STATISTIKA MATEMATIKA

$$C\left(n,m\right)=\frac{n!}{m!\cdot\left(n-m\right)!}$$

DIKTAT PERKULIAHAN

Eka Khairani Hasibuan, M.Pd

PRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUMATERA UTARA
MEDAN

2018

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi ALLAH SWT, Tuhan semesta alam yang telah memberikan kesehatan, waktu, ruang dan kesempatan untuk menyelesaikan penulisan buku ajar ini. Shalawat berangkaikan salam penulis hadiahkan kepada Baginda Rasullah, Nabi Muhammad SAW.

Buku ajar ini berjudul **STATISTIKA MATEMATIKA,** ditulis dengan tujuan agar para mahasiswa memiliki pengetahuan yang mumpuni dan mendalam, juga wawasan yang luas mengenai pembahasan dan penjelasan statistika secara matematis. Buku ajar ini terdiri atas 5 bab, dengan rincian sebagai berikut:

a. BAB I membahas mengenai himpunan yang merupakan dasar pengetahuan dalam pembahasan teori peluang.
b. BAB II membahas mengenai jenis-jenis teknik membilang.
c. BAB III membahas mengenai teori peluang.
d. BAB IV membahas mengenai macam-macam distribusi satu peubah acak.
e. BAB V membahas mengenai macam-macam distribusi dua peubah acak.

Adapun pada setiap bab, materi dijelaskan secara terinci dan disertai dengan rangkuman materi di setiap babnya. Penulis juga menyertai soal-soal latihan di setiap babnya, disertai dengan jawaban soal-soal latihan tersebut, untuk mendorong dan menyemangati para mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal tersebut.

Penulis menyadari bahwa buku ajar **STATISTIKA MATEMATIS** masih sangat jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak untuk dapat menyempurnakan buku ajar ini. Dan akhirnya penulis mengharapkan kiranya buku ajar ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa khususnya dan para peminat statistika matematika umumnya.

Hormat Saya,

Penulis

BAB I TEORI HIMPUNAN

1.1. Pengertian Himpunan

Himpunan adalah kumpulan semua objek yang mungkin bersifat tertentu menurut aturan tertentu yang telah ditetapkan. Setiap objek yang terdapat di dalam suatu objek disebut anggota atau elemen hi mpunan. Penamaan suatu himpunan dituliskan dengan menggunakan huruf kapital, seperti : A, B, C, D, E, kemudian anggota-anggota atau elemen-elemen himpunan dituliskan dengan menggunakan huruf kecil seperti a, b, c, d .

Apabila b termasuk ke dalam elemen himpunan D, maka kita menuliskannya dengan notasi $b \in D$, namun andaikan b bukan elemen himpunan D, maka kita menuliskannya dengan notasi $b \notin D$. Apabila b dan e keduanya merupakan elemen himpunan D, maka kita menuliskannya dengan notasi $b, e \in D$. Terdapat 3 cara untuk menyatakan suatu himpunan, yaitu:

- Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan menggunakan kalimat

Contoh. Himpunan B terdiri atas bilangan bulat positif 2,3,4,5.

- Suatu himpunan, elemen-elemen himpunannya dapat didaftarkan. Cara ini disebut cara mendaftar.

Contoh. Penulisan elemen-elemen himpunan B adalah $B = \{2,3,4,5\}$

- Suatu himpunan, elemen-elemen himpunannya dapat dituliskan berdasarkan karakteristik yang dimiliki oleh elemen himpunan tersebut. Cara ini disebut cara sifat.

Contoh. Jika E adalah himpunan bilangan real antara 2 sampai 5, maka hi $B = \{x; x = 2,3,4,5\}$

Definisi. Himpunan Semesta

Himpunan Semesta adalah himpunan yang terdiri atas semua himpunan bagian yang dibentuk darinya.

Himpunan semesta dilambangkan dengan menggunakan huruf S atau U.

Contoh.

a. S adalah himpunan bilangan bulat dari 2 sampai 8.
b. S adalah himpunan bilangan bulat negatif
c. S adalah himpunan bilangan genap positif.

Definisi. Dua Himpunan Sama

Dua himpunan C dan D dikatakan sama, jika dan hanya jika setiap anggota di C juga anggota di D dan setiap anggota di D juga anggota di C.

