nilai peluang peristiwa A

$n(A)$: Banyak anggota peristiwa A yang didapatkan berdasarkan aturan kombinasi

$n(S)$: Banyak anggota keseluruhan berdasarkan aturan kombinasi

Contoh. Mira mempunyai sebuah kotak berisi 15 buah kelereng terdiri atas 7 buah kelereng kuning dan 8 buah kelereng putih. Kemudian mira mengambil lima buah kelereng secara sekaligus. Berapa peluang bahwa dari lima buah kelereng yang terambil itu, tiga buah diantaranya berwarna kuning?

.

Penyelesaian.

Misalkan D: Peristiwa bahwa lima buah kelereng yang terambil itu, tiga buah diantaranya berwarna kuning. Banyak susunan kelereng kuning yang terambil itu adalah: $\binom{7}{3} cara = 35 cara$. Banyak susunan kelereng putih yang terambil adalah: $\binom{8}{2} cara = 28 cara$

n(D) = Banyak susunan lima buah kelereng yang terambil, dengan tiga buah di antaranya berwarna kuning.

n(D) = (35 x 28)

n (D) = 980 cara

n (S) = Banyak susunan lima buah kelereng yang terambil secara keseluruhan.

$n(S) = \binom{15}{3}$

n(S) = 3.003 cara

sehingga $P(D) = \frac{980}{3003}$

3.5 PELUANG BERSYARAT

Definisi. Peluang Bersyarat

Apabila A dan B dua buah peristiwa yang dibentuk dari ruang sampel S, maka peluang bersyarat dari B diberikan A didefinisikan sebagai[35] :

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dengan $0 < P(A) < 1$

Dalil. Penghitungan Peluang Bersyarat

Apabila *S* adalah ruang sampel yang PETI ANGSA dan banyak anggotanya berhingga dengan peristiwaperistiwanya *A* dan *B*, maka[36] :

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{Banyak\ anggota\ dalam\ A \cap B}{Banyak\ anggota\ dalam\ B}$$

35. *Ibid*
36. *Ibid*

.

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{Banyak\ cara\ A\ dan\ B\ dapat\ terjadi}{Banyak\ cara\ B\ dapat\ terjadi}$$

Dalil. Perkalian Peluang Bersyarat

Apabila A dan B adalah dua buah peristiwa yang dibentuk berdasarkan ruang sampel S, maka: [37]

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right)$$

Contoh.

Sebuah kotak berisi 10 buah lampu cabe 5 watt, dengan 4 buah lampu di antaranya rusak. Kemudian tiga buah lampu diambil secara acak dan satu per satu dari kotak itu. Berapa peluang bahwa ketiga lampu cabe yang terambil itu semuanya masih jalan?

Penyelesaian.

Andaikan B adalah peristiwa bahwa ketiga lampu cabe yang terambil itu semuanya masih jalan. Pengambilan ketiga lampu cabe itu secara satu per satu artinya pengambilan lampu dilakukan tanpa pengembalian. Maka dalam hal ini, peluang bahwa lampu cabe yang terambil pertama masih jalan sebesar $\frac{6}{10}$, peluang lampu cabe yang terambil kedua masih jalan setelah lampu pertama yang masih jalan terambil sebesar $\frac{5}{9}$, peluang bahwa lampu cabe yang terambil itu masih jalan setelah lampu cabe pertama dan kedua yang masih jalan sebesart $\frac{4}{8}$.

Maka

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \left(\frac{6}{10}\right) \cdot \left(\frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{4}{8}\right)$$

$$P(B) = \frac{120}{720}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

Cara lain: Dikarenakan ketiga lampu cabe yang terambil itu diambil tanpa pengembalian, maka pengembalian ketiga lampu cabe itu bisa juga dikatakan sebagai pengembalian secara bersamaan.

$n(A) =$ Banyak susunan ketiga lampu cabe yang terambil yang semuanya masih jalan.

---

37. Ibid

.

$n(A) = \binom{6}{3}$

$n(A) = 20 cara$

$n(S) =$ Banyak susunan ketiga lampu cabe yang termabil secara keseluruhan.

$n(S) = \binom{10}{3}$

$n(S) = 120 cara$

Sehingga $P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

Cara lain : $n(A) =$ Banyak susunan ketiga lampu cabe yang terambil yang masih jalan

$n(A) = 6 \times 5 \times 4$ cara

$n(A) = 120$ cara

$n(S) =$ Banyak susunan ketiga lampu cabe yang terambil secara keseluruhan

$n(S) = 10 \times 9 \times 8$

$n(S) = 720$ cara

Sehingga $P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

3.5.Definisi. Dua Peristiwa Bebas

Dua peristiwa *A* dan *B* disebut peristiwa yang saling bebas, jika dan hanya jika:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$ [38]

Dalil. Sifat-sifat Dua Peristiwa Bebas

Apabila dua buah peristiwa *A* dan *B* saling bebas, maka:

1. Dua peristiwa A dan B^C juga saling bebas
2. Dua peristiwa A^C dan B juga saling bebas
3. Dua peristiwa A^C dan B^C juga saling bebas [39].

Definisi. Tiga Buah Persitiwa Saling Bebas

Tiga buah peristiwa A, B , dan C disebut saling bebas, jika dan hanya jika memenuhi persyaratan sebagai berikut [40]:

38. *Ibid*
39. *Ibid*
40. *Ibid*

1. Persitiwa-peristiwanya yang berpasangan bebas, yaitu:
a. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
b. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
c. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
2. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

3.7. DALIL BAYES

Definisi. Partisi

Peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots\ldots, B_7$ disebut partisi dari ruang sampel S, jika:

a. $B_i \cap B_j = \emptyset$

b. $\bigcup_{i=1}^{7} B_i = S$

c. $P(B) > 0$, untuk semua $i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots,7$ [41]

Definisi. Partisi Secara Umum

Peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots\ldots, B_k$ disebut partisi dari ruang sampel S, jika[42]:

a. $B_i \cap B_j = \emptyset$

b. $\bigcup_{i=1}^{7} B_i = S$

$P(B) > 0$ $i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots,k$

Dalil. Total Peluang

Apabila peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots\ldots, B_7$ merupakan partisi-partisi dari ruang sampel S, maka peluang dari peristiwa A yang sembarang dari S adalah [43]:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{7} P(B_i) \cdot P\left(A / B_i \right)$$

Dalil. Total Peluang Secara Umum

Apabila peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots\ldots, B_k$ merupakan partisi-partisi dari ruang sampel S, maka peluang dari peristiwa A yang sembarang dari S adalah[44]:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P\left(A / B_i \right)$$

41. Ibid 42. Ibid 43. Ibid 44. Ibid

Dalil. Aturan Bayes

Apabila peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, ..., B_7$ merupakan partisi dari ruang sampel *S*, maka untuk peristiwa *A* yang sembarang dari *S* sedemikian hingga $P(A) > 0$ berlaku:

$$P\left(\frac{B_r}{A}\right) = \frac{P(B_r) \cdot P\left(\frac{A}{B_r}\right)}{\sum_{i=1}^{7} P(B_i) \cdot P\left(\frac{A}{B_i}\right)}$$

Untuk $r = 1,2,3,....7$ [45]

Dalil. Aturan Bayes Secara Umum

Apabila peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, ..., B_k$ merupakan partisi dari ruang sampel *S*, maka untuk peristiwa *A* yang sembarang dari *S* sedemikian hingga $P(A) > 0$ berlaku[46]:

$$P\left(\frac{B_r}{A}\right) = \frac{P(B_r) \cdot P\left(\frac{A}{B_r}\right)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P\left(\frac{A}{B_i}\right)}$$

Untuk $r = 1,2,3,....k$

3.8.Kalkulus Peluang

Kalkulus peluang adalah penghitungan peluang dari sekumpulan nilai yang membentuk sebuah himpunan berdasarkan sebuah fungsi dengan menggunakan tanda jumlah atau tanda integral.

Contoh.

Misalkan B adalah himpunan berdimensi satu dan fungsinya berbentuk:

$$p(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x ; x = 1,2,3,...$$

Apabila $P(B) = \sum_B p(x)$, maka hitunglah nilai $P(B)$

a. $B = \{x : 0 < x < 4\}$

b. $B = \{x; x = bilanganganjil\}$

c.

45. Ibid

46. Ibid

.

