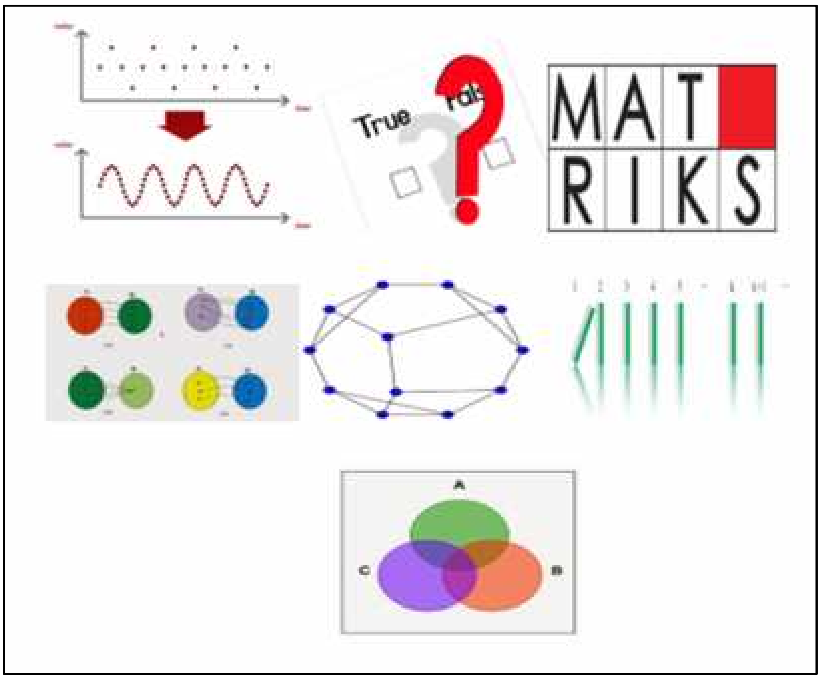
UNTUK KALANGAN SENDIRI

DIKTAT KULIAH

MATEMATIKA DISKRIT



Disusun oleh

Ella Andhany, M.Pd

PRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
UIN SUMATERA UTARA

2018

KATA PENGANTAR

Hamdan wa syukron lillah

Wassholatu wassalam ‘ala rosulillah

Matematika diskrit adalah cabang matematika yang mengkaji objek-objek diskrit. Sebuah objek disebut objek diskrit jika ia terdiri dari sejumlah berhingga elemen yang berbeda atau elemen-elemen yang tidak berkesinambungan. Himpunan bilangan bulat (integer) dipandang sebagai objek diskrit. Lawan kata diskrit adalah kontinyu atau menerus. Himpunan bilangan riil adalah suatu objek kontinu. Di dalam matematika kita mengenal fungsi diskrit dan fungsi kontinu. Fungsi diskrit digambarkan sebagai sekumpulan titik-titik, sedangkan fungsi kontinu digambarkan sebagai kurva.

Diktat ini disusun untuk mendukung perkuliahan Matematika Diskrit pada program studi pendidikan matematika. Materi yang termasuk ke dalam matematika diskrit di antaranya Logika, Himpunan, Matriks, Relasi, Fungsi, Induksi Matematik, Algoritma dan Teori Bilangan (Bilangan Bulat), Kombinatorial dan Peluang Diskrit, Aljabar Boolean, Graf, Pohon, dan Kompleksitas Algoritma. Beberapa materi – materi tersebut akan dibahas dalam diktat ini, beberapa lainnya tidak dibahas dalam diktat ini.

Diktat ini disusun dan disadur serta diadaptasi dari beberapa buku di antaranya Matematika Diskrit (Seymour Lipschutz dan Marc Lipson: Penerbit Erlangga), Matematika Diskrit (Rinaldi Munir: Penerbit Informatika), dan Matematika Diskrit (Danny Manongga dan Yessica Nataliani: Penerbit Kencana Pernada Media Grup), serta beberapa sumber online lainnya.

ELLA ANDHANY, M. Pd
Prodi Pendidikan Matematika, UIN Sumatera Utara Medan
e-mail: ellaandhany@gmail.com

DAFTAR ISI

BAB I TEORI BILANGAN (BILANGAN BULAT)
1.1. Pendahuluan.. 1
1.2. Bilangan Bulat 1
1.3. Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat 1
1.4. Ciri-Ciri Bilangan yang Habis Dibagi n 2
1.5. Teorema Euclidean.. 2
1.6. Pembagi Bersama Terbesar (PBB 3
1.7. Algoritma Euclidean 4
1.8. Relatif Prima.. 5
1.9. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK).. 5
1.10. Aritmetika Modulo 6
1.11. Kongruen... 7
1.12. Bilangan Prima 8

BAB II INDUKSI MATEMATIK
2.1. Pendahuluan.. 13
2.2. Induksi Matematik 13
2.3. Prinsip Induksi Sederhana.. 14
2.4. Prinsip Induksi yang Dirapatkan (*Generalized*).................................... 16

BAB III HIMPUNAN (SET)
3.1. Pendahuluan.. 20
3.2. Definisi Himpunan 20
3.3. Cara Penyajian Himpunan.. 21
3.4. Kardinalitas... 22
3.5. Himpunan Kosong (*Null Set* atau *Empty Set*).. 22
3.6. Himpunan Bagian (*Subset*).. 23
3.7. Himpunan yang Sama... 24
3.8. Himpunan yang Ekivalen 24
3.9. Himpunan Saling Lepas.. 24
3.10. Himpunan Kuasa 25
3.11. Operasi terhadap Himpunan 25
3.12. Prinsip Inklusi – Eksklusi... 29
3.13. Hukum-Hukum Himpunan.. 29

BAB IV LOGIKA
4.1. Pendahuluan.. 32
4.2. Proposisi 32
4.3. Proposisi Majemuk... 32
4.4. Operasi-Operasi Logika Dasar 33
4.5. Tabel Kebenaran.. 33
4.6. Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi 33
4.7. Ekivalensi Logika 34
4.8. Proposisi Berkuantor 35
4.9. Negasi dari Proposisi Berkuantor 35

4.10. Contoh Penyangkal (*Counter Example*) 36
4.11. Varian dari Implikasi 36
4.12. Penarikan Kesimpulan (Argumentasi) 36

BAB V MATRIKS
5.1. Pendahuluan 43
5.2. Definisi 43
5.3. Matriks Baris, Matriks Kolom dan Matriks Nol 44
5.4. Operasi pada Matriks 44
5.5. Transpose Matriks 45
5.6. Matriks 45
5.7. Invers Matriks 45

BAB VI RELASI dan FUNGSI
6.1. Pendahuluan 49
6.2. Definisi 49
6.3. Sifat-Sifat Relasi 50
6.4. Relasi Inversi 51
6.5. Mengkombinasikan Relasi 51
6.6. Komposisi Relasi 52
6.7. Fungsi 52
6.8. Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif 53
6.9. Fungsi Invers 54
6.10. Komposisi dari Dua Buah Fungsi 54

BAB VII GRAF
7.1. Pendahuluan 57
7.2. Sejarah Graf 57
7.3. Definisi 59
7.4. Istilah-Istilah pada Graf 59
7.5. Jenis Graf 62
7.6. Graf Sederhana Khusus 63
7.7. Graf Euler dan Graf Hamilton 64
7.8. Lemma Jabatan Tangan 65

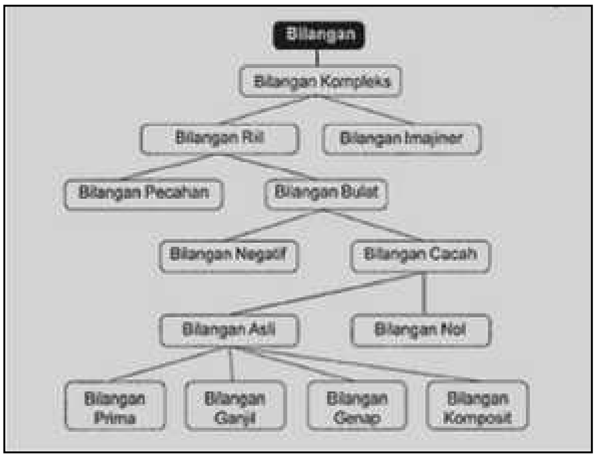
BAB VII POHON (TREE)
8.1. Pendahuluan 68
8.2. Definisi 68
8.3. Sifat-Sifat Pohon 69
8.4. Pohon Berakar (*Rooted Tree*) 70
8.5. Istilah dalam Pohon Berakar 71
8.6. Pohon Merentang 74
8.7. Mengenal Aplikasi Pohon Merentang 77
8.8. Pohon Merentang Minimum 76

BAB 1 TEORI BILANGAN (BILANGAN BULAT)

1.1. Pendahuluan

Bilangan bulat atau integer memainkan peranan yang penting dalam matematika diskrit. Sebagian besar pokok bahasan dalam matematika diskrit melibatkan bilangan bulat. Bahkan cabang matematika yang bernama teori bilangan (*number theory*) mengkaji secara khusus bilangan bulat dan sifat-sifatnya.[1]

Untuk mengingat kembali posisi bilangan bulat dalam diagram bilangan, berikut ini diberikan diagram bilangan.



Gambar 1 Diagram Bilangan

Sumber: http://bpengertian.blogspot.com/2012/04/diagram-skema-bilangan.html

1.2. Bilangan Bulat

Bilangan bulat (integer) adalah bilangan real yang tidak mempunyai pecahan decimal.

Contoh:

12, 30, -2, -34, 0 (nol).

1.3. Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat

Sifat pembagian ini menyatakan pembagian 2 bilangan bulat yang tidak memiliki sisa.

Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $a \neq 0$.

a **habis membagi** b (a *divides* b) jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$.

Notasi: $a|b$ jika $b = ac$, $c \in \mathbf{Z}$ dan $a \neq 0$. ($\mathbf{Z}$ = himpunan bilangan bulat).

[1] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 175

Pernyataan “a habis membagi b” ditulis juga “b **kelipatan** a”.

Jika a tidak habis membagi b maka ditulis dengan a ∤ b.

Contoh:

5|20 karena 20 : 5 = 4 (bilangan bulat) atau 20 = 5 x 4.

Tetapi 4∤15 karena151:4 = 3,75 (bukan bilangan bulat).