Dengan perkataan lain, dua himpunan disebut sama, apabila dua himpunan itu mempunyai anggota yang sama. Dua himpunan sama dituliskan dengan menggunakan tanda "=". Pengertian dua himpunan yang sama ditegaskan melalui contoh di bawah ini :

Contoh.

Apabila $C = \{1,3,5,a\}$ dan $D = \{4,6,8\}$ dan $E = \{4,6,8,8,8,8,4,6\}$ dan $F = \{a,1,3,5\}$ maka $C = F$ dan $D = E$.

Definisi. Himpunan Bagian

Andaikan C dan D adalah dua buah himpunan.

C dikatakan himpunan bagian dari D, jika dan hanya jika setiap anggota pada C juga anggota pada D

Notasi sebuah himpunan yang merupakan himpunan bagian dituliskan "$\subset$". Pengertian himpunan bagian ditegaskan melalui contoh di bawah ini :

Contoh .

Andaikan $D = \{3,5,7,9,11\}$, $E = \{5,7\}$ dan $F = \{9\}$. Dengan demikian, kita sebut $E \subset D$ dan $F \subset D$, karena setiap elemen pada E juga elemen pada D, dan setiap elemen pada F juga elemen pada D. Adapun relasi antara dua himpunan yang sama dan himpunan bagian adalah sebagai berikut:

Dua himpunan disebut sama, jika dua himpunan tersebut satu sama lain adalah himpunan bagian. Jika $C = D$, maka $C \subset D$ dan $D \subset C$.

Definisi. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen atau anggota himpunan

Notasi himpunan kosong ∅ atau { }.Pengertian himpunan kosong ditegaskan melalui contoh dibawah ini

Contoh.

a. Misalkan $E = \{x : x^2 = 25, 2x = 14\}$. Nilai x tidak ada yang memenuhi $x^2 = 25$ dan $2x = 14$. Sehingga E merupakan himpunan kosong dan dituliskan dengan $E = \{\ \}$ atau E = ∅.

b. Misalkan $F = \{x : x^2 = 16, x = bil.ganjil\}$. Nilai x tidak ada yang memenuhi $x^2 = 16$ dan $x = bil.ganjil$. Jadi F merupakan himpunan kosong dan dituliskan dengan $F = \{\ \}$ atau F = ∅.

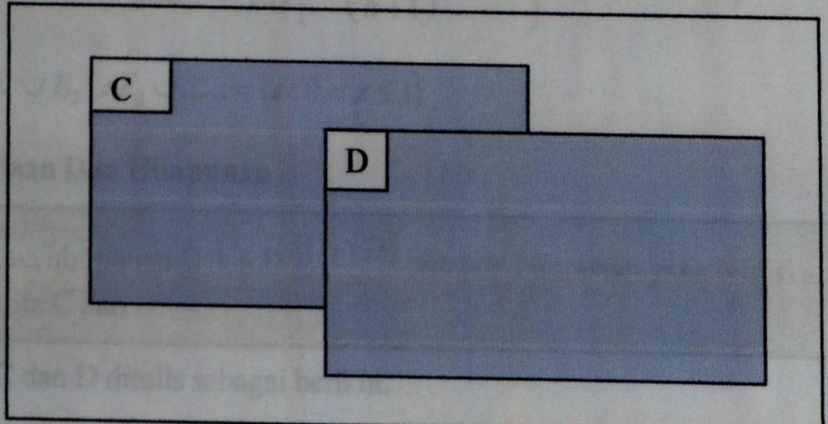
1.2. Operasi-operasi Himpunan

Bentuk operasi-operasi himpunan adalah gabungan, irisan, komplemen, dan perkalian.

Definisi. Gabungan Dua Himpunan

Gabungan antara dua himpunan C dan D (ditulis $C \cup D$) adalah himpunan yang terdiri dari semua anggota C dan D atau keduanya, atau himpunan dari semua anggota paling sedikit satu dari C dan D.

Gabungan dari C dan D dituliskan sebagai berikut:



Pemahaman gabungan dua buah himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini :

Contoh. Andaikan $B = \{x : x = 2,3,4,5,6,7,8,9\}$ dan $C = \{x : x = 6,7,8,9,10\}$ maka $B \cup C = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Contoh. Andaikan $D = \{x : 0 \le x \le 1\}$ dan $E = \{x : -1 \le x \le 2\}$. Maka $D \cup E = \{-1 \le x \le 2\}$, $D \cup E = E$.

