Penelitian

PENYELESAIAN INVERS MATRIKS DENGAN METODE PERKALIAN INVERS MATRIKS ELEMENTER

Oleh:

HENDRA CIPTA, S.Pd.I, M.Si
NIDN. 2002078902

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUMATERA UTARA
MEDAN
2017

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Dengan segala kerendahan hati, penulis sampaikan puji syukur kepada Allah SWT berkat Rahmat dan Hidayah-Nya memberi kesehatan, pengetahuan dan kesempatan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penelitian ini yang berjudul **"Penyelesaian Invers Matriks Dengan Metode Perkalian Invers Matriks Elementer"**.

Dalam menyelesaikan penelitian ini banyak bantuan bimbingan dari berbagai pihak, baik berupa materil, spiritual, maupun informasi. Sehingga penelitian ini dapat diselesaikan. Maka selayaknya penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. H. M. Jamil, MA selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan.
2. Ibu Dr. Rina Filia Sari, M.Si selaku Wakil Dekan I Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan.
3. Ibu Dr. Sajaratud Dur, M.T selaku Ketua Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan.
4. Ibu Dr. Rina Filia Sari, M.Si selaku Konsultan pada penelitian ini.
5. Bapak/ibu rekan-rekan dosen tetap Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan.

Menyadari kekurangan dan keterbatasan pada penelitian ini, maka penulis tetap mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak agar penelitian ini bisa dikembangkan dikemudian hari. Akhir kata semoga penelitian ini bermanfaat bagi kita semua dan Semoga Allah SWT berkenan memberikan berkahnya sehingga semua harapan dan cita-cita penulis dapat terkabulkan. Amin

Medan, April 2017

Hendra

Hendra Cipta, S.Pd.I, M.Si

REKOMENDASI

Setelah membaca dan menelaah hasil penelitian yang berjudul **"Penyelesaian Invers Matriks Dengan Metode Perkalian Invers Matriks Elementer"**. Yang dilakukan oleh Hendra Cipta, S.Pd.I, M.Si maka saya berkesimpulan bahwa hasil penelitian ini dapat diterima sebagai karya tulis berupa hasil penelitian. Demikianlah rekomendasi diberikan kepada yang bersangkutan untuk dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Medan, April 2017
Konsultan

Dr. Rina Filia Sari, M.Si
NIP. 197703012005012002

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Diberikan sebuah matriks A adalah matriks berordo $n \times n$. Perkalian matriks invers elementer (E_i) dapat menghasilkan invers matriks A yakni $(E_n E_{n-1} E_{n-2} \ldots E_3 E_2 E_1) A = I$ dimana I merupakan matriks identitas dan $A^{-1} = E_n E_{n-1} E_{n-2} \ldots E_3 E_2 E_1$ merupakan invers matriks A.

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah mencari penyelesaian matriks berordo $n \times n$ dengan menggunakan metode perkalian invers matriks elementer dengan langkah-langkah yang diberikan dalam penyelesaian metode nya dengan menyelesaikan orde matriks berukuran terkecil dahulu hingga sampai matriks berukuran $n \times n$.

Kata Kunci : *Matriks, Invers Matriks, Metode Perkalian Invers Matriks Elementer*

ABSTRACT

Given a matrics A have $n \times n$ ordo matrics. The multiplication of the elementary inverse matric (E_i) can be obtained inverse of matrics A is $(E_n E_{n-1} E_{n-2} \ldots E_3 E_2 E_1) A = I$ where I is the identity matric and $A^{-1} = E_n E_{n-1} E_{n-2} \ldots E_3 E_2 E_1$ is the inverse of the matrics A.

The problem discussed in this research is to find the solving ordo matric $n \times n$ using multiplication method of elementary inverse matric with steps given in completion of its method by solving the smallest ordo matric first until ordo matrics $n \times n$.

***Keyword:** Matrics, Inverse, Multiplication Method Of Elementary Inverse Matric*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia tidak pernah lepas dari berbagai macam masalah. Permasalahan-permasalahan tersebut dapat menyangkut dari berbagai aspek yang penyelesaiannya diperlukan suatu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu yakni ilmu matematika.

Matematika pada dasarnya berkaiatan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang mengatakan matematika itu adalah ilmu hitung atau ilmu *al hisab*[1].

Banyak ayat Al Qur'an yang berisi tentang perhitungan, sebagaimana yang terdapat dalam QS. Al An'am ayat 160:[2]

مَن جَآءَ بِٱلْحَسَنَةِ فَلَهُۥ عَشْرُ أَمْثَالِهَا ۖ وَمَن جَآءَ بِٱلسَّيِّئَةِ فَلَا يُجْزَىٰٓ إِلَّا مِثْلَهَا

وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ ﴿١٦٠﴾

Artinya: Barangsiapa membawa amal yang baik, Maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya; dan Barangsiapa yang membawa perbuatan jahat Maka Dia tidak diberi pembalasan

[1] Abdussyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

[2] Abuddin Nata, 2002. *Tafsir Ayat-ayat Pendidikan "Tafsir Al-Ayat Al-Tarbawiy"*.Jakarta: Raja Grafindo Persada.

melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka sedikitpun tidak dianiaya (dirugikan).

Pada ayat diatas, secara tak langsung terdapat rumus matematika untuk menentukan balasan perbuatan kebaikan dan kejahatan. Amal kebaikan mendapat pahala sepuluh kali amal kebaikan tersebut, sedangkan amala kejahatan mendapat balasan satu kali amal kejahatan tersebut. Secara matematika diperoleh rumus $y = 10x$ untuk amal kebaikan serta rumus $y = x$ untuk amal kejahatan. Variabel x menyatakan nilai amal dan variabel y menyatakan balasan yang diperoleh.

Banyak orang yang memandang matematika sebagai bidang studi yang paling sulit. Meskipun demikian, semua orang harus mempelajarinya karena merupakan sarana untuk memecahkan masalah kehidupan sehari-hari. Belajar matematika merupakan suatu bentuk pembelajaran yang menggunakan bahasa simbol dan membutuhkan penalaran serta pemikiran yang logis dalam pembuktiannya.