1.4. Ciri-Ciri Bilangan yang Habis Dibagi n

Berikut ini ciri dari bilangan yang habis dibagi oleh n, n = bilangan asli

Habis dibagi	**Ciri-Ciri**
2	Digit terakhir nol atau genap
3	Jumlah digitnya habis dibagi 3
4	Dua digit terakhir habis dibagi 4
5	Digit terakhir 0 atau 5
6	Bilangannya genap dan jumlah seluruh digitnya habis dibagi 6
8	Tiga digit terakhir habis dibagi 8
9	Jumlah digitnya habis dibagi 9

Contoh**:**

1234567897890 habis dibagi 2 karena satuannya adalah angka nol.

24612321 bisa dibagi dengan 3 karena 2 + 4 + 6 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 21 dan 21 habis dibagi 3.

234564 habis dibagi 4 karena dua digit terakhir yaitu 64 habis dibagi 4.

4567897680 habis dibagi 5 karena digit terakhirnya yaitu 5 habis dibagi 5.

2736 habis dibagi 6 karena 2736 genap dan 2+7+3+6 = 18 habis dibagi 6.

12345786256 habis dibagi 8 karena tiga digit terakhir yaitu 256 habis dibagi 3.

2341341 habis dibagi 9 karena 2 + 3 + 4 + 1 + 3 + 4 + 1 = 18 dan 18 habis dibagi 9.

1.5. Teorema Euclidean

“Misalkan m dan n adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat n > 0. Jika m dibagi dengan n maka terdapat dua buah bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga

($m = nq + r$) dengan $0 \leq r < n$".[2]

Catatan: Mengapa $0 \leq r < n$? Jelaskan.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………...

Contoh:

(i) 1987 dibagi dengan 97 memberikan hasil bagi 20 dan sisa 47, yaitu 1987 = 97.20 + 47, $0 \leq r = 47 < 97$. (memenuhi)

(ii) $-22 = 3(-7) + (-1)$ bukan penulisan teorema Euclid yang benar karena $r = -1$ tidak memenuhi syarat $0 \leq r < n$.

-22 dibagi dengan 3 memberikan hasil bagi -8 dan sisa 2, yaitu $-22 = 3(-8) + 2$, $0 \leq r = 2 < 3$. (memenuhi)

Jadi, untuk $m < 0$ maka q harus ditambah dengan -1 agar sisanya (r) menjadi positif.

1.6. Pembagi Bersama Terbesar (PBB) = Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Pembagi bersama terbesar (PBB) dalam bahasa Inggris dikenal dengan istilah *greatest common divisor* atau gcd.

Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat tidak nol. Pembagi bersama terbesar dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian sehingga $d|a$ dan $d|b$.

Notasinya: PBB (a,b) = d.

Contoh:11

Tentukan PBB (45,36).

Faktor pembagi 45:1,3,5,9,15,45;

Faktor pembagi 36:1,2,3,4,9,12,18,36;

Faktor pembagi bersama dari 45 dan 36 adalah 1,3,9.

PBB (45,36) = 9.

PBB tidak terbatas hanya pada PBB dua buah bilangan bulat tetapi bisa lebih dari dua.

---

[2] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 184

1.6.1. Sifat-Sifat dari PBB

Misalkan a,b, dan c adalah bilangan bulat.

Jika c adalah PBB dari a dan b maka c | (a+b)

Jika c adalah PBB dari a dan b maka c | (a – b)

Jika c adalah PBB dari a dan b maka c | ab. [3]

Contoh:

PBB (64,8) = 8.

8 PBB dari 64 dan 8 maka 8| (64+8) = 8| 72

8 PBB dari 64 dan 8 maka 8| (64 – 8) = 8| 56

8 | 64 maka 8 | 64.8 = 8 | 512

1.7. Algoritma Euclidean

Algoritma Euclidean adalah algoritma untuk mencari PBB dari dua buah bilanganbulat. Euclid penemu algoritma Euclidean, adalah seorang matematikawan Yunani yang menuliskan algoritmanya tersebut dalam bukunya yang terkenal, Element. Algoritma Euclid juga melibatkan teorema Euclid.

Diberikan dua buah bilangan bulat positif m dan n (dimana $m \geq n$). Algoritma Euclidean berikut mencari pembagi bersama terbesar dari m dan n.

Algoritma Euclidean

(1) Jika n = 0 maka m adalah PBB (m,n); stop.

Tetapi jika $n \neq 0$, lanjutkan ke langkah 2.

(2) Bagilah m dengan n dan misalkan r adalah sisanya.

(*bentuk teorema euclidnya*)

(3) Ganti nilai m dengan nilai n dan nilai n dengan nilai r, lalu ulang kembali ke langkah 1.[4]

Catatan: PBB (m,n) adalah sisa yang terakhir sebelum sisa nol (0)

---

[3] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 185

[4] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 188

Contoh:

m = 80, n = 12 dan dipenuhi syarat m ≥ n

$$80 = 6 \cdot 12 + 8$$

$$12 = 1 \cdot 8 + 4$$

$$8 = 2 \cdot 4 + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 4 maka PBB (80,12) = 4.

1.8. RelatifPrima

Dua buah bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima jika PBB (a,b) = 1.

Contoh:

20 dan 3 relatif prima sebab PBB (20,3) = 1

7 dan 11 relatif prima karena PBB (7,11) = 1

Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima sebab PBB (20,5) = 5 ≠ 1.

Relatif prima tidak terbatas antara dua buah bilangan bulat saja.

Jika a dan b relative prima, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga

ma + nb = 1.

Contoh:

Bilangan 20 dan 3 adalah relatif prima karena PBB (20,3) = 1, atau dapat ditulis

2.20 + (–13).3 = 1 dengan m = 2 dan n = –13.

Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena PBB (20,5) = 5≠1s ehingga 20 dan 5 tidak dapat dinyatakan dalam m.20 + n.5 = 1.

1.9. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dalam bahasa Inggris dikenal dengan istilah *least common multiple* (lcm).

Suatu bilangan positif d disebut kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b jika:

a. d kelipatan a dan b, jadi a|d dan b|d

b. untuk setiap bilangan e kelipatan dari a dan b, maka d|e

Notasinya: KPK (a,b) = d.

Untuk sebarang bilangan prima p dan sebarang bilangan bulat a maka:

KPK (p,a) = a jika p membagi a dan KPK (p,a) = ap jika p tidak habis membagi a.

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat. Maka a|b jika dan hanya jika KPK (a,b) = b

Contoh:

1. KPK (2,3) = 6; KPK (4,6) = 12; KPK (9,10) = 90
2. KPK (1,a) = a

Hubungan KPK dan PBB:

Teorema:

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat bukan nol. Maka:

KPK (a,b) = $\frac{|a\ \ |}{P\quad (a,b)}$[5]

1.10. Aritmetika Modulo

Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat > 0. Operasi a mod m (dibaca “a modulo m”) memberikan sisa jika a dibagi dengan m. Notasi: a mod m= r sedemikian sehingga a = mq + r, dengan $0 \leq r < m$.

Bilangan m disebut **modulus** atau **modulo**, dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan {0,1,2,…, m–1} (mengapa?).

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………...

Contoh:

Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:

(i)	23 mod 5 = 3	karena (23 = 5 x 4 + 3)
(ii)	27 mod 3 = 0	karena (27 = 3 x 9 + 0)
(iii)	6 mod 8 = 6	karena (6 = 8 x 0 + 6)
(iv)	0 mod 12 = 0	karena (0 =12 x 0 +0)
(v)	–41mod9 = 4	karena (–41= 9(–5) + 4)

[5] Seymour Lipschutz dan Marc Lipson. 2008. Matematika Diskret, *Schaum’sOutlines*. Jakarta: Penerbit Erlangga. Hlm. 234

(vi) –39 mod13 = 0 karena(–39 =13(–3) + 0)

Penjelasan(v):

Karena a negatif, bagi |a| dengan m mendapatkan sisa r'.

Maka a mod m = m – r ' bila r' < 0. Jadi |–41| mod 9 = 5, sehingga

–41 mod 9 = 9 – 5 = 4.

1.11. Kongruen

Misalnya 38 mod 5 = 3 dan 13 mod 5 = 3, maka dikatakan 38 ≡ 13 (mod 5) (baca: 38 kongruen dengan 13 dalam modulo 5).

Dengan kata lain, bilangan bulat a dikatakan kongruen dengan b modulo m jika a dan b memberikan sisa yang sama apabila dibagi m.

Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulus m, maka ditulis

a ≢ b (mod m).[6]

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan m > 0, maka a ≡ b (mod m) jika m habis membagi a–b.

Catatan:

Kekongruenan antara dua bilangan bulat harus dalam modulo yang sama.

Contoh:

17≡2 (mod 3) (3 habis membagi17–2 = 15)

–7≡15(mod 11) (11 habis membagi –7–15 = –22)

12 ≢2 (mod 7) (7 tidak habis membagi12–2 = 10)

–7≢15(mod 3) (3 tidak habis membagi –7–15 = –22)

a ≡ b (mod m) dapat pula dituliskan dalam hubungan

a = b + km

dimana k adalah bilangan bulat.

Contoh:

17≡2 (mod3) dapat ditulis sebagai 17 = 2 + 5.3

–7≡15(mod11)dapat ditulis sebagai –7 = 15 + (–2)11

Berdasarkan definisi aritmetika modulo, kita dapat menuliskan a mod m = r sebagai a ≡ r (mod m).

[6] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 192

Contoh:

Beberapa hasil operasi dengan operator modulo berikut:

(i) 23 mod 5 = 3 dapat ditulis sebagai 23 ≡ 3 (mod5)

(ii) 27 mod 3 = 0 dapat ditulis sebagai 27 ≡ 0 (mod3)

(iii) 6 mod 8 = 6 dapat ditulis sebagai 6 ≡ 6 (mod 8)

(iv) 0 mod12 = 0 dapat ditulis sebagai 0 ≡ 0 (mod 12)

(v) –41 mod 9 = 4 dapat ditulis sebagai –41 ≡ 4 (mod 9)

(vi) –39 mod 13 = 0 dapat ditulis sebagai –39 ≡ 0 (mod 13)

1.13. Bilangan Prima

Bilangan bulat positif p (dengan p > 1) disebut bilangan prima jika p hanya habis dibagi oleh 1 dan p itu sendiri. [7]

Bilangan bulat positif p yang mempunyai faktor (pembagi) lain selain dari 1 dan p itu sendiri disebut bilangan komposit.