Secara umum, gabungan dari beberapa himpunan dituliskan seperti di bawah ini :

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{x : x \in E_i untukpalingsedikitsatu, i = 1,2,3,.....n\}$$

Pemahaman gabungan pada lebih dari dua himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini:

Misalkan $E_i = \left\{x : \frac{1}{(k+1)} \le x \le 1\right\}, k = 1,2,3,....$

Untuk $k = 1$, maka $E_1 = \left\{x : \frac{1}{2} \le x \le 1\right\}$

Untuk $k = 2$, maka $E_2 = \left\{x : \frac{1}{3} \le x \le 1\right\}$

Untuk $k = 3$, maka $E_3 = \left\{x : \frac{1}{4} \le x \le 1\right\}$

Untuk $k \to \infty$, maka $\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty}\left\{x : \left(\frac{1}{k+1}\right) \le x \le 1\right\} = \{x : 0 < x \le 1\}$

Sehingga $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ...... = \{x : 0 < x \le 1\}$

Definisi. Irisan Dua Himpunan

Irisan dari dua himpunan C dan D $(C \cap D)$ adalah himpunan yang terdiri atas semua anggota C dan D.

Irisan dari C dan D ditulis sebagai berikut.

Pemahaman gabungan dua buah himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini :

Contoh. Andaikan $B = \{x : x = 2,3,4,5,6,7,8,9\}$ dan $C = \{x : x = 6,7,8,9,10\}$ maka $B \cup C = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Contoh. Andaikan $D = \{x : 0 \le x \le 1\}$ dan $E = \{x : -1 \le x \le 2\}$. Maka $D \cup E = \{-1 \le x \le 2\}$, $D \cup E = E$.

Secara umum, gabungan dari beberapa himpunan dituliskan seperti di bawah ini :

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{x : x \in E_i untukpalingsedikitsatu, i = 1,2,3,.....n\}$$

Pemahaman gabungan pada lebih dari dua himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini:

Misalkan $E_i = \left\{x : \frac{1}{(k+1)} \le x \le 1\right\}, k = 1,2,3,....$

Untuk $k = 1$, maka $E_1 = \left\{x : \frac{1}{2} \le x \le 1\right\}$

Untuk $k = 2$, maka $E_2 = \left\{x : \frac{1}{3} \le x \le 1\right\}$

Untuk $k = 3$, maka $E_3 = \left\{x : \frac{1}{4} \le x \le 1\right\}$

Untuk $k \to \infty$, maka $\lim_{k \to \infty} A_k = \lim_{k \to \infty} \left\{x : \left(\frac{1}{k+1}\right) \le x \le 1\right\} = \{x : 0 < x \le 1\}$

Sehingga $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ...... = \{x : 0 < x \le 1\}$

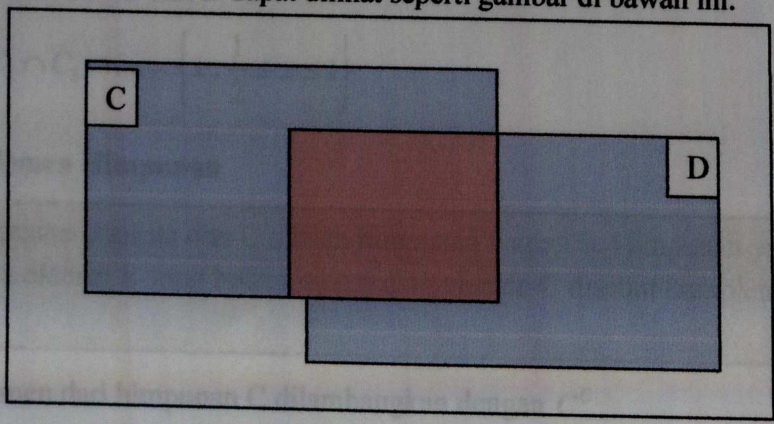
Definisi. Irisan Dua Himpunan

> Irisan dari dua himpunan C dan D $(C \cap D)$ adalah himpunan yang terdiri atas semua anggota C dan D.

Irisan dari C dan D ditulis sebagai berikut.

$$C \cap D = \{x : x \in C, dan, x \in D\}$$

Diagram Venn irisan dari C dan D dapat dilihat seperti gambar di bawah ini.



Gambar ▭ D adalah daerah yang diarsir.