Johnson dan Mylebust mengatakan, "matematika adalah bahasa simbol yang fungsi praktisnya untuk mengekspresikan hubungan-hubungan kuantitatif dan keruangan sedangkan fungsi teoritisnya adalah untuk memudahkan berfikir". Sedangkan Kline mangatakan bahwa "matematika merupakan bahasa simbol dan ciri utamanya adalah penggunaan cara bernalar deduktif, tetapi juga tidak melupakan cara bernalar induktif".[3]

Selain itu, pengertian matematika juga dapat dikenali dengan beberapa ciri-ciri antara lain:[4]

1. Memiliki objek abstrak seperti fakta, konsep, operasi, dan prinsip
2. Bertumpu pada kesepakatan
3. Berpola deduktif
4. Memiliki simbol yang kosong dari arti
5. Memperhatikan semesta pembicaraan
6. Konsisten dalam sistemnya.

Alam semesta memuat bentu-bentuk dan konsep matematika meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi[5].

Matriks merupakan salah satu materi cabang ilmu aljabar linear, yang merupakan salah satu bahasan penting dalam matematika. Dengan perkembangan ilmu pengetahuan, implementasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-

---

[3] Mulyono Abdurrahman. 2003. *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar* .Jakarta: Rineka Cipta.
[4] Budi Manfaat 2010., *Membumikan Matematika Dari Kampus Ke Kampung.* Jakarta: Buku Kita.
[5] Abdussyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

hari baik dalam bidang matematika sendiri maupun ilmu yang lainnya. Disadari atau tidak, penggunaan implementasi tersebut banyak dimanfaatkan dalam menyelesaikan masalah-masalah yang berhubungan dengan kehidupan sehari-hari. Misalnya pada aplikasi perbankan, asuransi yang senantiasa berhubungan dengan angka-angka, dalam dunia olahraga penentuan klasemen suatu pertandingan, dalam bidang ekonomi digunakan untuk menganalisa input dan output seluruh sektor ekonomi. Sedangkan dalam matematika, matriks dapat digunakan untuk menangani model-model linear seperti mencari sistem persamaan linear.[6]

Disisi lain, banyak permasalahan yang sering muncul berkaitan dengan masalah matriks itu sendiri, diantaranya adalah bagaimana cara menyelesaikan invers suatu matriks. Sedangkan masalah yang sering muncul dalam mencari invers matriks biasanya berhubungan dengan ukuran matriks yang dicari inversnya. Semakin besar ukuran matriksnya (berikuran $n \times n$) maka semakin rumit perhitungannya, sehingga dibutuhkan metode yang tepat dalam penyelesaiannya. Cara yang bisa digunakan dalam mencari invers matriks adalah dengan menggunakan metode substitusi, metode partisi matriks, metode matriks *adjoint*, dan metode perkalian invers matriks elementer dan metode-metode lainnya.[7]

---

[6] Johannes, Supranto. 1997. *Pengantar Matriks*. Jakarta: Rineka Cipta.
[7] Dr. Ruminta. 2014. *Matriks Persamaan Linear Dan Pemrograman Linear*. Bandung: Rekayasa Sains.

Sesuai dengan latar belakang diatas, disini penulis akan melakukan penelitian yang berjudul **"Penyelesaian Invers Matriks Dengan Metode Perkalian Invers Matriks Elementer".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka peneliti merumuskan masalah tentang bagaimana cara menyelesaikan invers matriks berordo $n \times n$ dengan metode perkalian invers matriks elementer.

1.3 Batasan Masalah

Agar pembahasan ini nantinya tidak meluas, maka peneliti perlu memberikan batasan masalah sebagai berikut:

a. Elemen-elemen matriks yang digunakan pada matriks asal adalah bilangan rasional.

b. Matriks yang digunakan adalah matriks yang berordo $n \times n$.

1.4 Tujuan Dan Manfaat Penelitian

1.4.1 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk menyelesaikan invers matriks berordo $n \times n$ dengan metode perkalian invers matriks elementer.

1.4.2 Manfaat Penelitian

a. Dapat menerapkan ilmu dan pengetahuan yang diperoleh di bangku kuliah dilapangan.

b. Dapat dijadikan sebagai sumber ilmu pengetahuan khususnya dalam menyelesaikan invers sebuah matriks.

c. Untuk memperdalam pemahaman mengenai invers matriks yang dapat diselesaikan dengan berbagai metode yang ada, tetapi peneliti lebih mengkhususkan penyelesaian invers matriks dengan metode perkalian invers matriks elementer.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan laporan penelitian ini terdiri dari 5 bab yaitu :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian serta sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN TEORI

Bab ini berisi kajian teori yang mendasari dan berhubungan dengan pemecahan masalah. Teori-teori tersebut digunakan untuk memecahkan masalah yang diangkat dalam penelitian ini.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini mengulas metode yang digunakan dalam penelitian yang berisi langkah-langkah yang dilakukan untuk memecahkan masalah yaitu studi pustaka, pengumpulan data, analisis data dan penarikan kesimpulan.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi penyelesaian dari permasalahan yang diungkapkan yakni bagaimana cara menyelesaikan invers matriks dengan metode perkalian invers matriks elementer.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan secara singkat terhadap hasil penelitian. Di bab ini juga berisi saran yang berkaitan dengan simpulan.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Matriks

2.1.1 Pengertian Matriks

Matriks merupakan susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri atau elemen dalam matriks[8]. Matriks yang memiliki m baris dan n kolom dinyatakan dengan:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m4} \end{bmatrix}$$

Matriks titik mempunyai nilai tetai ukuran. Ukuran dari sebuah matriks dikatakan ordo yang ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom. Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom, maka matriks A berordo $m \times n$.

Suatu matriks yang mempunyai m baris dan n kolom dapat dinyatakan sebagai $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

dengan: $i = 1,2,3,\dots,m$ menunjukkan baris dan

$j = 1,2,3,\dots,n$ menunjukkan kolom

---

[8] Howard Anton. 2004. *Dasar-dasar Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

Misalnya diberikan sebuah matriks berordo:

$$A_{3\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Jenis-jenis Matriks

Menurut ordonya terdapat berbagai jenis matriks:[9]

1. Matriks Bujur Sangkar

Merupakan matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom yang dinayatakan dengan $A_{m\times n}$ dimana $m = n$ sehingga dapat ditulis dengan $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$. Matriks berordo $n\times n$ disebut juga matriks bujur sangkar berordo *n*.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n4} \end{bmatrix}$$

[9] Dr. Ruminta. 2014. *Matriks Persamaan Linear Dan Pemrograman Linear*. Bandung: Rekayasa Sains

Elemen-elemen matriks bujur sangkar adalah:

$a_{11}, a_{22}, a_{32} \ldots, a_{mn}$ disebut elemen diagonal utama, sedangkan $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-1)} \ldots, a_{n1}$ disebut elemen diagonal kedua.