Contoh:

2,3,5,7,11,13,17,… merupakan bilangan prima

4, 6, 8, 10, 100, dan sebagainya merupakan bilangan komposit.

Semua bilangan prima selain dari 2 merupakan bilangan ganjil.

Untuk menguji apakah *n* merupakan bilangan prima atau komposit:

Bagikanlah*n* dengan sejumlah bilangan prima, mulai dari 2, 3, … , bilangan prima $\leq\sqrt{n}$.

Jika *n* habis dibagi dengan salah satu dari bilangan prima tersebut, maka *n* adalah bilangan komposit, tetapi jika *n* tidak habis dibagi oleh semua bilangan prima tersebut, maka n adalah bilangan prima.

Contoh:

Tunjukkan apakah bilangan-bilangan berikut ini merupakan bilangan prima atau komposit.

(i) 171 dan (ii) 199

[7] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 200

Penyelesaian:

(i) $\sqrt{171} = 13{,}077$.

Bilangan prima yang $\leq\sqrt{171}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 171 habis dibagi 3, maka 171 adalah bilangan komposit.

(ii) $\sqrt{199} = 14.107$.

Bilangan prima yang $\leq\sqrt{199}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 199 tidak habis dibagi 2, 3, 5, 7, 11, dan 13, maka 199 adalah bilangan prima.

Teorema: (*The Fundamental Theorem of Arithmetic*).

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar atau sama dengan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.[8]

Contoh:

$9 = 3 \times 3$		(2 buah faktor prima)
$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$		(4 buah faktor prima)
$13 = 13$	(atau 1×13)	(1 buah faktor prima)

Teorema: *TeoremaFermat*.

Jika p adalah bilangan prima dan aadalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi dengan p, yaitu PBB(a, p) = 1, maka

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$ [9]

Contoh:

Akan diguji apakah 17 dan 21 bilangan prima atau bukan.

Diambil nilai a = 2 karena PBB(17, 2) = 1 dan PBB(21, 2) = 1.

Untuk 17,

$2^{17-1} = 65536 \equiv 1 \pmod{17}$

karena 17 tidak membagi 65536 – 1 = 65535   ($65535 \div 17 = 3855$).

Untuk 21,

$$2^{21-1} = 1048576 \not\equiv 1 \pmod{21}$$

karena 21 tidak habis membagi 1048576 – 1 = 1048575.

[8] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 200

[9] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 202

Catatan:

Kelemahan Teorema Fermat: terdapat bilangan komposit n sedemikian sehingga $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Bilangan bulat seperti itu disebut bilangan **prima semu** (*pseudoprimes*).

Contoh:

Bilangan komposit 341 (yaitu $341 = 11 \cdot 31$) adalah bilangan prima semu karena menurut teorema Fermat,

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$$

Bilangan prima semu relatif jarang terdapat.

SOAL LATIHAN

1. Apakah 23 habis membagi 78, 115, dan 209?
2. Carilah bilangan bulat q dan r sehingga m = nq + r
   a. m = 47, n = 6
   b. m = 106, n = 13
   c. m = -221,n = 12
   d. m = 0, n = 47
   e. m = -246, n = 49
3. Hitunglah hasil pembagian modulo berikut:
   a. -173 mod 21
   b. -340 mod 9
   c. -9821 mod 45
   d. 9 mod 81
   e. 34 mod 55
4. Tentukan PBB dari pasangan bilangan bulat berikut;
   a. 220, 1500
   b. 302, 422
   c. 112, 76
5. Tuliskan 3 bilangan bulat yang kongruen dengan 4 mod 12.
6. Temukan sebuah bilangan antara 1 sampai 30 yang kongruen dengan 4 mod 11.
7. Temukan sebuah bilangan antara 1 sampai 30 yang kongruen dengan 12 mod 9.
8. Periksa apakah bilangan-bilangan berikut saling relatif prima:
   a. 21,35,57
   b. 25,41,49,64
   c. 20,30,25,60
9. Andaikan bahwa a dan b bilangan positif. Tunjukkan bahwa PBB (a,b) = PBB (a, a + b)

10. Manakah di antara pernyataan berikut ini yang benar:
    a. $446 \equiv 278 \pmod{7}$
    b. $793 \equiv 682 \pmod{9}$
    c. $269 \equiv 413 \pmod{12}$
    d. $473 \equiv 369 \pmod{26}$
11. Carilah KPK (5,7), KPK (3,33), KPK (12,28).
12. Tuliskan daftar semua bilangan prima antara 100 dan 150.
13. Tentukan bilangan 4 digit yang memenuhi $4 \times (abcd) = dcba$.
14. Temukan PBB (3033;123) dengan menggunakan algoritma Euclid.

Galileo Galilei:

Rumput yang paling kuat tumbuhnya terdapat diatas tanah yang paling keras.

BAB 2 INDUKSI MATEMATIK

2.1. Pendahuluan

Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika. Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan sejumlah langkah terbatas.

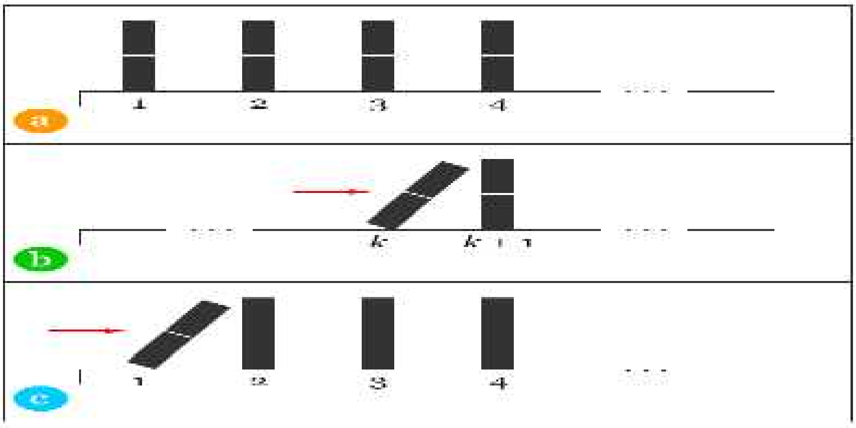
2.2. Induksi Matematik

Induksi matematik adalah merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam Matematika.Induksimatematikdigunakanuntuk membuktikanpernyataanyang khusus menyangkutbilanganbulat positif.PembuktiandenganInduksimatematikdapat diilustrasikandenganfenomenayangterkenaldenganEfek Domino.Akan tetapi sebelum membahas mengenai induksi matematika, kita akan membahas suatu prinsip yang digunakan untuk membuktikan induksi matematika, yaitu prinsip terurut rapi (well-ordering principle) dari bilangan asli.

Seperti kita ketahui, himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$ mempunyai prinsip **terurut rapi**:

"Setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari $\mathbb{N}$ memiliki anggota terkecil"

Kita akan mencoba memahaminya dengan menggunakan efek domino seperti berikut:



Sumber gambar: http://askyourdaddy.blog.uns.ac.id/2014/09/12/contoh-pembuktian-dengan induksi-matematika/

Pada gambar (a) di atas kita melihat sebaris 4 domino pertama yang ditata rapi dengan jarak antara masing-masing domino yang berdekatan kurang dari tinggi domino. Sehingga, jika kita mendorong domino nomor k ke kanan, maka domino tersebut akan merebahkan domino nomor (k + 1). Proses ini ditunjukkan oleh gambar (b). Kita tentu akan berpikir bahwa apabila proses ini berlanjut, maka domino nomor (k + 1) tersebut juga akan merebahkan domino di sebelah kanannya, yaitu domino nomor (k + 2), dan seterusnya. Bagian (c) menggambarkan bahwa dorongan terhadap domino pertama merupakan analogi dari bilangan 1 menjadi anggota $\mathbb{N}$. Hal ini merupakan langkah dasar dari proses efek domino. Selanjutnya, jika k anggota $\mathbb{N}$ akan menyebabkan (k + 1) anggota $\mathbb{N}$, akan memberikan langkah induktif dan melanjutkan proses perebahan domino. Sehingga, pada akhirnya kita akan melihat bahwa semua domino akan rebah. Atau dengan kata lain, domino yang memiliki nomor urut semua bilangan asli akan rebah.

2.3. Prinsip Induksi Sederhana

Misal p(n) adalah pernyataan yang bergantung pada n bilangan bulat positif. Kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif. Langkah induksi:

1. Basis Induksi: tunjukan bahwa p(1)benar

2. Hipotesis Induksi:

Asumsikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan positif n $\geq$ 1 kemudian buktikan bahwa p(n+1) benar.

Contoh:

Tunjukkan bahwa $1+2+3+ \dots +n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk $n \geq 1$.

Bukti:

Basis Induksi :

Untuk $n = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ benar

Hipotesis Induksi:

Andaikan untuk $n \geq 1 \Leftrightarrow 1+2+3+ \dots +n = \frac{n(n+1)}{2}$ benar

Akan dibuktikan untuk (n+1) benar:

$$1+2+3+ \dots +n+(n+1)= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

Bukti:

1+2+3+ … +n+(n+1) $= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+(2\ \ +2)}{2}$$

$$= \frac{(n^2+n)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2\ \ +2}{2}$$

$$= \frac{n^2+3\ \ +2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

Terbukti.

2. Tunjukkan:1+3+5+…+(2n-1) = n^2, untuk n bilangan positif.

Bukti:

Basis induksi:

Untuk n = 1⇔ 1 = 1^2 = 1 benar

Hipotesis induksi:

Andaikan untuk n ≥ 1⇔ 1+3+5+…+(2n-1) = n^2 benar

Akan dibuktikan:

1+3+5+…+(2n-1)+(2(n+1) -1) = $(n+1)^2$

Bukti:

1+3+5+…+(2n-1)+(2(n+1) -1) = n^2+[2(n+1)-1]

= n^2+2n+1 = $(n+1)^2$

Terbukti.