Penyelesaian:

a. $B=\{x:0<x<4\}$ artinya $B=\{x:x=1,2,3\}$

$P(B)=\sum_{x=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

$P(B)=\frac{7}{8}$

b. $B=\{x;x=bilanganganjil\}$ artinya $B=\{x:x=1,3,5,....\}$

$P(B)=\sum_{x=ganjil}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$P(B)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+....$

$P(B)=\frac{2}{3}$

Contoh.

Misalkan D adalah himpunan bedimensi satu dan $P(D)=\int_A f(x)dx$, dimana:

$$f(x)=e^{-x};x>0$$

a. Apabila $D=\{x:1\leq x\leq 3\}$, maka hitunglah $P(D)$.
b. Apabila $D_1=\{x:1\leq x<2\}$ dan $D_2=\{x:2\leq x<4\}$, maka hitunglah $P(D_1\cup D_2)$.
c. Apabila $D_1=\{x:0\leq x<3\}$ dan $D_2=\{x:2\leq x<4\}$, maka hitunglah $P(D_1\cup D_2)$.

Penyelesaian:

a. $P(D)=\int_1^3 e^{-x}dx$

$P(D)=-e^{-x}\Big]_{x=1}^{3}$

$P(D)=e^{-1}-e^{-3}$

b. $D_1\cup D_2=\{x:1\leq x<4\}$

$P(D_1\cup D_2)=\int_1^4 e^{-x}dx$

$P(D_1\cup D_2)=-e^{-x}\Big]_{x=1}^{4}$

$P(D_1\cup D_2)=e^{-1}-e^{-4}$

.

c. $P(D_1 \cup D_2) = \int_0^4 e^{-x} dx - \int_2^3 e^{-x} dx$

$P(D_1 \cup D_2) = \left(-e^{-x}\right]_{x=0}^{4}\Big) - \Big(-e^{-x}\Big]_{x=2}^{3}\Big)$

$P(D_1 \cup D_2) = 1 - e^{-4} + e^{-3} - e^{-2}$

Contoh.

Misalkan B adalah himpunan berdimensi dua dan $P(B) = \sum_B \sum p(x, y)$, dimana:

$$p(x, y) = \frac{1}{16} : x = 1,2,3,4 : y = 1,2,3,4$$

Hitunglah nilai $P(B)$, apabila

a. $B = \{(x, y) : x = 1,2 : y = 1,2,3\}$
b. $B = \{(x, y) : (x, y) = (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

Penyelesaian:

a. $P(B) = \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} p(x, y)$

$P(B) = p(1,1) + p(1,2) + p(1,3) + p(2,1) + p(2,2) + p(2,3)$

$P(B) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$

$P(B) = \frac{6}{16}$

$P(B) = \frac{3}{8}$

b. $P(B) = \sum_B \sum p(x, y)$

$P(B) = p(1,1) + p(2,2) + p(3,3) + p(4,4)$

$P(B) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$

$P(B) = \frac{4}{16}$

$P(B) = \frac{1}{4}$

.

3.8.Rangkuman

1. Eskperimen Acak adalah eksperimen yang apabila diulang beberapa kal, masing-masing pengulangan eksperimen tersebut menghasilkan hasil yang belum tentu sama sekali sama,
2. Sebuah peristiwa adalah sebuah himpunan bagian dari ruang sampel *S*.
3. Kita dapat menghasilkan ruang peristiwa dari sebuah peristiwa, apabila peristiwanya diketahui. Sebaliknya kita dapat menentukan sebuah peristiwa, apabila ruang peristiwa dari peristiwanya diketahui.
4. Peluang adalah ukuran yang digunakan untuk mengetahui terjadinya atau tidak terjadinya sebuah peristiwa.
5. Berikut beberapa dalil mengenai fungsi peluang:
   a. $P(\emptyset) = 0$
   b. $P(A^C) = 1 - P(A)$
   c. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. Perhitungan peluang sebuah peristiwa berdasarkan teknik membilang digunakan rumus:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Dimana.

$P(A)$: Nilai peluang peristiwa A

$n(A)$: Banyak anggota peristiwa A yang didapatkan berdasarkan aturan perkalian, sampel yang berurutan, permutasi dan kombinasi

$n(S)$: Banyak anggota keseluruhan berdasarkan aturan perkalian, sampel yang berurutan, permutasi dan kombinasi.

7. Perhitungan peluang bersyarat sebuah peristiwa diberikan peristiwa lainnya digunakan rumus:

$$P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, 0 < P(B) < 1$$

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, 0 < P(A) < 1$$

8. Penentuan dua peristiwa, *A* dan *B* yang saling bebas digunakan rumus:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

9. Apabila *A* dan *B* dua peristiwa yang saling bebas:
   a. A dan B^C juga saling bebas.
   b. A^C dan B juga saling bebas.
   c. A^C dan B^C juga saling bebas.

.

10. Penentuan tiga buah peristiwa *A*, *B*, dan *C* yang saling bebas digunakan syarat sebagai berikut:
    a. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
    b. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
    c. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
    d. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
11. Peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, ...B_k$ menunjukkan partisi-partisi dari ruang sampel *S*, jika:
    a. $B_i \cap B_j = \emptyset$ untuk semua $i \neq j$
    b. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$
    c. $P(B_i) > 0$ untuk semua $i = 1,2,3,.............k$
12. Apabila peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, ...B_k$ merupakan partisi dari ruang sampel *S*, maka peluang dari peristiwa *A* yang sembarang dari *S* adalah:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P\left({}^{A}\!/\!_{B_i} \right)$$

13. Apabila peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, ...B_k$ merupakan partisi dari ruang sampel *S* dengan $P(B_i) > 0$ untuk $i = 1,2,3,.............k$; maka untuk peristiwa A yang sembarang dari *S* sedemekian sehingga $P(A) > 0$, berlaku:

$$P\left({}^{B_r}\!/\!_{A} \right) = \frac{P(B_r) \cdot P\left({}^{A}\!/\!_{B_r} \right)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P\left({}^{A}\!/\!_{B_r} \right)}$$

14. Kalkulus peluang adalah perhitungan peluang dari sekumpulan nilai yang membentuk sebuah himpunan berdasarkan sebuah fungsi dengan menggunakan tanda jumlah atau integral.

.

BAB IV. DISTRIBUSI SATU PEUBAH ACAK

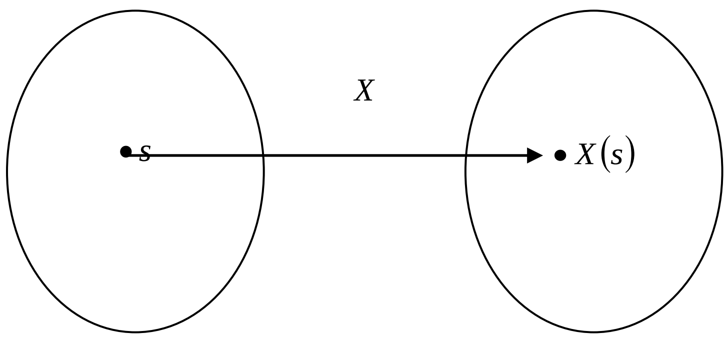
Dalam Bab IV ini akan dibahas jenis-jenis peubah acak., distribusi peluang, fungsi densitas, dan fungsi distribusi.

4.1 Jenis-jenis Peubah Acak

Definisi. Peubah Acak

Andaikan *E* adalah sebuah eksperimen dengan ruang sampelnya *S*. Sebagai fungsi *X* yang menetapkan setiap anggota $x \in S$ dengan sebuah bilangan real $X(s)$ disebut peubah acak[47].

Berdasarkan definisi di atas, terdapat dua buah himpunan yang melibatkan peubah acak, yaitu ruang sampel *S* yang berisi anggotanya (titik-titik sampel) s dan R_x berupa nilai-nilai yang mungkin dari *X* yang berhubungan dengan anggota *S* nya. Pendefinisian peubah acak dapat dijelaskan melalui gambar di bawah ini :



S= Ruang Sampel

R_x = Nilai-nilai yang mungkin dari *X* sesuai *s* nya

Gambar 4.1 *X* disebut sebagai "Peubah Acak"

Contoh. Andaikan Shandy melakukan percobaan pelemparan dua buah mata uang logam Rp. 100 yang setara secara bersamaan. Andaikan X menunjukkan banyak huruf "Bank Indonesia" yang muncul, maka *X* merupakan peubah acak?