Contoh: $B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

Pada suatu matriks persegi ada yang dinamakan sebagai diagonal utama dan diagonal sekunder. Komponen-komponen yang terletak pada diagonal utama pada matriks tersebut adalah 2 dan 7 yang berasal dari kiri atas ke kanan bawah. Sebaliknya, komponen-komponen yang terletak pada diagonal sekunder berasal dari kiri bawah ke kanan atas.

2. Matriks Baris

Merupakan matriks yang berordo $1 \times n$ atau hanya memiliki satu baris. Matriks ini disebut juga vektor baris. Secara umum dapat ditulis dengan a_{ij} dengan $i = 1, j = 1, 2, 3, \ldots n$.

Contoh: $A_{1\times4} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Matriks Kolom

Merupakan matriks yang hanya memiliki satu kolom atau matriks berordo $m \times 1$. Matriks ini disebut juga vektor kolom. Secara umum dapat ditulis dengan a_{ij} dengan $i = 1, j = 1,2,3,...n$.

Contoh: $A_{3\times1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Matriks Tegak

Yaitu matriks yang berordo *m x n* dengan *m > n.*

Contoh: Q= $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, Q berordo 3x2 sehingga matriks Q tampak tegak.

5. Matriks Datar

Yaitu matriks yang berordo *m x n* dengan *m < n.*

ontoh: $A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ berordo 2x3 sehingga matriks A tampak datar.

Berdasarkan elemen-elemen penyusunnya terdapat jenis matriks antara lain:[10]

a. Matriks Nol

Yaitu matriks yang semua elemen penyusunnya adalah nol dan dinotasikan sebagai O.

---

[10] Wikaria Gazali. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Contoh: $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. Matriks Diagonal

merupakan matriks bujur sangkar dengansemua elemen-elemen yang bukan elemen diagonal utama adalah nol. Dengan kata lain suatu matriks A berorde n x n disebut matriks diagonal jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Adapun elemen-elemen diagonalnya boleh nol dan boleh tidak nol.

Contoh: $F_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. Matriks Skalar

Merupakan matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya sama dengan k dimana $k \neq 0$. Bentuk umum matriks skalar adalah

$a_{ij} = k$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Contoh: $A_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d. Matriks Simetri

Yaitu matriks persegi yang setiap elemennya selain elemen diagonal adalah simetri terhadap diagonal utama, atau matriks dimana susunan elemen-elemen antara matriks dengan transposenya sama. $C = C^T$; maka C adalah matriks simetris

Contoh: $C_{3x3}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

e. Matriks Simetri Miring

Yaitu Matriks simetri yang elemen-elemennya selain elemen diagonal saling berlawanan.

Contoh: $W_{3x3}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ -3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

f. Matriks Identitas (satuan)

Yaitu matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal utamanya adalah satu dan elemen yang lain adalah nol dan dinotasikan sebagai I.

Contoh: $I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g. Matriks Segitiga Atas

Yaitu dikatakan segitiga atas jika $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$ dengan kata lain matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya adalah nol.

Bentuk umumnya $a_{ij} = 0, \forall i > j$

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh: $K_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

h. Matriks Segitiga Bawah

Yaitu dikatakan segitiga bawah jika $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$ dengan kata lain matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya adalah nol.

Bentuk umumnya $a_{ij} = 0, \forall i < j$

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh: $V_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

i. Matriks Transpose

Merupakan matriks yang diperoleh dari memindahkan elemen-elemen baris menjadi elemen pada kolom atau sebaliknya. Transpose suatu matriks dilambangkan dengan $\dots^T$, misal transpose matriks B dilambangkan dengan B^T.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 10 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa ordo dari B^T adalah 3 *x* 2. Sehingga pada matriks transpose baris menjadi kolom dan sebaliknya, kolom menjadi baris.

2.2 Operasi Matriks

Adapun operasi-operasi dasar matriks adalah:[11]

1. Operasi Penjumlahan Matriks

   Jika $A = a_{ij}$ dan $B = b_{ij}$ merupakan matriks yang berukuran sama $m\ x\ n$. Jumlah matriks A dan B merupakan matriks berukuran $m\ x\ n$ yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen pada B dengan elemen-elemen pada A. dengan kata lain, suatu matriks dapat dijumlahkan jika mempunyai ukuran yang sama. Secara umum dapat ditulis dengan:

$$A + B = a_{ij} + b_{ij}$$

2. Operasi Pengurangan Matriks

   Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ordo nya sama, maka selisih A – B merupakan matriks yang diperoleh dengan mengurangkan elemen-elemen A dengan elemen-elemen B yang berpadanan. Matriks yang ukuannya berbeda tidak dapat dikurangkan. Secara umum dapat ditulis dengan:

$$A - B = a_{ij} - b_{ij}$$

3. Operasi Perkalian Matriks

   Jika A merupakan matriks $m\ x\ r$ dan B merupakan matriks $r\ x\ n$ maka hasil kali matriks AB adalah matriks $m\ x\ n$ yang elemen-elemennya ditentukan sebagai berikut.

[11] Howard Anton. 2004. *Dasar-dasar Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

Untuk mencari elemen pada baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B, kalikan elemen-elemen yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{il} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ml} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{rl} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{ml} & \cdots & c_{mr} \end{bmatrix}$$

dengan

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \end{bmatrix}$ adalah matriks berordo 1 x r dengan matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{bmatrix}$ yang berordo r x 1, dimaksudkan sebagai matriks $C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1r}b_{r1} \end{bmatrix}$ berordo 1 x 1 maka:

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1r}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1r}b_{r1}] = \left[\sum_{k=1}^{r} a_{1k}b_{k1}\right]$$

Perhatikan bahwa operasinya adalah baris denga kolom, dimana tiap elemen baris dikalikan dengan elemen kolom padanannya dan kemudian hasil kali itu dijumlahkan.

2.3 Determinan Matriks

2.3.1 Definisi Determinan Matriks

Determinan matriks merupakan bilangan tunggal yang diperoleh dari semua permutasi n^2 elemen matriks bujur sangkar. Jika subskrip permutasi elemen matriks adalah genap (inversi genap) diberi tanda positif sebaliknya jika subskrip permutasi elemen matriks adalah ganjil (inversi ganjil) diberi tanda negative. Inversi terjadi jika bilangan yang lebih besar mendahului bilangan-bilangan yang lebih kecil dalam urutan subskrip permutasi elemen matriks.[12]

Determinan matriks hanya didefinisikan pada matriks bujur sangkar (matriks kuadrat). Notasi determinan matriks A adalah:

$$\det(A) = |A| \text{ atau } \det A = |A|$$

[12] Dr. Ruminta. 2014. *Matriks Persamaan Linear Dan Pemrograman Linear.* Bandung: Rekayasa Sains.