3. Untuk n ≥ 1 tunjukkan bahwa n^3+2n adalah kelipatan 3

Bukti:

Basis induksi:

Untuk n = 1⇔ 1^3+2.1=1+2=3 adalah kelipatan 3 benar

Hipotesis induksi:

Andaikan untuk n^3+2n adalah kelipatan 3benar

Akan dibuktikan: $(n+1)^3$+2(n+1) adalah kelipatan 3

Bukti:

$(n+1)^3+2(n+1) = (n^3+3n^2+3n+1)+(2n+2)$

$= (n^3+2n) + (3n^2+3n+3)$

$= (n^3+2n) + 3(n^2+n+1)$

Karena (n^3+2n) adalah kelipatan 3 (hipotesis Induksi) dan $3(n^2+n+1)$ adalah juga merupakan kelipatan 3 maka $(n^3+2n) + 3(n^2+n+1)$ adalah kelipatan 3.

Terbukti

B. Prinsip Induksi yang Dirapatkan (*Generalized*)

Prinsip induksi sederhana digunakan untuk membuktikan pernyataan p (n) dimana n dimulai dari 1. Prinsip induksi yang dirapatkan digunakan untuk membuktikan pernayataan p(n) dimana n tidak harus dimulai dari 1 tetapi berlaku untuk semua bilangan bulat positif.

Misalkan p(n) adalah pernyataan. Kita akan dibuktikan p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Langkah induksi:

1. Basis induksi : $p(n_0)$ benar
2. Hipotesis induksi: andaikan p(n) benar untuk $n > n_0$

   Akan dibuktikan bahwa p(n+1) benar

Contoh:

1. Tunjukkan bahwa untuk semua bilangan bulat positif:

   $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

   Jawab:

   - Basis induksi:

     Untuk n = 0 $\Leftrightarrow 2^0 = 2^{0+1}-1$ benar

     $1 = 2-1$

     $1 = 1$ benar

   - Hipotesis induksi:

     Andaikan untuk $n \geq 0 \Leftrightarrow 2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$ benar

     Akan dibuktikan untuk p(n+1) $\Leftrightarrow 2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$

     Bukti:

     $$\begin{aligned}2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n+2^{n+1} &=(2^{n+1}-1)+ 2^{n+1}\\ &=(2^{n+1}+2^{n+1})-1\\ &= 2.\ 2^{n+1}-1\\ &= 2^{n+2} -1\end{aligned}$$

   Terbukti

2. Tunjukkan bahwa $n^2 \geq 2n+1$, untuk $n \geq 4$

   Bukti:

   - Basis induksi:

     Untuk $n = 4 \Leftrightarrow 4^2 \geq 2.4+1$

     $16 \geq 9$ benar

   - Hipotesis induksi:

     Andaikan untuk $n \geq 4$ bahwa $n^2 \geq 2n+1$, untuk $n \geq 4$benar

     Akan dibuktikan untuk p(n+1), $(n+1)^2 \geq 2(n+1)+1$ benar

   Bukti:

   $(n+1)^2 = n^2+2n+1 \geq (2n+1)+2n+1 = (2n+2)+2n = 2(n+1)+2n$

   Karena untuk $n \geq 4$, $2n \geq 1$, maka: $2(n+1) + 2n \geq 2(n+1)+1$

   Jadi, $(n+1) \geq 2(n+1)+1$

   Terbukti.

SOAL LATIHAN

1. Buktikan dengan induksi matematik:

   a. $1.2+2.3+3.4+\ldots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n \geq 1$

   b. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$, $n \geq 1$

   c. $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$, $n \geq 1$

   d. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2\ \ -1)(2\ \ +1)} = \frac{n}{(2\ \ +1)}$, $n \geq 1$

2. Kita memiliki 2 orang tua (ayah dan ibu), 4 kakek-nenek, 8 kakek buyut, dan seterusnya.

   a. Jika semua nenek moyang kita (ayah, ibu, kakek, nenek, kakek buyut, dan smeua generasi di atas kita) adalah orang yang berbeda, berapa jumlag total nenek moyang kita selama 40 generasi (dengan menganggap ayah dan ibu kita sebagai generasi pertama)?

   b. Misalkan setiap generasi menunjukkan masa selama 30 tahun. Berapa tahun lamanya waktu 40 generasi tersebut?

   c. Total jumlah manusia yang pernah hidup di dunia ini diperkirakan sebanyak 10 milyar orang (10^{10}). Bandingkan jumlah itu dengan jawaban (a). Apa kesimpulan Anda?[10]

3. Ketika n pasangan tamu tiba di pesta, mereka disambut oleh tuan dan nyonya rumah di pintu. Setelah saling berjabat tangan, tuan rumah bertanya kepada para tamu maupun istrinya untuk mengatakan berapa kali mereka masing – masing telah berjabat tangan. Ia memperoleh 2n + 1 jawaban yang berbeda. Jika tidak seorang pun berjabat tangan dengan istri atau suaminya sendiri, berapa kalikah nyonya rumah telah berjabat tangan? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematika.

---

[10] Jong Jek Siang. 2002. Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer. Yogyakarta: Penerbit Andi. Hlm. 129

K.H. Rahmat Abdullah

Teruslah bergerak,

hingga kelelahan itu lelah mengikutimu.

Teruslah berlari,

hingga kebosanan itu bosan mengejarmu.

Teruslah berjalan,

hingga keletihan itu letih bersamamu.

Teruslah bertahan,

hingga kefuturan itu futur menyertaimu.

Teruslah berjaga,

hingga kelesuan itu lesu menemanimu.

3.1. Pendahuluan

Konsep tentang himpunan pertama kali dikemukakan oleh seorang ahli matematika berkebangsaan Jerman, yaitu George Cantor (1918), akhir abad ke-19. Konsep himpunan pada saat itu masih menjadi bahan perdebatan. Dan baru pada tahun 1920, konsep ini mulai digunakan sebagai landasan matematika. Teori himpunan bukan saja digunakan dalam penjelasan bilangan-bilangan, namun juga sangat penting untuk menyelesaikan persamaan, interpretasi grafik, teori kemungkinan dan statistika.[11]

3.2. Definisi Himpunan

Dalam matematika, himpunan merupakan pengertian pangkal (tidak didefinisikan, *undefined term*). Untuk memahaminya, **himpunan sering diartikan sebagai kumpulan objek-objek (abstrak atau konkret) yang didefinisikan dengan jelas (*well defined*)**. Jadi keanggotaannya harus jelas, didefinisikan dengan jelas, berarti himpunan dapat mengklasifikasikan objek kedalam anggota atau bukan anggota himpunan itu.[12]

Contoh himpunan:

- Kumpulan mahasiswa PMM FITK UIN SU Medan angkatan 2017
- Kumpulan bilangan prima yang lebih besar dari 11 dan lebih kecil atau sama dengan 47
- Himpunan penyelesaian dari $x^2 + 3x + 2 = 0$

Contoh kumpulan yang bukan himpunan:

- Kumpulan mahasiswa yang tinggi
- Kumpulan bilangan yang banyak
- Kumpulan pemuda yang tampan

Objek-objek di dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota. Anggota yang sama tidak boleh dituliskan lebih dari satu kali. Nama himpunan menggunakan

[11] Sumber online. Tersedia pada http://repository.ut.ac.id/4704/1/PAUD4305-M1.pdf.
[12] Sumber online. Tersedia pada http://staff.unila.ac.id/coesamin/files/2017/01/Himpunan.pdf.

sebuah huruf kapital. Namun ada beberapa huruf yang menjadi lambang baku untuk suatu himpunan tertentu.

3.3. Cara Penyajian Himpunan

1. Enumerasi

Contoh:

- Himpunan empat bilangan asli pertama: A = {1, 2, 3, 4}.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: B = {4, 6, 8, 10}.
- C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
- R = { a, b, {a, b, c}, {a, c} }
- C = {a, {a}, {{a}} }
- K = {{}}
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: {1, 2, ..., 100 }
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}.

2. Simbol-simbol Baku

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

- Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.
  Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan A adalah himpunan bagian dari U, dengan A = {1, 3, 5}.

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi: { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }

Contoh:

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

A = { x | x adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5} atau

A = { x | x $\in$ P, x < 5 }, ekivalen dengan A = {1, 2, 3, 4}

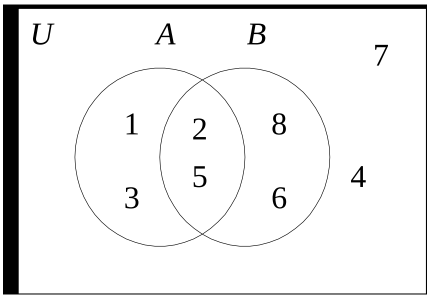
(ii) M = { x | x adalah mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit I}

4. Diagram Venn

Contoh:

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



3.4. Kardinalitas

Sebuah himpunan dikatakan berhingga (*finiteset*) jika terdapat n elemen berbeda (*distinct*) yang dalam hal ini n adalah bilangan bulat tak negatif. Sebaliknya himpunan tersebut dinamakan tak berhingga (*infiniteset*).[13]

Kardinalitas : bilangan yang menunjukkan banyak anggota himpunan.

Jumlah elemen di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.

Notasi: n(A) atau $|A|$

Contoh:

(i) B = { x | x merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 },

atau B = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} maka $|B| = 8$

(ii) T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

(iii) A = {a, {a}, {{a}}}, maka $|A| = 3$

3.5. Himpunan Kosong (*Null Set* atau *EmptySet*)

Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong. Dengan kata lain, himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota.

Notasi: $\varnothing$ atau {}

Contoh 7:

(i) E = {x | x < x}, maka n(E) = 0

(ii) P = {orang Indonesia yang pernah ke bulan}, maka n(P) = 0

(iii) A = {x | x adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$}, n(A) = 0

[13] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm.53

Catatan:

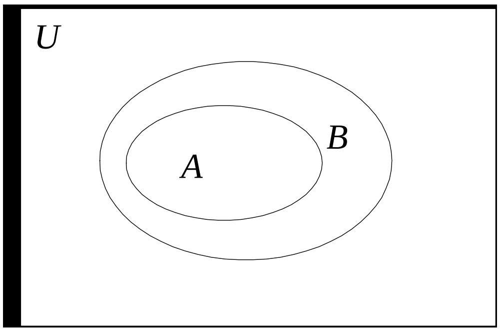
- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {∅}
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {∅, {∅}}
- {∅} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

3.6. Himpunan Bagian (*Subset*)

Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Dalam hal ini, B dikatakan superset dari A ($B \supseteq A$).

