DIKTAT

STRUKTUR ALJABAR

Diajukan untuk Melengkapi Syarat Pengajuan Kenaikan Pangkat
Pada Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara Medan
Jurusan Pendidikan Matematka

Oleh:

SITI MAYSARAH, M.Pd
NIB. BLU1100000076

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
UIN SUMATERA UTARA
MEDAN
2018

SURAT REKOMENDASI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Dr. Mara Samin Lubis, M.Ed
NIP	:	197305012003122 1004
Pangkat/Gol	:	Penata Tk. I/ (III/d)
Jabatan Fungsional	:	Lektor
Unit Kerja	:	Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara Medan

Menyatakan bahwa diktat Saudara:

Nama	:	Siti Maysarah, M.Pd
NIB	:	BLU 1100000076
NIDN	:	2031088703
Pangkat/Gol	:	Penata Muda Tk. I/III/b
Unit Kerja	:	Jurusan Pendidikan Matematika (PMM) Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara Medan
Judul Diktat	:	STRUKTUR ALJABAR

Telah memenuhi syarat sebagai suatu karya ilmiah (Diktat) dalam matakuliah Struktur Aljabar pada Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara Medan.

Demikianlah rekomendasi ini diberikan untuk dapat dipergunakan seperlunya.

Medan, 28 Mei 2018
Yang Menyatakan,

Dr. Mara Samin Lubis, M.Ed
NIP. 197305012003122 1004

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah segala puji hanya milik Allah Tuhan sekalian alam. Atas berkat rahmat dan karuniaNya, saya dapat menyelesaikan penulisan diktat ini dengan judul "STRUKTUR ALJABAR". Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW beserta kerabat, sahabat, dan para pengikutnya sampai akhir zaman, sosok yang telah membawa manusia dan seisi alam dari zaman kegelapan sampai saat ini sehingga kita menjadi manusia beriman, berilmu, dan beramal shaleh agar menjadi manusia yang berakhlak mulia.

Diktat ini disusun untuk memberikan informasi tentang materi struktur aljabar seperti operasi biner, grup, teorema-teorema dasar tentang grup, subgrup, grup permutasi, koset, subgrup normal, grup faktor, ring, *integral domain* (daerah integral), *field* (lapangan), homomorfisme, dan isomorfisme ring. Setiap materi ini disajikan dalam bentuk definisi, teorema, contoh masalah, dan latihan dengan maksud untuk memudahkan mahasiswa memahami materi perkuliahan ini.

Dalam penulisan diktat ini, saya menyadari bahwa masih banyak kekurangan dan perlu perbaikan. Sumbangan pemikiran yang membangun sangat penulis harapkan dari rekan sejawat terutama dari dosen-dosen senior yang terhimpun dalam matakuliah serumpun. Juga usulan dari para pengguna diktat ini terutama mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika, semoga konten pembelajaran ini dapat diperkaya melalui evaluasi terus menerus. Semoga diktat ini bermanfaat dalam memperkaya ilmu pengetahuan dan menjadi ladang amal ibadah bagi penulis. *Amiin.*

Medan, Mei 2018
Penulis

SITI MAYSARAH, M.Pd
NIB. BLU1100000076

DAFTAR ISI

BAB 1

OPERASI BINER

Sebuah sistem dimana terdapat sebuah himpunan satu atau lebih dari satu operasi Biner (*binary operation*), yang didefinisikan pada himpunan tersebut, dinamakan sistem aljabar. Selanjutnya, sebuah sistem aljabar akan dinyatakan dengan $(S, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)$ dimana S sebuah himpunan tidak kosong dan $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ operasi-operasi yang didefinisikan pada S. Sebagai contoh, $(Z, +)$ adalah sebuah sistem aljabar yang dibentuk oleh himpunan bilangan bulat Z dan operasi penjumlahan biasa. Sementara $(Z, +, \times)$ adalah sebuah sistem aljabar yang dibentuk oleh himpunan bilangan bulat dan dua buah operasi biner.

1.1.Definisi Operasi Biner

Definisi:

Jika S sebuah himpunan, maka sebuah operasi biner * pada S adalah satu relasi yang menghubungkan setiap pasangan berurut $\forall\, s_1, s_2 \in S$ ketepat satu unsur S, dan diberi notasi dengan $s_1 * s_2$.

Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi biner adalah $+, \times, *, \cdot, \oplus, \otimes$. Hasil dari sebuah operasi, misalnya *, pada unsur a dan b akan ditulis sebagai $a * b$.

Contoh:

1. Penjumlahan $a * b = a + b$ adalah sebuah operasi biner pada himpunan bilangan bulat positif (Z^+)
2. Pengurangan $a * b = a - b$ bukanlah operasi biner pada himpunan bilangan bulat positif, tetapi merupakan operasi biner pada himpunan bilangan bulat (Z).
3. Perkalian $a * b = a \times b$ adalah sebuah operasi biner pada Z^+, Z, R atau Q.
4. Pembagian $a * b = \frac{a}{b}$ adalah sebuah opearsi biner pada Q^+ atau R^+ tetapi tidak pada, Z^+ , R atau Q.
5. $a * b = a^2 + b^2 + 1$ adalah sebuah operasi pada Z, Q, R, Z^+, Q^+, atau R^+
6. Misalkan x adalah beberapa himpunan dan S adalah kumpulan semua himpunan bagian dari x, sebagai contoh jika $x = \{1\}$, maka $S = \{\emptyset, \{1\}\}$,

dan jika $x = \{1,2\}$, maka $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Operasi irisan adalah sebuah operasi biner pada S, karena $A * B = A \cap B$ merupakan sebuah unsur dari S, begitu juga operasi gabungan merupakan operasi biner pada S.

1.2.Sifat-Sifat Operasi Biner

Sifat-sifat yang dimiliki oleh sebuah sistem aljabar nantinya ditentukan oleh sifat-sifat yang dimiliki oleh setiap operasi di dalam sistem aljabar tersebut. Berikut akan dijelaskan mengenai sifat-sifat yang dapat dimiliki oleh sebuah operasi biner. Misalkan $*$ dan $\oplus$ adalah operasi biner. Operasi $*$ dikatakan:

1. Komutatif

   Jika $a * b = b * a, \forall\, a, b$
2. Assosiatif

   Jika $(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c$
3. Mempunyai identitas

   Identitas, jika terdapat i sedemikian hingga $a * i = i * a = a, \forall\, a$

   Identitas kiri, jika terdapat i_1 sedemikian hingga $i_1 * a = a, \forall\, a$

   Identitas kanan, jika terdapat i_2 sedemikian hingga $a * i_2 = a, \forall\, a$
4. Mempunyai sifat Invers

   Jika $\forall\, a$ terdapat a^{-1} sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$, dimana i adalah unsur identitas untuk operasi $*$. Sedangkan a^{-1} disebut invers dari unsur a.
5. Distributif terhadap operasi $\oplus$

   Jika $\forall\, a, b, c$ berlaku $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$ distributif kiri dan $(b \oplus c) * a = (b * a) \oplus (c * a)$ distributif kanan.

Contoh:

Buktikan bahwa operasi penjumlahan biasa merupakan operasi biner.

Akan ditunjukkan bahwa:

1. Komutatif

   Ambil sembarang unsur, misal x dan y. Maka berlaku $x + y = y + x$.
2. Assosiatif

Operasi penjumlahan bersifat assosiatif, karena untuk sembarang unsur, misal x, y, z, berlaku $(x+y)+z = x+(y+z)$.

3. Identitas

   Identitas operasi penjumlahan adalah 0 (nol), karena $a + 0 = a$

4. Invers

   Invers penjumlahan untuk sembarang bilangan a adalah $-a$, karena $a + (-a) = 0$.

Contoh:

1. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan, karena untuk setiap bilangan a, b, c berlaku $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ dan $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$.
2. Operasi penjumlahan tidak bersifat distributif terhadap operasi perkalian, akrena terdapat p, q, r dimana $p + (q \times r) \neq (p + q) \times (p + r)$. Misal, $1 + (2 \times 3) \neq (1 + 2) \times (1 + 3)$

Definisi Sifat Tertutup

Himpunan S dikatakan tertutup terhadap operasi biner $*$, jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b \in S$.

1.3.Beberapa Operasi Biner

1. **Bilangan Kompleks**

   Bilangan kompleks adalah bilangan yang dapat disajikan dalam bentuk $a + bi$ atau $a + ib$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   $i^2 = -1$

   $i^3 = -i$

   $i^4 = 1$

   $i^5 = -i$

Sifat-sifat bilangan kompleks:

(i) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

(ii) $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$

(iii) $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$

(iv) $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ disebut dengan Modulus

(v) Jika $Z = a + bi$, maka bilangan kompleks sekawan (konjugat) dari Z ditulis dengan $\bar{Z}$. Didefinisikan sebagai $\bar{Z} = a - bi$

(vi) $Z \cdot \bar{Z} = \mathbb{R}$

Teorema

Jika Z_1, Z_2 merupakan bilangan kompleks, maka berlaku:

1. $|Z_1 . Z_2| = |Z_1| . |Z_2|$
2. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$
3. $|z_1 + z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$
4. $|z_1 - z_2| \geq |Z_1| - |Z_2|$
5. $|z_1 - z_2| \geq \big||Z_1| + |Z_2|\big|$

Pembuktian Teorema 2:

Buktikan bahwa $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

Penyelesaian:

Ambil sembarang unsur $Z_1 = x_1 + iy_1$ dan $Z_2 = x_2 + iy_2$, sehingga:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| &= \left|\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}\right| \\
&= \left|\frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right| \\
&= \left|\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_2y_1x_1y_2 + x_1^2y_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2) + (x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2)}{(x_2^2 + y_2^2)^2}}
\end{aligned}
$$

	$= \sqrt{\frac{x_1^2(x_2^2+y_2^2)+y_1^2(x_2^2+y_2^2)}{(x_2^2+y_2^2)^2}}$ $= \sqrt{\frac{(x_1^2+y_1^2)}{(x_2^2+y_2^2)} \cdot \frac{(x_2^2+y_2^2)}{(x_2^2+y_2^2)}}$ $= \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ $= \frac{\lvert Z_1 \rvert}{\lvert Z_2 \rvert}$

Terbukti

Untuk pembuktian teorema 1, 3, 4, 5 diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

2. Akar Pangkat n dari satuan

Jika $x^n = 1$, maka:

$$x_k = \frac{\cos 2k\pi}{n} + i\frac{\sin 2k\pi}{n} \text{ dimana } \mathrm{n} = \{1,2,3,..,\mathrm{n}\}, \mathrm{k} = \{1,2,3,...,\mathrm{n}\}$$

untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut:

Hitunglah harga x jika $x^3 = 1$

Jawab:

Untuk $x^3 = 1$, maka

$$x_k = \frac{\cos 2k\pi}{n} + i\frac{\sin 2k\pi}{n}$$

$$x_1 = \frac{\cos 2\pi}{3} + i\frac{\sin 2\pi}{3}$$

$$= \cos 120° + i \sin 120°$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{\cos 2.2\pi}{3} + i\frac{\sin 2.2\pi}{3}$$

$$= \cos 240° + i \sin 240°$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$$

$$x_3 = \frac{\cos 2.3\pi}{3} + i\frac{\sin 2.3\pi}{3}$$

$$= \cos 360° + i \sin 360°$$

$$= 1$$

Sehingga, $x = \left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}, 1\right\}$

*	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	1
$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	1	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$
$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	1	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$
1	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$	1

$\rightarrow Tertutup$

Adapun contoh perhitungan sebagai berikut:

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) * \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\sqrt{3}-\frac{1}{4}i\sqrt{3}+\frac{3}{4}i^2$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{3}{4}(-1)$$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

Bukti perhitungan yang lain, diserahkan kepada pembaca

Apakah assosiatif?

Ambil sembarang unsur, misal: $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}, 1 \in x^3$

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)+1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+1\right)$$

$$0 = 0$$

Terbukti memiliki sifat assosiatif.

3. Bilangan Satuan

Definisi:

Bilangan satuan (*unit number*) adalah bilangan prima relatif terhadap Z_n (bilangan bulat modulo n) yang lebih kecil dari n dan biasa dituliskan dengan U_n. Angka 1 pada U_n dikatakan unsur kesatuan (*unity*).

Contoh:

1. $U_5 = \{1,2,3,4\}$
2. $U_6 = \{1,5\}$

3. $U_7 = \{1,2,3,4,5,6\}$
4. $U_8 = \{1,3,5,7\}$
5. $U_{10} = \{1,3,7,9\}$

Contoh:

Tentukanlah unsur-unsur U_8, kemudian buatlah tabel Cayley pada operasi perkalian.

Penyelesaian:

$U_8 = \{1,3,5,7\}$

*	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

LATIHAN

1. Buktikanlah himpunan bilangan bulat Z tertutup terhadap operasi penjumlahan biasa, karena untuk setiap $x, y \in Z$ berlaku $x + y \in Z$
2. Buktikan bahwa himpunan bilangan bulat Z tidak tertutup terhadap operasi pembagian biasa.
3. Misalkan $A = \{0,1\}$ didefinisikan operasi biner sebagai:
$$a * b = (a \times b) + b$$
Buktikan bahwa A tidak tertutup terhadap operasi biner $*$
4. Hitunglah unsur-unsur dari U_{18} kemudian buatlah tabel Cayley pada operasi perkalian.
5. Hitunglah $x^4 = 1$. Kemudian, buktikan bahwa memiliki sifat tertutup dan asosiatif.

BAB II
GRUP

Grup adalah suatu himpunan beserta satu operasi biner, seperti perkalian atau penjumlahan, yang memenuhi beberapa aksioma yang akan dijelaskan di bawah ini. Cabang matematika yang mempelajari grup disebut teori grup. Kegunaan dari teori Grup ini adalah merupakan dasar-dasar untuk mempelajari ring, field, integral domain, ideal dan ruang vektor.

2.1.SEMI GRUP

Sebuah semi grup $(S,*)$ adalah sebuah himpunan S dengan operasi $*$ yang didefinisikan kepada S sedemikian hingga memenuhi aksioma berikut:

a) Himpunan S tertutup di bawah operasi $*$
b) Operasi $*$ bersifat asosiatif

Contoh:

$(Z,+)$ merupakan sebuah semigrup.

Jika operasi $*$ pada semigrup $(S,*)$ komutatif maka $(S,*)$ dikatakan semigrup yang abelian.

Contoh:

$(Z,+)$ merupakan sebuah semigrup yang abelian.

2.2.MONOID

Sebuah monoid $(S,*)$ adalah sebuah himpunan S dengan operasi * yang didefinisikan terhadap S sedemikian hingga memenuhi aksioma berikut:

a) Himpunan S tertutup di bawah operasi *
b) Operasi * bersifat asosiatif
c) Pada S terdapat unsur identitas untuk operasi *

   Dengan kata lain, semigrup yang mempunyai unsur identitas pada operasi yang berlaku kepadanya disebut Monoid.

Contoh:

$(Z, +)$ merupakan sebuah monoid dengan unsur identitas penjumlahan. Jika operasi biner pada monoid $(S,*)$ tersebut bersifat komutatif, maka monoid $(S,*)$ disebut juga monoid abelian.

Contoh:

Sistem aljabar $(Z, +)$ merupakan sebuah monoid abelian.

2.3.GRUP

Definisi 1.1.

Sebuah grup $< G,* >$ adalah sebuah himpunan G dengan operasi biner * pada G, sedemikian sehingga memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:

(i) Operasi * *closure* (tertutup)

(ii) Operasi * Assosiatif

(iii) Terdapat sebuah unsur i dalam G, sedemikian hingga $i * a = a * i = a$ untuk setiap $a \in G$, unsur i disebut sebuah unsur identitas dalam Grup G.

(iv) Untuk setiap $a \in G$ terdapat sebuah unsur $a^{-1} \in G$, sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$. Dimana a^{-1} disebut invers dari a.