Penyelesaian:

Ruang sampelnya adalah : $S = \{GG, GH, HG, HH\}$

Dimana :

G = Gambar "Karapan Sapi"

H = Huruf "Bank Indonesia"

Dengan :

---

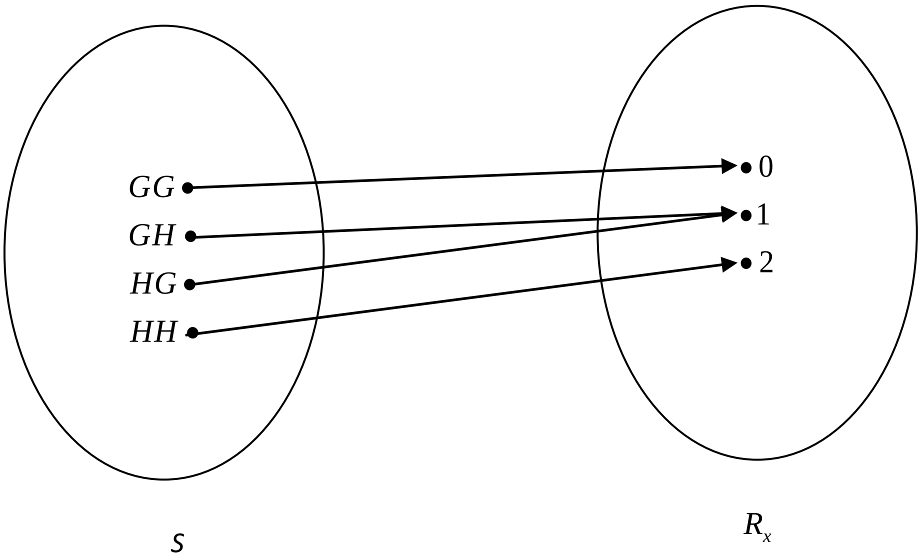
47. Ibid

$s_2 = GH$,sehingga $X(s_2) = X(GH) = 1$

$s_3 = HG$, sehingga $X(s_3) = X(HG) = 1$

$s_4 = GG$, sehingga $X(s_4) = X(HH) = 2$

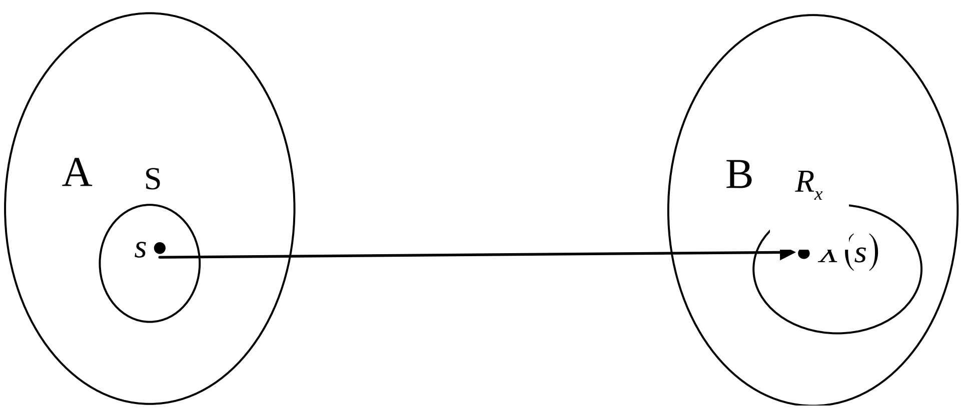
Maka nilai-nilai yang mungkin dari X_s, $R_x = \{0,1,2\}$



Karena *X* memenuhi syarat-syarat sebuah fungsi, maka *X* disebut pubah acak.

Definisi. Dua Peristiwa Ekivalen

Andaikan *E* adalah sebuah eksperimen dengan ruang sampelnya *S*. *X* adalah peubah acak yang didefenisikan pada *S* dengan R_x adalah ruang hasilnya, dan *B* adalah peristiwa yang berkenaan dengan R_x, artinya $B \subset R_x$
Apabila peristiwa A didefenisikan sebagai: $A = \{s \in S / X(s) \in B\}$ artinya *A* berisi semua hasil dalam *S* dengan $X(s) \in B$ maka *A* dan *B* disebut dua peristiwa ekivalen[48].
Dua peristiwa ekivalen dapat digambarkan seperti gambar di bawah ini :



48. *Ibid*

.

Definisi. Peluang Dua Peristiwa Yang Ekivalen

Apabila B adalah sebuah peristiwa dalam ruang hasil R_x, maka $P(B)$ didefenisikan sebagai $P(B) = P(A)$ dengan $A = \{s \in S / X(s) \in B\}$ [49].

Contoh. Andaikan Mita melakukan pelemparan tiga mata uang logam Rp.100 yang seimbang secara sekaligus. Apabila X menunjukkan banyak Gambar “Karapan Sapi” yang terjadi, maka apakah X merupakan peubah acak?

Penyelesaian:

Ruang Sampelnya adalah :

$$S = \{HHH, HHG, HGH, HGG, GHH, GHG, GGH, GGG\}$$

Apabila X menunjukkan banyak G yang terjadi, maka nilai-nilai yang mungkin dari X adalah $R_x = \{0,1,2,3\}$. Adapun peluang

$$P(HHH) = P(HHG) = P(HGH) = P(HGG) = P(GHH) = P(GHG) = P(GGH) = P(GGG) = \frac{1}{8}$$

Penyelesaian :

a. Karena $X = 0$ ekivalen dengan peristiwa yang ruang peristiwanya $\{HHH\}$ dan $P\{HHH\} = \frac{1}{8}$, maka $P(X = 0) = P(HHH) = \frac{1}{8}$

b. Karena $X = 1$ ekivalen dengan peristiwa yang ruang peristiwanya $\{HHG\}$ dan $atau \{HGH\}, atau \{GHH\}$, dan

$$P(HHG) \text{ atau } P(HGH) \text{ atau } P(GHH) = P(HHG) + P(HGH) + P(GHH)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{3}{8}$$

Maka $P(X = 1) = P(HHG) = P(HGH) = P(GHH) = \frac{3}{8}$

c. Karena $X = 2$ ekivalen dengan peristiwa yang ruang peristiwanya $\{HGG\}$atau $\{GHG\}$atau $\{GGH\}$, dan

$$P(HGG) \text{ atau } P(GHG) \text{ atau } P(GGH) = P(HGG) + P(GHG) + P(GGH)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

3

49. Ibid

.

Maka $P(X=2)=P(HGG)=P(GHG)=P(GGH)=\frac{3}{8}$

d. Karena $X=3$ ekivalen dengan peristiwa yag ruang peristiwanya $\{GGG\}$ da $P(GGG)=\frac{1}{8}$, maka $P(X=3)=P(GGG)=\frac{1}{8}$

Definisi. Peubah Acak Diskrit

> Misalkan *X* adalah peubah acak. Jika banyak nilai-nilai yang mungkin dari *X* (yaitu ruang hasil R_x) berhingga atau tidak berhingga tapi dapat dihitung maka *X* disebut peubah acak diskrit[50].

Definisi. Peubah Acak Kontinu

> Misalnya *X* adalah peubah acak.Jika nilai-nilai yang mungkin dari *X* (yaitu ruang hasil R_x) merupakan sebuah interval pada garis bilangan real, maka *X* disebut peubah acak kontinu[51].

Contoh. Misalnya sebuah universitas mempunyai mahasiswa berjumlah 25.000 orang dan para mahasiswa itu diberi NIM mulai dari 00001 sampai 25000. Kemudian seorang mahasiswa dipilih secara acak dan diukur berat badannya.

Penyelesaian. Ruang sampelnya adalah :

$S=\{s : s = 00001, 00002, 00003, ..., 25000\}$. Misalnya X menunjukkan berat badan dari mahasiswa yang terpilih, maka bisa ditulis sebagai $X(s)$ dengan $s \in S$. Kita mengasumsikan bahwa tidak ada mahasiswa di universitas yang mempunyai berat badan kurang dari 20 kg atau lebih dari 175 kg, sehingga ruang hasil dari *X* adalah :

$$R_x = \{x : 20 \le x \le 175\}$$

Karena R_x merupakan sebuah interval, maka *X* termasuk kedalam peubah acak kontinu.