Jika diketahui sebuah matriks A:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka determinan dari matriks A adalah:

$$\det A=|A|=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Atau

$$\det(A)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Determinan Matriks Dengan Metode Sarrus

Perhitungan determinan matriks dengan metode Sarrus hanya dapat diterapkan pada matriks yang berukuran 2 x 2 dan 3 x 3. Determinan matriks yang ukurannya lebih besar dari 3 x 3 tidak bisa dihitung dengan menggunakan metode Sarrus.

Metode Sarrus disebut juga metode *Spaghetti* yakni menggunakan perkalian elemen matriks secara diagonal. Perkalian elemen matriks pada diagonal turun (dari kiri atas kekanan bawah) diberi tanda positif sedangkan perkalian elemen matriks pada diagonal naik (dari kiri bawah kekanan atas) diberi tanda negatif[13].

a. Determinan matriks berordo 2 x 2

Diberikan sebuah matriks $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka determinan matriks nya adalah

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

b. Determinan matriks berordo 3 x 3

Diberikan sebuah matriks $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka determinan matriks nya adalah:

[13] Abdul Aziz Saefudin. 2014. *Aljabar Matriks*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

$$\det(A)=|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$\det(A)=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

2.3.3 Determinan Matriks Dengan Metode CHIO

Perhitungan determinan matriks dengan metode CHIO dapat diterapkan pada semua matriks bujur sangkar asalkan elemen pada $a_{11} \neq 0$. Metode CHIO menghitung matriks determinan dengan cara mendekomposisi determinan yang akan dicari menjadi sub-sub determinan berderajat dua (2×2) menggunakan elemen matriks baris ke-1 dan kolom ke-1 sebagai titik tolaknya. Dekomposisi tersebut dilakukan dengan menggunakan matriks berukuran 2×2 sebagai berikut:

$$\text{Diberikan} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{bmatrix} \text{untuk } n=1,2,3,....$$

Jika A merupakan suatu matriks bujur sangkar beordo $n\times n$ maka:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A=|A|=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{2i} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{31} & a_{3i} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{i1} & a_{i2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{i1} & a_{i3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{in} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{n1} & a_{ni} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\det A=|A|=\frac{1}{(a_{11})^{n-2}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Setiap dekomposisi determinan awal akan turun satu derajat, dekomposisi determinan dapat dihentikan sampai determinan tersebut menjadi berderajat dua.

$$\det A=|A|=\frac{1}{(a_{11})^{n-2}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1,n-1} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

2.3.4 Determinan Minor-Kofaktor

Perhitungan determinan matriks dengan metode minor dan kofaktor dapat diterapkan pada semua ordo matriks bujur sangkar. Determinan matriks dapat diitung dari minor dan kofaktor pada salah satu baris atau kolom matriks.

1. Minor Matriks

Jika a_{ij} adalah elemen determinan matriks A yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j maka Minor dari a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} merupakan determinan dari matriks A setelah baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks tersebut dihilangkan. Jika matriks A merupakan suatu matriks bujur sangkar berukuran n, maka diperoleh sejumlah n^2 minor.

Suatu matriks A berukuran 3×3 mempunyai 9 minor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

dimana i = indeks baris dan j = indeks kolom.

Minor (M) dari A adalah $M_{ij} = |(a_{ij})|$, dimana baris i dan kolom j dihilangkan n.

$$M_{11} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$\vdots$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2. Kofaktor Matriks

Jika matriks A adalah determinan, M_{ij} adalah minor elemen A pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Kofaktor a_{ij} yang dinyatakan oleh K_{ij} adalah minor (M) yang telah diberi tanda atau dikalikan dengan $(-1)^{i+j}$.

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$K_{ij} = \begin{cases} M_{ij} \text{ jika } i+j \text{ adalah genap} \\ -M_{ij} \text{ jika } i+j \text{ adalah ganjil} \end{cases}$$

$$\text{Jika, } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka kofaktor dari A adalah:

$$K_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$K_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$K_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Maka determinan matriks A adalah:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}.(-1)^{k+j} M_{kj}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}.M_{kj},\ j = indeks\ kolom$$

atau

$$\det(A) = a_{k1}K_{k1} + a_{k2}K_{k2} + a_{k3}K_{k3} + \ldots + a_{kj}K_{kj}$$

$k =$ salah satu baris matriks

2.3.5 Determinan Matriks Segitiga Bawah

Eliminasi Gauss merubah suatu matriks menjadi matriks segitiga bawah melalui operasi baris elementer (OBE)[14].

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = L$$

Determinan matriks A diberikan:

$$\det A = l_{11} \times l_{22} \times l_{33} \times \ldots \times l_{ii}, i = indeks\ baris$$
$$\det A = l_{11} \times l_{22} \times l_{33} \times \ldots \times l_{nn}, n = indeks\ matriks$$

2.3.5 Determinan Matriks Segitiga Atas

Eliminasi Gauss merubah suatu matriks menjadi matriks segitiga bawah melalui operasi baris elementer (OBE)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} = U$$

Determinan matriks A diberikan:

$$\det A = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} \times \ldots \times u_{ii}, i = indeks\ baris$$
$$\det A = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} \times \ldots \times u_{nn}, n = indeks\ matriks$$

---

[14] Dr. Ruminta. 2014. *Matriks Persamaan Linear Dan Pemrograman Linear.* Bandung: Rekayasa Sains.

2.4 Invers Matriks

2.4.1 Definisi Invers Matriks

Jika A merupakan matriks berordo $n \times n$ dan jika ada matriks B berordo $n \times n$ sedemikian hingga:

$$AB = BA = I$$

dimana I merupakan identitas ordo matriks $n \times n$, maka matriks A disebut *non singular* dan matriks A merupakan invers dari matriks B atau matriks B merupakan invers dari matriks A.

jka matriks A tidak mempunyai invers, maka matriks A disebut matriks *singular.*

Notasi matriks invers dari A ditulis A^{-1} dimana:

$$AB = BA = I$$
$$B = A^{-1}$$
$$A = B^{-1} \text{ dan}$$
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Atau

$$A^{-1}A = I$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2.4.2 Invers Matriks Dengan Metode Substitusi

Invers matriks diperoleh dari penyelesaian persamaan matriks $AA^{-1} = I$ yang kemudian diturunkan menjadi beberapa persamaan linear simultan.