Atau sebuah Grup G dengan operasi biner * dituliskan dengan simbol $< G,* >$, jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:

(i) $\forall a, b \in G, a * b = c \in G$

(ii) $\forall a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$

(iii) $\exists_1 i \in G, i * a = a * i = a \in G$

(iv) $\forall a \in G, \exists_1 a^{-1} \in G, a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$

Contoh:

Buktikan bahwa himpunan bilangan bulat Z merupakan Grup dengan operasi penjumlahan $< Z, + >$

Penyelesaian:

(i) Akan dibuktikan tertutup

ambil sembarang unsur $a, b \in Z$

karena $a, b \in Z$, maka $a + b \in Z$ (terbukti tertutup)

(ii) Akan dibuktikan assosiatif

ambil sembarang unsur $a, b, c \in Z$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$a + b + c = a + b + c$

karena $a, b, c \in Z$, maka $a + b + c \in Z$ sehingga

$(a + b) + c = a + (b + c)$ memenuhi sifat assosiatif penjumlahan

(iii) Akan dibuktikan terdapat unsur identitas

Terdapat unsur identitas, yaitu $i = 0$, ambil sembarang unsur $a \in Z$, maka $0 + a = a + 0 = a$

jadi, terdapat unsur identitas, $i = 0$

(iv) Akan dibuktikan mempunyai invers

ambil sembarang unsur misalkan $a, b, c \in Z$

maka invers dari a atau a^{-1} yaitu $= -a$

sebab $a + (-a) = 0$

invers dari b atau b^{-1} yaitu $= -b$

sebab $b + (-b) = 0$

invers dari c atau c^{-1} yaitu $= -c$

sebab $c + (-c) = 0$

Terbukti bahwa $< Z, + >$ merupakan sebuah Grup.

Contoh:

Buktikan bahwa $< U_8, \times >$ merupakan sebuah Grup.

Penyelesaian:

$U_8 = \{1, 3, 5, 7\}$

Tabel 2.1.
Tabel Cayley $< U_8, \times >$

×	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

(i) Jelas tertutup (perhatikan tabel di atas)

(ii) Akan dibuktikan assosiatif

ambil sembarang unsur, misal $a = 3, b = 5, c = 7$, dimana $a, b, c \in U_8$

$(3 \times 5) \times 7 = 3 \times (5 \times 7)$

$7 \times 7 = 3 \times 7$

$1 = 1$ (Terbukti assosiatif)

(iii) Akan dibuktikan terdapat unsur identitas

terdapat unsur identitas yaitu $i = 1$

sebab $a \times 1 = a$

(iv) Akan dibuktikan mempunyai invers

$1^{-1} = 1$ sebab $1 \times 1 = 1 = i$

$3^{-1} = 3$ sebab $3 \times 3 = 1 = i$

$5^{-1} = 5$ sebab $5 \times 5 = 1 = i$

$7^{-1} = 1$ sebab $7 \times 7 = 1 = i$

Terbukti bahwa $< U_8, \times >$ merupakan sebuah Grup.

Contoh:

Buktikan bahwa himpunan matriks 2×2, dimana $|A| \neq 0$ dengan operasi perkalian matriks membentuk sebuah grup.

Penyelesaian:

(i) Akan dibuktikan operasi perkalian matriks 2×2 adalah tertutup

ambil sembarang unsur $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, dimana $A, B \in A_{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix}$$

terbukti bahwa $A \times B \in A_{2\times 2}$

(ii) Akan dibuktikan operasi perkalian matriks 2×2 adalah assosiatif

ambil sembarang unsur $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$, dimana $A, B, C \in A_{2\times 2}$

$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} kp + mq & lp + nq \\ kr + ms & lr + ns \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} akp+bkr+amq+bms & alp+blr+anq+bns \\ ckp+dkr+cmq+dms & clp+dlr+cnq+dns \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} akp+amq+bkr+bms & alp+anq+blr+bns \\ ckp+cmq+dkr+dms & clp+cnq+dlr+dns \end{bmatrix}$$

Terbukti assosiatif

(iii) Akan ditunjukkan terdapat identitas matriks 2×2

terdapat identitas matriks 2×2, yaitu $i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

sebab $A \times i = A$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(iv) Akan ditunjukkan terdapat invers matriks 2×2

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka invers dari A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

sebab $A \times A^{-1} = i$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{-ab+ab}{ad-bc} \\ \frac{cd-cd}{ad-bc} & \frac{-bc+ad}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena semua syarat grup telah dipenuhi, maka himpunan matriks 2×2 adalah sebuah grup.

Contoh:

Buktikan bahwa himpunan bilangan asli N bukan grup terhadap operasi $+$

Penyelesaian:

(i) Akan dibuktikan tertutup

ambil sembarang unsur, misal: $a = 0, b = 1$, dimana $a, b \in N$

$0 + 1 = 1 \in N$ dimana $a + b \in N$ (terbukti tertutup)

(ii) Akan dibuktikan assosiatif

ambil sembarang unsur, misal: $a = 0, b = 1, c = 2$ dimana $a, b, c \in N$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$(0 + 1) + 2 = 0 + (1 + 2)$

$3 = 3$

memenuhi sifat assosiatif penjumlahan

(iii) Akan dibuktikan terdapat unsur identitas

Terdapat unsur identitas, yaitu $i = 0$, ambil sembarang unsur, misal: $a = 0$ dimana $a \in N$, maka $0 + a = 0 + 0 = 0 = a$

jadi, terdapat unsur identitas, $i = 0$

(iv) Akan dibuktikan mempunyai invers

tidak mempunyai invers, ambil sembarang unsur

misal: $c = 2,$ maka $c^{-1} = \frac{1}{2}$

$c + c^{-1} = 0$

$2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} \notin N$

Terbukti bahwa himpunan bilangan asli N bukan grup terhadap operasi $+$

Contoh:

Tunjukkan bahwa $G =< x^4 = 1, \times>$ merupakan sebuah grup

Penyelesaian:

$G = \{1, -1, i, -i\}$

Tabel 2.2.
Tabel Cayley $< x^4 = 1, \times>$

×	1	-1	*i*	-*i*
1	1	-1	*i*	-*i*
-1	-1	1	-*i*	*i*
i	*i*	-*i*	-1	1
-*i*	-*i*	*i*	1	-1

(i) Jelas tertutup

(ii) Asosiatif

$\left(i \times (-i)\right) \times i = i \times \left((-i) \times i\right)$

$1 \times i = i \times 1$

$i = i$

(iii) Mempunyai unsur identitas $i = 1$

(iv) Setiap unsur mempunyai invers, yaitu:

$1^{-1} = 1$

$(-1)^{-1} = -1$

$i^{-1} = -i$

$(-i)^{-1} = i$

Terbukti bahwa $G = < x^4 = 1, \times >$ adalah sebuah grup.

LATIHAN

1. Manakah dari pernyataan-pernyataan berikut yang membentuk sebuah grup?
   a) Bilangan real positif (R^+) dengan operasi penjumlahan.
   b) Himpunan bilangan rasional Q dengan operasi perkalian.
   c) Himpunan pasangan beurutan (x, y) dari bilangan real dengan * didefinisikan $(x, y) * (z, w) = (x + z, y - w)$
   d) $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ terhadap operasi penjumlahan bilangan bulat modulo 5.
   e) Himpunan $\{1, -1\}$ dengan operasi perkalian
2. Tunjukkan bahwa $< x^3 = 1, \times >$ merupakan sebuah grup. Buat tabel Cayleynya.

BAB III

TEOREMA-TEOREMA DASAR TENTANG GRUP

Teorema 3.1

Jika G sebuah Grup dengan operasi biner $*$, dan jika a dan b termuat dalam G, maka Persamaan linier $a * x = b$ dan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian yang unik (tunggal) dalam G.

Bukti:

$a * x = b$

$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$, karena G grup, maka a^{-1} termuat dalam G

$(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$ (asosiatif)

$i * x = a^{-1} * b$ (invers)

$x = a^{-1} * b$

dengan cara yang sama diperoleh $y = a^{-1} * b$ (mempunyai penyelesaian yang tunggal).

Teorema 3.2

Dalam sebuah grup G dengan operasi biner $*$ terdapat hanya 1 identiti i sedemikian hingga $i * a = a * i = a$

Bukti:

Andaikan selain i ada identity yang lain, misalkan e maka:

$a * i = a * e$

$a^{-1} * (a * i) = a^{-1} * (a * e)$

$(a^{-1} * a) * i = (a^{-1} * a) * e$

$i * i = i * e$

$i = e$

Terbukti hanya ada satu unsur netral (identity) dalam sebuah Grup G.

Teorema 3.3

Untuk setiap unsur dalam sebuah grup G dengan operasi biner $*$ mempunyai hanya satu invers dalam G.

Bukti:

Misalkan selain a^{-1} yang merupakan invers dari $a \in G$ terdapat invers yang lain misalkan saja y, maka:

$a^{-1} * a = i$ dan $y * a = i$ karena y juga invers dari a akibatnya

$a^{-1} * a = y * a$

$a^{-1} * a * a^{-1} = y * a * a^{-1}$

$a^{-1} * i = y * i$

$a^{-1} = y$

jelas bahwa setiap unsur hanya mempunyai satu invers.

Teorema 3.4

Jika $\langle G,* \rangle$ sebuah grup dengan operasi biner $*$, maka untuk setiap $g \in G$ berlaku $(g^{-1})^{-1} = g$

Bukti:

Karena g^{-1} adalah invers dari g, maka:

$(g^{-1})^{-1} * (g^{-1} * g) = (g^{-1})^{-1} * i$

$((g^{-1})^{-1} * g^{-1}) = (g^{-1})^{-1}$ sifat asosiatif

$i * g = (g^{-1})^{-1}$

$g = (g^{-1})^{-1}$

Teorema 3.5

Jika $< G,* >$ adalah sebuah Grup dengan operasi $*, x, y \in G$, maka: $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Bukti:

$$\begin{aligned}(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) &= x * \left(y * (y^{-1} * x^{-1})\right)\\ &= x * \left((y * y^{-1}) * x^{-1}\right)\\ &= x * (i * x^{-1})\\ &= x * x^{-1}\\ &= i\end{aligned}$$

Terbuktilah bahwa $(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = i$ dengan demikian berarti:

$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Teorema 3.6

Jika $\langle G, * \rangle$ adalah sebuah grup dengan operasi $*$ dan ambil $x, y \in G$, jika $x * y = i$ atau $y * x = i$, maka $y = x^{-1}$ atau sebaliknya.

Bukti:

Misalkan $x * y = i$ gandakan ruas kiri dan kanan dengan x^{-1}, maka diperoleh:

$x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * i$

$(x^{-1} * x) * y = x^{-1}$

$i * y = x^{-1}$

$y = x^{-1}$ terbukti

Teorema 3.7

Jika sebuah grup G dengan operasi $*$, padanya berlaku hukum kanselasi kiri dan kanan yaitu jika $a * b = a * c$, maka $b = c$ dan jika $b * a = c * a$ maka $c = b$ untuk setiap a, b, c termuat dalam G.

Bukti:

$a * b = a * c$ berarti a^{-1} termuat dalam G sebab G grup, maka:

$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$ (sifat asosiatif)

$i * b = i * c$ (sifat invers)

$b = c$ (sifat identity)

analog $c = b$ (terbukti)

Teorema 3.8

Jika G sebuah Grup dengan operasi biner $*$, dan jika a dan b termuat dalam G, maka persamaan linier $a * x = b$ dan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian yang unik (tunggal) dalam G.

Bukti:

$a * x = b$

$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$, karena G grup maka a^{-1} termuat dalam G

$(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$ (asosiatif)

$i * x = a^{-1} * b$ (invers)

$x = a^{-1} * b$

dengan cara yang sama diperoleh $y = a^{-1} * b$ (mempunyai penyelesaian yang tunggal).

LATIHAN BAB III

1. Jika $\langle G, * \rangle$ adalah sebuah grup dan $x, y \in G$ dan dikatakan $x, y * z$ asosiatif dengan kata lain $(x * y) * z$ atau $x * (y * z)$, tunjukkanlah bahwa:
   $(x * y * z)^{-1} = z^{-1} * y^{-1} * x^{-1}$
2. $\forall a, b \in G$, G sebuah grup abelian. Buktikan bahwa untuk sembarang bilangan bulat n berlaku $(ab)^2 = a^2 b^2$
3. Jika $\langle G, * \rangle$ sebuah grup, tunjukkanlah G sebuah grup abelian jika dan hanya jika $(x * y)^2 = x^2 * y^2, \forall x, y \in G$
4. Dengan menggunakan hukum kanselasi buktikanlah:
   jika $x^{-1} = y^{-1}$ maka $x = y$

BAB IV

SUBGRUP

Dalam sebuah grup G, didalamnya terdapat sebuah komplek K dimana $K \subset G$, maka K dikatakan sebuah subgrup dan diberi simbol $K < G$ dari G jika dan hanya jika seluruh syarat-syarat (aksioma-aksioma) pada grup G juga berlaku pada K. Sebagai contoh: $\langle B, + \rangle, \langle R, + \rangle$ tetapi $\langle Q, + \rangle, Q =$ bilangan rational, bukanlah subgrup dari $\langle R, + \rangle$ walaupun $Q \subset R$.

Definisi 4.1.

Sebuah himpunan bagian H dari grup $\langle G,* \rangle$ dikatakan sebuah grup dari G jika semua unsur dari H membentuk sebuah grup dengan operasi $*$ dan diberi notasi $H < G$.

Contoh:

Perhatikan grup $Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Dengan tabel Cayley dapat diselidiki himpunan-himpunan bagian $H_1 = \{0,4\}$ dan $H_2 = \{0,2,4,6\}$ dari Z_8 dengan operasi penjumlahan modulo 8, masing-masing merupakan subgrup dari Z_8. Untuk Z_8 sendiri dapat dilihat pada tabel Cayley berikut ini:

Tabel 4.1 Menunjukkan Tabel Cayley dari Grup Z_8

$+_8$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

Perhatikan himpunan bagian dari Z_8 yaitu $H_1 = \{0,4\}$ dan $H_2 = \{0,2,4,6\}$. Kemudian dibentuk tabel Cayley berorde 2 dan berorde 4 dari H_1 dan H_2 terhadap operasi yang sama pada Z_8 yaitu penjumlahan modulo 8, masing-masing diperlihatkan pada tabel 3.2 dan tabel 3.3 di bawah ini:

Tabel 4.2. Menunjukkan Tabel Cayley dari Grup H_1

$+_8$	**0**	**4**
0	0	4
4	4	0

Tabel 4.3. Menunjukkan Tabel Cayley dari Grup H_2

$+_8$	**0**	**2**	**4**	**6**
0	0	2	4	6
2	2	4	6	0
4	4	6	0	2
6	6	0	2	4

Subgrup di atas dapat dibuat Latice diagramnya sebagai berikut:

$$\begin{tikzcd}
\langle Z_8,+\rangle \arrow[d, no head] \\
\langle 0,2,4,6\rangle \arrow[d, no head] \\
\langle 0,4\rangle \arrow[d, no head] \\
\langle 0\rangle
\end{tikzcd}
\quad \text{atau} \quad
\begin{tikzcd}
\langle Z_8,+\rangle \arrow[d, no head] \\
\langle H_1\rangle \arrow[d, no head] \\
\langle H_1\rangle \arrow[d, no head] \\
\langle 0\rangle
\end{tikzcd}$$

Gambar 4.1.
Latice Diagram $\langle Z_8,+\rangle$

Untuk memperlihatkan bahwa H_1 dan H_2 dengan operasi penjumlahan modulo 8 adalah suatu grup, perhatikan aksioma berikut:

Dengan melihat tabel di atas diperoleh:

1. Aksioma pertama (sifat tertutup) dipenuhi karena seluruh hasil operasi ada pada himpunan H_1 dan H_2.
2. Aksioma kedua (sifat asosiatif) penjumlahan modulo 8 dipenuhi pada Z_8, karenanya pada H_1 dan H_2 juga dipenuhi.

3. Aksioma ketiga (unsur identitas) dipenuhi:

   $\exists 0 \in H_1$ dan H_2 sebagai unsur identitas karena $\forall a \in H_1$ dan H_2 dipenuhi sebab:

   $a +_8 0 = 0 +_8 a = a$

4. Aksioma keempat (unsur invers) dipenuhi yaitu:

   $H_1 \rightarrow 0$ inversnya 0, 4 inversnya 4

   $H_2 \rightarrow 0$ inversnya 0, 2 inversnya 6, 4 inversnya 4, dan 6 inversnya 2.

Contoh:

Tentukan subgrup dari $\langle Z_{20}, + \rangle$. Buat tabel Cayley dan diagram Lattice tersebut!