4.2. Distribusi Peluang

Definisi. Fungsi Peluang

> Misalkan X adalah peubah acak diskrit, maka $p(x)=P(X=x)$ untuk setiap x dalam range X dinamakan fungsi peluang dari X[52].
>
> Nilai fungsi peluang dari X, yaitu $p(x)$, harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.
>
> i. $p(x) \ge 0$
>
> ii. $\sum_x p(x) = 1$

50. Ibid 51. Ibid 52. Ibid

.

Misalkan *X* adalah peubah acak kontinu yang didefinisikan dalam himpunan bilangan real. Sebuah fungsi disebut fungsi densitas dari X, jika nilai-nilainya yaitu $f(x)$, memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

i. $f(x) \geq 0;$ untuk $x \in (-\infty, \infty)$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

iii. Untuk setiap *a* dan *b* dengan $-\infty < a < b < \infty$, maka[53]:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Dalil. Peluang Peubah Acak Kontinu Berbentuk Interval

Andaikan *X* adalah peubah acak kontinu serta *a* dan *b* adalah dua konstanta real, dengan $a < b$, maka[54]:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

Contoh:

Andaikan fungsi densitas dari peubah acak *X* berbentuk :

$$\begin{aligned} g(x) &= kx; 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) &= k; 1 \leq x \leq 2 \\ g(x) &= -kx + 3k; 2 \leq x \leq 3 \\ g(x) &= 0; x, lainnya \end{aligned}$$

a. Hitung nilai *k*
b. Gambarkan grafik dari $g(x)$.

Penyelesaian :

Penghitungan nilai *k* tidak diselesaikan untuk setiap interval nilai *x* melainkan terhadap nilai *x* dari 0 sampai 3. Adapun batas-batas pengintegralannya diisi dengan setiap interval nilai *x*.

a. Berdasarkan sifat kedua dari fungsi densitas, maka:

53. *Ibid*
54. *Ibid*

.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{1} g(x)dx + \int_{1}^{2} g(x)dx + \int_{2}^{3} g(x)dx + \int_{3}^{\infty} g(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} kx \cdot dx + \int_{1}^{2} k \cdot dx + \int_{2}^{3} (-kx + 3k)dx + \int_{3}^{\infty} 0 \cdot dx = 1$$

$$0 + \left(\frac{kx^2}{2}\right)\Bigg]_{x=0}^{1} + (kx]_{x=1}^{2} + \left(\left(\frac{-kx^2}{2} + 3kx\right)\right]_{x=2}^{3} + 0 = 1$$

$$\frac{1}{2}k + k - \frac{5}{2}k + 3k = 1$$

$$2k = 1$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Jadi fungsi densitas dari *X* berbentuk :

$$g(x) = \frac{1}{2}x; 0 \le x \le 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}; 1 \le x \le 2$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}k + \frac{3}{2}; 2 \le x \le 3$$

$$g(x) = 0, x lainnya$$

b. Grafik dari *g(x)* dapat dilihat pada gambar di bawah ini :

4.3. Fungsi Distribusi

Andaikan kita memiliki distribusi peluang dari sebuah peubah acak diskrit, maka kita dapat menghitung peluang dari peubah acak tersebut bernilai tertentu. Nilai peluang dari peubah acak tersebut dapat memiliki bermacam kemungkinan, yaitu:

a. $P(X < a)$
b. $P(a < X < b)$
c. $P(a \le X \le b)$
d. $P(X > b)$
e. $P(X \ge b)$
f. $P(X \le a)$
g. $P(a \le X < b)$
h. $P(a < X \le b)$

Dimana *a* dan *b* adalah konstanta.

.

Apabila kita memperhatikan bentuk $P(X \le a)$, maka bentuk umumnya ditulis $P(X \le x)$. Dalam statistika matematis, bentuk $P(X \le x)$ dinamakan *fungsi distribusi kumulatif* atau *fungsi distribusi saja*.

Definisi. Fungsi Distribusi Kumulatif

Misalkan *X* adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Kita mendefinisikan *F* sebagai fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak *X*, dengan [55] :

$$F(x) = P(X \le x)$$

Definisi. Fungsi Distribusi Kumulatif Diskrit

Misalkan *X* adalah peubah acak diskrit, maka fungsi distribusi kumulatif dari *X* berbentuk:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} p(t)$$

Dengan $p(t)$ adalah fungsi peluang dari *X* di t [56].

Contoh.

Andaikan kita mengundi dua mata uang logam Rp.100 yang seimbang secara serentak, maka distribusi peluangnya akan berbentuk:

x	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Dimana *X* menunjukkan banyak huruf “BANK INDONESIA”.

a. Tentukan fungsi distribusi dari *X*.
b. Gambarkan grafik fungsi distribusinya.

Penyelesaian:

a. Untuk $x < 0$
$F(x) = 0$

Untuk $0 \le x < 1$

55. *Ibid*
56. *Ibid*

.

$F(0) = \sum_{t \le 0} p(t)$

$F(0) = p(0)$

$F(0) = \frac{1}{4}$

Untuk $1 \le x < 2$

$F(1) = \sum_{t \le 1} p(t)$

$F(1) = p(0) + p(t)$

$F(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$F(1) = \frac{3}{4}$

Untuk $2 \le x$

$F(2) = \sum_{t \le 2} p(t)$

$F(2) = p(0) + p(1) + p(2)$

$F(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$F(2) = 1$

Jadi fungsi distribusi dari *X* berbentuk :

$F(x) = 0; x < 0$

$F(x) = \frac{1}{4}; 0 \le x < 1$

$F(x) = \frac{3}{4}; 1 \le x < 2$

$F(x) = 1; 2 \le x$

b. Grafik dari fungsi distribusinya dapat dilihat pada gambar di bawah ini:

Definisi. Fungsi Distribusi Kumulatif Kontinu

Misalkan. *X* adalah peubah acak kontinu, maka fungsi distribusi kumulatif dari *X* berbentuk :

$$F(x) = P(X \le x) = x \int_{-\infty} f(t)dt$$

Dengan $f(t)$ adalah nilai fungsi densitas dari *X* di t[57].

Nilai fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak kontinu biasanya berupa konstanta dan fungsi. Grafik fungsi distribusinya berupa kombinasi dari beberapa kemungkinan berikut: 1) Garis Lurus; 2) Garis yang sejajar dengan sumbu datar; 3) Garis yang berimpit dengan sumbu datar, 4) Sebuah kurva.

57. *Ibid*

.

Maka grafik fungsi distribusi untuk peubah acak kontinu mempunyai beberapa kemungkinan, diantaranya sebagai berikut:

1) Grafiknya berupa garis yang berimpit dengan sumbu datar dan kurva.
2) Grafiknya berupa garis yang berimpit dengan sumbu datar , garis lurus, dan garis yang sejajar dengan sumbu datar.
3) Grafiknya berupa garis yang berimpit dengan sumbu datar, kurva, dan garis sejajar dengan sumbu datar.

Contoh.

Misalkan fungsi densitas dari peubah acak *X* berbentuk:

$$f(x) = \left(\frac{3}{8}\right)x^2, 0 < x < 2$$

$$f(x) = 0, x : lainnya)$$

a. Tentukanlah fungsi distribusi $F(x)$

Penyelesaian:

a. Untuk $x < 0$

$$F(x) = 0$$

Untuk $0 \le x < 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{x} \left(\frac{3}{8}\right)t^2 dt$$

$$F(x) = 0 + \left(\frac{1}{8}\right)(t^3)\Big]_{t=0}^{2}$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{8}\right)x^3$$

Untuk $2 \le x$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{3} f(t)dt + \int_{2}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{2} \left(\frac{3}{8}\right)t^2 dt + \int_{2}^{x} 0 \cdot dt$$

$$F(x) = 0 + \left(\frac{1}{8}\right) \cdot (t^3)\Big]_{t=0}^{2} + 0$$

$$F(x) = 1$$

.

Maka fungsi distribusinya berbentuk :

$$F(x) = 0; x < 0$$
$$F(x) = \left(\frac{1}{8}\right)x^2; 0 \leq x < 2$$
$$F(x) = 1; 2 \leq x$$

Peubah Acak Diskrit

Misalkan *t* adalah suatu bilangan real, terletak dalam interval $(b-h, b]$ yaitu $b-h < t \leq b$, dengan h adalah bilangan positif.