Contoh. Andaikan $C = \{(x, y) : (x, y) = (0,0), (0,1), (1,1)\}$ dan $B = \{(x, y) : (x, y) = (1,1), (1,2), (2,1)\}$

Maka $C \cap D = \{(x, y) : (x, y) = (1,1)\}$

Irisan dari beberapa himpunan ditulis sebagai berikut:

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \{x : x \in C_i, untuksemua, i = 1,2,3,....., n\}$$

Pemahaman mengenai irisan lebih dari dua buah himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini.

Contoh. Andaikan $C_k = \left\{x : \frac{1}{(k+1)} \leq x \leq 1\right\}, k = 1,2,3,....$

Untuk $k = 1, maka\ C_1 = \left\{x : \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$

Untuk $k = 2, maka, C_2 = \left\{x : \frac{1}{3} \leq x \leq 1\right\}$

Untuk $k = 3, maka, C_3 = \left\{x : \frac{1}{4} \leq x \leq 1\right\}$

Untuk $k \to \infty$ maka $\lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty}\left\{x : \left(\frac{1}{k+1}\right) \le x \le 1\right\} = \{x : 0 < x \le 1\}$

Sehingga $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap .... = \left\{x : \frac{1}{2} \le x \le 1\right\}$

Definisi. Komplemen Himpunan

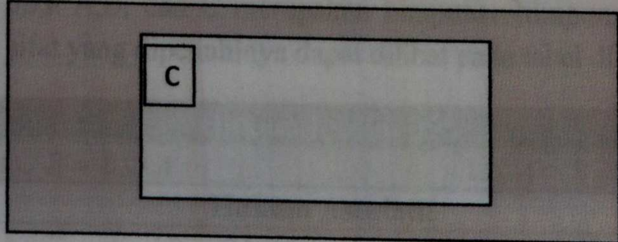
Andaikan S himpunan semesta dan C adalah himpunan bagian S. Himpunan yang terdiri atas semua elemen S yang bukan merupakan elemen C disebut komplemen dari C.

Adapun komplemen dari himpunan C dilambangkan dengan C^C

Komplemen dari C didefenisikan sebagai berikut.

$$C^C = \{x : x \in S, x \notin C\}$$

Dan diagram venn untuk komplemen dari C adalah sebagai berikut :



Perhatikan gambar diagram di atas, C^C adalah daerah yang diarsir, berwarna abu-abu.

Pemahaman mengenai pengertian sebuah komplemen himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini.

Misalkan $S = \{x : x = 5,6,7,8,9,10\}$ dan $C = \{x : x = 9,10\}$. Maka $C^C = \{5,6,7,8\}$

Definisi. Perkalian Dua Himpunan

Perkalian himpunan B dan C, dinotasikan dengan $B \times C$, adalah himpunan yang terdiri atas semua pasangan (x_1, x_2) yang mungkin, dimana $x_1 \in B$ dan $x_2 \in C$

Perkalian himpunan $B \times C$ dinotasikan sebagai berikut.

$$B \times C = \{(x_1, x_2) : x_1 \in B, x_2 \in C\}$$

Pehaman perkalian dua himpunan dipertegas melalui contoh di bawah ini.

Contoh.

Jika $B=\{3,4,5\}$, $C=\{6,7\}$ dan $D=\{4\}$, maka :

a. $B\times C=\{(3,6),(3,7),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7)\}$
b. $B\times D=\{(3,4),(4,4),(5,4)\}$
c. $C\times D=\{(6,4),(7,4)\}$
d. $C\times B=\{(6,3),(6,4),(6,5),(7,3),(7,4),(7,5)\}$
e. $D\times B=\{(4,3),(4,4),(4,5)\}$
f. $D\times C=\{(4,6),(4,7)\}$
g. $B\times B=\{(3,3)(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$
h. $C\times C=\{(6,6),(6,7),(7,6),(7,7)\}$
i. $D\times D=\{(4,4)\}$