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan tabel Cayley dari $\langle Z_{20}, + \rangle$ sebagai berikut:

Tabel 4.4. Menunjukkan Tabel Cayley dari Grup Z_{20}

$+_{20}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	12	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	13	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	14	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
15	15	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	16	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	17	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18	18	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
19	19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Subgrup dari $\langle Z_{20}, + \rangle$ adalah:

$H_1 = \langle 0,2,4,6,8,10,12,14,16,18 \rangle$ berorder 10

$H_2 = \langle 0,4,8,12,16 \rangle$ berorder 5

$H_3 = \langle 0,5,10 \rangle$ berorder 3

$H_4 = \langle 0,10 \rangle$ berorder 2

Subgrup di atas dapat dibuat Latice diagramnya sebagai berikut:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \langle Z_{20},+\rangle \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\langle 0,2,4,6,8,10,12,14,16,18 \rangle \arrow[d, no head] & & \langle 0,5,10 \rangle \arrow[d, no head] \\
\langle 0,4,8,12,16 \rangle \arrow[dr, no head] & & \langle 0,10 \rangle \arrow[dl, no head] \\
 & \langle 0 \rangle &
\end{tikzcd}$$

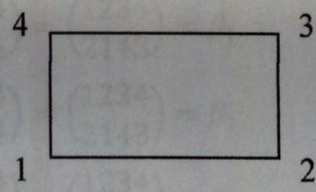
Aatau digambarkan dengan:

$$\begin{tikzcd}
 & \langle Z_{20},+\rangle \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\langle H_1 \rangle \arrow[d, no head] & & \langle H_3 \rangle \arrow[d, no head] \\
\langle H_2 \rangle \arrow[dr, no head] & & \langle H_4 \rangle \arrow[dl, no head] \\
 & \langle 0 \rangle &
\end{tikzcd}$$

Gambar 4.2.
Latice Diagram $\langle Z_{20},+\rangle$

Contoh:

Tafsiran geometris, sebuah persegi panjang dengan titik sudut 1, 2, 3, dan 4 sebagai berikut:



dengan operasi komposisi pemetaan apakah pemetaan terhadap persegi panjang tersebut membentuk sebuah grup? Jika ada, tuliskan subgrupnya.

Penyelesaian:

Apabila diputar sejauh 0° maka unsurnya $\alpha_0 = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}$

Apabila diputar 180° maka unsurnya $\alpha_1 = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}$

Apabila diputar terhadap sumbu horizontal (1,2) maka unsurnya $\beta_1 = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}$

Apabila diputar terhadap sumbu vertikal (1,4) maka unsurnya $\beta_2 = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}$

Sekarang apakah pemetaan terhadap empat persegi panjang tersebut juga membentuk sebuah Grup, untuk itu perhatikan tabel 3.5 berikut:

Tabel 4.5 Tabel Cayley dengan Operasi Komposisi Pemetaan Terhadap Persegi Panjang

$\circ$	$\boldsymbol{\alpha_0}$	$\boldsymbol{\alpha_1}$	$\boldsymbol{\beta_1}$	$\boldsymbol{\beta_2}$
$\boldsymbol{\alpha_0}$	α_0	α_1	β_1	β_2
$\boldsymbol{\alpha_1}$	α_1	α_0	β_2	β_1
$\boldsymbol{\beta_1}$	β_1	β_2	α_0	α_1
$\boldsymbol{\beta_2}$	β_2	β_1	α_1	α_0

$$\alpha_0 \circ \alpha_0 = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} = \alpha_0$$

$$\alpha_0 \circ \alpha_1 = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} = \alpha_1$$

$$\alpha_0 \circ \beta_1 = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} = \beta_1$$

$$\alpha_0 \circ \beta_2 = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} = \beta_2$$

$$\alpha_1 \circ \alpha_0 = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} = \alpha_1$$

$$\alpha_1 \circ \alpha_1 = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} = \alpha_0$$

$$\alpha_1 \circ \beta_1 = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} = \beta_2$$

$$\alpha_1 \circ \beta_2 = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} = \beta_1$$

$$\beta_1 \circ \alpha_0 = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} = \beta_1$$

$$\beta_1 \circ \alpha_1 = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} = \beta_2$$

$$\beta_1 \circ \beta_1 = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} = \alpha_0$$

$$\beta_1 \circ \beta_2 = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} = \alpha_1$$

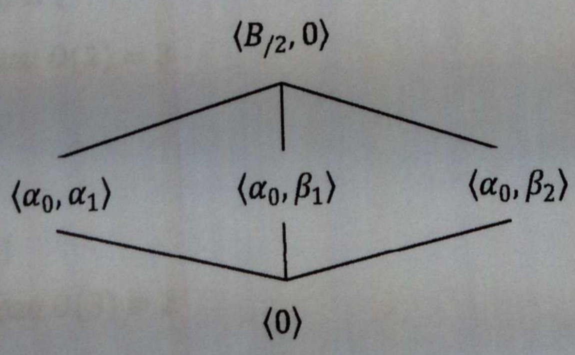
$$\beta_2 \circ \alpha_0 = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} = \beta_2$$

$$\beta_2 \circ \alpha_1 = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} = \beta_1$$

$$\beta_2 \circ \beta_1 = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix} = \alpha_1$$

$$\beta_2 \circ \beta_2 = \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} = \alpha_0$$

Subgrup: $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$, $\langle \alpha_0, \beta_1 \rangle$, $\langle \alpha_0, \beta_2 \rangle$



Gambar 4.3.
Diagram Lattice Operasi Komposisi Pemetaan Terhadap Persegi Panjang

ORDER DARI SUATU UNSUR

Definisi 4.2.

$\forall a \in G$, $a^n = i, n =$ bilangan bulat positif terkecil $i =$ identitas maka n disebut order dari a dan ditulis $O(a)$.

Contoh:

Tentukan order semua unsur dari $\langle Z_6, + \rangle$

Penyelesaian:

$Z_6 = \langle 0,1,2,3,4,5 \rangle$

<u>Order dari 0:</u>

$0^1 = 0 = i$

maka order dari 0 atau $O(0) = 1$

<u>Order dari 1:</u>

$1^1 = 1$

$1^2 = 1 + 1 = 2$

$1^3 = 1 + 1 + 1 = 3$

$1^4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$1^5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

$1^6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0 = i$

maka order dari 1 atau $O(1) = 6$

<u>Order dari 2:</u>

$2^1 = 2$

$2^2 = 2 + 2 = 4$

$2^3 = 2 + 2 + 2 = 0 = i$

maka order dari 2 atau $O(2) = 3$

<u>Order dari 3:</u>

$3^1 = 3$

$3^2 = 3 + 3 = 0 = i$

maka order dari 3 atau $O(3) = 2$

<u>Order dari 4:</u>

$4^1 = 4$

$4^2 = 4 + 4 = 2$

$4^3 = 4 + 4 + 4 = i$

maka order dari 4 atau $O(4) = 3$

<u>Order dari 5:</u>

$5^1 = 5$

$5^2 = 5 + 5 = 4$

$5^3 = 5 + 5 + 5 = 3$

$5^4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 2$

$5^5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 1$

$5^6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 0 = i$

maka order dari 5 atau $O(5) = 6$

Contoh:

Tentukan order dari $\langle U_{10}, \times \rangle$

Penyelesaian:

$U_{10} = \langle 1,3,7,9 \rangle$

<u>Order dari 1:</u>

$1^1 = 1$

<u>Order dari 3:</u>

$3^1 = 3$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 7$

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1 = i$

maka order dari 3 atau $O(3) = 4$

<u>Order dari 7:</u>

$7^1 = 7$

$7^2 = 7 \times 7 = 9$

$7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 3$

$7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 1 = i$

maka order dari 7 atau $O(7) = 4$

<u>Order dari 9:</u>

$9^1 = 9$

$9^2 = 9 \times 9 = 1 = i$

maka order dari 9 atau $O(9) = 2$

Definisi 4.3.

Order dari sebuah grup G, dan diberi notasi $O(G)$ adalah jumlah unsur-unsur dari G.

Contoh:

$G = \langle Z_{24}, + \rangle$ mempunyai subgroup yang digeneret oleh pembagi 24 yaitu:

$H_1 = \langle 0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22 \rangle$ subgrup berorder 12

$H_2 = \langle 0,3,6,9,12,15,18,21 \rangle$ subgrup berorder 8

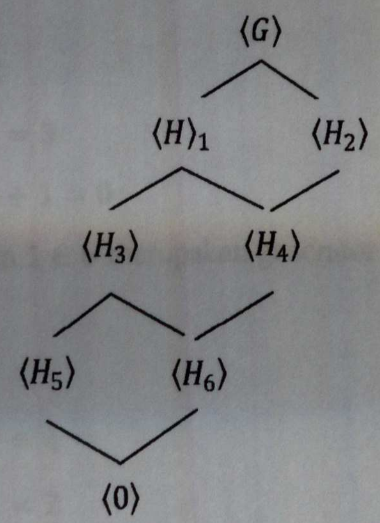
$H_3 = \langle 0,4,8,12,16,20 \rangle$ subgrup berorder 6

$H_4 = \langle 0,6,12,18 \rangle$ subgrup berorder 4

$H_5 = \langle 0,8,16 \rangle$ subgrup beroder 3

$H_6 = \langle 0,12 \rangle$ subgrup berorder 2

Jadi ternyata ada 6 buah subgroup dari $G = \langle Z_{24}, + \rangle$ dan dapat disajikan dalam Lattice diagram berikut:



Gambar 4.3
Lattice Diagram dari $G = \langle Z_{24}, + \rangle$

Definisi 4.4.

Andaikan G adalah sebuah grup, $a \in G$, jika $O(a) = O(G)$, maka a dikatakan sebagai generator dari G.

Contoh:

Tunjukkan semua generator dari $\langle Z_4, + \rangle$

Penyelesaian:

Tabel 4.5. Tabel Cayley $\langle Z_4, + \rangle$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

- Ambil $0 \in G$

  $0^1 = 0$

  $0^2 = 0 + 0 = 0$

  $0^3 = 0 + 0 + 0 = 0$

  dengan demikian $0 \in G$ bukan generator dari Z_4
- Ambil $1 \in G$

  $1^1 = 1$

  $1^2 = 1 + 1 = 2$

  $1^3 = 1 + 1 + 1 = 3$

  $1^4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$

  dengan demikian $1 \in G$ merupakan generator dari Z_4
- Ambil $2 \in G$

  $2^1 = 2$

  $2^2 = 2 + 2 = 4$

  $2^3 = 2 + 2 + 2 = 2$

  dengan demikian $2 \in G$ bukan generator dari Z_4

- Ambil $3 \in G$

  $3^1 = 3$

  $3^2 = 3 + 3 = 2$

  $3^3 = 3 + 3 + 3 = 1$

  $3^4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 0$

  dengan demikian $3 \in G$ merupakan generator dari Z_4

Dapat disimpulkan bahwa generator dari Z_4 adalah himpunan semua bilangan bulat positif kurang dari 4 dan relatif prima dengan 4, yaitu 1 dan 3.

GRUP SIKLIK

Definisi 4.5.

Grup G dikatakan grup siklik jika dan hanya jika terdapat sekurang-kurangnya satu generator dalam G.

Contoh:

$G = \langle Z_4, +\rangle$ adalah grup siklik sebab pada G terdapat dua buah generator yaitu 1 dan 3.

Teorema 4.1.

Jika G siklik, maka G abelian.

Bukti:

Misalkan G sebuah grup siklik, ambil sembarang dua unsur $a = x^m$, dan $b = x^n$ dimana $m, n \in Z$, maka:

$ab = x^m . x^n = x^{m+n} = x^{n+m} = x^n . x^m = ba$

karena $ab = ba$

maka G abelian.

Teorema 4.2.

Setiap Grup Siklik pasti abelian

Bukti:

Misalkan $G = \langle x\rangle$ akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $a, b \in G, ab = ba$.

Ambil sembarang unsur, $a = x^m; b = x^n$, di mana $m, n \in Z$

maka:

$ab = (x^m)(x^n) = x^{m+n} = x^{n+m} = x^n . x^m = ba$

terbukti.

$g_1 = a^p \in G$

$g_2 = a^q \in G$, maka:

$$
\begin{aligned}
g_1 * g_2 &= a^{p+q} \\
&= a^{q+p} \\
&= a^q . a^p \\
&= g_2 * g_1 \text{ (abelian)}
\end{aligned}
$$

Teorema 4.3.

Sebuah Subgrup dari sebuah Grup Siklik adalah siklik.

Bukti:

Ambil G sebuah Grup Siklik dan H sebuah Subgrup dari G, jika $H = \{i\}$, maka H pasti siklik. Jika $H \neq \{i\}$, maka $a^n \in H$ dan a^n generator.

LATIHAN BAB IV:

1. Diketahui grup $G = < Z_8, + >$ dan $G = < Z_{15}, + >$. Tunjukkanlan:
   a) Grup abelian (buktikan)
   b) Ada berapa subgrupnya
   c) Grup Siklik (tunjukkan semua generatornya)
   d) Apakah subgrupnya siklik
2. Gambarkan Lattice diagram dari:
   a) $G = < Z_8, + >$
   b) $G = < Z_{15}, + >$
   c) $G = < Z_{18}, + >$
3. Tentuka semua generator dari masing-masing Z_5, Z_{12}, Z_{15}

BAB V

GRUP PERMUTASI

Definisi 5.1.

Sebuah permutasi dari Himpunan A adalah sebuah fungsi (pemetaan) kepada A, atau sebuah Permutasi adalah sebuah pemetaan satu-satu yang onto kepada dirinya sendiri.

Contoh:

Permutasi dari $A = \{1,2,3\}$ adalah:

$\alpha_0 = \begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$

$\beta_1 = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$

Buktikan bahwa permutasi di atas merupakan sebuah grup.

Teorema 5.2.

Jika X sebuah himpunan tidak kosong, dengan S_n adalah himpunan semua permutasi pada X, maka $< S_n, \mu >$ membentuk sebuah Grup yang dinamakan Grup simetri berderajat n dan diberi notasi S_n.

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Lingkaran dan Transposisi

Definisi 5.3.

Untuk permutasi n unsur $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dapat disajikan dalam bentuk $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \dots \rightarrow a_n$ atau dapat ditulis dengan $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ yang disebut dengan lingkaran.

Contoh:

Ambil permutasi $(1,2,3,4,5)$ maka:

$(1,3,4,5) = \begin{pmatrix}12345\\32514\end{pmatrix}$

dengan demikian bahwa: $(1,3,5,4) = (3,5,4,1) = (5,4,1,3) = (4,1,3,5)$

atau $\begin{pmatrix}12345\\21435\end{pmatrix}$ dapat ditulis menjadi $(1,2)(3,4)$

sedangkan $\begin{pmatrix}123456\\652431\end{pmatrix}$ dapat ditulis menjadi $(1,6)(2,5,3)$

Lingkaran yang saling asing adalah komutatif.

Teorema 5.4

Andaikan $\in S_n$. Jika terdapat lingkaran yang saling asing $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ di dalam S_n sedemikian sehingga $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_m$

Definisi 5.5.

Sebuah permutasi adalah genap jika dapat ditulis sebagai pergandaan dari sejumlah transposisi yang jumlahnya genap. Jika jumlahnya ganjil, maka dapat dinyatakan sebagai permutasi ganjil.