Apabila nilai h menuju nol, maka interval tersebut akan menuju ke sat nilai, yaitu $t = b$, dan ditulis:

$$\lim_{h \to 0} P(b-h < X \leq b) = \lim_{h \to \infty}[F_x(b) - F_x(b-h)]$$
$$\lim_{h \to 0} P(b-h < X \leq b) = F_x(b) - \lim_{h \to \infty} F_x(b-h)$$
$$\lim_{h \to 0} P(b-h < X \leq b) = F_x(b) - F_x(b-)$$

Maka jika *b* adalah nilai diskontinu dari F_x, maka b adalah nila dari peubah acak *X* dengan peluangnya positif. Peluang bahwa $X = b$ merupakan ukuran loncatan pada $F_x(b)$.

Maka langkah-langkah untuk menentukan fungsi peluang berdasarkan fungsi distribusi adalah sebagai berikut:

1) Tentukan nilai-nilai peubah acak *X* yang menyebabkan fungsi distribusi $F_x(x)$ diskontinu.
2) Tentukan peluang untuk setiap nilai *x* yang diskontinu, dengan rumus:

   $$P(X = x_0) = F_x(x_0) - F_x(x_0 -)$$

   Dengan x_0 adalah sebuah nilai yang menyebabkan $F_x(x)$ diskontinu.

Pemahaman penentuan fungsi peluang sebuah peubah acak diskrit berdasarkan fungsi distribusinya diperjelas melalui contoh di bawah ini :

Contoh:

Misalkan fungsi distribusi dari peubah acak *X* berbentuk :

.

$F_x(x) = 0; x < 0$

$F_x(x) = \frac{1}{2}; 0 \le x < 2$

$F_x(x) = \frac{5}{6}; 2 \le x < 3$

$F_x(x) = 1; 3 \le x$

Tentukan fungsi peluangnya!

Penyelesaian:

Apabila kita memperhatikan $F_x(x)$ maka terdapat tiga nilai x yang menyebabkan $F_x(x)$ diskontinu, yaitu $x = 0, 1, 2$ dan 3. Ketiga nilai tersebut merupakan nilai peubah acak X dengan peluangnya sebagai berikut:

- $p(0) = F_x(0) - F_x(0-)$
  $p(0) = \frac{1}{2} - 0$
  $p(0) = \frac{1}{2}$

- $p(2) = F_x(2) - F_x(2-)$
  $p(2) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$
  $p(2) = \frac{2}{6}$
  $p(2) = \frac{1}{3}$

- $p(3) = F_x(3) - F_x(3-)$
  $p(3) = 1 - \frac{5}{6}$
  $p(3) = \frac{1}{6}$

Maka fungsi peluang dari X adalah:

$p(x) = \frac{1}{2}; x = 0$

.

$$p(x) = \frac{1}{3}; x = 2$$
$$p(x) = \frac{1}{6}; x = 3$$
$$p(x) = 0; x, lainnya$$

Peubah Acak Kontinu

Dalil. Penentuan Fungsi Densitas

Jika $f(x)$ dan $F(x)$ masing-masing merupakan fungsi densitas dan fungsi distribusi dari peubah acak peubah acak X di x, maka:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Apabila hasil dari turunannya ada [58].

Pemahaman penentuan fungsi densitas dari sebuah peubah acak kontinu berdasarkan fungsi distribusinya diperjelas melalui contoh di bawah ini:

Contoh:

Misalkan fungsi distribusi dari peubah acak X berbentuk:

$$F(x) = 0; x \leq 0$$
$$F(x) = x^2; 0 < x \leq 1$$
$$F(x) = 1; x > 1$$

Tentukanlah fungsi densitasnya!

Penyelesaian:

Untuk $x \leq 0;\ f(x) = F'(x) = 0$

Untuk $0 < x < 1;\ f(x) = F'(x) = 2x$

Untuk $x \geq 1;\ f(x) = F'(x) = 0$

Maka fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = 2x; 0 < x < 1$$

$$f(x) = 0; x \text{ lainnya}$$

58. *Ibid*

.

Setelah kita menjelaskan teknik penentuan fungsi distribusi berdasarkan fungsi peluangnya atau fungsi densitasnya atau sebaliknya, kita perlu mengetahui beberapa sifat dari fungsi distribusi.

1) $0 \le F(x) \le 1$ karena $0 \le P(X \le x) \le 1$
2) $F(x)$ adalah fungsi tidak tidak turun di *x*. Artinya jika $x' < x''$, maka $F'(x) < F''(x)$
   Hal ini dapat dilihat dari uraian di bawah ini:
   Jika $x' < x''$, maka
   $\{x; x \le x''\} = \{x; x \le x''\} \cup \{x; x' < x \le x''\}$
   $P(X \le x'') = P(X \le x') + P(x' < X \le x'')$
   $F(x'') = F(x') + P(x' < X \le x'')$
   $F(x'') - F(x') = P(x' < X \le x'')$
   Karena $P(x' < X \le x'') \ge 0$
   $F(x'') - F(x') \ge 0$
   $F(x'') \ge F(x')$ atau $F(x') \le F(x'')$
3) $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ dan $F(-\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 0$
4) $F(x)$ kontinu kanan pada setiap nilai *x*.

.

1.4. Rangkuman

1. Peubah acak X adalah sebuah fungsi yang menetapkan setiap anggota $s \in S$ dengan sebuah bilangan real $X(s)$.
2. Peubah acak diskrit adalah peubah acak yang banyak nilai-nilai X yang mungkin dalam R_x berhingga atau tidak berhingga tapi dapat dihitung.
3. Peubah acak kontinu adalah peubah acak yang nilai-nilai X yang mungkin dalam R_x merupakan sebuah interval dalam garis bilangan real.
4. Fungsi peluang dari sebuah peubah acak diskrit X adalah fungsi yang nilainya, $p(x)$memenuhi persyaratan sebagai berikut:

   a. $p(x) \geq 0$ b. $\sum_x p(x) = 1$

5. Pasangan yang diururtkan dari nilai-nilai peubah acak dan peluangnya dinamakan distribusi peluang dari peubah acak tersebut.
6. Grafik dari fungsi peluang atau distribusi peluang berupa grafik batang atau histogram peluang.
7. Fungsi densitas dari sebuah peubah acak kontinu X adalah fungsi yang nilai-nilainya, $f(x)$ memenuhi persyaratan sebagai berikut:

   a. $f(x) \geq 0$

   b. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

   c. Untuk setiap a dan b dengan $-\infty < a < b < \infty$ berlaku:

   $$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

8. Perhitungan peluang dari peubah acak kontinu yang nilainya membentuk sebuah interval apa saja hasilnya akan sama, yaitu:

   $$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

9. Grafik dari fungsi densitas berupa sebuah kurva atau sebuah garis atau bahkan kombinasi keduanya, yang penggambarannya disesuaikan dengan bentuk fungsi densitasnya.
10. Fungsi distribusi dari peubah acak X didefenisikan sebagai berikut:

    $$F(x) = P(X \leq x)$$

11. Grafik fungsi distribusi dari peubah acak diskrit berupa fungsi tangga, sedangkan grafik fungsi distribusi dari peubah acak kontinu berupa kombinasi dari beberapa kemungkinan berikut ini: garis lurus, garis yang sejajar dengan sumbu datar, garis yang berimpit dengan sumbu datar, dan sebuah kurva.
12. Perhitungan peluang dari peubah acak yang nilainya membentuk sebuah interval berdasarkann fungsi distribusinya digunakan rumus:

    $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

13. Perhitungan peluang dari peubah acak yang berharga satu nilai berdasarkan fungsi distribusinya digunakan rumus:

$$P(X = b) = F_x(b) - F_x(b-)$$

14. Jika fungsi distribusi dari peubah acak diskrit diketahui, maka penentuan fungsi peluangnya dilakukan berdasarkan langkah-langkah sebagai berikut:
    a. Tentukan nilai-nilai dari peubah acaknya yang menyebabkan fungsi distribusinya diskontinu
    b. Tentukan nilai peluang untuk setiap nilai peubah acak yang diskontinu tersebut.
15. Jika fungsi distribusi dari peubah acak kontinu diketahui, maka penentuan fungsi densitasnya dilakukan berdasarkan turunan pertama terhadap fungsi distribusinya apabila hasil turunannya ada.
16. Fungsi distribusi dari *X* mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:
    a. $0 \le F(x) \le 1$
    b. $F(x)$ adalah fungsi tidak turun di *x*.
    c. $F(\infty) = 1$ dan $F(-\infty) = 0$
    d. $F(x)$ kontinu kanan pada setiap nilai *x*.

.