Kemudian , kita beranjak pada operasi-operasi pada himpunan yang memenuhi beberapa sifat. Jika A,B, dan C merupakan himpunan-himpunan bagian dari S, maka beberapa sifat yang dipenuhinya dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Hukum Komutatif	
1.a. $A\cup B=B\cup A$	1.b. $A\cap B=B\cap A$
Hukum Asosiatif	
2.a. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	2.b. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
Hukum Distributif	
3.a. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	3.b. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Hukum Identitas	
4.a. $A\cup\emptyset=A$	4.b. $A\cap S=A$
5.a. $A\cup S=S$	5.b. $A\cap\emptyset=\emptyset$
Hukum Komplemen	
6.a. $A\cup A^C=S$	6.b. $A\cap A^C=\emptyset$
7.a. $(A^C)^C=A$	7.b. $S^C=\emptyset \quad \emptyset^C=S$
Hukum De Morgan	
8.a. $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$	8.b. $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$
Hukum Idempoten	
9.a. $A\cup A=A$	9.b. $A\cap A=A$

Rangkuman

1. Sebuah himpunan bisa dinyatakan dengn menggunakan tiga cara, yaitu : cara dengan menggunakan kata-kata, cara sifat, cara mendaftarkan.
2. Himpunan semesta adalah himpunan dari semua objek yang termasuk kedalamnya, dan biasanya dilambangkan dengan S atau U.
3. Dua himpunan disebut sama, apabila kedua himpunan tersebut memiliki elemen-elemen yang sama. Penulisan dua buah himpunan yang sama menggunakan tanda "=".
4. Sebuah himpunan disebut himpunan bagian dari himpunan lainnya, apabila setiap elemen pada himpunan tersebut juga elemen pada himpunan lainnya. Penulisan sebuah himpunan yang merupakan himpunan bagian menggunakan tanda "$\subset$".
5. Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki elemen, dan biasanya ditulis dengan menggunakan tanda $\emptyset$ atau $\{\ \}$.
6. Gabungan dari dua buah himpunan adalah himpunan yang terdiri atas semua elemen paling sedikit satu dari dua buah himpunan tersebut, dan biasanya dilambangkan dengan tanda "$\cup$".
7. Irisan dari dua buah himpunan adalah himpunan yang terdiri atas semua elemen kedua himpunan tersebut, dan biasanya dilambangkan dengan tanda "$\cap$".
8. Komplemen dari sebuah himpunan adalah himpunan yang terdiri atas semua elemen himpunan semesta yang bukan elemen himpunan tersebut, dan biasanya dilambangkan dengan tanda "C" pada pangkat notasi himpunannya.
9. Perkalian dua buah himpunan adalah himpunan yang terdiri atas semua pasangan

   (x_1, x_2) yang mungkin, dengan x_1 adalah elemen himpunan yang pertama, dan x_2 adalah elemen himpunan yang kedua.
10. Beberapa sifat pada aljabar himpunan terdiri atas Hukum Komutatif, Hukum Asosiatif, Hukum Distributif, Hukum Identitas, Hukum Komplemen, Hukum De Morgan, Hukum Idempoten.

BAB II TEKNIK MEMBILANG

2.1. Pendahuluan

BAB II ini akan memuat materi-materi mengenai penentuan banyaknya cara atau susunan yang mungkin dalam sebuah permasalahan yang dikaitkan dengan materi peluang. Beberapa teknik tersebut meliputi aturan permutasi, kombinasi, aturan perkalian, dan sampel yang berurutan.

2.2. Permutasi

Definisi. Permutasi

> Permutasi adalah susunan dari sekumpulan objek dengan memperhatikan urutan objek-objek tersebut.

Penghitungan banyak susunan atau cara berdasarkan aturan permutasi bergantung kepada banyaknya objek yang ada, banyaknya objek yang diambil, dan jeni-jenis permutasi.

A. Permutasi Tanpa Pengulangan

Dalil. Semua Objek Dibentuk

> Apabila kita memiliki *n* objek yang berbeda, maka banyaknya permutasi yang dapat dibentuk dari semua objek itu adalah :
>
> $${}_nP_n = n!$$

Adapun ${}_nP_n = n!$ dibaca *"Permutasi n objek dari n objek sama dengan n faktorial".* ${}_nP_n$ dapat ditulis $P(n,n)$. Pemahaman Dalil diatas diperjelas melalui contoh di bawah ini:

Contoh 1. Diketahui tiga abjad yaitu : *d, e, f.* Berapa banyak permutasi yang dapat dibentuk dari tiga abjad tersebut?

Penyelesaian :

Posisi ketiga abjad *d,e,f* dapat diilustrasikan melalui gambar kotak di bawah ini :

POSISI I	**POSISI II**	**POSISI III**