Notasi: $A \subseteq B$

Diagram Venn:



Contoh:

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

TEOREMA

Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $\varnothing \subseteq$ A dan A $\subseteq$ A, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*impropersubset*) dari himpunan A.

  Contoh: A = {1, 2, 3}, maka {1, 2, 3} dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A.

- A$\subseteq$B berbeda dengan A$\subset$B

  (i) A $\subset$ B: A adalah himpunan bagian dari B tetapi A $\neq$ B.

  A adalah himpunan bagian sebenarnya (*propersubset*) dari B.

  Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  (ii) A $\subseteq$ B: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (subset) dari B yang memungkinkan A = B.

3.7. Himpunan yang Sama

A = B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.

A = B jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka A$\neq$ B.

Notasi: A = B $\leftrightarrow$ A $\subseteq$ B dan B $\subseteq$ A

Contoh:

(i) Jika A ={ 0, 1 } dan B = { x | x (x – 1) = 0 }, maka A = B

(ii) Jika A = { 3, 5, 8, 5 } dan B = {5, 3, 8 }, maka A = B

(iii) Jika A = { 3, 5, 8, 5 } dan B = {3, 8}, maka A $\neq$ B

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) A = A, B = B, dan C = C

(b) jika A = B, maka B = A

(c) jika A = B dan B = C, maka A = C

3.8. Himpunan yang Ekivalen

Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.[14]

Notasi : A ~ B $\leftrightarrow$ $|A| = |B|$

[14] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 57

Contoh:

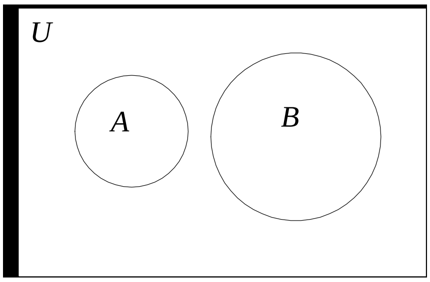
Misalkan A = { 1, 3, 5, 7 } dan B = { a, b, c, d }, maka A ~ B sebab $|A| = |B| = 4$

3.9. Himpunan Saling Lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (disjoint) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

Notasi : A // B

Diagram Venn:



Contoh:

Jika A = { x | x ∈ P, x < 8 } dan B = { 10, 20, 30, ... }, maka A // B.

3.10. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A itu sendiri.[15]

Notasi: P(A) atau 2^A

Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh:

Jika A = { 1, 2 }, maka P(A) = { ∅, { 1 }, { 2 }, { 1, 2 }}

Contoh:

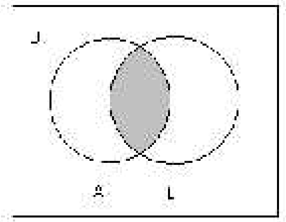
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah P(∅) = {∅}, dan himpunan kuasa dari himpunan {∅} adalah P({∅}) = {∅, {∅}}.

[15] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 59

3.11. Operasi terhadap Himpunan

a.Irisan *(intersection)*

Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



Contoh:

(i) Jika A = {2, 4, 6, 8, 10} dan B = {4, 10, 14, 18},

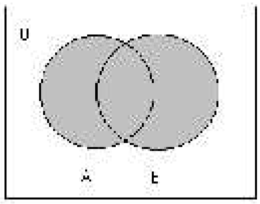
maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika A = { 3, 5, 9 } dan B = { -2, 6 }, maka $A \cap B = \varnothing$.

Artinya: A // B

b.Gabungan (*union*)

Notasi: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



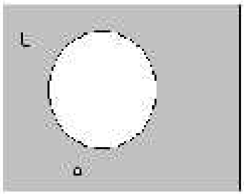
Contoh:

(i) Jika A = { 2, 5, 8 } dan B = { 7, 5, 22 }, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

c.Komplemen (*complement*)

Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh:

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika A = {1, 3, 7, 9}, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika A = { x | x/2 $\in$ P, x < 9 }, maka $\overline{A}$ = { 1, 3, 5, 7, 9 }

Contoh:

Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri

B = himpunan semua mobil impor

C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990

D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta

E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

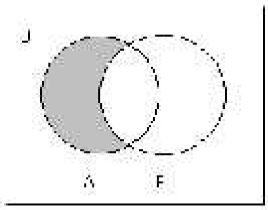
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

d. Selisih (*difference*)

Notasi: $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



Contoh:

(i) Jika A = { 1, 2, 3, ..., 10 } dan B = { 2, 4, 6, 8, 10 }, maka A – B = { 1, 3, 5, 7, 9 } dan B – A = $\varnothing$

(ii) {1, 3, 5} – {1, 2, 3} = {5}, tetapi {1, 2, 3} – {1, 3, 5} = {2}

e. Beda Setangkup (*SymmetricDifference*)

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh:

Jika A = { 2, 4, 6 } dan B = { 2, 3, 5 }, maka $A \oplus B$ = { 3, 4, 5, 6 }

Contoh:

Misalkan

U = himpunan mahasiswa

P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$

(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$

(iii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : $U - (P \cup Q)$

TEOREMA

Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

f. Perkalian Kartesian (*cartesianproduct*)

Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh:

(i) Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka

$$C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

(ii) Misalkan A = B = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2. Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
3. Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 23(i) di atas, $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \neq C \times D$.
4. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

Contoh:

Misalkan:

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu {(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)}.

3.12.Prinsip Inklusi – Eksklusi

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan berhingga, maka:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Misalkan A, B dan C adalah himpunan-himpunan berhingga, maka:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap B) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)$$ [16]

Contoh:

Dalam suatu jajak pendapat terhadap 120 responden diperoleh informasi:

65 orang menyukai majalah A. 45 orang menyukai majalah B. 42 orang menyukai majalah C. 20 orang menyukai majalah A dan B. 25 orang menyukai majalah A dan C. 15 orang menyukai majalah B dan C8 orang menyukai ketiga-tiganya.

a. Gambarkan diagram venn yang sesuai dengan masalah tersebut.

b. Tentukan banyak orang yang menyukai hanya satu majalah.

[16] Seymour Lipschutz dan Marc Lipson. 2008. Matematika Diskret, *Schaum'sOutlines*. Jakarta: Penerbit Erlangga. Hlm. 8

3.13. Hukum-Hukum Himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap U = A$	2. Hukum null/dominasi: – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = U$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$
5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = U$ – $\overline{U} = \varnothing$	

SOAL LATIHAN

1. Perhatikan himpunan universal U = {1,2,3,…,8,9} dan himpunan-himpunan:

   A = { 1,2,5,6}, B = {2,5,7}, C = {1,3,5,7,9}. Tentukanlah:

   a. $A \cap B$ dan $A \cap C$

   b. $A \cup B$ dan $A \cup C$

   c. A^C dan C^C

   d. A – B dan A – B

   e. $A \oplus B$ dan $A \oplus C$

   f. $(A \cup C) - B$ dan $(B \oplus C) - A$

2. Tentukan himpunan kuasa P(A) dari A = {1,2,3,4,5}

3. Diketahui A = { {a,b}, {c}, {d,e,f} }

   a. Tuliskanlah semua elemen dari A

   b. Tentukanlah n(A)

   c. Tentukanlah power set dari A

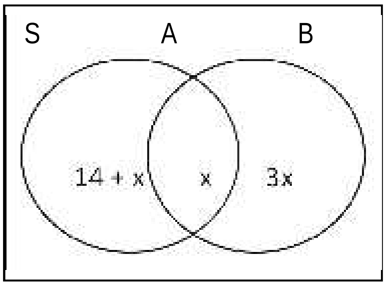
4. Tulislah himpunan berikut dalam bentuk enumerasi dan tentukan berapa nilai kardinalitasnya.

   a. P = {x | x adalah bilangan ganjil, $4 \leq x < 7$}}

   b. Q = {x | x adalah bilangan prima, $15 < x \leq 31$}

5. Jika S merupakan himpunan 6 bilangan ganjil pertama, bilangan ganjil yang ke 3 dan ke 4, B merupakan bilanganganjildari1 sampai 7. Lukiskan diagram venn dan tunjukkan anggota himpunan masing-masing!

6. Dua himpunan dan banyaknya anggota dari himpunan itu ditunjukkan pada diagram Venn berikut ini! jika n(A) = n(B),



Hitunglah:

a. nilai x

b. $n(A \cup B)$

7. Dari sekelompok mahasiswa terdapat 15 orang menggemari bulu tangkis, 20 orang menggemari tenis meja, dan 12 orang menggemari keduanya. Hitunglah jumlah mahasiswa dalam kelompok tersebut.

8. Periksa mana dari himpunan berikut yang hingga, beri penjelasannya:

   a. Garis-garis yang paralel terhadap sumbu x

   b. Huruf-huruf salam abjad Inggris

   c. Bilangan bulat yang merupakan kelipatan 5

   d. Hewan yang hidup dibumi [17]

9. Di antara bilangan bulat 1 sampai 300, berapa banyak yang tidak habis dibagi 3atau 5?

10. Berilah contoh 2 himpunan yang bila diiriskan hasilnya adalah himpunan kosong.

11. Berilah contoh 2 himpunan tak hingga yang bila diiriskan hasilnya himpunan berhingga.

12. Jika A = {4} dan B = {b dimana $b^2 - 16 = 0$, b > 0), apakah dapat dikatakan bahwa A= B?

Kehidupan itu laksana lautan. Orang yang tiada berhati-hati dalam mengayuh perahu, memegang kemudi dan menjaga layar, maka karamlah ia digulung oleh ombak dan gelombang. Hilang di tengah samudera yang luas. Tiada akan tercapai olehnya tanah tepi.
BUYA HAMKA

----

[17] Seymour Lipschutz dan Marc Lipson. 2008. Matematika Diskret, *Schaum'sOutlines*. Jakarta: Penerbit Erlangga. Hlm. 17

BAB IV **LOGIKA**

4.1. Pendahuluan

Dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia disebutkan definisi penalaran, yaitu cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal budi dan bukan dengan perasaan atau pengalaman. Pelajaran logika difokuskan pada hubungan antara pernyataan – pernyataan (*statements*).[18]

4.2. Proposisi

Proposisi adalah kalimat pernyataan yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus keduanya.[19] Sebuah proposisi sudah dapat ditentukan nilai kebenarannya yaitu benar (B) atau salah (S).