Contoh:

$f = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 35742816 \end{pmatrix} \in S_8$

maka seluruh transposisinya adalah:

$f = (1,3)(1,7)(2,5)(6,8)$ (maka permutasinya genap)

LATIHAN

1. Hitung dan nyatakanlah produk dari lingkaran permutasi $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
   a) $(1,4,5)(7,8)(2,5,7)$
   b) $(1,3,2,7)(4,8,6)$
2. Hitunglah dan nyatakanlah dalam bentuk lingkaran pergandaan dalam S_6 berikut:
   $\begin{pmatrix} 123456 \\ 361425 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 123456 \\ 543216 \end{pmatrix}$
3. Tentukan apakah $\begin{pmatrix} 123456 \\ 246135 \end{pmatrix} \in S_6$ adalah permutasi genap atau ganjil.
4. Tentukan order dari $\mu = \begin{pmatrix} 123456 \\ 543216 \end{pmatrix}$
5. Jika $\mu = \begin{pmatrix} 123456 \\ 531246 \end{pmatrix}$ tentukan μ^5

BAB VI

KOSET, SUBGRUP NORMAL, DAN GRUP FAKTOR

6.1.KOSET

Teorema 6.1:

G grup, $H \leq G, \forall a,b \in G\, berlaku$:

1. $aR_L b \leftrightarrow a^{-1}b \in H$
2. $aR_R b \leftrightarrow ab^{-1} \in H$

RelasiR_L danR_R merupakan relasi ekuivalen

Bukti 1:

R_L merupakan relasi ekuivalen bila memenuhi 3 sifat:

1. Sifat Refleksif$\leftrightarrow \forall a \in G \rightarrow a R_L a$
2. Sifat simetris $\leftrightarrow \forall a,b \in G$ *dengan* $a\ R_L\, b \rightarrow bR_L a$
3. Sifat transitif $\leftrightarrow \forall a,b,c \in G$ *dengan* $a\ R_L\, b \rightarrow bR_L c \rightarrow a R_L b$

(i) Akan ditunjukkan berlaku sifat refleksif atau a R_L a

Ambil sebarang a ϵ G, $a^{-1}a = e$ karena H≤G dengan sifat ketunggalan identitas maka $a^{-1}a = e\epsilon$ H **(terbukti sifat refleksif)**

(ii) Akan ditunjukkan berlaku sifat simetri atau a R_L b → b R_L a

Ambil sebarang a,bϵ G dengan a R_L b

a R_L b menurut definisi maka $a^{-1}b\epsilon$ H, karena H≤G maka$(a^{-1}b)^{-1}\epsilon$ H (sifat invers), sehingga $b^{-1}a\epsilon$ H atau b R_L a **(terbukti sifat simetri)**

(iii) Akan ditunjukkan berlaku sifat transitif atau a R_L b dan b R_L c → a R_L c

aR_L b menurut defenisi $a^{-1}b\epsilon$ H

bR_L c menurut defenisi $b^{-1}c\epsilon$ H karena H≤G maka di penuhi sifat tertutup atau $(a^{-1}b)(b^{-1}c)\epsilon$ H atau

$a^{-1}(bb^{-1})\ c \in$ H

$a^{-1}c\epsilon$H atau a R_L c

Jadi terbukti a R_L b dan b R_L c → a R_L c **(terbukti sifat transitif)**

Dengan dipenuhi ketiga sifat tersebut maka relasi R_L merupakan relasi ekuivalen, jadi G terpecah atas kelas- kelas saling asing, misalnya:

$$S_a = \{x \in G \mid aR_L x\} = \{x \in G \mid a^{-1}x \in H\}$$
$$= \{x \in G \mid x \in aH\}$$
$$= \{ah \quad \mid h \in H\} = aH$$
$$S_b = \{x \in G \mid bR_L x\} = \{x \in G \mid b^{-1}x \in H\}$$
$$= \{x \in G \mid x \in bH\}$$
$$= \{bh \quad \mid h \in H\} = bH$$
$$S_c = \{x \in G \mid cR_L x\} = \{x \in G \mid c^{-1}x \in H\}$$
$$= \{x \in G \mid x \in cH\}$$
$$= \{ch \quad \mid h \in H\} = cH$$

Dan seterusnya sehingga kita peroleh

$aH \cup bH \cup cH \cup eH \cup ..... \cup = G\, dan$

$aH \cap bH \cap cH \cap eH \cap ..... \cap = \phi$

$aH; bH; cH; eH = H$ *disebut koset kiri dari* H *dalam* G

Bukti 2:

(i) Akan ditunjukkan berlaku sifat refleksif atau a R_R a

Ambil sebarang a ϵ G, $a.a^{-1} = e$ karena H≤G dengan sifat ketunggalan identitas maka $a\ a^{-1} = e \epsilon$ H **(terbukti sifat refleksif)**

(ii) Akan ditunjukkan berlaku sifat simetri atau a R_R b → b R_R a

Ambil sebarang a,bϵ G dengan a R_R b

a R_R b menurut defenisi maka $a\, b^{-1} \epsilon$ H, karena H≤G maka$(ab^{-1})^{-1} \epsilon$ H (sifat invers), sehingga$b\ a^{-1} \epsilon$ H atau b R_R a **(terbukti sifat simetri)**

(iii)Akan ditunjukkan berlaku sifat transitif atau a R_R b dan b R_R c → a R_R c

a R_R b menurut defenisi $a\, b^{-1} \epsilon$ H

b R_R c menurut defenisi $b\, c^{-1} \epsilon$ H karena H≤G maka di penuhi sifat tertutup atau$(a\, b^{-1})(b\, c^{-1}) \epsilon$ H

$a\ (b^{-1}b)c^{-1}\ \epsilon$ H

$a\, c^{-1} \epsilon$H atau a R_R c

Jadi terbukti a R_R b dan b R_R c → a R_R c **(terbukti sifat transitif)**

Dengan dipenuhi ketiga sifat tersebut maka relasi R_R merupakan relasi ekuivalen, jadi G terpecah atas kelas-kelas saling asing, misalnya:

$$S_a = \{x \in G \mid aR_R x\} = \{x \in G \mid x\, a^{-1} \in H\}$$

$$= \{x \in G \mid x \in Ha\}$$

$$= \{ha \quad \mid h \in H\} = Ha$$

$$S_b = \{x \in G \mid bR_R x\} = \{x \in G \mid x\, b^{-1} \in H\}$$

$$= \{x \in G \mid x \in Hb\}$$

$$= \{hb \quad \mid h \in H\} = Hb$$

$$S_c = \{x \in G \mid cR_R x\} = \{x \in G \mid x\, c^{-1} \in H\}$$

$$= \{x \in G \mid x \in Hc\}$$

$$= \{hc \quad \mid h \in H\} = Hc$$

Dan seterusnya sehingga kita peroleh

$Ha \cup Hb \cup Hc \cup He \cup .....\cup = G\ dan$

$Ha \cap Hb \cap Hc \cap He \cap .....\cap = \phi$

$Ha; Hb; Hc; He = H\ disebut\ \ koset\ kanan\ dari\ H\ dalam\ G$

Definisi 6.2:

Jika H subgrup dari $G, a \in G, maka\, Ha = \{ha \mid h \in H\}$disebut koset kanan dari H dalam G dan $aH = \{ah \mid h \in H\}$ disebut koset kiri dari H dalam G

Contoh 1:

Anggap Z adalah sebuah grup bilangan bulat dalam operasi penjumlahan dan subgrup H= {…, -8, -4, 0, 4, 8, …}terdiri dari kelipatan empat. Tentukan koset kiri dari H di Z.

Penyelesaian:

- Akan dibuktikan bahwa H= 4Z merupakan subgrup dari Z. Jelas bahwa 4Z ⊂ Z dan 4Z tidak kosong sebab $0 \in 4Z$. Ambil sebarang $a, b \in 4Z$, maka $a = 4k$ dan $b = 4n$, untuk suatu $k, n \in Z$.

  Diperoleh: $a + b^{-1} = a + (-b) = a - b = 4k - 4n = 4\,(k - n) \in 4Z$,

  dengan $k - n \in 4Z$.

  Berdasarkan teorema subgrup A-4 (S.Saragih, 2014: 87),terbukti bahwa 4Z merupakan subgrup dari Z.
- Koset kiri dari H di Z yaitu:

$$0 + H = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\} = 4Z$$

$$1 + H = \{\dots,-7,-3,1,5,9,\dots\} = -3 + 4Z$$
$$2 + H = \{\dots,-6,-2,2,6,10,\dots\} = -2 + 4Z$$
$$3 + H = \{\dots,-5,-1,3,7,11,\dots\} = -1 + 4Z$$

Apabila diteruskan $\dots,4 + H, 5 + H, \dots$ hasilnya akan berulang.Maka koset kiri dari H di Z adalah $Z/H = Z/4Z = \{0+H, 1+H, 2+H, 3+H\}$

Contoh 2: (Galian, 1998: 133)

Misalkan $H = \{0,3,6\}$ di dalam Z_9 pada penjumlahan modulo 9 dalam kasus ini operasi grup adalah penjumlahan, kita notasikan $a + H$ diwakili dengan aH. Tentukan koset kiri dari H di Z_9

Penyelesaian:

- Akan ditunjukkan H adalah subgrup dari G dengan menggunakan tabel cayley yaitu:

$+_9$	0	3	6
0	0	3	6
3	3	6	0
6	6	0	3

Dapat dilihat bahwa operasi "$+_9$" pada H bersifat tertutup dan setiap elemen dari H mempunyai invers di H, yaitu $0^{-1} = 0$, $3^{-1} = 6$, $6^{-1} = 3$. Sehingga diperoleh bahwa H subgrup di Z_9.

- Maka koset kiri dari H dalam Z_9 adalah:

$$0 + H = \{0,3,6\} = 3 + H = 6 + H$$
$$1 + H = \{1,4,7\} = 4 + H = 7 + H$$
$$2 + H = \{2,5,8\} = 5 + H = 8 + H$$

Maka koset kiri dari H dalam Z_9 adalah: $Z_9/H = \{0 + H, 1 + H, 2 + H\}$

Contoh 3: (S. Saragih, 2014: 140)

$< Z, + >$ merupakan grup, dapat ditunjukkan bahwa $< 3Z, + >$ subgrup dari $< Z, + >$. Bagaimana dengan koset kanan dari $3Z$?

Penyelesaian:

Koset-koset kiri dari $3Z$ adalah:

$0 + 3Z = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} = 3Z$

$1 + 3Z = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$

$2 + 3Z = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

$3 + 3Z = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} = 0 + 3Z = 3Z$

$-1 + 3Z = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} = 2 + 3Z$

Dan seterusnya sehingga hanya ada 3 koset kiri yaitu: $0 + 3Z$; $1 + 3Z$; dan $2 + 3Z$ atau Z/3Z = {0 + 3Z, 1 + 3Z, 2 + 3Z}= himpunan semua bilangan bulat modulo 3.

Koset-koset kanan dari 3Z adalah:

$3Z + 0 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} = 3Z$

$3Z + 1 = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$

$3Z + 2 = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

$3Z + 3 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} = 0 + 3Z = 3Z$

$3Z + (-1) = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} = 2 + 3Z$

Dan seterusnya sehingga hanya ada 3 koset kanan yaitu: $3Z + 0$; $3Z + 1$; dan $3Z + 2$ atau $Z/3Z = \{3Z + 0;\ 3Z + 1;\ 3Z + 2\}$

Ternyata koset kiri sama dengan koset kanan.

Apakah dengan operasi yang sama pada Z (penjumlahan biasa pada bilangan bulat) Z/3Z merupakan grup?

Perhatikan Tabel Cayley berikut:

Tabel 6.1 Menunjukkan Tabel Cayley dari Grup < Z/3Z, + >

+	**0 + 3Z**	**1 + 3Z**	**2 + 3Z**
0 + 3Z	0 + 3Z	1 + 3Z	2 + 3Z
1 + 3Z	1 + 3Z	2 + 3Z	0 + 3Z
2 + 3Z	2 + 3Z	0 + 3Z	1 + 3Z

Z/3Z memiliki unsur yang berhingga dan dari tabel cayley berlaku sifat tertutup menurut teorema A-4 maka Z/3Z merupakan subgroup.

Contoh 4:

Diketahui grup permutasi S_3 sebagai berikut:

$\rho_o = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rho_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rho_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\mu_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \mu_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mu_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Tabel perkalian dari S_3 adalah:

*	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Apabila $H = \{\rho_0, \mu_1\}$merupakan subgroup dari $s_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$. Tentukan koset kiri dan koset kanan dari H di G

Penyelesaian:$H\rho_0 = H = \{\rho_0, \mu_1\}$

Koset Kanan	Koset Kiri
$H\rho_0 = H = \{\rho_0, \mu_1\}$	$\rho_0 H = H = \{\rho_0, \mu_1\}$
$H\rho_1 = \{\rho_1, \mu_2\}$	$\rho_1 H = \{\rho_1, \mu_3\}$
$H\rho_2 = \{\rho_2, \mu_3\}$	$\rho_2 H = \{\rho_2, \mu_2\}$

Kesimpulan: Koset kiri ≠ koset kanan

Teorema 6.3:

G suatu grup dan H subgrup dari G, $\forall a \in G$ maka terdapat korespondensi satu-satu antara Ha, aH dan H sendiri.

Bukti:

Bangun pemetaan $\beta: H \rightarrow Ha$ dengan $\beta(h) = ha$ untuk setiap $h \in H$merupakan pemetaan injektif dan surjektif

(i) Akan ditunjukkan β injektif:

Ambil sembarang $h_1, h_2 \in H$ dengan $\beta(h_1) = \beta(h_2)$ maka

$h_1 a = h_2 a$ (dengan hukum kanselasi kanan) diperoleh $h_1 = h_2$

Jadi apabila $\beta(h_1) = \beta(h_2)$ maka $h_1 = h_2$sehingga **(terbukti β injektif)**

(ii) Akan ditunjukkan β surjektif:

Ambil $t \in Ha$ akan ditunjukkan $\exists h \in H \ni \beta(h) = t$

$t = \beta(h) \to t = ha \to ha.a^{-1} = ta^{-1}$

$h = ta^{-1}$

Jadi untuk setiap $t \in Ha$ $\exists h = ta^{-1} \in H \ni \beta(h) = t$

(Terbukti bahwa β surjektif)

Berdasarkan (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa β bijektif sehingga H dan Ha mempunyai elemen yang sama banyak. Dengan cara serupa dapat ditunjukkan bahwa H juga mempunyai elemen yang sama banyaknya dengan aH untuk setiap a ϵ G.

Definisi 6.4:

Jika G suatu grup dan $a \in G$, order (periode) dari elemen a adalah bilangan bulat positif terkecil m sehingga $a^m = e$, dinotasikan o(a)

Contoh 5: (S. Saragih, 2014: 145)

$G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dengan operasi penjumlahan modulo 6 dapat ditunjukkan G merupakan grup dengan unsur netral $e = 0$

Penyelesaian:

Kita ambil untuk:

1. Untuk a = 3 maka $3^1 = 3$, $3^2 = 0 = e$

   Jadi m = 2 maka order dari 3 atau o(3) = 2
2. Untuk a = 4 maka $4^1 = 4$, $4^2 = 2$, $4^3 = 0 = e$
3. Untuk a = 5 maka $5^1 = 5$, $5^2 = 4$, $5^3 = 3$, $5^4 = 2$, $5^5 = 1$

Dari (1) dan (2) terdapat bilangan bulat positif terkecil $m \ni a^m = e$ maka dapat dikatakan a berorder finit (berhingga) sedangkan (3) tidak terdapat $m \ni a^m = e$ maka a dikatakan berorder infinit (tak hingga)

Contoh 6: (Galian, 1998: 61)

Dalam $U(10) = \{1,3,7,9\}$ dengan operasi Perkalian modulo 10 dapat ditunjukkan setiap unsur-unsurnya mempunyai order finit

1. Untuk $a = 1$ maka $1^0 = 1$, $1^1 = 1 = e$

Dengan $a^m = e$, sehingga $\mathbf{1^1 = 1 = e, \Rightarrow m = 1}$

2. Untuk $a = 3$ maka $\mathbf{3^0 = 1,\ 3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 7,\ 3^4 = 1 = e}$

   Dengan $a^m = e$, sehingga $\mathbf{3^4 = 1 = e, \Rightarrow m = 4}$

3. Untuk $a = 7$ maka $\mathbf{7^0 = 1,\ 7^1 = 7,\ 7^2 = 9,\ 7^3 = 3,\ 7^4 = 1 = e}$

   Dengan $a^m = e$, sehingga $\mathbf{7^4 = 1 = e, \Rightarrow m = 4}$

   Untuk $a = 9$ maka $\mathbf{9^0 = 1,\ 9^1 = 9,\ 9^2 = 1 = e}$

   Dengan $a^m = e$, sehingga $\mathbf{9^2 = 1 = e, \Rightarrow m = 2}$

Berdasarkan kelima poin di atas telah dapat ditunjukkan bahwa setiap unsur dari $U(10)$ adalah mempunyai order finit.