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks tersebut diperoleh sebanyak n^2 persamaan linear simultan berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} + \dots + a_{1n}\alpha_{n1} &= 1 \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} + \dots + a_{2n}\alpha_{n1} &= 0 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \dots + \quad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{n1}\alpha_{11} + a_{n2}\alpha_{21} + \dots + a_{nn}\alpha_{n1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} + \dots + a_{1n}\alpha_{n2} &= 0 \\ a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + \dots + a_{2n}\alpha_{n2} &= 1 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \dots + \quad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{n1}\alpha_{12} + a_{n2}\alpha_{22} + \dots + a_{nn}\alpha_{n2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_{1n} + a_{12}\alpha_{2n} + \dots + a_{1n}\alpha_{nn} &= 0 \\ a_{21}\alpha_{1n} + a_{22}\alpha_{2n} + \dots + a_{2n}\alpha_{nn} &= 0 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \dots + \quad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{n1}\alpha_{1n} + a_{n2}\alpha_{2n} + \dots + a_{nn}\alpha_{nn} &= 1 \end{aligned}$$

Sejumlah n^2 persamaan linear simultan tersebut dapat diselesaikan secara substitusi sehingga diperoleh elemen matriks invers dari A.

Invers dari matriks A adalah:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

2.4.3 Invers Matriks Dengan Metode Matriks *Adjoint*

Jika A merupakan matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$. Maka kofaktor dari matriks A adalah:[15]

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

dimana

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$K_{ij} = \begin{cases} M_{ij} \text{ jika } i+j \text{ adalah genap} \\ -M_{ij} \text{ jika } i+j \text{ adalah ganjil} \end{cases}$$

Transpose dari matriks kofaktor (K) disebut matriks *Adjoint A* yang dinyatakan dengan *Adj A*.

[15] Abdul Aziz Saefudin. 2014. *Aljabar Matriks.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

$$Adj\ A = K^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \dots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks invers dapat ditentukan dari matriks adjoint (Adj). Jika A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ dan $\det A \neq 0$, maka:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right) Adj A = \left(\frac{1}{\det A}\right) \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \cdots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan $\det A = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13}$

Jadi invers matriks A dinyatakan:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}}{\det A} & \frac{K_{21}}{\det A} & \cdots & \frac{K_{n1}}{\det A} \\ \frac{K_{12}}{\det A} & \frac{K_{22}}{\det A} & \cdots & \frac{K_{2n}}{\det A} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{K_{1n}}{\det A} & \frac{K_{2n}}{\det A} & \cdots & \frac{K_{nn}}{\det A} \end{bmatrix}$$

2.4.4 Invers Matriks Dengan Metode Partisi Matriks

Mencari invers matriks dengan cara mempartisi matriks yang akan dicari inversnya menjadi beberapa submatriks.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{14} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{12} \end{array}\right]$$

dengan A_{11}, A_{12}, A_{21}, dan A_{22} merupakan submatriks A.

Dimana

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Invers dari matriks partisi A adalah B atau $B = A^{-1}$

$$\underset{m\times k}{B} = \begin{array}{c} p \\ m-p \end{array} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \qquad \underset{n\times m}{A} = \begin{array}{c} q \\ n-q \end{array} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

Perkalian matriks tersebut menghasilkan persamaan submatriks simultas berikut:

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I \qquad (1)$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \qquad (2)$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0 \qquad (3)$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I \qquad (4)$$

Penyelesaian ke empat persamaan submatriks simultan tersebut adalah sebagai berikut:

Jika persamaan (1) dibagi B_{11} maka $A_{11} + A_{12}B_{21}B_{11}^{-1} = B_{11}^{-1}$ (5)

Jika persamaan (3) dibagi $A_{22}B_{11}$ maka

$$A_{22}^{-1}A_{21} + B_{21}B_{11}^{-1} = 0 \text{ atau } B_{21}B_{11}^{-1} = -A_{22}^{-1}A_{21} \qquad (6)$$

Hasil substitusi persamaan (5) dan (6) menjadi

$$A_{11} - A_{12}A_{12}^{-1}A_{21} = B_{11}^{-1} \qquad (7)$$

Maka $B_{11} = \left[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}\right]^{-1}$ dan $B_{22} = \left[A_{22} - A_{21}A_{22}^{-1}A_{21}\right]^{-1}$ atau

$B_{22} = \left[A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{12}\right]^{-1}$

Sehingga $B_{12} = -A_{22}^{-1}A_{12}B_{22}$ atau $B_{12} = -B_{11}^{-1}A_{12}B_{22}^{-1}$ dan

$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$

Jadi,

$$A^{-1} = B = \begin{array}{c} q \\ n-q \end{array}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ p & n-p \end{bmatrix}$$

dimana,

$$B_{11} = \left[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right]^{-1},\ B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{12},\quad B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$$

Sehingga invers matriks A adalah:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} & \left(-B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}\right) \\ \left(A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{12}\right) & \left(-A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}\right) \end{bmatrix}$$

2.4.5 Invers Matriks Dengan Metode Perkalian Invers Matriks Elementer

Jika matriks A adalah matriks berordo $n \times n$. Perkalian matriks invers elementer (E_i) dapat menghasilkan invers matriks A.

$$\left(E_n E_{n-1} E_{n-2} \ldots E_3 E_2 E_1\right) A = I$$

dimana,

I = matriks identitas

$A^{-1} = E_n E_{n-1} E_{n-2} ... E_3 E_2 E_1$ (Invers matriks A)

E_i = invers matriks elementer

Matriks E_i diperoleh dari transformasi matriks identitas (I) yaitu matriks identitas dimana pada kolom ke-i diganti dengan normalitas vektor kolom atau matriks kolom $(N_{k.i})$.