Contoh:

Perhatikan enam kalimat berikut:

a. 4 bilangan ganji
b. ^{10}Log 10 = 1
c. 2+2=5
d. Siapa nama kamu?
e. Ambil buku itu!
f. x + 2 = 10

Kalimat a sampai d merupakan proposisi, sedangkan e, f dan g bukan proposisi.

4.3.Proposisi Majemuk

Banyak proposisi adalah komposit, yang artinya, terdiri dari beberapa subproposisi dan berbagai penghubung logika. Proposisi yang demikian disebut sebagai proposisi majemuk (*compoundproposition*). Proposisi yang tidak dapat dipecah lagi menjadi proposisi-proposisi yang lebih sederhana disebut proposisi tunggal (proposisi atomik = proposisi primitif).

Proposisi a, b, c, dan d pada contoh 1 adalah proposisi tunggal. Proposisi majemuk seperti contoh berkut ini:

a. Mawar berwarna merah dan violet berwarna biru.

b. Adam siswa yang cerdas atau ia belajar setiap malam.

---

[18] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 1
[19] Seymour Lipschutz dan Marc Lipson. 2008. Matematika Diskret, *Schaum'sOutlines*. Jakarta: Penerbit Erlangga. Hlm. 61

4.4. Operasi-Operasi Logika Dasar

Untuk membentuk proposisi baru digunakanlah operasi-operasi pada logika yang disebut dengan operator logika.

Ada 2 jenis operator logika yaitu:

1. Operator biner: operator yang digunakan untuk menghubungkan dua atau lebih proposisi atomik. Operator biner yaitu: konjungsi = dan (p∧q), disjungsi = atau (p∨q), implikasi = jika…maka… (p→q), biimplikasi = …jika dan hanya jika…(p↔q)
2. Operator uner: operator yang digunakan untuk mengoperasikan sebuah proposisi atomik. Operator uner yaitu: ingkaran = negasi (¬p).

4.5. Tabel Kebenaran

Nilai kebenaran sebuah proposisi majemuk ditentukan oleh nilai kebenaran proposisi-proposisi tunggalnya dan operator logika yang menghubungkan proposisi-proposisi tunggal tersebut. Sebuah tabel yang berisi nilai kebenaran dari sebuah proposisi majemuk disebut dengan tabel kebenaran.

Berikutinimerupakantabelkebenaran.

Tabel 1. TabelKebenaran

P	q	p∧q	p∨q	p→q	p↔q	¬p
B	B	B	B	B	B	S
B	S	S	B	S	S	S
S	B	S	B	B	S	B
S	S	S	S	B	B	B

4.6. Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi

Tautologiadalah proposisi majemuk yang bagaimanapun kombinasi kebenaran proposisi atomiknya**seluruhnya** bernilai Benar.

Kontradiksi adalah proposisi majemuk yang bagaimanapun kombinasi kebenaran proposisi atomiknya **seluruhnya** bernilai Salah.

Kontingensi adalah proposisi majemuk yang masing-masing kombinasi kebenaran proposisi atomiknyabisa bernilai Benar dan bias bernilai Salah.

Contoh:

1. Proposisi ¬(p∧q) ↔ (¬p ∨ ¬q) merupakan tautologi.

P	**Q**	**p∧q**	**¬(p∧q)**	**¬p**	**¬q**	**¬p ∨ ¬q**	**¬(p∧q) ↔ (¬p ∨ ¬q)**
B	B	B	S	S	S	S	B
B	S	S	B	S	B	B	B
S	B	S	B	B	S	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

2. Proposisi (p∧ ¬p) merupakan kontradiksi.

p	**¬p**	**p∧ ¬p**
B	S	S
B	S	S
S	B	S
S	B	S

3. Proposisi (¬p∨ ¬q) merupakan kontingensi.

P	**Q**	**¬p**	**¬q**	**(¬p ∨ ¬q)**
B	B	S	S	S
B	S	S	B	B
S	B	B	S	B
S	S	B	B	B

4.7. Ekivalensi Logika

Duabuahproposisimajemukdikatakanekivalen (setara) apabila memiliki tabel kebenaran yang identik.[20]

Notasi: P(p,q,…) ekivalen dengan Q(p,q,…) ditulis dengan P(p,q,..) ≡ Q(p,q,…)

Jika P(p,q,…) tidak ekivalen dengan Q(p,q,…) ditulis dengan P(p,q,..) ≢ Q(p,q,…).

Contoh:

p↔q ekivalen dengan (p→q) ∧ **(**q→p). Tunjukkantabelkebenarannya.

[20] Seymour Lipschutz dan Marc Lipson. 2008. Matematika Diskret, *Schaum'sOutlines*. Jakarta: Penerbit Erlangga. Hlm. 65.

Penyelesaian:

P	q	p↔q	p→q	q→p	(p→q) ∧ (q→p)
B	B	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S
S	B	S	B	S	S
S	S	B	B	B	B

4.8. Proposisi Berkuantor

Ada 2 jenis kuantor:

1. Kuantor Universal: "untuk setiap" = "untuk semua" (∀x)

   Jika $\{x|x \in A, p(x) = A\}$ maka ∀x p(x) adalah benar; jika tidak ∀x p(x) adalah salah.

2. Kuantor Eksistensial: "ada" = "beberapa" (∃x)

   Jika $\{x|p(x) \neq \emptyset\}$ maka ∃x p(x) adalah benar; jika tidak ∃x p(x) adalah salah.

Contoh:

1. Proposisi(∀n ∈ N) (n+4 > 3) adalah benar karena $\{n|n + 4 > 3\}$ = {1,2,3,…} = **N**
2. Proposisi (∀n ∈ N) (n+2>8) adalah salah karena $\{n|n + 2 > 8\}$ = {7,8,…} ≠**N**
3. Proposisi (∃n ∈ N) (n+4 < 7) adalah benar karena $\{n|n + 4 < 7\}$ = {1,2,…} ≠ ∅
4. Prposisi (∃n ∈ N) (n+2 > 8) adalah salah karena $\{n|n + 6 < 4\}$ = {7,8,…} ≠ ∅

4.9. Negasi dari Proposisi Berkuantor

Teorema D'Morgan:

¬(∀ x ∈ A) p(x) ≡ (∃x∈A)¬p(x)

¬(∃ x ∈ A) p(x) ≡ (∀x∈A)¬p(x)

Contoh**:**

1. Negasi dari "Ada seseorang yang berumur mencapai 200 tahun" adalah "Setiap orang yang hidup tidak mencapai umur 200 tahun".
2. Negasi dari "Semua mahasiswa Pendidikan Matematika adalah pria" adalah "Ada mahasiswa Pendidikan Matematika yang wanita".

4.10. Contoh Penyangkal (*CounterExample*)

Misalkan pernyataan($\forall$ x $\in$ A). Untuk menunjukkan bahwa pernyataan($\forall$ x $\in$ A) bernilai Salah maka dapat dipilih sebuah contoh yang menunjukkan bahwa ($\exists x \in A$) yang bernilai Salah. Contoh seperti yang dijelaskan tersebut tadi disebut dengan *Counter example* atau contoh penyangkal.[21]

Apabila pernyataan ($\forall$ x $\in$ A) bernilai benar maka tidak terdapat counter examplenya.

Contoh:

1. ($\forall x \in R, |x| \neq 0$)

   Pernyataan ini Salah karena 0 adalah counter examplenya, artinya $\exists x = 0 \in R, |x| = 0$.

2. ($\forall x \in R, x^2 \geq x$)

   Pernyataan tersebut Salah karena $\frac{1}{2}$ adalah suatu counter examplenya.

3. ($\forall x \in R, x^2 \geq x$)

   Pernyataan tersebut Benar karena tidak ada counter examplenya.

4.11. Varian dari Implikasi

Implikasi	: $p \rightarrow q$	= jika p maka q
Konvers	: $q \rightarrow p$	= jika q maka p
Invers	: $\neg p \rightarrow \neg q$	= jika negasi p maka negasi q
Kontraposisi	: $\neg q \rightarrow \neg p$	= jika negasi q maka negasi p

Contoh:

Implikasi	: Jika 2+3 = 5 maka 3 bilangan gasal
Konvers	: Jika 3 bilangan gasal maka 2+3=5
Invers	: Jika 2+3 $\neq$5 maka 3 bukan bilangan gasal
Kontraposisi	: Jika 3 bukan bilangan gasal maka 2+3 $\neq$5

4.12.Penarikan Kesimpulan (Argumentasi)

Salah satu penerapan logika matematika adalah pada penarikan kesimpulan atau argumentasi berdasarkan beberapa premis yaitu pernyataan yang diketahui bernilai benar. Dengan menggunakan prinsip-prinsip logika dapat ditemukan kesimpulan dari premis-premis yang diajukan. Penarikan kesimpulan yang bernilai benar dinyatakan

---

[21] Seymour Lipschutz dan Marc Lipson. 2008. Matematika Diskret, *Schaum'sOutlines*. Jakarta: Penerbit Erlangga. Hlm. 70.

berlaku/sah/valid, yaitu jika semua premisnya benar maka kesimpulannya juga benar.

Ada beberapa prinsi plogika yaitu ;

1. Modus Ponens

Modus ponen adalah suatu argumentasi yang bentuknyadapat dinyatakan seperti di bawah ini:

$p \Rightarrow q$ premis

ppremis

$\therefore\ q$ konklusi

Sah tidaknya suatu argumentasi,dapat dikaji menggunakan tabel kebenaran dari proposisi $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$sebagai berikut:

P	**q**	**p Ĝ q**	**(pĜ q) ė p**	**[(pĜ q) ė p] Ĝ q**
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Suatu argumentasi dianggap sah atau valid jika argumen tersebut benar untuk setiap kemungkinan premisnya atau merupakan **tautologi** untuk semua nilai kebenaran premis-premisnya.