Teorema 6.5:

Jika grup finit (berhingga) dan H adalah subgrup dari G maka $o(H)$ merupakan pembagi dari $o(G)$

Bukti:

Misal $o(G) = n$ dan $o(H) = m$

Karena G berhingga maka terdapat sejumlah berhingga koset kiri dari H, dinamakan a_1H, a_2H,... ,a_rH. Berdasarkan teorema A-2 : diketahui banyaknya elemen setiap koset kanan dan kiri yang berlainan mempunyai order yang sama dengan H. sehingga:

$o(a_1H) = o(a_2H) = \ldots = o(a_rH) = m$,

Karena banyaknya koset yang berlainan dari H atau (a_iH) membentuk partisi pada G maka:

$o(a_1H) + o(a_2H) + \ldots + o(a_rH) = n$

$\leftrightarrow \underbrace{m + m + \ldots + m}_{r} = n$

$\leftrightarrow r\,m = n.$

Jadi $m \mid n.$

Atau menurut teorema A-2 juga bahwa sebarang dua koset kanan yang berlainan dari H adalah identik atau tidak mempunyai elemen persekutuan berarti sebarang a ϵ G menentukan dengan tunggal suatu koset kanan Ha. Misalkan m adalah banyaknya koset kanan yang berlainan dari H dalam G, dan setiap koset kanan mempunyai anggota sebanyak $o(H)$ maka kita peroleh $o(G) = mo(H)$ merupakan pembagi $o(G)$.

Contoh 7:

Tentukanlah pembagi dari orde dari grup (Z_{12}).

Penyelesaian:

Perhatikan grup Z_{12}. Subgrup dari Z_{12} adalah:

H={0}; H_1 ={0,6}; H_2 ={0, 4, 8}; H_3 ={0, 3, 6, 9}; H_4 = {0, 2, 4, 6, 8, 10}; dan Z_{12}.

Perhatikan bahwa orde dari H adalah 1, orde dari H_1 adalah 2, orde dari H_2 adalah 3, orde dari H_3 adalah 4, dan orde dari H_4 adalah 6 yang masing-masing merupakan pembagi dari orde dari grup (Z_{12}), yakni 12.

Definisi 6.6:

Jika H adalah subgrub dari grup G, indeks dari H dalam G adalah banyaknya koset kanan berlainan dari H dalam G, dinotasikan dengan $i_G(H)$.

Contoh 8:

Perhatikan grup G = Z_8. Himpunan H = {0, 2, 4, 6} dan himpunan M = {0, 4} masing-masing adalah subgrup dari G. Lebih lanjut M adalah subgrup dari H.

Tentukanlah:

a. Indeks H dalam G dan koset kiri dari H dalam G
b. Indeks M dalam G dan koset kiri dari M dalam G
c. Koset kiri dari M dalam H

Penyelesaian:

a. G = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} maka o(G) = 8

   H = {0, 2, 4, 6} maka o(H) = 4

   Koset kiri dari H dalam G adalah:

   H = {0, 2, 4, 6} dan 1 + H ={1, 3, 5, 7}

   Sehingga [G : H] = $\frac{O(G)}{O(H)} = \frac{8}{4} = 2$

b. G = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} maka o(G) = 8

   M = {0, 4} maka o(M) = 2

Koset kiri dari M dalam G adalah:

M = {0, 4}, dan 1 + M = {1, 5}, 2 + M = {2, 6}, 3 + M ={3, 7}

Sehingga [G : M] = $\frac{o(G)}{O(M)} = \frac{8}{2} = 4$

c. Koset kiri dari M dalam H adalah:

M = {0, 4} dan 2 + M = {2, 6}

Maka [H : M] = $\frac{4}{2} = 2$

Jadi, diperoleh [G : M] = [G : H] [H : M]

Teorema 6.7:

Jika G adalah grup berhingga dan a ∈ G maka order dari a atau o(a) merupakan pembagi dari order G atau o(G)

Bukti:

Untuk membuktikan teorema di atas pertama-tama kita bangun subgrup dari G yang banyak elemennya adalah o(a), hal ini dapat kita lakukan dengan membentuk grup siklik dengan generatornya adalah a ∈ G, subgrup tersebut adalah:

$$\{a^m | a \in G\} = \{a^1, a^2, a^3, \ldots\ldots a^{0(a)} = e\}$$

Semua elemennya berbeda.

Dengan demikian subgrup tersebut memiliki unsur sebanyak o(a) atau order dari a. Dengan menggunakan teorema di atas, maka terbukti bahwa o(a) merupakan pembagi dari order G.

Contoh 9:

Misalkan G = {1,2,3,4,5,6} grup dalam perkalian modulo 7

Pertanyaan:

a. Buatlah tabel perkalian untuk G
b. Tentukan orde dan sub grup yang dibangun oleh 2 dan 3
c. Apakah G siklik?

Penyelesaian:

a. Tabel Cayley perkalian untuk G

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

b. Unsur identitas e = 1

Unsur elemen 2, periksa

$2^1 = 2,\ 2^2 = 4, 2^3 = 1 \Rightarrow |2| = 3$ dan

Subgrup yang dibangun oleh 2 adalah $\langle 2 \rangle = \{1,2,4\}$

Unsur elemen 3, periksa

$3^1 = 3,\ 3^2 = 2, 3^3 = 6, 3^4 = 4, 3^5 = 5, 3^6 = 1 \Rightarrow |3| = 6$

Subgrup yang dibangun oleh 3 adalah $\langle 3 \rangle = \{1,2,3,4,5,6\}$

c. Oleh karena $G = \langle 3 \rangle = \{1,2,3,4,5,6\}$, maka G adalah siklik

6.2.SUBGRUP NORMAL

Definisi:

Suatu subgrup N disebut subgrup normal dari G jika aN = Na, ∀ a ∈ G

Contoh 1: (S. Saragih, 2014: 147)

Misalkan grup $Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan $H_1 = \{0, 4\}$ dan $H_2 = \{0, 2, 4, 6\}$ masing-masing merupakan subgrup dari Z_8. Apakah keduanya merupakan subgrup normal dari Z_8?

Penyelesaian:

Jawabannya adalah ya, karena operasi penjumlahan modulo delapan berlaku sifat komutatif, sehingga berlaku **$aH_1 = H_1a$ dan $aH_2 = H_2a$;** ∀ a ∈ Z_8.

Contoh 2:

Misalkan $(G,+) = \boldsymbol{Z_4}$ adalah suatu Grup dan H = {0,2} merupakan Subgrup dari G. Tentukan koset kiri dan koset kanan dari H dalam G.

Penyelesaian :

- Akan ditunjukkan H adalah subgrup dari Gdengan tabel Cayley yaitu:

+	**0**	**2**
0	0	2
2	2	0

Dapat dilihat bahwa operasi "+" pada H bersifat tertutup dan setiap elemen dari H mempunyai invers di H, yaitu $0^{-1}=0$, $2^{-1}=2$. Sehingga diperoleh bahwa H subgrup di Z_4.

- Tentukan koset kiri dan koset kanan dari H dalam G.

Koset Kiri	**Koset Kanan**
$0+H=0+\{0,2\}=\{0,2\}$ $1+H=1+\{0,2\}=\{1,3\}$ $2+H=2+\{0,2\}=\{2,0\}$ $3+H=3+\{0,2\}=\{3,1\}$	$H+0=\{0,2\}+0=\{0,2\}$ $H+1=\{0,2\}+1=\{1,3\}$ $H+2=\{0,2\}+2=\{2,0\}$ $H+3=\{0,2\}+3=\{3,1\}$

Sehingga :
$$0+H=H+0=\{0,2\}$$
$$1+H=H+1=\{1,3\}$$
$$2+H=H+2=\{0,2\}$$
$$3+H=H+3=\{1,3\}$$

Maka koset kiri = koset kanan (Subgrup Normal)

Contoh 3:

Diketahui G= $S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$ dan H = $\{(1),(12)\}$. Tentukan koset kiri dan koset kanan dari H di G

Penyelesaian:

Koset Kiri	Koset Kanan
$(1)H=\{(1)(1),(1)(12)\}$ $=\{(1),(12)\}$	$H(1)=\{(1)(1),(12)(1)\}$ $=\{(1),(12)\}$
$(12)H=\{(12)(1),(12)(12)\}$ $=\{(12),(1)\}$	$H(12)=\{(1)(12),(12)(12)\}$ $=\{(12),(1)\}$
$(13)H=\{(13)(1),(13)(12)\}$ $=\{(13),(123)\}$	$H(13)=\{(1)(13),(12)(13)\}$ $=\{(13),(132)\}$
$(23)H=\{(23)(1),(23)(12)\}$ $=\{(23),(132)\}$	$H(23)=\{(1)(23),(12)(23)\}$ $=\{(23),(123)\}$
$(123)H=\{(123)(1),(123)(12)\}$ $=\{(123),(13)\}$	$H(123)=\{(1)(123),(12)(123)\}$ $=\{(123),(23)\}$
$(132)H=\{(132)(1),(132)(12)\}$ $=\{(132),(23)\}$	$H(132)=\{(1)(132),(12)(132)\}$ $=\{(132),(13)\}$

Dari tabel terlihat bahwa $(1)H = H(1)$dan $(12)H{=}H(12)$ yaitu koset kiri sama dengan koset kanan akan tetapi ternyata ada koset kiri yang tidak sama dengan koset kanan, yaitu $(13)H \neq H(13), (23)H \neq H(23), (123)H \neq H(123)$ dan $(132)H \neq H(132)$. Jadi, disimpulkan bahwa (**Bukan Subgrup Normal**)

Teorema 6.8:

Suatu subgrup N dari G merupakan subgrup normal dari grup G jika dan hanya jika $g\,N\,g^{-1} = N, \forall\, g \in G$.

Ada dua pernyataan di atas yang perlu dibuktikan:

1. Jika N subgrup normal dari grup G, maka $g\,N\,g^{-1} = N, \forall\, g \in G$.
2. Jika $g\,N\,g^{-1} = N, \forall\, g \in G$, maka N subgrup normal dari grup G.

Bukti (1):

N subgrup normal dari G menurut definisi, maka $g\,N = N\,g, \forall\, g \in G$ dari gN=Ng berarti $gn = ng, \forall\, n \in N$

$gng^{-1} = ngg^{-1}, \forall\, n \in N$

$gng^{-1} = n, \forall\, n \in N$

$gNg^{-1} = N, \forall\, n \in N$

Terbukti bahwa Jika N subgrup normal dari grup G, maka $g\,N\,g^{-1} = N, \forall\, g \in G$.

Bukti (2):

Kembali ingat defenisi A-1: Jika H subgrup dari G, $a \in G\, maka\; Ha = \{ha \mid h \in H\}$ disebut koset kanan dari H dalam G, sehingga $gNg^{-1} = N$ dapat diartikan dengan gN=Ng untuk setiap $g \in G$ yaitu jika koset kiri dan kanan dari N adalah sama.

Contoh 4: (S. Saragih, 2014: 148)

Misalkan G adalah himpunan semua bilangan bulat dengan operasi penjumlahan biasa, dan N himpunan semua bilangan bulat genap, diperoleh bahwa N merupakan subgrup dari G. Apakah N subgrup normal dari G?

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan $\forall\, g \in G$, dan $\forall\, n \in N$ berlaku $g\,n\,g^{-1} \in N$.

Ambil $g \in G$ dan $n \in N$ sebarang

Kita ketahui bahwa operasi penjumlahan invers dari g yaitu $g^{-1} = -g$

Kita perhatikan $g\,n\,g^{-1}$

$g\,n\,g^{-1} = g + n + g^{-1}$

$= g + n + (-g)$

$= n \in N$

$g\,n\,g^{-1} \in N$, karena pengambilan g dan n sebarang, maka terbukti bahwa $g\,n\,g^{-1} \in N$, $\forall\, g \in G$ dan $n \in N$.

6.3.GRUP FAKTOR

Teorema 6.9:

Jika N Subgrup Normal dari grup G, bangun himpunan $G/N = \{g\,N \mid g \in G\}$ didefinisikan operasi * sebagai berikut: $(aN) * (bN) = ab\,N$, $\forall\, aN, bN \in G/N$ maka $< G/N, * >$ merupakan grup.

Bukti:

Operasi * terdefinisi dengan baik artinya akan ditunjukkan pernyataan berikut ini benar.

(Jika $a'N = a\,N$, $b'N = b\,N$ dan $(a'N) * (b'N)$ maka $(aN) * (bN)$

Ambil sebarang $a'N$ dan $b'N \in G/N$, misalkan $a'N = a\,N$ dan $b'N = b\,N$ yang berarti terdapat n_1 dan n_2 sehingga $a' = an_1$ dan $b' = bn_2$

Perhatikan:

$(a'N) * (b'N)$ $= a'b'N = an_1\,bn_2\,N$ (karena $n_2 \in N$ maka $n_2N = N$)

$= an_1\,b\,N$ (karena N Subgrup normal maka $b\,N = Nb$)

$= an_1\,N\,b$ (karena $n_1 \in N$ maka $n_1N = N$)

$= a\,N\,b$ (karena N subgrup normal maka $b\,N = Nb$)

$= ab\,N$

$= aN * bN$ (terbukti sifat tertutup terpenuhi)

Sifat assosiatif dipenuhi:

Ambil sebarang $aN, bN, cN \in G/N$

$aN * (bN * cN) = a\,N * (bcN) = abc\,N = (abN) * (c\,N) = (aN*bN) * (cN)$

(Ingat $a, b, c \in G$) (terbukti sifat assosiatif dipenuhi).

Sifat identitas dipenuhi:

Pilih eN = N ∈ G/N sebagai unsur identitas, ambil sebarang a N ∈ G/N diperoleh:

(eN) * (aN) = (a N) * (e N) = a e N = a N

(terbukti sifat identitas dipenuhi)

Sifat invers dipenuhi:

Ambil sebarang a N ∈ G/N, pilih a^{-1} N ∈ G/N diperoleh:

(a N) (a^{-1} N) = (a^{-1} N) (a N) = a^{-1}a N = e N

(terbukti sifat invers dipenuhi)

Dengan dipenuhi keempat sifat tersebut, maka < G/N, * > merupakan Grup.

Definisi 6.10:

Grup G/N pada teorema di atas dinamakan grup faktor dari G modulo N atau disebut grup faktor dari G.

Contoh (1):

Misalkan <G,+> = Z_6 = {0, 1, 2, 3, 4, 5} adalah suatu Grup dan $H = \langle 2 \rangle = \{0,2,4\}$ adalah merupakan Subgrup dari G. Tentukan Grup Faktor dari G oleh H, yaitu (G/H).

Penyelesaian :

Telebih dahulu akan ditunjukkan bahwa Grup tersebut merupakan Subgrup Normal, dimana koset kiri sama dengan koset kanan. (G,+) = Z_6 = {0,1,2,3,4,5}.