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & N_{k.1} & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & N_{k.1} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & N_{k.1} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & N_{k.1} & ... & 1 \end{bmatrix}$$

E_i merupakan matriks identitas (I) dimana kolom ke-i diganti oleh $N_{k.i}$. Sebagai contoh untuk matriks bujur sangkar berukuran 4×4 diperoleh E_1 hingga E_4 sebagai berikut.

$$E_1 = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & 0 \\ N_{21} & 1 & 0 & 0 \\ N_{31} & 0 & 1 & 0 \\ N_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & N_{11} & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 \\ 0 & N_{32} & 1 & 0 \\ 0 & N_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & N_{13} & 0 \\ 0 & 1 & N_{23} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} & 0 \\ 0 & 0 & N_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & N_{14} \\ 0 & 1 & 0 & N_{24} \\ 0 & 0 & 1 & N_{34} \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} \end{bmatrix}$$

Normalitas vektor kolom atau matriks kolom dari matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ untuk kolom ke-i diganti oleh $N_{k.i}$ adalah sebagai berikut:

$$N_{k.i} = \begin{bmatrix} \dfrac{-a_{1.i}}{a_{1.i}} \\ \vdots \\ \dfrac{-a_{(i-1).i}}{a_{i.i}} \\ \dfrac{1}{a_{i.i}} \\ \dfrac{-a_{(1+i).i}}{a_{i.i}} \\ \vdots \\ \dfrac{-a_{n.i}}{a_{i.i}} \end{bmatrix}$$

Nilai normalitas matriks kolom $N_{k.i}$ untuk matriks bujur sangkar berukuran 4×4 sebagai berikut:

$$N_{k.1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_{1.1}}\\ \frac{-a_{2.1}}{a_{1.1}}\\ \frac{-a_{3.1}}{a_{1.1}}\\ \frac{-a_{4.1}}{a_{1.1}}\end{bmatrix},\ N_{k.2}=\begin{bmatrix}\frac{-a_{1.2}}{a_{2.2}}\\ \frac{1}{a_{2.2}}\\ \frac{-a_{3.2}}{a_{2.2}}\\ \frac{-a_{4.2}}{a_{2.2}}\end{bmatrix},\ N_{k.3}=\begin{bmatrix}\frac{-a_{1.3}}{a_{3.3}}\\ \frac{-a_{2.3}}{a_{3.3}}\\ \frac{1}{a_{3.3}}\\ \frac{-a_{4.3}}{a_{3.3}}\end{bmatrix},\ N_{k.4}=\begin{bmatrix}\frac{-a_{1.4}}{a_{4.4}}\\ \frac{-a_{2.4}}{a_{4.4}}\\ \frac{-a_{3.4}}{a_{4.4}}\\ \frac{1}{a_{4.4}}\end{bmatrix}$$

Nilai $a_{k.i}$ diperoleh dari:

$$a_{k.i}=\left(F_{i-1}\right)^{-1}A_i=\left(E_{i-1}E_{i-2}\dots E_2E_1IA_i\right)\text{ untuk } i\geq 1$$

$$a_{k.i}=\left[a_{1.i},a_{2.i},\dots,a_{i.i},\dots,a_{(n-1).i},a_{n.i}\right]$$

Untuk

$$i=1$$

$$a_{k.i}=A_i\text{ atau}$$

$$a_{k.i}=\left(a_{11},a_{21},a_{31},\dots,a_{n1}\right)$$

$a_{k.i}$ merupakan elemen pada kolom 1, dimana A_i adalah elemen kolom ke-i pada matriks A. nilai A_i merupakan elemen kolom ke-i pada matriks A. Misalnya A_i untuk matriks ukuran 4×4.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\ a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\a_{42}\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\\a_{43}\end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix}a_{14}\\a_{24}\\a_{34}\\a_{44}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & A_3 & A_4\end{bmatrix}$$

Dalam menentukan matriks invers menggunakan metode perkalian invers elementer biasanya menggunakan matriks perantara yang dinyatakan oleh matriks F_1. Matriks F_i merupakan matriks identitas (I) dimana elemen kolom ke-i diganti elemen kolom ke-i dari matriks bujur sangkar A atau A_i. Misalnya F_i untuk matriks berukuran 4×4:

$$F_1=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0&0\\a_{21}&1&0&0\\a_{31}&0&1&0\\a_{41}&0&0&1\end{bmatrix},\ F_2=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&0&0\\a_{21}&a_{22}&0&0\\a_{31}&a_{32}&1&0\\a_{41}&a_{42}&0&1\end{bmatrix}$$

$$F_3=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&0\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&1\end{bmatrix},\ F_4=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini bersifat pengembangan keilmuan dengan hasil kajiannya berupa konstruksi teori yang memiliki nilai penerapan yang tinggi dalam mempercepat pengembangan ilmu matematika murni.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunakan metode kajian pustaka (literatur). Pengumpulan data dan informasi serta materi yang bersangkutan dengan penelitian ini terdapat di ruang perpustakaan seperti buku, jurnal, dokumentasi dan media internet. Metode yang digunakan dalam penyelesaian permasalahan peneltian ini mengacu pada langkah-langkah penelitian teoritik yang meliputi subjek, objek penelitian, tahap penelitian, dan tahap pengembangan.

3.1 Subjek Dan Objek Penelitian

Subjek penelitian ini adalah sebuah matriks A berordo $n \times n$. Sedangkan objek penelitiannya adalah mencari invers dari matriks A berordo $n \times n$ dengan menggunakan metode perkalian matriks invers elementer.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menyelesaikan matriks invers dari matriks bujur sangkar A berordo $n \times n$ menggunakan metode perkalian matriks invers elementer adalah sebagai berikut:

1. Tentukan matriks F_1 yakni mengganti kolom pertama matriks identitas (I_n) dengan A_1. invers elementer dari F_1 adalah $(F_1)^{-1}$.

$$(F_1)^{-1} = E_1 I = E_1$$

2. Tentukan matriks F_2 yakni mengganti kolom kedua matriks F_1 dengan A_1 Invers dari F_2 adalah $(F_2)^{-1}$.

$$(F_2)^{-1} = E_2 (F_1)^{-1} = E_2 E_1$$

3. Tentukan matriks F_3 yakni mengganti kolom ketiga matriks F_2 dengan A_3. Invers dari F_3 adalah $(F_3)^{-1}$.

$$(F_3)^{-1} = E_3 (F_2)^{-1} = E_3 E_2 E_1$$

4. Prosedur ini dilakukan hingga semua vektor kolom A dimasukkan ke matriks $F_1 = A$ atau $i = n$, maka akan diperoleh invers A sebagai berikut:

$$A^{-1} = (F_i)^{-1} = E_i \ldots E_3 E_2 E_1$$

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Metode Perkalian Invers Matriks Elementer

4.1.1 Penyelesaian A^{-1} Dengan Menggunakan Matriks Elementer

Matriks bujur sangkar, $A = [a_{ij}]$ dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$, disebut mempunyai *invers* jika terdapat matriks A^{-1} sedemikian rupa sehingga

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

dimana I matriks satuan.

Jika A mempunyai invers maka A disebut *matriks tak singular*. Dan jika A tidak mempunyai invers maka matriksnya disebut *matriks singular*. Jika A mempunyai invers maka inversnya tunggal (unik). Untuk menunjukkan hal ini, perhatikan penjelasan di bawah ini.