BAB V DISTRIBUSI DUA PEUBAH ACAK

5.1. Distribusi Gabungan

Definisi. Peubah Acak Berdimensi Dua

Apabila S merupakan ruang sampel dari sebuah eksperimen, maka pasangan (X,Y) disebut peubah acak berdimensi dua, jika X dan Y masing-masing menghubungkan sebuah bilangan real dengan setiap anggota S[59].

Terdapat dua jenis peubah acak berdimensi dua dalam statistika, yaitu peubah acak diskrit berdimensi dua, dan peubah acak kontinu berdimensi dua. Berikut ini akan diterangkan definisi dari kedua jenis peubah acak berdimensi dua tersebut beserta dengan contohnya.

Definisi. Peubah Acak Diskrit Berdimensi Dua

(X,Y) disebut peubah acak diskrit berdimensi dua, apabila banyak nilai-nilai yang mungkin dari (X,Y) salah satunya berhingga atau tidak berhingga tapi dapat dihitung[60].

Contoh.

Sebuah kotak berisi 3 bola pingpong bernomor 1, 2, 3. Kemudian dua bola pingpong diambil secara acak dengan pengembalian. Misalnya peubah acak X menyatakan bilangan pada pengembalian bola pingpong pertama dan peubah acak Y menyatakan bilangan pada pengembalian bola pingpong kedua . Pada pengembalian bola pingpong pertama, bola yang akan diambil ada tigakemungkinan, yaitu bola pingpong bernomor 1, 2, 3. Maka nilai-nilai yang mungkin dari X adalah $\{1,2,3\}$. Pada pengembalian bola pingpong kedua, karena bola pingpong pertama yang terambil dikembalikan kembali ke dalam kotak, maka bola pingpong yang akan diambil juga ada tiga kemungkinan yaitu bola pingpong bernomor 1, 2, dan 3. Maka nilai-nilai dari Y adalah $\{1,2,3\}$.

Karena kedua peubah acak X dan Y mempunyai banyak nilai-nilai yang kemungkinannya berhingga, maka (X,Y) termasuk kedalam peubah acak diskrit berdimensi dua.

Definisi. Peubah Acak Kontinu Berdimensi Dua

(X,Y) disebut peubah acak kontinu berdimendi dua, apabila banyak nilai-nilai yang mungkin dari X dan Y masing-masing berbentuk sebuah interval[61].

---

59. Ibid
60. Ibid
61. Ibid

.

Contoh.

Di dalam tubuh seorang manusia yang sehat berusia 20 sampai 29 tahun, kadar kalsium dalam darahnya, dimisalkan dengan *X*, biasanya diantara 8,5 dan 10,5 mg/dl sedangkan kadar kolesterolnya, dimisalkan dengan *Y*, biasanya antara 120 dan 240 mg/dl. Peubah acak *X* dan *Y* masing-masing dinyatakan dalam interval, yaitu $8{,}5 < x < 10{,}5$ dan $120 < y < 240$, maka (X, Y) merupakan peubah acak kontinu berdimensi dua. Peubah acak diskrit, perhitungan peluangnya dari peubah acak *X* dan *Y* masing-masing berharga tertentu, membutuhkan sebuah fungsi yang disebut fungsi peluang gabungan.

Definisi. Fungsi Peluang Gabungan

Apabila *X* dan *Y* adalah dua peubah acak diskrit, maka fungsi yang dinyatakan dengan $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ untuk setiap pasangan nilai (x, y) dalam daerah hasil dari *X* dan *Y*, dinamakan fungsi peluang gabungan [62].

Dalil. Sifat-Sifat Fungsi Peluang Gabungan

Sebuah fungsi dengan dua peubah acak dapat digunakan sebagai distribusi peluang gabungan dari pasangan peubah acak diskrit *X* dan *Y*, jika dan hanya jika nilai-nilainya, yaitu $p(x, y)$ memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $p(x, y) \geq 0$ untuk setiap pasangan nilai (x, y) dalam daerah asalnya.
2. $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$ [63]

Perhitungan peluang dari dua peubah acak X dan Y masing-masing bernilai tertentu, dilakukan dengan menggunakan rumus di bawah ini:

$$P[(X, Y) \in A] = \sum_A \sum p(x, y)$$

Dimana *A* adalah himpunan bagian dari daerah asal *X* dan *Y*. Pemahaman penggunaan rumus di atas diperjelas melalui contoh di bawah ini.

Contoh.

Fungsi peluang gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$$p(x, y) = c(x + 2y); x = 0,1,2,3, dan, y = 0,1,2,3$$

a. Tentukanlah nilai konstanta *c*.
b. Hitunglah $P(X = 2, Y = 1)3$
c. Hitunglah $P(X \geq 1, Y \leq 2)$

62. Ibid
63. Ibid

.

Penyelesaian.

a. Berdasarkan kepada sifat-sifat fungsi peluang gabungan yaitu sifat (2), maka:

$$\sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{3} p(x,y) = 1$$

$$p(0,0)+p(0,1)+p(0,2)+p(0,3)+p(1,0)+p(1,1)+p(1,2)+p(1,3)+p(2,0)+p(2,1)$$

$$p(2,2)+p(2,3)+p(3,0)+p(3,1)+p(3,2)+p(3,3)=1$$

$$0+2c+4c+6c+c+3c+5c+7c+2c+4c+6c+8c+3c+5c+7c+9c=1$$

$$72c=1$$

$$c=\frac{1}{72}$$

b. $P(X=2, Y=1)=\frac{4}{72}=\frac{1}{18}$

c. $P(X \geq 1, Y \leq 2)=\left(\frac{1}{72}\right)\cdot(x+2y)$

$$P(X \geq 1, Y \leq 2)=\left(\frac{1}{72}\right)\cdot(1+3++5+2+4+6+3+5+7)$$

$$P(X \geq 1, Y \leq 2)=\frac{36}{72}$$

$$P(X \geq 1, Y \leq 2)=\frac{1}{2}$$

Definisi. Fungsi Densitas Gabungan

Sebuah fungsi yang melibatkan dua peubah acak *X* dan *Y* dengan masing-masing nilainya dinyatakan dalam bidang-xy disebut fungsi densitas gabungan, jika dan hanya jika :

$$P[(X,Y)\in A]=\iint_A f(x,y)\,dxdy$$

Dimana *A* terletak dalam bidang-*xy*.[64]

Dalil. Sifat-sifat Fungsi Densitas Gabungan

Sebuah fungsi dari dua peubah acak kontinu *X* dan *Y* dapat digunakan sebagai fungsi densitas gabungan, jika dan hanya jika nilai-nilainya yaitu $f(x,y)$ memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $f(x,y)\geq 0$ untuk $-\infty < x, y < \infty$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$ [65]

64. *Ibid*
65. *Ibid*

Contoh. Misalkan fungsi densitas gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$$f(x,y) = cxy; 0 < x < 3; 1 < y < 4$$
$$f(x,y) = 0; x, y lainnya$$

a. Tentukan nilai konstanta c.
b. Hitung $P[(X,Y) \in A]$ dengan *A* adalah daerah $\{(x,y); 0 < x < 2, 2 < y < 3\}$

Penyelesaian:

a. Berdasarkan sifat (2) fungsi densitas gabungan, maka:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{0} f(x,y)dxdy + \int_{1}^{4}\int_{0}^{3} f(x,y)dxdy + \int_{4}^{\infty}\int_{3}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dxdy + \int_{1}^{4}\int_{0}^{3} cxy \cdot dxdy + \int_{4}^{\infty}\int_{3}^{\infty} 0 \cdot dxdy = 1$$

$$0 + c \cdot \int_{1}^{4} \left(\frac{1}{2}\right) x^2 y \Big]_{x=0}^{3} dy + 0 = 1$$

$$\frac{9c}{2} \cdot \int_{1}^{4} y \cdot dy = 1$$

$$\left(\frac{9c}{4}\right) \cdot y^2 \Big]_{y=1}^{4} = 1$$

$$\left(\frac{135}{4}\right) \cdot c = 1$$

$$c = \frac{4}{135}$$

.

$$P[(X,Y)\in A] = P(0 < X < 2, 2 < Y < 3)$$

$$P[(X,Y)\in A] = \int_0^2\int_2^3\left(\frac{4xy}{135}\right)dydx$$

$$P[(X,Y)\in A] = \left(\frac{4}{135}\right)\cdot\int_0^2\left(\frac{1}{2}\right)\cdot xy^2\Big]_{y=2}^{3}dx$$

b. $$P[(X,Y)\in A] = \left(\frac{2}{27}\right)\cdot\int_0^2 xdx$$

$$P[(X,Y)\in A] = \left(\frac{1}{27}\right)\cdot x^2\Big]_{x=0}^{2}$$

$$P[(X,Y)\in A] = \frac{4}{27}$$

5.2.DISTRIBUSI MARGINAL

Andaikan kita memiliki distribusi gabungan dari peubah acak *X* dan Y (baik diskrit maupun kontinu), maka kita bisa menentukan distribusi untuk masing-masing peubah acak. Demikian kita dapat menentukan distribusi dari peubah acak *X* dan distribusi dari peubah acak *Y*. Distribusi yang didapatkan dengan cara seperti itu disebut distribusi marginal.