Koset kiri :	Koset kanan:
$0 + H = 0 + \{0,2,4\} = \{0,2,4\}$	$H + 0 = \{0,2,4\} + 0 = \{0,2,4\}$
$1 + H = 1 + \{0,2,4\} = \{1,3,5\}$	$H + 1 = \{0,2,4\} + 1 = \{1,3,5\}$
$2 + H = 2 + \{0,2,4\} = \{2,4,0\}$	$H + 2 = \{0,2,4\} + 2 = \{2,4,0\}$
$3 + H = 3 + \{0,2,4\} = \{3,5,1\}$	$H + 3 = \{0,2,4\} + 3 = \{3,5,1\}$
$4 + H = 4 + \{0,2,4\} = \{4,0,2\}$	$H + 4 = \{0,2,4\} + 4 = \{4,0,2\}$
$5 + H = 5 + \{0,2,4\} = \{5,1,3\}$	$H + 5 = \{0,2,4\} + 5 = \{5,1,3\}$

Sehingga :

$$0 + H = H + 0 = \{0,2,4\}$$
$$1 + H = H + 1 = \{1,3,5\}$$
$$2 + H = H + 2 = \{2,4,0\}$$
$$3 + H = H + 3 = \{3,5,1\}$$
$$4 + H = H + 4 = \{4,0,2\}$$
$$5 + H = H + 5 = \{5,1,3\}$$

Dengan demikian, diketahui bahwa: koset kiri = koset kanan, sehingga Subgrup dari H = < 2 > = {0,2,4} merupakan Subgrup Normal

Sekarang kita akan menentukan Grup Faktor G oleh H yang dibentuk dari Subgrup Normal tersebut :

$$Ind\left|\frac{G}{H}\right| = Ind|G{:}\,H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2$$

Unsur-unsur dari Grup Faktor tersebut adalah 2.Misalkan kita ambil koset kiri :

$$0 + H = \{0, 2, 4\}$$
$$1 + H = \{1, 3, 5\}$$
$$2 + H = \{2, 4, 0\}$$
$$3 + H = \{3, 5, 1\}$$
$$H + 4 = \{4, 0, 2\}$$
$$H + 5 = \{5, 1, 3\}$$

Maka :

$$0 + H = 2 + H = 4 + H = \{0, 2, 4\}$$
$$1 + H = 3 + H = 5 + H = \{1, 3, 5\}$$

Unsur-unsur dari Grup Faktor tersebut adalah 2 :

$0 + H = \{0, 2, 4\} = H$

$1 + H = \{1, 3, 5\}$

$Maka\ G/H = \{0 + H, 1 + H\}$

Adapun daftar Cayley dari Grup Faktor tersebut adalah :

Tabel

Grup Faktor dari G = Z_6 oleh H = {0, 2, 4}

$+$	H	$1+H$
H	H	$1+H$
$1+H$	$1+H$	H

Contoh (2):

Diketahui H = {0, 3} subgrup normal dari Z_6 dan ada tiga koset kiri dari H di Z_6, yaitu H = {0, 3}, 1+H = {1,4} dan 2 + H = {2, 5}. Oleh karena itu diperoleh grup faktor Z_6/H = {H, 1+H, 2+H } dengan tabel Cayley sebagai berikut:

$+$	H	$1+H$	$2+H$
H	H	$1+H$	$2+H$
$1+H$	$1+H$	$2+H$	H
$2+H$	$2+H$	H	$1+H$

Contoh 3: (S. Saragih, 2014: 152)

Pada contoh sebelumnya Z_{30} merupakan grup dan $< 5 >$ merupakan subgrup dari Z_{30}. Dapat ditunjukkan bahwa grup faktor dari $< 5 >$ pada Z_{30} adalah $Z_{30}/< 5 >$ $= \{0+< 5 >; 1+< 5 >; 2+< 5 >; 3+< 5 >; 4+< 5 >\}$

Dengan menggunakan tabel Cayley diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 2. Menunjukkan Tabel Cayley dari Grup Faktor $< Z_{30}/ <5>, + >$

$+$	$0+<5>$	$1+<5>$	$2+<5>$	$3+<5>$	$4+<5>$
$0+<5>$	$0+<5>$	$1+<5>$	$2+<5>$	$3+<5>$	$4+<5>$
$1+<5>$	$1+<5>$	$2+<5>$	$3+<5>$	$4+<5>$	$0+<5>$
$2+<5>$	$2+<5>$	$3+<5>$	$4+<5>$	$0+<5>$	$1+<5>$
$3+<5>$	$3+<5>$	$4+<5>$	$0+<5>$	$1+<5>$	$2+<5>$
$4+<5>$	$4+<5>$	$0+<5>$	$1+<5>$	$2+<5>$	$3+<5>$

$Z_{30}/ <5>$ memiliki unsur yang berhingga dan dari tabel cayley berlaku sifat tertutup menurut teorema A-4 maka Z/4Z merupakan grup.

LATIHAN

1. Misalkan $H = \{0,2,4,6,8\}$ di dalam Z_9 pada penjumlahan modulo 9 dalam kasus ini operasi grup adalah penjumlahan, kita notasikan $a + H$ diwakili dengan aH. Tentukan koset kiri dari H di Z_9
2. Diketahui grup permutasi S_3 sebagai berikut:

   $$\rho_o = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \rho_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix} \rho_2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

   $$\mu_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix} \mu_2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} \mu_3 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

   Tentukan subgrup yang dibangun oleh setiap elemen dari S_3
3. Tunjukkan bahwa $< 2Z, +>$ subgrup dari $< Z, +>$. Bagaimana dengan koset kanan dari $2Z$?

4. Perhatikan grup $G = Z_{10}$. Himpunan $H = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ dan himpunan $M = \{0, 6\}$ masing-masing adalah subgrup dari G. Lebih lanjut M adalah subgrup dari H. Tentukanlah:
   a. Indeks H dalam G dan koset kiri dari H dalam G
   b. Indeks M dalam G dan koset kiri dari M dalam G
   c. Koset kiri dari M dalam H
5. Misalkan $G = \{1,2,3,4,5\}$ grup dalam perkalian modulo 10

   Pertanyaan:
   a. Buatlah tabel perkalian untuk G
   b. Tentukan orde dan sub grup yang dibangun oleh 2 dan 3
   c. Apakah G siklik?
6. Misalkan grup $Z_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dan $H_1 = \{0, 5, 10\}$, $H_2 = \{0, 3, 6, 9\}$ dan $H_2 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, masing-masing merupakan subgrup dari Z_{10}. Apakah keduanya merupakan subgrup normal dari Z_{10}?
7. Misalkan $\langle G,+\rangle = Z_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ adalah suatu Grup dan $H = \langle 3 \rangle = \{0,3,6\}$ adalah merupakan Subgrup dari G. Tentukan Grup Faktor dari G oleh H, yaitu (G/H).

BAB VII

KARAKTERISTIK RING

7.1. RING

Defenisi 7.1:

Misalkan R adalah suatu Ring, karakteristik dari Ring R adalah suatu bilangan bulat positif terkecil n sehingga :

$$n.x = x + x + \cdots + x = 0 \quad , \ \forall x \in R.$$

Bila tidak terdapat bilangan yang demikian, maka R mempunyai karakteristik nol (0).

Contoh 1 :

Himpunan bilangan bulat modulo 4 atau Z_4 dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 4 adalah suatu ring dengan unsur kesatuan. Tentukan karakteristik dari ring Z_4 .

Penyelesaian :

Berdasarkan defenisi di atas karakteristik dari Z_4 adalah 4, karena $4\,x = 0$, untuk semua $x \in Z_4$.

$$Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

Karakteristik dari Z_4 adalah 4 , karena $4 \times 0 = 0$

$$4 \times 1 = 0$$

$$4 \times 2 = 0$$

$$4 \times 3 = 0\,,$$

Kesimpulannya : Karakteristik dari Z_n adalah n , karakteristik dari Ring bilangan Z adalah 0, karena tidak terdapat bilangan bulat positif n sehingga $n\,x = 0\,, \forall x \in Z$.

Contoh 2:

Perhatikan Ring dari himpunan kuasa di bawah ini,

$$A = \{1, 2\}\,,\ P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}.$$

Tentukan karakteristik dari himpunan kuasa di atas.

Penyelesaian :

Karakteristik dari $P(A)$ adalah 2, karena

$$2\emptyset \ = \emptyset + \emptyset = (\emptyset \cup \emptyset) \setminus (\emptyset \cap \emptyset) = \emptyset$$

$$2\{1\} = \{1\} + \{1\} = (\{1\} \cup \{1\}) \setminus (\{1\} \cap \{1\}) = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$$

$$2\{2\} = \{2\} + \{2\} = (\{2\} \cup \{2\}) \setminus (\{2\} \cap \{2\}) = \{2\} \setminus \{2\} = \emptyset$$

$$2A = A + A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$$

Contoh 3:

Perhatikan ring $R = \{0, 1\}\ mod\ 2,$ maka karakteristik dari R adalah 2, sebab

$$2.1 = 1 + 1 = 0$$

$$2.0 = 0 + 0 = 0$$

Karena itu dua bilangan bulat positif terkecil sehingga $2.a = 0$ ntuk semua $a \in R$.

Teorema 7.2.

Andaikan R adalah suatu ring dengan unsur kesatuan 1. Jika orde dari unsur 1 adalah tak hingga, maka R mempunyai karakteristik 0. Jika unsur 1 mempunyai orde n, maka karakteristik dari R adalah n.

Bukti :

Jika unsur kesatuan 1 berorde tak hingga, maka tidak terdapat bilangan bulat n sehingga $n.1 = 0$.

Sehingga R mempunyai karakteristik 0.

Sekarang, kita misalkan unsur kesatuan 1 berorde n. Maka $n.1 = 0$. Hal ini berakibat untuk setiap $x \in R$ diperoleh

$$\begin{aligned} nx = n(1.x) &= 1.x + 1.x + \cdots + 1.x \\ &= (1 + 1 + \cdots + 1)x \\ &= (n.1)x \\ &= 0x = 0 \end{aligned}$$

Jadi, karakteristik dari R adalah n.

Teorema 7.3.

Bila D adalah suatu daerah integral, maka karakteristik dari D adalah 0 atau suatu bilangan prima.

Bukti :

Menurut teorema di atas kita cukup mencari orde dari unsur kesatuan 1. Bila orde dari unsur kesatuan 1 adalah tak hingga, maka karakteristik dari D adalah 0. Selanjutnya, misalkan orde dari unsur 1 adalah bilangan n yang bukan bilangan prima. Misalkan saja $n = km$ dengan $k < n$ dan $m < n$. Maka :

$$n.1 = (km).1 = (k.1)(m.1) = 0$$

Karena D adalah suatu daerah integral, maka D tidak mempunyai unsur pembagi nol. Hal ini berakibat $k.1 = 0$ atau $m.1 = 0$. Bertentangan dengan kenyataan bahwa orde dari unsur kesatuan 1 adalah n. Jadi n haruslah merupakan bilangan prima.

7.2. *Divisors of Zero* (Pembagi Nol)

Definisi 7.4:

Suatu unsur $a \neq 0$ pada suatu ring komutatif R, disebut sebagai **unsur pembagi nol** (***divisor of zero***) bilamana terdapat suatu unsur $b \neq 0$ sehingga $a.b = 0$ atau $b.a = 0$.

Contoh 1:

Ring $\langle Z_{12}, +, \ . \rangle$, maka unsur-unsur 2, 3, 4, 5, 6 masing-masing adalah unsur pembagi nol, hal ini disebabkan (2)(6) = 0; (3)(4) = 0; (4)(3) = 0; (6)(2) = 0.

Contoh 2:

Bilangan bulat modulo 6 , $I_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

Jawab:

$2 \times 3 = 3 \times 2 = 0 \ (mod\ 6)$

Jadi, bilangan bulat modulo d memuat **Pembagi Nol .**

Contoh 3:

Bilangan bulat modulo 5, $I_5 = \{0,1,2,3,4\}$

Jawab:

I_5 **tidak memuat pembagi nol** karena tidak ada anggota I_5 yang jika dikalikan akan menghasilkan bilangan nol (0).

Contoh 4:

$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in Z \right\}$ adalah Ring terhadap penjumlahan dan perkalian maka terdapat $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah **elemen pembagi nol** karena terdapat $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

LATIHAN

1. Buktikan bahwa himpunan bilangan bulat modulo 5 atau Z_5 dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 5 adalah suatu ring dengan unsur kesatuan. Tentukan karakteristik dari ring Z_5 .
2. Ring $\langle Z_{18}, +, \ . \rangle$, tentukan unsur pembagi nol nya.
3. Apakah bilangan bulat modulo 7 , $I_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ memuat Pembagi nol?

BAB VIII

INTEGRAL DOMAIN (DAERAH INTEGRAL)

Definisi 8.1:

Suatu ring komutatif D dengan unsur kesatuan yang tidak mempunyai unsur pembagi nol disebut sebagai daerah integral (*integral domain*).

Contoh 1:

Himpunan Z_5 dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 5 adalah suatu ring komutatif. Dengan memperhatikan tabel cayley dari Z_5 terhadap operasi perkalian modulo 5.

+	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Dapat disimpulkan bahwa Z_5 tidak mempunyai unsur pembagi nol sehingga Z_5 adalah suatu **daerah integral**.

Contoh 2:

$\langle Z_5, +, . \rangle$; $\langle Z_n, +, . \rangle$ Dengan *n* bilangan prima.

Ring dengan bilangan bulat *Z* adalah suatu integrak karena untuk setiap $x, y \in Z$, persamaan $x \,.\, y = 0$ dipenuhi hanya apabila $x = 0$ atau $y = 0$.

Contoh 3 :

R membentuk ring dengan unsur satuan tetapi tidak komutatif,

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ r & s \end{bmatrix} \middle| p, r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

berikan alasan mengapa R gagal menjadi daerah integral

Penyelesaian :

Gagal menjadi daerah integral karena R tidak komutataif,

Pilih

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 22 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tampak A · B ≠ B · A, sehingga R tidak komutatif.

Contoh 4:

P = {genap, ganjil} adalah suatu Ring Komutatif.

Tunjukkan bahwa Ring Komutatif tersebut adalah Daerah Integral

Penyelesaian:

Diketahui P = {genap, ganjil} adalah suatu Ring Komutatif

Syarat dari Daerah Integral adalah Ring Komutatif yang tidak mempunyai pembagi nol, dengan kata lain :

a·b = 0, untuk a = 0 atau b = 0

Misalkan :

X = {…,-3, -1, 1, 3, …} adalah himpunan bilangan ganjil dan

Y = {…, -4, -2, 0, 2, 4,…} adalah himpunan bilangan genap.

Dari himpunan tersebut dapat dilihat bahwa bilangan ganjil tidak ada unsur nol, tetapi bilangan genap ada unsur nol. Jadi dapat disimpulkan bahwa P = {genap, ganjil} merupakan Daerah Integral, karena $a \cdot b = 0$ jika $a = 0$ atau $b = 0, \forall\, a, b \in P$.

Contoh 5:

Tunjukan bahwa Z_4 bukan merupakan Integral Domain.

Penyelesaian :

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Dari tabel di atas dapat kita lihat bahwa [2] adalah merupakan pembagi nol, dimana diperolah [2].[2] = 0, sehingga kita tidak selalu dapat mengkensel seperti [2].[1] = [2].[3] tetapi [1] ¹ [3]. Jadi dapat disimpulkan bahwa **Z_4 bukan merupakan suatu Integral Domain** karena memiliki pembagi nol yaitu [2].

Kembali kita ingat bahwa pada suatu grup berlaku hukum kanselasi, tetapi secara umum hukum ini tidak berlaku pada ring. Teorema berikut ini memperlihatkan bahwa hukum kanselasi juga berlaku pada daerah integral.

Teorema 8.2:

Andaikan D adalah suatu daerah integral dan misalkan $a, b, c \in D$ dengan $a \neq 0$. Jika $ab = ac$, maka $b = c$.

Bukti:

Andaikan $ab = ac$, maka $ab - ac = 0$. Sehingga $a(b - c) = 0$. Karena D adalah suatu daerah integral, D tidak mempunyai unsur pembagi nol. Jadi $a(b - c) = 0$ akan berakibat $a = 0$ atau $b - c = 0$ yang berakibat $b = c$.

$ab - ac = 0$

$a(b - c) = 0, karena\ a \neq 0, maka\ b - c = 0\ (Integral\ Domain)$

$b - c = 0$

$b = c$ (terbukti)

LATIHAN

1. Apakah himpunan Z_8 dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 8 merupakan daerah integral?
2. Apakah U_9 dengan operasi perkalian modulo 9 merupakan Integral Domain?

BAB IX

FIELD (LAPANGAN)

Pada umumnya di dalam suatu Ring, penjumlahan, pengurangan dan perkalian terhadap unsur suatu Ring akan diperoleh hasil, tetapi untuk pembagian tidak selalu diperoleh hasil. Di dalam Integral Domain, unsur-unsurnya dapat dikensel tetapi tidak selalu diperoleh hasil bila dibagi dengan unsur yang bukan nol. Misalkan, bila $a, b \in Z$, maka $3a = 3b$ menghasilkan $a = b$, tetapi tidak setiap unsur Z dapat dibagi 3. Ada suatu sistem bilangan-bilangan yang selalu diperoleh hasil bila dibagi unsur yang bukan nol, yang disebut **Field (Lapangan).**

Definsi 9.1:

Suatu ring komutatif F dengan unsur kesatuan disebut sebagai lapangan (*field*) bilamana setiap unsur tak nol adalah unsur satuan.

Definisi di atas juga dapat kita nyatakan sebagai berikut. Suatu lapangan F adalah suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner "+" dan " . " dan $F* = F - \{0\}$ sehingga:

(1) $\langle F, +\rangle$ adalah suatu grup komutatif

(2) $\langle F^*, .\rangle$ adalah suatu grup komutatif

(3) Untuk semua $a, b, c \in R$ berlaku

$a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$ (sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan)

Jadi untuk menunjukan bahwa suatu Ring adalah Field harus kita buktikan Ring itu komutatif dan mempunyai unsur balikan atau invers terhadap perkalian. Atau kita tunjukan R merupakan suatu Grup Komutatif terhadap penjumlahan dan perkalian serta distributif perkalian terhadap

penjumlahan.