Andaikan B dan C invers dari A sehingga dipenuhi hubungan $BA = I$ dan $CA = I$, maka

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

Jadi, $B = C$, atau kedua invers matriks tersebut tunggal.

Sifat-sifat Invers Matriks

a. $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c. $(kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$, di maka k: skalar (bilangan riil)

d. $A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}} = \underbrace{(AA \dots A)^{-1}}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}}$, jika $n = 1, 2, \dots$

Untuk mendapatkan invers suatu matriks, salah satu metode yang dapat dilakukan adalah menggunakan matriks elementer.

Kasus 1

Manakah yang merupakan matriks elementer? Tentukan OBE-nya.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

E_1 diperoleh dari matriks satuan berordo 2 x 2 yang dikenai satu operasi baris elementer yang pertama yaitu mengalikan baris kedua dengan konstanta -3. E_2 diperoleh dari matriks satuan 3 x 3 yang dikenai satu operasi baris elementer yang kedua yaitu menukar baris kedua dengan baris ketiga. Sedangkan E_3 dikenai operasi baris elementer yang ketiga yaitu menjumlahkan baris pertama dengan kelipatan -5 baris ketiga. Sementara itu, matriks E_4 bukan matriks elementer karena tidak mungkin melakukan operasi baris elementer sehingga matriks satuan menjadi matriks yang baris keduanya menjadi baris nol.

Perkalian matriks elementer dengan sembarang matriks yang sesuai dari sebelah kiri akan mempunyai pengaruh sebagaimana melakukan operasi baris elementer terhadap matriks tersebut. Sebagai contoh,

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, di dapat

$$E_2A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E_2A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 5 & -28 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Perkalian matriks elementer dengan sembarang matriks dapat dilakukan asal memenuhi syarat perkalian dua matriks dari sebelah kanan mempunyai efek sebagaimana operasi kolom elementer dikenakan pada matriks tersebut.

Keistimewaan yang lain, setiap operasi baris elementer yang mengubah matriks satuan menjadi matriks elementer mempunyai lawan yang mengubah matriks elementer menjadi matriks satuan. Kenyataan ini diberikan dalam Tabel 4.1.1 di bawah ini.

Tabel. 4.1.1

Operasi Baris Elementer Yang Mengubah Matriks Elementer Menjadi Matriks Satuan Dan Sebaliknya

OBE Yang Mengubah I Menjadi E	**OBE Yang Mengubah E Menjadi I**
Mengalikan satu baris dengan konstanta $c \neq 0$	Mengalikan satu baris dengan $1/c$
Menukar baris ke- i dengan baris ke-j	Menukar baris ke- i dengan baris ke-j
Menjumlahkan baris ke-i dengan kelipatan k kali baris ke-j	Menjumlahkan baris ke-i dengan kelipatan $-k$ kali baris ke-j

Setiap matriks elementer mempunyai invers dan inversnya merupakan matriks elementer yang diperoleh dari lawan operasinya. Jika A matriks bujursangkar $n \times n$ dan matriks A tersebut ekuivalen baris dengan matriks satuan I_n maka dapat ditemukan m matriks elementer yang sedemikian rupa sehingga jika dikalikan dengan matriks A maka matriks A tersebut menjadi matriks satuan, sehingga

$$E_m \dots E_2 E_1 A = I_n$$

Karena setiap matriks elementer mempunyai invers maka jika dilakukan perkalian dengan invers masing-masing matriks elementer didapat

$$E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_m^{-1}E_m \dots E_2E_1A = E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_m^{-1}I_n$$

Atau

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_m^{-1}I_n$$

Persamaan di atas menyatakan bahwa matriks A mempunyai invers. Sebaliknya jika A mempunyai invers berarti dipenuhi hubungan

$$A^{-1}A = I$$

Dengan mengambil

$$A^{-1} = E_m \dots . E_2E_1I_n$$

Karena matriks invers tunggal, maka diperoleh (jika A mempunyai invers), matriks A ekivalen baris dengan matriks satuan I.

$$[A \; : \; I] \overset{OBE}{\sim} [I \; : \; A^{-1}]$$

Gambar 4.1.1. Cara Praktis Untuk Mendapatkan Invers Matriks Bujur Sangkar

Dari hasil di atas, cara praktis mendapatkan invers dari suatu matriks bujursangkar ialah dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer secara bersamaan antara matriks A dengan matriks satuan I dengan target mengubah matriks A menjadi matriks satuan I dan akibatnya didapatlah perubah matriks I menjadi matriks A^{-1}. Jika A tidak bisa menjadi matriks satuan berarti A *tidak mempunyai invers.* Hal ini dapat diperjelas dengan Gambar 1.

Kasus 2

Tentukan invers dari matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 7 \\ -13 & 1 & -2 \\ 15 & -3 & 7 \end{bmatrix}, C \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

a.

$[A \vdots I] =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -b_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -1 & 0 \\ 3 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2 - 3b_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -1 & 0 \\ 0 & 7 & \vdots & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{1}{3}b_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{matrix} -b + 2b_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

b. $[B \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 12 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} b_2 \\ b_1 \\ \end{matrix}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ b_2 - 4b_1 \sim \\ b_3 - 5b_1 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ b_3 - 2b_2 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ b_1 - 2b_3 \sim \\ b_2 - b_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} b_1 - b_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{3}b_1 \\ \\ b_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Jadi, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$c. [C \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 4 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} b_1 + b_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} b_1 - 2b_2 \\ b_2 - b_3 \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ b_3 + 2b_{2_2} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Karena baris ketiga beruba baris nol yang berarti pula A tidak akan mungkin ekuivalen baris dengan matriks satuan I sehingga pada kasus ini matriks C tidak mempunyai invers. Jika matriks koefisien suatu sistem persamaan linear mempunyai invers maka penyelesaian sistem persamaan linear tersebut didapat dengan mengalikan invers matriks koefisien bersangkutan dengan suku konstantanya, dengan kata lain persamaan matriks $AX = B$. Jika A^{-1} ada maka solusinya adalah $X = A^{-1}B$.

4.1.2 Penyelesaian Metode Perkalian Invers Matriks Elementer Dengan Ordo $3\,x\,3$

Berdasarkan penjelasan dalam sub materi sebelumnya. Dan berdasarkan metodelogi dalam Bab III. Disini akan dicari invers dari sebuah matriks berorde 3×3 dengan metode perkalian invers matriks elementer.