Definisi. Fungsi Peluang Marginal

Apabila *X* dan *Y* adalah dua peubah acak diskrit dan *p(x,y)* adalah nilai dari fungsi[66] peluang gabungan di *(x,y)* maka fungsi yang dirumuskan dengan:

$$p_1(x) = \sum_y p(x,y)$$

Untuk setiap *x* dalam daerah hasil *X* disebut fungsi peluang marginal dari *X*.

Fungsi yang dirumuskan dengan:

$$p_2(y) = \sum_x p(x,y)$$

Untuk setiap *y* dalam daerah hasil *Y* disebut fungsi peluang marginal dari *Y*.

66. *Ibid*

Contoh.

Misalkan fungsi peluang gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$$p(x,y)=\left(\frac{1}{72}\right)(x+2y); x=0,1,2,3$$
$$p(x,y)=\left(\frac{1}{72}\right)(x+2y); y=0,1,2,3$$

Tentukan.

a. Fungsi peluang marginal dari *X*.

b. Fungsi peluang marginal dari *Y*.

Penyelesaian:

a.Fungsi peluang marginal dari *X* adalah:

$$p_1(x)=\sum_y p(x,y)$$
$$p_1(x)=\sum_{y=0}^{3}\left(\frac{1}{72}\right)\cdot(x+2y)$$
$$p_1(x)=\left(\frac{1}{72}\right)\cdot\{(x)+(x+2)+(x+4)+(x+6)\}$$
$$p_1(x)=\frac{1}{72}\cdot(4x+12)$$
$$p_1(x)=\left(\frac{1}{18}\right)\cdot(x+3)$$

Maka $p_1(x)=\left(\frac{1}{18}\right)(x+3); x=0,1,2,3$

b.Fungsi peluang marginal dari *Y* adalah:

.

$$p_2(y) = \sum_x p(x,y)$$

$$p_2(y) = \sum_{x=0}^{3} \left(\frac{1}{72}\right) \cdot (x+2y)$$

$$p_2(y) = \left(\frac{1}{72}\right) \cdot \{(2y) + (1+2y) + (2+2y) + (3+2y)\}$$

$$p_2(y) = \frac{1}{72} \cdot (6+8y)$$

$$p_2(y) = \left(\frac{1}{36}\right) \cdot (3+4y)$$

Maka $p_2(y) = \left(\frac{1}{36}\right) \cdot (3+4y); y = 0,1,2,3$

Kita dapat memeriksa apakah hasil penyelesaian di atas benar atau salah. Hal ini dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

a.Kita harus membuktikan bahwa $\sum_{x=0}^{3} \left(\frac{1}{18}\right)(x+3) = 1$

Bukti:

$$\sum_{x=0}^{3} \left(\frac{1}{18}\right) \cdot (x+3) = \left(\frac{1}{18}\right) \cdot (3+4+5+6)$$

$$\sum_{x=0}^{3} \left(\frac{1}{18}\right) \cdot (x+3) = \left(\frac{1}{18}\right) \cdot (18)$$

$$\sum_{x=0}^{3} \left(\frac{1}{18}\right) \cdot (x+3) = 1$$

b.Kita harus membuktikan bahwa $\sum_{y=0}^{3} \left(\frac{1}{36}\right) \cdot (3+4y) = 1$

Bukti:

$$\sum_{y=0}^{3} \left(\frac{1}{36}\right) \cdot (3+4y) = \left(\frac{1}{36}\right) \cdot (3+7+11+15)$$

$$\sum_{y=0}^{3} \left(\frac{1}{36}\right) \cdot (3+4y) = \left(\frac{1}{36}\right) \cdot (36)$$

$$\sum_{y=0}^{3} \left(\frac{1}{36}\right) \cdot (3+4y) = 1$$

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa fungsi peluang gabungan dari peubah acak diskrit *X* dan *Y* digunakan untuk mendapatkan fungsi peluang marginal masing-masing dari *X* dan *Y*. Dengan menggunakan cara yang sama, fungsi densitas marginal masing-masing dari *X* dan *Y*

.

dapat diperoleh dari fungsi densitas gabungannya, apabila X dan Y merupakan peubah kontinu.

$$P(a < X < b) = P(a < X < b, -\infty < Y < \infty)$$

$$P(a < X < b) = \int_{x=-\infty}^{b} \left\{ \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \right\} dx$$

Berdasarka pada : $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Maka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ harus sama dengan $f_1(x)$

Perumusan di atas merupakan fungsi densitas marginal dari X.

$$P(c < Y < d) = P(-\infty < X < \infty, c < Y < d)$$

$$P(c < Y < d) = \int_{y=c}^{d} \left\{ \int_{x=\infty}^{\infty} f(x,y)dx \right\} dy$$

Bedasarkan pada : $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Maka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ harus sama dengan $f_2(y)$.

Definisi. Fungsi Densitas Marginal

Apabila X dan Y adalah dua peubah acak kontinu dan $f(x,y)$ adalah nilai fungsi densitas gabungan di (x,y), maka fungsi yang dirumuskan dengan[67] :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; -\infty < x < \infty$$

Disebut fungsi densitas marginal dari X. Adapun fungsi yang dirumuskan dengan:

$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx; -\infty < y < \infty$, disebut fungsi densitas marginal dari Y.

Karena $g(x)$ dan $h(y)$ masing-masing merupakan fungsi densitas, maka :

67. Ibid

.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy = 1$

Contoh.

Misalkan fungsi densitas gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$f(x, y) = \left(\frac{4}{35}\right)xy; 0 < x < 3,1 < y < 44$

$f(x, y) = 0; x, y\ lainnya$

Tentukan:

a.Fungsi densitas marginal dari *X*.

b.Fungsi densitas marginal dari *Y*.

Penyelesaian:

Fungsi densitas marginal dari *X* adalah:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{1} f(x,y)dy + \int_{1}^{4} f(x,y)dy + \int_{4}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dy + \int_{1}^{4} \left(\frac{4}{135}\right)xydy + \int_{4}^{\infty} 0dy$$

$$g(x) = 0 + \left(\frac{4}{135}\right)\left(\frac{1}{2}\right)xy^2\Big]_{y=1}^{4} + 0$$

$$g(x) = \left(\frac{2}{9}\right)x; 0 < x < 3$$

$$g(x) = 0, x \text{ lainnya}$$

b.Fungsi densitas marginal dari *Y* adalah:

.

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dx + \int_{0}^{3} f(x,y)dx + \int_{3}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3}\left(\frac{4}{135}\right)xydx + \int_{3}^{\infty} 0dx$$

$$h(y) = 0 + \left(\frac{4}{135}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)x^2 y\Big]_{x=0}^{3} + 0$$

$$h(y) = \left(\frac{2}{15}\right)y$$

Maka $h(y) = \left(\frac{2}{15}\right)y; 1 < y < 4$

$h(y) = 0; y$ lainnya.

Kita dapat memeriksa kembali apakah hasil jawaban yang kita dapatkan di atas benar atau salah. Pembuktiaan dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

a.Kita akan membuktikkan bahwa $\int_{0}^{3}\left(\frac{2}{9}\right)xdx = 1$

Bukti:

$$\int_{0}^{3}\left(\frac{2}{9}\right)xdx = \left(\frac{1}{9}\right)x^2\Big]_{x=0}^{3}$$

$$\int_{0}^{3}\left(\frac{2}{9}\right)xdx = \left(\frac{1}{9}\right)\cdot(9)$$

$$\int_{0}^{3}\left(\frac{2}{9}\right)xdx = 1$$

b.Kita akan membuktikkan bahwa $\int_{1}^{4}\left(\frac{2}{15}\right)ydy = 1$

.