2. Modus Tollens

Modus tollens adalah suatu argumentasi yang bentuknya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$p \Rightarrow q$ premis

$\neg q$ premis

$\therefore \neg p$ konklusi

Dengan menggunakan tabel dapat dibuktikan bahwabentuk:

$[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$ merupakan Tautologi

p	**Q**	**p Ĝ q**	**¬ q**	**[(p Ĝ q) ė¬q]**	**¬ p**	[(p ⇒ q) ∧¬q] ⇒¬ p
B	B	B	S	S	S	B
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B

3. Silogisme

Silogisme juga disebut sifat transitif dari implikasi, adalah suatu argumentasi yang bentuknya dapat dinyatakan sebagai berikut:

p⇒ q premis

q ⇒ r premis

∴p⇒r konklusi

Dengan menggunakan tabel dapat dibuktikan bahwa bentuk:

[(p ⇒ q) ∧(q ⇒ r)] ⇒(p⇒r) merupakan Tautologi

p	**q**	**r**	**p Ĝ q**	**qĜ r**	**[(p Ĝ q) ė (q Ĝ r)]**	**(pĜ r)**	**[(p Ĝ q) ė (q Ĝ r)] Ĝ (pĜ r)**
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	S	B	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	S	B	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

SOAL LATIHAN

1. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi berikut:
   a. Jika segitiga ABC adalah segitiga sama sisi maka sisi-sisi segitiga tersebut sama panjang.
   b. Jika dua persegi panjang kongruen maka luasnya sama.
2. Dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan bulat, tentukan nilai x yang akan menyebabkan kalimat terbuka berikut ini menjadi Benar:
   a. $2x - 4 = 5$
   b. $x + 2 = -5$
   c. $x^2 - 16 = 0$
   d. $x + 3 = -2x$
3. Misalkan A = {1,2,3,4,5}. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut:
   a. $(\forall x \in A, x + 3 < 10)$
   b. $(\forall x \in A, x + 3 \leq 7)$
   c. $(\exists x \in A, x + 3 = 10)$
   d. $(\exists x \in A, x + 3 < 5)$
4. Tentukan counter example untuk setiap pernyataan di bawah ini dimana S = {3,5,7,9} adalah himpunan semestanya:
   a. $(\forall x \in A, x + 3 \geq 7)$
   b. $(\forall x$, x bilangan ganjil)
   c. $(\forall x$, x bilangan prima)
5. Buatlah tabel kebenaran dari $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$.
6. Periksa kesahihan pernyataan berikut:
   a. Jika Adi menjawab soal dengan benar, maka ia akan memperoleh jawaban 2.
      Adi memperoleh jawaban = 2.
      $\therefore$Adi menjawab soal dengan benar.
   b. Bilangan riil ini merupakan bilangan rasional dan irrasional.
      Bilangan riil ini tidak rasional.
      $\therefore$ Bilangan riil ini bilangan irrasional.
   c. Jika suatu bilangan lebih besar dari 2, maka kuadratnya lebih besar dari 4.
      Bilangan ini tidak lebih besar dari 2.

$\therefore$ Kuadrat bilangan ini tidak lebih besar dari 4.

7. Periksa apakah $[(p \rightarrow q) \rightarrow r]$ dan $[p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ ekivalen?

8. Tentukan apakah implikasi-implikasi berikut ini bernilai Benar atau Salah:

   a. Jika 2 + 2 = 4 maka 3 + 3 = 5

   b. Jika 1 + 1 = 2 maka Medan ibukota Sumatera Utara

   c. Jika 2 + 2 = 4 maka 4 adalah bilangan prima.

9. Untuk menerangkan karakteristik mata kuliah X, misalkan:

   p: "Kuliahnya menarik"

   q: "Dosennya enak"

   r: "Soal-soal ujiannya mudah".

   Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik (menggunakan p,q,r):

   a. Kuliahnya tidak menarik, dosennya tidak enak, dan soal - soal ujiannya tidak mudah.

   b. Kuliahnya menarik atau soal-soal ujiannya tidak mudah, namun tidak keduanya.

   c. Salah bahwa kuliahnya menarik berarti dosennya enak dan soal-soal ujiannya mudah.

10. Tentukan nilai kebenaran dari tiap pernyataan berikut ini

    a. Persamaan kuadrat yang akarnya 4 dan –3 adalah $x^2 - x = 12$.

    b. Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 1$ dengan gradien 4adalah $y = 4x - 5$

    c. ${}^2\text{Log } 16 = 3$ dan $\text{Cos } 30^o = 1/2\sqrt{3}$

    d. $x^2 - 4x + 3 = 0$ mempunyai akar real dan $\sqrt{9} = \pm 3$

    e. $2 + 3 = 5$ atau $\text{Cos } 180^o = 0$

    f. Jika Persamaan kuadrat mempunyai dua akar berbeda maka $D > 0$

    g. Jika 7 bukan bilangan prima maka 7 bilangan ganjil.

    1. $2 + 5 \neq 7$ jika dan hanya jika 7 bilangan genap.

11. Tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa pernyataan majemuk berikut ekuivalen (ekuivalen logis).

a. $p \Rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$

b. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

c. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

12. Ujilah kevalidan argument berikut:

Jika dua sisi suatu segitiga adalah sama, maka sudut-sudut yang berseberangan juga sama.

Dua sisi suatu segitiga adalah tidak sama.

Sudut-sudut yang berseberangan tidak sama.

12. Ada tiga oraang siswa yaitu TONI, DIDI, dan HORY. Ditentukan bahwa:

a. Toni tidak pernah berbohong. Didi kadang-kadang berbohong. Hory selalu berbohong.
b. Mereka memakai kaos hijau, kunimg, dan merah.
c. Siswa yang memakai kaos kuning menyatakan bahwa siswa yang berkaos merah adalah Hory.
d. Siswa yang memakai kaos merah menyatakan bahwa dirinya adalah Didi.
e. Siswa terakhir yang memakai kaos hijau menyatakan bahwa siswa yang memakai kaos merah adalah Toni.

Berdasarkan keterangan di atas, tentukan warna kaos yang dipakai tiap siswa.[22]

13. Periksalah sah atau tidaknya argumentasi berikut, kemudian sebutkan prinsip kesimpulan yang digunakan !

a. P_1 : Jika Ardi rajin belajar maka Ardi naik kelas.

P_2 : Ardi rajin belajar

Kesimpulan: Ardi naik kelas

b. P_1 : Setiap hari Minggu pengunjung toko banyak sekali.

P_2 : Pengunjung toko sepi.

Kesimpulan: Hari ini bukan hari Minggu.

---

[22] Sumber online. Tersedia pada http://desputmath.blogspot.com/2014/01/logika-matematika.html.

14. Buatlah konklusi dari premis-premis di bawah ini !

a. P_1 : Jika Herman pengusaha maka ia berdasi.

P_2 : Herman pengusaha.

b. P_1 : Jika Arman kaya maka Arman bahagia.

P_2 : Arman tidak bahagia.

c. P_1 : Jika n bilangan ali maka 2n bilangan asli genap.

P_2 : Jika 2n bilangan asli genap maka 2n + 1 bilangan ganjil.

d. P_1 : Jika omzet penjualan meningkat maka gaji karyawan naik.

P_2 : Jika gaji karyawan naik maka Sutisna jadi menikah.

15. Lengkapilah tabel kebenaran berikut ini!

p	q	~p	~q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \vee q)$
B	B	…	…	…	…	…	…	…	…
B	S	…	…	…	…	…	…	…	…
S	B	…	…	…	…	…	…	…	…
S	S	…	…	…	…	…	…	…	…

Tinggalkan berlebihan dalam memandang;

tertuntunlah menuju khusyu'.

Tinggalkan berlebihan dalam bicara;

terbimbinglah pada hikmah.

~Salim A. Fillah~

BAB 5 MATRIKS

5.1. Pendahuluan

Teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu aljabar linier yang menjadi pembahasan penting dalam ilmu matematika. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang matematika maupun ilmu terapannya. Aplikasi tersebut banyak dimanfaatkan dalam menyelesaikan masalah-masalah yang berhubungan dengan kehidupan sehari-hari, misalnya pada aplikasi perbankan yang senantiasa berhubungan dengan angka-angka, dalam dunia olahraga seperti penentuan klasemen suatu pertandingan, dalam bidang ekonomi biasa digunakan untuk menganalisa input dan output seluruh sektor ekonomi.[23]

5.2. Definisi

Matriks adalah sekumpulan bilangan yang disusun secara baris dan kolom dan ditempatkan pada kurung biasa atau kurung siku.

Notasi yang digunakan:

$$\begin{pmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m} & \cdots & a_{m} \end{pmatrix} \text{atau} \begin{bmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m} & \cdots & a_{m} \end{bmatrix}$$

Matriks diberi nama dengan huruf kapital. Bilangan-bilangan pada matriks disebut entri matriks. Misalnya, matriks di atas diberi nama matriks A = (a_{ij}), a_{ij} adalah entri pada baris ke I dan kolom ke j. Matriks mempunyai ukuran yang disebut ORDO matriks. Ordo martriks dilambangkan dengan (*m* x *n*) dimana: m = banyak barisnya dan n = banyak kolomnya.

Contoh matriks:

$$A_{3x2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

[23] Sumber oline. http://repository.usu.ac.id/bitstream/handle/123456789/40683/Chapter%20I.pdf;jsessionid=0EB0D618320214E7AC6F1ED168D8DA72?sequence=4.

5.3. Matriks Baris, Matriks Kolom dan Matriks Nol

Matriks baris: matriks yang hanya memiliki m baris dan 1 kolom.

Matriks kolom: matriks yang hanya memiliki n kolom dan 1 baris.

Matriks nol: matriks yang semua entrinya adalah nol.

Contoh:

Matriks baris: $A_{2x1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Matriks kolom: $B_{1x3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Matriks nol: $O_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.4. Operasi pada Matriks

a. Penjumlahan Matriks

Syarat: Matriks A dan B dapat dijumlahkan jika ordo A = ordo B

Rumus: “Entri-entri yang seletak dijumlahkan”

$A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn}$

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & \cdots & a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & \cdots & b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m + b_m & \cdots & a_m + b_m \end{bmatrix}$$

b. Pengurangan Matriks

Syarat: Matriks A dan B dapat dijumlahkan jika ordo A = ordo B

Rumus: “Entri-entri yang seletak dikurangkan”

$A_{mxn} - B_{mxn} = C_{mxn}$

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & \cdots & a_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & \cdots & b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 & \cdots & a_1 - b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m - b_m & \cdots & a_m - b_m \end{bmatrix}$$

c. Perkalian Matriks dengan Matriks

Syarat: Matriks A dan B dapat dikalikan jika banyak kolom matriks A = banyak baris matriks B. Hasil perkaliannya adalah matriks berordo m x n, dimana m adalah banyak baris matriks A dan n adalah banyak kolom matriks B.