Kasus 3

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Langkah pertama mencari invers F_1^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{k.1} = IA_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$N_{k.1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{2}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 \\ N_{21} & 1 & 0 \\ N_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers dari:

$$F_1 : \left(F_1^{-1}\right) = E_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah kedua mencari invers F_2^{-1}

$$F_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{k2} = \left(F_1^{-1}\right) A_2 = E_1 A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$N_{k2} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_{12}}{a_{22}} \\ \dfrac{1}{a_{22}} \\ -\dfrac{a_{32}}{a_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1.5}{(-1)} \\ \dfrac{1}{-1} \\ -\dfrac{0.5}{(-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & N_{12} & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 \\ 0 & N_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers dari:

$$\left(F_2^{-1}\right) = E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah ketiga mencari invers F_3^{-1}

$$F_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{k.3} = \left(F_2^{-1}\right) A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$N_{k.3} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_{13}}{a_{33}} \\ -\dfrac{a_{23}}{a_{33}} \\ -\dfrac{1}{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{-(0.5)}{(0.5)} \\ \dfrac{-1}{0.5} \\ -\dfrac{1}{0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & N_{13} \\ 0 & 1 & N_{23} \\ 0 & 0 & N_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Invers dari:

$$\left(F_3^{-1}\right) = E_3 \left(F_2\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1.5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka invers dari matriks A adalah:

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1 = E_3 (F_2)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.1.3 Penyelesaian Metode Perkalian Invers Matriks Elementer Dengan Ordo 4 *x* 4

Berdasarkan penjelasan dalam sub materi sebelumnya. Dan berdasarkan metodelogi dalam Bab III. Disini akan dicari invers dari sebuah matriks berorde 3×3 dengan metode perkalian invers matriks elementer.

Kasus 4

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Langkah pertama mencari invers F_1^{-1}

$A = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4]$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{k.1} = IA_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$N_{k.1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{11}}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{31}}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{41}}{a_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-4}{2} \\ \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -2 \\ -\dfrac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & 0 \\ N_{21} & 1 & 0 & 0 \\ N_{31} & 0 & 1 & 0 \\ N_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers dari:

$$F_1 : (F_1)^{-1} = E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah kedua mencari invers F_2^{-1}

$$F_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{k.2} = \left(F_1^{-1}\right) A_2 = E_1 A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{k.2} = \begin{bmatrix} \frac{-a_{12}}{a_{22}} \\ \frac{1}{a_{22}} \\ \frac{-a_{32}}{a_{22}} \\ \frac{-a_{42}}{a_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1/2}{-1} \\ \frac{1}{-1} \\ \frac{-3/2}{-1} \\ \frac{-0}{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{k3}=\begin{bmatrix}\dfrac{-a_{13}}{a_{33}}\\ \dfrac{-a_{23}}{a_{33}}\\ \dfrac{1}{a_{33}}\\ \dfrac{-a_{43}}{a_{33}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-0}{-2}\\ \dfrac{-2}{-2}\\ \dfrac{1}{-2}\\ \dfrac{-(1)}{-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$E_3=\begin{bmatrix}1&0&N_{13}&0\\0&1&N_{23}&0\\0&0&N_{33}&0\\0&0&N_{43}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\dfrac{3}{2}&0\\0&0&-\dfrac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

Invers dari:

$$(F_3)^{-1}=E_3(F_3)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-\dfrac{1}{2}&0\\0&0&-\dfrac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&0&0\\2&-1&1&0\\-\dfrac{7}{2}&\dfrac{3}{2}&0&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$(F_3)^{-1} = E_3(F_3)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah ketiga mencari invers F_3^{-1}

$$F_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{k.A} = \left(F_3^{-1}\right) A_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ -0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$N_{k.4}=\begin{bmatrix}\dfrac{-a_{14}}{a_{44}}\\ \dfrac{-a_{24}}{a_{44}}\\ \dfrac{-a_{34}}{a_{44}}\\ \dfrac{1}{a_{44}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-0.5}{0.25}\\ \dfrac{-1.5}{0.25}\\ \dfrac{0.75}{0.25}\\ \dfrac{1}{0.25}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -6\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$E_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & N_{14}\\ 0 & 1 & 0 & N_{24}\\ 0 & 0 & 1 & N_{34}\\ 0 & 0 & 0 & N_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

BAB V

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV dan dengan menggunakan langkah-langkah yang dijelaskan pada Bab III, maka peneliti mengambil kesimpulan setelah melakukan perhitungan untuk mendapatkan invers dari sebuah matriks yang berordo $n \times n$ seperti ordo 2×2, 3×3, 4×4, dengan metode perkalian invers matriks elementer sehingga diperoleh subuah invers matriksnya.

4.2 Saran

Pada penelitian ini, peneliti telah melakukan perhitungan secara manual untuk mendapatkan invers dari sebuah matriks, dan akan melakukan penelitian lanjutan dengan penelitian yang sama dengan bantuan aplikasi matematika seperti Ms. Excel, MATLAB dan lain-lain untuk mendapatkan sebuah invers matriks dan komposisi matriks yang lain yang ingin dicari yang ordo nya $n \times n$.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

Abdurrahman, Mulyono. 2003. *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar* .Jakarta: Rineka Cipta.

Anton, Howard. 2004. *Dasar-dasar Aljabar Linear.* Jakarta: Erlangga.

Aziz, Abdul Saefudin. 2014. *Aljabar Matriks.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Gazali. Wikaria 2005. *Matriks dan Transformasi Linear.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Leon, Steven. 2001. *Aljabar Linear Dan Aplikasinya Edisi Kelima.* Jakarta: Erlangga.

Manfaat, Budi. 2010., *Membumikan Matematika Dari Kampus Ke Kampung.* Jakarta: Buku Kita.

Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik.* Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.

Nata, Abuddin 2002. *Tafsir Ayat-ayat Pendidikan "Tafsir Al-Ayat Al-Tarbawiy"* .Jakarta: Raja Grafindo Persada.

Johannes, Supranto. 1997. *Pengantar Matriks.* Jakarta: Rineka Cipta.

Ruminta. 2014. *Matriks Persamaan Linear Dan Pemrograman Linear.* Bandung: Rekayasa Sains.

Setya, Budi. 2001. *Aljabar Linear.* Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & N_{12} & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 \\ N_{31} & N_{32} & 1 & 0 \\ N_{41} & N_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers dari:

$$(F_2)^{-1} = E_2E_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah ketiga mencari invers F_3^{-1}

$$F_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{k.3} = \left(F_2^{-1}\right) A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$