Bukti:

$$\int_1^4 \left(\frac{2}{15}\right) y dy = \left(\frac{1}{15}\right) y^2 \Big]_{y=1}^4$$

$$\int_1^4 \left(\frac{2}{15}\right) y dy = \left(\frac{1}{15}\right) \cdot (15)$$

$$\int_1^4 \left(\frac{2}{15}\right) y dy = 1$$

5.3.DISTRIBUSI BERSYARAT

Definisi.Fungsi Peluang Bersyarat

Jika $p(x, y)$ adalah nilai fungsi peluang gabungan dari dua peubah acak diskrit *X* dan *Y* di (x, y) dan $p_2(y)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari *Y* di *y*, maka fungsi yang dinyatakan dengan [68] :

$$p\left({}^{x}\!/_{y} \right) = \frac{p(x, y)}{p_2(y)}; p_2(y) > 0$$

Untul setiap *x* dalam daerah hasil *X*, disebut fungsi peluang bersyarat dari *X* diberikan *Y* = *y*.

Jika $p_1(x)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari X di x, maka fungsi yang dirumuskan dengan :

$$p\left({}^{y}\!/_{x} \right) = \frac{p(x, y)}{p_1(x)}; p_1(x) > 0$$

Untuk setiap *y* di dalam daerah hasil *Y*, disebut fungsi peluang bersyarat dari *Y* diberikan *X* = *x*.

Definisi. Fungsi Densitas Bersyarat

Apabila $f(x, y)$ adalah nilai fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak kontinu *X* dan *Y* di (x, y) dan $f_2(y)$ adalah nilai fungsi densitas marginal dari *Y* di *y*, maka fungsi yang dirumuskan dengan [69] :

$$g\left({}^{x}\!/_{y} \right) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}; f_2(y) > 0$$

Untuk setiap x dalam daerah hasil *X*, disebut fungsi densitas bersyarat dari *X* diberikan *Y* = *y*.

Apabila $f_1(x)$ adalah nilai fungsi densitas marginal dari X di x, maka fungsi yang dirumuskan dengan:

68. *Ibid*
69. *Ibid*

$$h(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}; f_1(x) > 0$$

untuk setiap *y* dalam daerah hasil *Y*, disebut fungsi densitas bersyarat dari *Y* diberikan *X* = *x*.

5.4.KEBEBASAN STOKASTIK

Definisi. Kebebasan Stokastik Diskrit

Misalkan dua peubah acak diskrit *X* dan *Y* memiliki nilai fungsi peluang gabungan di (x, y), yaitu $p(x, y)$ serta masing-masing memiliki nilai fungsi peluang marginal dari *X* di *x*, yaitu $p_1(x)$ dan nilai fungsi peluang marginal dari *Y* di *y*, yaitu $p_2(y)$.

Kedua peubah acak *X* dan *Y* disebut bebas stokastik, jika dan hanya jika [70] :

$$p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$$

Untuk semua pasangan nilai (x, y).

Definisi. Kebebasan Stokastik Kontinu

Misalkan dua peubah acak kontinu *X* dan *Y* memiliki nilai fungsi densitas gabungan di (x, y), yaitu $f(x, y)$ serta masing-masing memiliki nilai fungsi densitas marginal dari *X* di *x*, yaitu $f_1(x)$ dan nilai fungsi densitas marginal dari *Y* di *y*, yaitu $f_2(y)$. Kedua peubah acak *X* dan *Y* disebut bebas stokastik, jika dan hanya jika [71]:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

---

70. Ibid
71. Ibid

.

Rangkuman

1. Distribusi gabungan dari dua peubah diskrit disebut fungsi peluang gabungan.
2. Fungsi peluang gabungan dari dua peubah acak diskrit *X* dan *Y* harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:
   a. $p(x,y) > 0$
   b. $\sum_x \sum_y p(x,y) = 1$

3. Penghitungan peluang dari dua peubah acak diskrit *X* dan *Y* dihitung dengan menggunakan rumus:

$$P[(X,Y) \in A] = \sum_A \sum p(x,y)$$

4. Distribusi gabungan dari dua peubah acak kontinu disebut fungsi densitas gabungan.
5. Fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak kontinu *X* dan *Y* harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:
   a. $f(x,y) \geq 0$
   b. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$
6. Penghitungan peluang dari dua peubah acak kontinu *X* dan *Y* dihitung dengan menggunakan rumus:

$$P[(X,Y) \in A] = \iint_A f(x,y)dxdy$$

7. Fungsi peluang marginal dari peubah acak diskrit *X* dan *Y* masing-masing adalah:
   a. $p_1(x) = \sum_y p(x,y)$ dengan $\sum_x p_1(x) = 1$
   b. $p_2(y) = \sum_x p(x,y)$ dengan $\sum_y p_2(y) = 1$
8. Fungsi densitas marginal dari peubah acak kontinu *X* dan *Y* masing-masing adalah:
   a. $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ dengan $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dy = 1$
   b. $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ dengan $\int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy = 1$
9. a. Fungsi peluang bersyarat dari peubah acak diskrit *X* diberika $Y = y$ adalah:

$$p_3\left({}^{x}\!/\!_{y} \right) = \frac{p(x,y)}{p_2(y)}; p_2(y) > 0$$

   Dimana $\sum_x p_3\left({}^{x}\!/\!_{y} \right) = 1$

   b.Fungsi peluang bersyarat dari peubah acak diskrit *Y* diberikan $X = x$ adalah:

$$p_4\left({}^{y}\!/\!_{x} \right) = \frac{p(x,y)}{p_1(y)}; p_1(x) > 0$$

.

Dimana $\sum_{y} p_4\left({}^{y}\!/\!{}_{x} \right) = 1$

10.a.Fungsi densitas bersyarat dari peubah acak kontinu *X* diberikan *Y* = *y* adalah:

$$k_1\left({}^{x}\!/\!{}_{y} \right) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)};\ f_2(y) > 0$$

Dimana $\int_{-\infty}^{\infty} k_1\left({}^{x}\!/\!{}_{y} \right) dx = 1$

b.Fungsi densitas bersyarat dari peubah acak kontinu *Y* diberikan *X* = *x* adalah :

$$k_2\left({}^{y}\!/\!{}_{x} \right) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)};\ f_1(x) > 0$$

Dimana $\int_{-\infty}^{\infty} k_2\left({}^{y}\!/\!{}_{x} \right) dy = 1$

11.Penentuan kebebasan stokastik dari dua peubah acak diskrit *X* dan *Y* ditentukan dengan rumus:

$$p(x,y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$$

12.Penentuan kebebasan stokastik dari dua peubah acak kontinu *X* dan *Y* ditentukan dengan rumus:

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$$

.

DAFTAR PUSTAKA

Herrhyanto, Nar.&Tuti Gantini. *Pengantar Statistika Matematis*, Bandung: Yrama Widya, 2012.

Larson,H.J. 1974. *Introduction to Probability and Statistical Inference*. Second Edition. Jhon Wiley &Sons, Inc., Canada.

Meyer, Paul L. 1970. *Introductory Probability and Statistical Applications*. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Canada.

Lipschutz, Seymour. 1981. *Theory and Problems of Probability*. S1 (Metric) Edition. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Co., Singapore.

Hogg, R.V. &E.A. Tanis. 1977. *Probability & Statistical Inference*. Collier Macmillan International Editions. Macmillan PublishingCo., Inc., New York.

Freund, J.E. & R.E. Walpole. 1987. *Mathematical Statistics.* Fourth Edition. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New York.

Milton, J.S. & J.C. Arnold. 1990. *Introduction to Probability and Statistics*: ence. Second Edition. McGraw-Hill Publishing Company., New York.

Spiengel, M.R. 1982. *Probability and Statistics*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill International Book Company., Singapore.

Gupta, S.C. &V.K. Kapoor. 1982. *Fundamentals of Mathematical and Statistics In Engineering and Management Science*. Third Edition. Jhon Wiley & Sons, Inc., Canada.

Mosteller, F; Rourke, R. E. K. & George B. Thomas, Jr. 1988. *Peluang dengan Statistika Terapannya*. Terbitan ke-2. Terjemahan. Penerbit ITB, Bandung.

Hines, W. W. & Douglas C. Montgomery. 1990. *Probability and Statistics In Engineering and Management Science*. Third Edition. Jhon Wiley & Sons, Inc., Canada.