Contoh 1:

Selidiki apakah I_7 suatu field terhadap penjumlahan dan perkalian mod 7!

Penyelesaian:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

1. Tertutup"+"

   $(\forall a, b \in I_7)(\exists ! c \in I_7) a + b = c$

   misal:

   $1, 4 \in I_7 \rightarrow 1 + 4 = 5 ; 5 \in I_7$

   $2, 3 \in I_7 \rightarrow 2 + 3 = 5 ; 5 \in I_7, dst$

2. Assosiatif"+"

   $(\forall a, b \in I_7)(a + b) + c = a + (b + c)$

   misal:

   $1, 2, 4 \in I_7 \rightarrow (1 + 2) + 4 = 1 + (2 + 4)$

   $3 + 4 \quad = 1 + 6$

   $7 \quad = 7 \, (mod\, 7)$

Jadi elemen satuan terhadap "×" = 1

4'. Setiap elemen dalam I_7 mempunyai elemen invers "x"

$(\forall a \in I_7)(\exists\ a-1 \in I_7)(a-1)+a = a+(a-1) = 1$

Elemen invers dari 1, 2, 3, 4, 5, 6 masing – masing adalah 1, 4, 5, 2, 3, 6 sebab:

$1 \times 1 = 1 \qquad 4 \times 2 = 1$

$2 \times 4 = 1 \qquad 5 \times 3 = 1$

$3 \times 5 = 1 \qquad 6 \times 6 = 1$

5'. Komutatif "×"

$(\forall a, b \in I_7)\ a \times b = b \times a$

misal:

$2, 5 \in I_7 \rightarrow 2 \times 5 = 5 \times 2$

$3 = 3$

Distributif

$(\forall a, b, c \in I_7) a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

dan $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$

misal :

$1,3,4 \in I_7 \rightarrow 1 \times (3 + 4) = (1 \times 3) + (1 \times 4)$

$1 \times 7 = 3 + 4$

$(mod\ 7)\ 1 \times 0 = 7\ (mod\ 7)$

$0 = 0$

$(3 + 4) \times 1 = (3 \times 1) + (4 \times 1)$

$(mod\ 7)\ 7 \times 1 = 3 + 4$

$0 \times 1 = 7\ (mod\ 7)$

$0 = 0$

Karena I_7 memenuhi 1, 2, 3, 4, 5, 1', 2', 3', 4', 5' dan D maka I_7 **suatu field**

Contoh 2:

Ring komutatif himpunan bilangan real **R** dan himpunan bilangan rasional **Q**, dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa masing-masing adalah suatu lapangan dengan unsur kesatuan 1. Tetapi ring **Z** dengan unsur kesatuan 1 bukanlah suatu lapangan, karena unsur $3 \in \boldsymbol{Z}$ bukan unsur satuan.

Contoh 3:

Ring komutatif $\boldsymbol{Z_5}$ dengan unsur kesatuan 1 adalah suatu lapangan. Dari tabel Cayley

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Diketahui bahwa setiap unsur tak nol dari $\mathbf{Z_5}$ adalah suatu unsur satuan. Perhatikan bahwa dalam hal ini $1^{-1} = 1, 2^{-1} = 3, 3^{-1} = 2$ dan $4^{-1} = 4$.

Contoh 4:

P = {genap, ganjil} adalah suatu Ring Komutatif. Tunjukkan apakah Ring Komutatif tersebut adalah Field.

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui P = {genap, ganjil} adalah suatu Ring Komutatif

Syarat dari Field adalah Ring Komutatif yang mempunyai unsur balikan atau invers terhadap perkalian, dengan kata lain:

$\forall a \in P, \exists a^{-1} \in P$

sedemikian sehingga

$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Telah diketahui identitas dari *P* adalah *e* = ganjil

- Ambil sebarang nilai dari *P*

  Misalkan genap ∈ *P*, pilih ganjil ∈ *P* sehingga genap.ganjil = genap ≠ *e*
- Ambil sebarang nilai dari P

  Misalkan genap ∈ *P*, pilih genap ∈ *P* sehingga genap.genap = genap ≠ *e* maka *P* tidak ada unsur balikan atau invers.

Jadi dapat disimpulkan bahwa *P* = {genap, ganjil} bukan merupakan Field. Dari contoh tersebut, dapat kita simpulkan bahwa *P* = {genap, ganjil} dimana *P* ∈ *Z*, adalah suatu Ring Komutatif yang juga merupakan Integral Domain (Daerah Integral) tetapi bukan merupakan Field (Lapangan).

Contoh 5:

Diberikan S himpunan bilangan real dalam bentuk $a + b\sqrt{3}$ dimana a dan b bilangan rasional. Tunjukkan bahwa S adalah lapangan (field).

Penyelesaian:

Himpunan S bilangan real atau kompleks adalah lapangan jika S terdiri dari 0 dan 1 dan S tertutup pada penjumlahan,pengurangan, perkalian, dan pembagian (kecuali oleh nol). Karena $0 = 0 + 0\sqrt{3}$ dan $1 = 1 + 0\sqrt{3}$, maka 0 dan 1 termasuk anggota S.

Dan juga:

$$(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3}$$

$$(a + b\sqrt{3}) - (c + d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3}$$

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$$

Terbukti S tertutup atas penjumlahan, pengurangan, dan perkalian. Kita tunjukkan bahwa S tertutup atas pembagian:

$$\frac{(a + b\sqrt{3})}{(c + d\sqrt{3})} = \frac{(a + b\sqrt{3})(c - d\sqrt{3})}{(c + d\sqrt{3})(c - d\sqrt{3})} = \frac{ac - 3bd}{c^2 - 3d^2} + \frac{(bc - ad)\sqrt{3}}{c^2 - 3d^2}$$

Jadi terbukti S adalah lapangan.

Teorema 9.2:

Andaikan F adalah suatu lapangan, maka F adalah juga suatu daerah integral.

Bukti:

Kita cukup memperlihatkan bahwa F tidak mempunyai unsur pembagi nol. Yakni untuk sebarang $x, y \in F$ dengan $x \neq 0$ dan $xy = 0$, maka $y = 0$. Untuk itu perhatikan sebarang unsur $x, y \in F$ dengan $x \neq 0$ dan $xy = 0$. Karena F adalah suatu lapangan, maka setiap unsur tak nol mempunyai unsur kebalikan relatif terhadap operasi perkalian. Hal ini berakibat bahwa:

$$x^{-1}(xy) = x^{-1}.0 = 0$$

Tetapi $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1y = y$. Sehingga kita peroleh $y = 0$. Jadi F tidak mempunyai unsur pembagi nol. Sehingga dapatlah dinyatakan bahwa setiap lapangan adalah suatu daerah integral.

Pada kasus daerah integral tak hingga, maka konvers dari Teorema 2.2 juga benar seperti yang dinyatakan berikut ini:

Teorema 9.3:

Suatu daerah integral yang hingga adalah suatu lapangan.

Teorema 9.4:

Untuk setiap bilangan prima p, $\mathbf{Z_p}$ adalah suatu lapangan.

LATIHAN

1. Selidiki apakah I_9 suatu field terhadap penjumlahan dan perkalian mod 9?
2. Buktikan teorema 9.3 dan 9.4

BAB X

HOMOMORFISME DAN ISOMORFISME RING

PENGANTAR

Konsep Homomorfisme Ring adalah suatu konsep pemetaan dari suatu Ring ke Ring lain yang mempertahankan operasi Ring sedangkan Isomorfisma Ring adalah homomorfisma yang bersifat bijektif.

10.1.HOMOMORFISMA RING

Defenisi 10.1: (Homomorfisma Ring)

Andaika $\langle R,+,.\rangle$ dan $\langle S,+,.\rangle$ masing-masing adalah suatu Ring. Suatu pemetaan $\alpha : R \rightarrow S$ dikatakan sebagai suatu Homomorfisma Ring jika α mempertahankan operasi Ring $\forall$ x, y $\in$ R berlaku:

(i) $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

(ii) $\alpha(x \,.\, y) = \alpha(x) \,.\, \alpha(y)$

Sama seperti pada Homomorfisma grup, operasi "penjumlahan dan perkalian" pada ruas kiri dilakukan dengan menggunakan operasi penjumlahan dan perkalian di ring R, sementara pada ruas kanan dilakukan dengan menggunakan operasi yang berada di ring S.

Contoh 1

Perhatikan Ring bilangan bulat Z dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa dan Ring $M_2(Z) = \left\{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} : a,b,c,d \in Z\right\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Pemetaan $\alpha : Z \rightarrow M_2(Z)$ yang didefenisikan oleh $\alpha(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ merupakan suatu homomorfisma Ring, buktikan!

Bukti :

$\langle Z,+,x\rangle$ dan $\langle M_2(Z),+,.x\rangle$ merupakan ring. Akan ditunjukkan bahwa α pemetaan Homomorf berarti akan ditunjukkan $\forall$ x, y $\in$ Z berlaku :

(i) $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

(ii) $\alpha(x \,.\, y) = \alpha(x) \,.\, \alpha(y)$

Ambil Sembarang x, y $\in$ Z dengan $\alpha(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ dan $\alpha(y) = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$

Perhatikan :

(i) $$\alpha(x+y) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$
$$= \alpha(x) + \alpha(y)$$

Jadi $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$

(ii) $$\alpha(x\,y) = \begin{bmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$
$$= \alpha(x).\,\alpha(y)$$

Jadi $\alpha(x\,y) = \alpha(x).\,\alpha(y)$

Sehingga α adalah pemetaan **homomorfisma Ring.**

Contoh 2.

$G = \{a + b\sqrt{2}$ dengan $a, b \in Z\}$ dengan G terhadap operasi penjumlahan dan perkalian merupakan Ring. Pemetaan $f : G \rightarrow G$ yang didefenisikan oleh $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, $(a + b\sqrt{2}) \in G$, tunjukkan bahwa f homomorfisma ring.

<u>*Penyelesaian:*</u>

Akan ditunjukkan bahwa f pemetaan Homomorf artinya $\forall$ x, y $\in$ G berlaku:

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ii) $f(x.y) = f(x).f(y)$

Ambil sembarang $x, y \in G$ dengan $x = a + b\sqrt{2}$ dan $y = c + d\sqrt{2}$ maka $f(x) = f\left(a + b\sqrt{2}\right) = a - b\sqrt{2}$ dan $f(y) = f\left(c + d\sqrt{2}\right) = c - d\sqrt{2}$.

Perhatikan :

(i) $f(x+y) = f((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}))$

$= f((a+c) + (b+d)\sqrt{2})$

$= (a+c) - (b+d)\sqrt{2}$

$= (a - b\sqrt{2}) + (c - d\sqrt{2})$

$= f(a + b\sqrt{2}) + f(c + d\sqrt{2})$

$= f(x) + f(y)$

Jadi $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ii) $f(x.y) = f\left(\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right)\right)$

$= f((ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$

$= ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2}$

$= (a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})$

$= f(a + b\sqrt{2}).f(c + d\sqrt{2})$

$= f(x).f(y)$

Jadi $f(x.y) = f(x).f(y)$

Sehingga f adalah pemetaan **homomorfisma Ring.**

10.2.SIFAT-SIFAT HOMOMORFISMA

Pada bagian ini akan dikembangkan lagi fakta-fakta yang telah diperoleh pada homomorfisma grup ke dalam homomorfisma ring. Kita akan menemukan bahwa sifat homorfisma grup juga akan berlaku pada homomorfisma ring

Teorema 10.2

Andaikan $\phi : R \rightarrow S$ adalah suatu homomorfisma dari Ring R ke Ring S

1. Untuk setiap $r \in R$ dan $n \in Z$, $nr(\phi) = n(r)\phi$ dan $(r^n)\phi = (r\phi)^n$
2. Jika M adalah subring dari R, maka $(M)\phi$ adalah subring dari S
3. Jika R komutatif, maka $(R)\phi$ adalah komutatif

<u>Bukti :</u>

1. Jika $r \in R$ dan $n \in Z$, maka :

- $$(nr)\phi = (\overbrace{r + r + r + r + \ldots\ldots + r}^{\text{n buah}})\phi$$

$$= \overbrace{r(\phi) + r(\phi) + r(\phi) + r(\phi) + \ldots\ldots + r(\phi)}^{\text{n buah}}$$

$$= nr(\phi)$$

- $$(r^n)\phi = (\overbrace{r.\, r.\, r.\ldots\ldots.\, r}^{\text{n buah}})\phi$$

$$= \overbrace{r(\phi)\,.\,r(\phi)\,.\,r(\phi)\,.\ldots\ldots\ldots.\,r(\phi)}^{\text{n buah}}$$

$$= (r(\phi))^n$$

2. M subring dari R → $(M)\phi$ *subring dari S*

M subring dari R, Himpunan $(M)\phi = \{(m)\phi : m \in M\} \subseteq S$.

Karena $0 \in M$ dan M subring dari R maka $0' = (0)\phi \in (M)\phi$

Ambil sembarang dua unsur $(m_1)\phi, (m_2)\phi \in M$

$(m_1)\phi - (m_2)\phi = (m_1 - m_2)\phi$

Karena M adalah suatu subring maka $m_1 - m_2 \in M$ dan

$(m_1 - m_2)\,\phi \in (M)\phi$

Selanjutnya $(m_1)\,\phi \,.\, (m_2)\,\phi = (m_1 m_2)\,\phi$

Karena M adalah suatu subring maka $m_1 m_2 \in M$ dan

$(m_1 m_2)\,\phi \in (M)\,\phi$

Jadi menurut teorema subring $(M)\,\phi$ adalah suatu subring dari S

3. R komutatif akan ditunjukkan $(R)\,\phi$ adalah komutatif

Ambil sembarang $r_1, r_2 \in R$ karena R komutatif maka $r_1 r_2 = r_2 r_1$,

sehingga untuk sembarang $(r_1)\,\phi$, $(r_2)\,\phi \in (R)\,\phi$ *diperoleh :*

$$\begin{aligned}(r_1)\,\phi\,(r_2)\,\phi &= (r_1 r_2)\,\phi \\ &= (r_2 r_1)\,\phi \\ &= (r_2)\,\phi\,(r_1)\phi\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $(r_1)\,\phi\,(r_2)\,\phi = (r_2)\,\phi\,(r_1)\phi$ *artinya bahwa* $(R)\phi$ *merupakan ring komutatif.*

Dari teorema di atas dapat diketahui bahwa bayangan homomorfik dari suatu subring M adalah sub ring. Tetapi secara khusus bila M adalah suatu ideal dari gelanggang R, maka bayangan homomorphik dari suatu ideal belum tentu ideal, seperti yang diperlihatkan oleh contoh berikut ini.

Contoh 3

Kita telaah kembali pemetaan $\phi : Z \to M_2(Z)$ yang diberikan oleh Contoh 1. Perhatikan bahwa 2Z adalah suatu ideal dari Z. tetapi $(2Z)\phi$ bukanlah suatu ideal dari $M_2(Z)$. Karena untuk unsur-unsur

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \in M_2(Z)\,dan \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \in (2Z)$$

Diperoleh :

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix} \notin (2Z)$$

Jadi bayangan homomorphik dari 2Z bukanlah **suatu ideal.**

$$= (r_1 + N) + (r_2 + N)$$

$$= (r_1)\phi + (r_2)\phi$$

$$(r_1 r_2)\phi = (r_1 r_2) + N$$

$$= (r_1 + N)(r_2 + N)$$

$$= (r_1)\phi(r_2)\phi$$

Jadi pemetaan $\phi : R \longrightarrow R/N$ adalah suatu homomorfisma.

Defenisi 10.2 (Inti atau Kernel)

Andaikan R dan S adalah Ring dan misalkan ϕ:R → S adalah suatu homomorfisma gelanggang Inti dari ϕ didefenisikan sebagai:

$Inti(\phi) = \{r \in R : (r)\phi = 0 \in S\}$

Contoh 4

Perhatikan Ring Z_6 dengan operasi penjumlahan perkalian modulo 6 dan ring Z_2 dengan operasi penjumahan perkalian modulo 2. Pemetaan $\phi : Z \to Z_n$ yang didefenisikan oleh:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adalah suatu homomorfisma dengan Inti(ϕ)=$\{0,2,4\}$

Contoh 5

Perhatikan gelanggang Z dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa dan gelanggang Z_n dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo n. Pemetaan $\phi : Z \to Z_n$ yang didefenisikan $\phi(x) = x \bmod n$, Untuk setiap $x \in Z$ adalah suatu homomorfisma tentukan inti (ϕ)

Bukti :

Z , Zn ring, $\phi : Z \to Z_n$ di tunjukkan pemetaan Homomorf berarti akan ditunjukkan ∀ x, y ∈ Z berlaku :

(i) ϕ (x + y) = ϕ (x) + ϕ (y)

(ii) ϕ (x . y) = ϕ (x) . ϕ(y)

Ambil sembarang x, y $\in$ Z

$$\phi(x+y)=(x+y)\bmod n$$
$$=x\bmod n+y\bmod n$$
$$=\phi(x)+\phi(y)$$

dan

$$\phi(xy)=(xy)\bmod n$$
$$=(x\bmod n)(y\bmod n)$$
$$=\phi(x)\phi(y)$$

Jadi Terbukti bahwa pemetaan ϕ *homomorfisma*

Inti dari homomorfisma ϕ adalah $Inti(\phi)=\{x\in Z|\phi(x)=0\bmod n\}$

bila $x=kn$ dengan $k\in Z$, maka $\phi(x)=\phi(kn)=kn\bmod n=0\bmod n$

Jadi $kn\in Inti(\phi)$ sehingga $nZ\subseteq Inti(\phi)$. Sebaliknya jika $y\in Inti(\phi)$ maka $\phi(y)=0\bmod n$, Ini berarti y adalah kelipatan dari n

Hal ini berakibat $y\in nZ$ sehingga $Inti(\phi)\subseteq nZ$; Jadi $Inti(\phi)=nZ$

Teorema B-4

Jika $\phi:R\rightarrow S$ adalah homomorfisma Ring, maka $Inti(\phi)$ adalah suatu ideal dari R

Bukti:

1. Akan ditunjukkan $\forall$ $x,y\in Inti(\phi)\rightarrow x-y\in Inti(\phi)$.
2. Akan ditunjukkan $\forall$ $x\in R$ dan $x\in Inti(\phi)\rightarrow$ $rx\in Inti(\phi)$, dan $xr\in Inti(\phi)$

Bukti 1) Ambil Sembarang $x,y\in Inti(\phi)$, maka $\phi(x)=0$ *dan* $\phi(y)=0$

Karena ϕ suatu homomorfisma, maka

$$\phi(x-y)=\phi(x)-\phi(y)=0-0=0$$

Jadi $\phi(x-y)=0$ *maka* $(x-y)\in Inti(\phi)$

Bukti 2) Ambil sembarang $r\in R$ dan $x\in Inti(\phi)$ maka $\phi(x)=0$

Karena ϕ suatu homomorfisma, maka

$$\phi(rx) = \phi(r)\ \phi(x)$$
$$= \phi(r)\ \ 0$$
$$= 0$$

Jadi $\phi(rx)=0$ *maka* $rx \in Inti\phi)$

Ambil sembarang $r \in R$ dan $x \in Inti(\phi)$ maka $\phi(x) = 0$

Karena ϕ suatu homomorfisma, maka

$$\phi(xr) = \phi(x)\ \phi(r)$$
$$= \ 0\ \phi(r)$$
$$= 0$$

Jadi $\phi(xr)=0$ *maka* $xr \in Inti\phi)$

Terbuktilah bahwa Inti (ϕ) adalah suatu ideal dari R.

Contoh 6

Gelanggang Z_6 dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6 dan gelanggang Z_2 dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 2.

Pemetaan $\phi : Z_6 \rightarrow Z_2$ yang didefenisikan :

$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Homomorfisma $\phi : Z_6 \rightarrow Z_2$. merupakan ideal dari Z_6

dengan $Inti(\phi) = \{0,2,4\}$

Teorema B-5

Andaikan R adalah suatu ring . Bila N adalah Ideal dari R, maka N adalah Inti dari Homomorfisma ϕ: R →R/N yang didefenisikan oleh (r) ϕ = r + N

Bukti :

Unsur identitas terhadap operasi penjumlahan dari gelanggang R/N adalah N. Sehingga inti dari ϕ didefenisikan sebagai Inti (ϕ) = {r ∈R : (r) ϕ = N}

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa Inti (ϕ) = N. Andaikan x ∈ N, maka (x) ϕ = x + N = N, sehingga x ∈ Inti (ϕ), Hal ini berarti N ⊂ Inti (ϕ) Sebaliknya bila y ∈ Inti (ϕ), maka (y) ϕ = y + N = N. Karena y + N = N diperoleh y ∈ N. Sehingga Inti (ϕ) ⊂ N. Jadi Inti (ϕ) = N.

10.3.ISOMORFISMA RING

Defenisi 1: (Isomorfisma Ring)

Suatu Humomorfisma Ring ϕ : R → S dikatakan suatu Isomorfisma Jika ϕ adalah pemetaan bijektif.

Contoh 7

Andaikan $M_d(Z)=\left\{\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle| d \in Z\right\}$. Homomorfisma Ring ϕ : Z → $M_d(Z)$ adalah Isomorfisma Ring . Buktikan!

Bukti :

(1) Akan ditunjukkan bahwa ϕ merupakan pemetaan Injektif

Ambil sembarang $d_1, d_2 \in Z$ dengan $\phi(d_1) = \phi(d_2)$ sehingga

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = d_2$$

terbukti bahwa ϕ merupakan fungsi injektif.

(2) Akan ditunjukkan bahwa γ merupakan fungsi Surjektif

Ambil sembarang $\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M_d(R)$, terdapat $d \in Z$ sehingga ϕ(d) $= \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, jadi ϕ pemetaan Surjektif .

terbukti bahwa ϕ merupakan Isomorfisma Ring.

Contoh 8

Buktikan $Z[\sqrt{2}] \cong \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in Z\}$ dan $H = \left\{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} ; a, b \in Z\right\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa dan dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks.

Penyelesaian :

$$Z[\sqrt{2}] \cong H \to \theta : Z \to H$$

$$\theta : Z \to H(+, x)$$

$$\theta\left(a + b\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Adib : $Z[\sqrt{2}] \cong H \rightarrow Isomorphik$

θ Isomorphik maka akan ditunjukkan :

1. Homomorphisma
2. Fungsi Injektif
3. Fungsi Surjektif

1. Homomorphisma

Homomorfisma (+)

$\forall x, y \in Z[\sqrt{2}]$ berlaku $\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$

Ambil sebarang $a, b \in Z[\sqrt{2}]$

$$x = (a_1 + b_1\sqrt{2}) \rightarrow \theta(a_1 + b_1\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$y = (a_2 + b_2\sqrt{2}) \rightarrow \theta(a_2 + b_2\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$[(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})] \rightarrow \theta\,[(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})]$$

$$= \theta\,[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_1)\sqrt{2}]$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 2b_1 + 2b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \theta(a_1 + b_1\sqrt{2}) + \theta\,(a_2 + b_2\sqrt{2})$$

$$= \theta(x) + \theta(y)$$

Karena $\theta\,[(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})] = \theta(a_1 + b_1\sqrt{2}) + \theta\,(a_2 + b_2\sqrt{2})$

Maka terbukti θ untuk operasi penjumlahan adalah suatu homomorfisma.

Homomorfisma (x)

$\forall x, y \in Z[\sqrt{2}]$ berlaku $\theta(xy) = \theta(x).\theta(y)$

Ambil sebarang $a, b \in Z[\sqrt{2}]$

$$x = (a_1 + b_1\sqrt{2}) \rightarrow \theta(a_1 + b_1\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$y = (a_2 + b_2\sqrt{2}) \rightarrow \theta(a_2 + b_2\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$[(a_1 + b_1\sqrt{2}).(a_2 + b_2\sqrt{2})] \rightarrow \theta\,[(a_1 + b_1\sqrt{2}).(a_2 + b_2\sqrt{2})]$$

$$= \theta\left[a_1(a_2+b_2\sqrt{2})+b_1\sqrt{2}(a_2+b_2\sqrt{2})\right]$$
$$= \theta\left[a_1a_2+a_1b_2\sqrt{2}+a_2b_1\sqrt{2}+2b_1b_2\right]$$
$$= \begin{bmatrix} a_1a_2+2b_1b_2 & 2a_1b_2+2a_2b_1 \\ a_1b_1+a_2b_2 & 2b_1b_2+a_1a_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$
$$= \theta(a_1+b_1\sqrt{2}).\theta\,(a_2+b_2\sqrt{2})$$
$$= \theta(x)\,.\,\theta(y)$$

Karena $\theta\left[(a_1+b_1\sqrt{2}).(a_2+b_2\sqrt{2})\right] = \theta(a_1+b_1\sqrt{2})\,.\,\theta\,(a_2+b_2\sqrt{2})$

Maka terbukti θ untuk operasi perkalian adalah suatu homomorfisma.

Maka θ suatu homomorfisma.

2. **Fungsi Injektif**

Injektif→ $\forall\, x, y \in Z[\sqrt{2}]$ dengan $\theta(x) = \theta(y) \to x = y$

Ambil sembarang $x, y \in Z$ dengan $\theta(x) = \theta(y)$

$$\theta(x) = \theta(y)$$
$$\theta(a_1+b_1\sqrt{2}) = \theta(a_2+b_2\sqrt{2})$$
$$\begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$
$$x = y$$

Maka θ *Fungsi Injektif*

3. **Fungsi Surjektif**

Fungsi Surjektif→ $\forall \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \in H$, $\exists\,[a+b\sqrt{2}] \in Z[\sqrt{2}]$

$$\ni \theta(a+b\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$\therefore\ \boldsymbol{Z[\sqrt{2}] \cong H}$

Teorema 10.4:

Bila ϕ : R → S *adalah suatu homomorfisma dari Ring R pada Ring S dengan inti K, maka R/K ≅ S*

Bukti.

Kita akan mendefenisikan suatu pemetaan $\varphi : R/K \to S$ sedemikian sehingga $\emptyset$ adalah suatu isomorfisma. Karena $\emptyset$ adalah homomorfisma dari R pada S, S dapat dinyatakan sebagai :

$$S = \{(r)\emptyset : r \in R\}$$

Sehingga pemetaan φ dapat didefenisikan sebagai (r + K) φ = (r) φ. Karena pendefinisian φ melibatkan koset domainnya. Kita harus memperlihatkan bahwa φ didefenisikan dengan baik. Dengan perkataan lain, bila $r_1 + K = r_2 + K$ adalah suatu koset yang sama, maka kita harus memperlihatkan bahwa $(r_1 + K)\varphi = (r_2 + K)\varphi$, yakni $(r_1)\varphi=(r_2)\varphi$. Andaika $r_1 + K = r_2 + K$. Akibat 9.1.5 menjamin $r_1 - r_2 \in K$. Karena K adalah inti dari $\emptyset$, diperoleh $(r_1 - r_2)\emptyset = (r_1)\emptyset - (r_2)\emptyset = 0$. Sehingga $(r_1)\emptyset = (r_2)\emptyset$. Jadi φ adalah terdefenisi dengan baik.

Selanjutnya kita perlihatkan bahwa φ adalah suatu homomorfisma gelanggang. Untuk sebarang unsur $r_1 + K, r_2 + K \in R/K$, diperoleh

$((r_1 + K) + (r_2 + K))\varphi = ((r_1 + r_2) + K)\varphi= (r_1+r_2)\emptyset$

Karena $\emptyset$ adalah suatu homomorfisma gelanggang , $(r_1 + r_2)\emptyset= (r_1)\emptyset + (r_2)\emptyset$ sehingga.

$$\begin{aligned}((r_1 + K) + (r_2 + K)\varphi &= (r_1)\emptyset + (r_2)\emptyset \\ &= (r_1 + K)\varphi + (r_2 + K)\varphi\end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}((r_1 + K)(r_2 + K))\varphi &= ((r_1r_2) + K)\varphi \\ &= (r_1r_2)\varphi\end{aligned}$$

Karena $\emptyset$ adalah suatu homomorfisma gelanggang $(r_1r_2)\emptyset = (r_1)\emptyset(r_2)\emptyset$ sehingga

$$\begin{aligned}((r_1 + K)(r_2 + K)\varphi &= (r_1)\emptyset(r_2)\emptyset \\ &=(r_1 + K)\varphi(r_2 + K)\varphi\end{aligned}$$

Jadi φ adalah suatu homomorfisma gelanggang

Karena $\emptyset$ adalah pemetaan pada, untuk setiap $s \in S$ terdapat $r \in R$ sehingga $s =(r)\emptyset$.tetapi ini juga berlaku untuk setiap $s \in S$ terdapat $r \in R$ sehinga $(r_1 + K)\varphi=(r_2 + K)\varphi$, maka $(r_1)\emptyset=(r_2)\emptyset$. Hal ini berakibat bahwa

$(r_1)\emptyset$ - $(r_2)\emptyset = (r_1 - r_2)\emptyset = 0$. Jadi $r_1 - r_2 \in K$, yang berakibat $r_1 + K = r_2 + K$. Sehingga φ adalah homomorfisma satu-satu dan pada, φ adalah isomorfisma dan $R/K \cong S$

Teorema 10.5:

Andaikan suatu gelanggang. Bila M dan N masing-masing adalah ideal dari R dan $M + N = \{m + n : m \in M, n \in N\}$ Maka M + N adalah ideal dari R dan $(M + N)/N \cong M/(M \cap N)$

Teorema C-3

Andaikan R adalah suatu ring. Bila M dan N masing-masing adalah ideal dari R sehingga $M \leq N$, maka $R/N \cong (R/M)/(N/M)$.

Bila F adalah suatu lapangan, maka F tidak mempunyai ideal sejati. Akibat dari teorema isomorfisme C-1 lebih lanjut memperlihatkan bahwa suatu gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan yang tidak mempunyai ideal sejati adalah suatu lapangan.

Akibat

Andaikan R adalah suatu Ring dengan unsur kesatuan. R adalah suatu lapangan jika dan hanya jika R tidak mempunyai ideal sejati.

Bukti.

R adalah suatu lapangan, maka R tidak mempunyai ideal sejati. Sebaliknya, andaikan R tidak mempunyai ideal sejati. Akibatnya $\{0\}$ adalah ideal maksimal dari R. $R/\{0\}$ adalah suatu lapangan. Selanjutnya perhatikan bahwa pemetaan $\emptyset : R \to R$ yang didefenisikan oleh $(r)\emptyset = r$ untuk semua $r \in R$ adalah suatu homomorfisma gelanggang inti $(\emptyset)$. Teorema C-1 menjamin bahwa $R/\{0\} \cong R$. Jadi R adalah suatu lapangan.

LATIHAN

1. Diketahui $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \text{ dan } ad - bc \neq 0\right\}$ grup terhdap perkalian matriks dan $G' = (R \setminus \{0\}, x)$
   a. Definisikan $G \to G'$ dengan $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$
   b. Periksa apakah φ merupakan homomorphisma.
   c. Misalkan G grup, g unsur yang tetap di G. Definisikan pemetaan $\varphi: G \to G$ dengan $\varphi(x) = gxg^{-1}$ Buktikan φ merupakan isomorfisma dari G ke G

DAFTAR PUSTAKA

Aisah, Isah. 2017. *Modul Struktur Aljabar 1*. Bandung: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Padjajaran.

Gallian, Joseph A. 1998.*Contemporary Abstract Algebra.Fourth Edition.* NewYork: University of Minnesota, Duluth.

Hendrijanto. 2011. *Struktur Aljabar 1 (Teori Grup)*. Madiun: Fakultas Pendidikan MIPA Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan Persatuan Guru Republik Indonesia.

Lubis, Aslan. 2009. *Aljabar Abstrak I.* Medan: Fakultas Tarbiyah IAIN-SU Medan.

Saragih, Sahat. 2014. *Struktur Aljabar 1*. Medan: Larispa.

Saragih, Sahat. 2015. *Struktur Aljabar II.* Medan: Larispa

Setiawan, Adi. 2014. *Dasar-Dasar Aljabar Modern: Teori Grup & Teori Ring.* Salatiga: Tisara Grafika