$A_{mxp} \times B_{pxn} = C_{mxn}$

Rumus: “Jumlahkan perkalian entri pada baris matriks A dengan entri pada kolom matriks B”

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs & at+bu \\ cp+dq & cr+ds & ct+du \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat Perkalian Matriks :

1. Umumnya tidak komutatif (AB $\neq$ BA)
2. Asosiatif: (AB)C = A(BC)
3. Distributif kiri: A(B + C) = AB + AC

   Distributif kanan: (B + C)A = BA + CA
4. Identitas: IA = AI = A
5. k(AB) = (kA)B

a. Perkalian Skalar dengan Matriks

Rumus: “Kalikan skalar dengan setiap entri pada matriks”

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$k.A = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

5.5. Transpose Matriks

Transpose (putaran) matriks A yaitu matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menukarkan elemen-elemen pada baris menjadi kolom dan sebaliknya elemen-elemen pada kolom menjadi baris.

Transpose matriks A dinyatakan dengan A^T

Contoh: $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ maka P^T

5.6. Kesamaan Matriks

Matriks A = matriks B berarti entri-entri seletaknya sama.

5.7. Invers Matriks

Jika AB = BA = I , dimana I matriks satuan yaitu $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka A dan B dikatakan saling invers. Invers matriks A dinotasikan A^{-1}.

Misal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ maka :

$$AB = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Karena } B = A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \text{ maka } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$D = |A| = \det(A) = ad - bc$.

Jika D = 0, maka matriks A tidak mempunyai invers dan matriks A disebut matriks Singular.

Jika $D \neq 0$ maka matriks A disebut matriks Non Singular.

SOAL LATIHAN

1. Diketahui matriks A dan B berordo 3x3

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} x & x+y & y+z \\ z-a & b & b+2c \\ x+d & y-e & e+f \end{pmatrix}$$

   Jika A = B, tentukan nilai a,b,c,d,e,f,x,y dan z.

2. Ditentukan matriks-matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, carilah matriks

   a. 2A b. -2B c. $\frac{2}{5}$(A+B) d. $(5A-2B)^T$

3. Jika H adalah matriks berordo 3x3, tentukan matriks H dari persamaan berikut:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} - 5H = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 15 \\ 4 & 20 & -11 \\ 1 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

4. Tentukan hasil perkalian matriks berikut:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 4 & 8 & -9 \\ 1 & -6 & 4 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

5. Ditentukan matriks-matriks $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ dan $R = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

   Carilah matriks $P(QR)$, $(PQ)R$, $(PQ)^T$, dan $P^T Q^T$.

6. Selesaikan setiap persamaan berikut:

   a. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 2 & -1 \\ z & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$

7. Ditentukan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Carilah matriks A^2 , A^3, dan A^4.

8. Jika A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan I, matriks satuan ordo dua, maka A^2 - 2A + I adalah

9. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks Identitas. Tentukan nilai xsupaya matriks A – xI merupakan matriks singular!

   10. Diketahui A = $\begin{bmatrix} x+y & x \\ y & x-y \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x \\ -2y & 3 \end{bmatrix}$, jika A^T =B. Tentukan nilai x?

11. Tentukan x jika $P = \begin{bmatrix} x & -8 \\ -x & 2x \end{bmatrix}$ singular!

12. Tentukan matriks X jika:

    a. $X\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$

    b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 28 \\ -14 \end{bmatrix}$

d. $X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 14 & 5 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$

Tiada orang baik yang tak punya masa lalu.

Tak ada orang jahat yang tak punya masa depan.

Saling menghargailah kita. Setelah itu, istiqamah.

Salim A Fillah

6.1. Pendahuluan

Konsep fungsi merupakan salah satu konsep yang penting dalam matematika. Banyak permasalahan sehari-hari yang tanpa disadari menggunakan konsep ini. Misalnya, dalam suatu kegiatan donor darah, setiap orang yang akan jadi pendonor diminta untuk menyebutkan jenis golongan darahnya. Dari data diketahui Andi bergolongan darah A. Budi golongan darahnya B, Ahmad golongan darahnya A, Anton golongan darahnya O, Abdul golongan darahnya AB, dan Bagus golongan darahnya B. Jika suatu saat dibutuhkan pendonor golongan darah A, siapakah yang dapat jadi pendonor? Kasus tersebut merupakan contoh permasalahan yang menerapkan konsep fungsi. Jika kamu amati, setiap orang yang telah disebutkan mempunyai satu jenis golongan darah saja. Jadi, apa sebenarnya fungsi itu? Agar kamu lebih memahami tentang fungsi, pelajarilah bab ini dengan sungguh-sungguh.[24]

6.2. Definisi

Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.[25]

Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.

a R b adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya a dihubunganakan dengan b oleh R

a $\not R$ b adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R.

A disebut daerah asal (domain) dari R, dan B disebut daerah hasil (codomain) dari R.

Contoh:

Misal P = {2, 3, 4} dan Q = {2, 4, 8, 9, 15}. Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q maka diperoleh:

R = {(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)}

[24] Sumber online. Tersedia pada http://bahanajarguru.blogspot.com/2011/10/fungsi-dan-relasi-bab-ii.html.

[25] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 103

Catatan:

Relasi pada himpunan A adalah relasi dari A × A.

Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari A × A.

Contoh:

Misalkan R adalah relasi pada A = {2, 3, 4, 8, 9} yang didefinisikan oleh (x, y) ∈ R jika x adalah faktor prima dari y maka:

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)}

6.3. Sifat-Sifat Relasi[26]

1. Refleksif (*reflexive*)

   R pada A refleksif $\leftrightarrow (\forall x \in A)(x, x) \in R$

   R pada A irrefleksif $\leftrightarrow (\forall x \in A)(x, x) \notin R$

2. Simetris (*symmetric*) = setangkup

   R pada A simetris $\leftrightarrow (\forall x, y \in A)(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$

   R pada A asimetris $\leftrightarrow (\forall x, y \in A)(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$

3. Transitif (*transitive*) = menghantar

   R pada A transitif $\leftrightarrow (\forall x, y, z \in A)((x, y) \in R \text{ dan } (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R$

4. Anti simetris$(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \text{ dan } (y, x) \in R) \rightarrow x = y$

Contoh:

1. Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka periksa sifat-sifat relasi berikut:

   a. Relasi R = {(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)}

   b. Relasi R = {(1,1), (2,2), (2,3), (4,2), (4,3), (4,4)}

2. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif, periksa sifat-sifat relasi tersebut.

3. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**:

   R : x lebih besar dari y   S : x + y = 5   T : 3x + y = 10

   Periksa sifat-sifat relasi tersebut.

---

[26] Jong Jek Siang. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Penerbit Andi. Hlm. 341

6.4. Relasi Inversi

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$ [27]

Contoh:

Misalkan P = {2, 3, 4} dan Q = {2, 4, 8, 9, 15}. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi qmaka kita peroleh:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

R^{-1} adalah invers dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan

$(q, p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p

maka kita peroleh

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$

6.5. Mengkombinasikan Relasi

Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.

Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpuna A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

$$R_1 \cap R_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ dan } (x, y) \in R_2\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ atau } (x, y) \in R_2\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ dan } (x, y) \notin R_2\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(x, y) \mid (x, y) \in R_2 \text{ dan } (x, y) \notin R_1\}$$

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cup R_2) - (R_1 \cap R_2)$$

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 - R_2) \cup (R_2 - R_1)$$

Contoh:

Misalkan A = {a, b, c} dan B = {a, b, c, d}.

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$

---

[27] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 108

$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$

$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

6.6.Komposisi Relasi

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan S o R, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh:

$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C$, dan untuk beberapa $b \in B, (a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S\}$[28]

Contoh:

Misalkan:

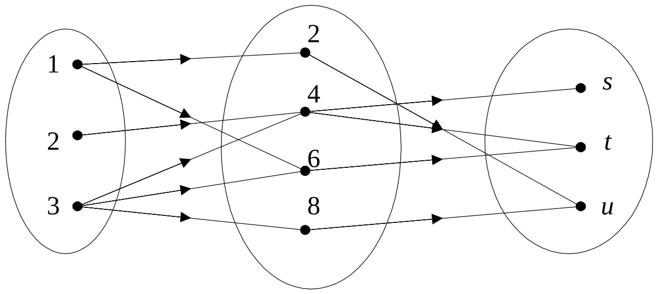
R = {(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)} adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8}; dan

S = {(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)}adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan {s, t, u}.

Maka komposisi relasi R dan S:

S o R = {(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) }

Komposisi relasi R dan S lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



6.7. Fungsi

Misalkan A dan B himpunan.

Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B.

[28] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 110

Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

$$f : A \rightarrow B$$

yang artinya f **memetakan** A ke B. [29]

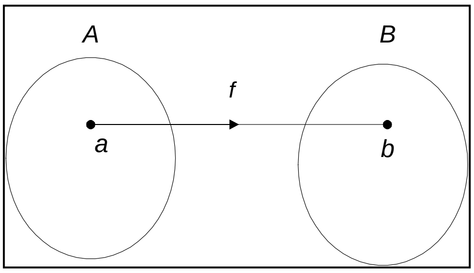
A disebut **daerah asal** (domain) dari f dan B disebut **daerah hasil** (codomain) dari f.

Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

f(a) = b jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.

Jika f(a) = b, maka b dinamakan **bayangan** (image) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (pre-image) dari b.

Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (range) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin proper subset) dari B.



Contoh:

1. f ⊆ AxB. A = {1, 2, 3} dan B = {u, v, w}. Relasi f = {(1, u), (2, v), (3, w)}. Periksa apakah f fungsi. Jelaskan.
2. f ⊆ AxB. A = {1, 2, 3, 4} dan B = {u, v, w}. Relasif = {(1, u), (2, v), (3, w)}. Periksa apakah f fungsi. Jelaskan.

Misalkan f : **Z** →**Z** didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

[29] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm.129

6.8. Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif

1. Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama.

   f : X $\rightarrow$ Y adalah fungsi injektif $\leftrightarrow$ $(\forall x_1, x_1 \in X)\ (f(x_1) = f(x_2)) \rightarrow x_1 = x_2$

2. Fungsi f dikatakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A.Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f.

   f : X $\rightarrow$ Y adalah fungsi surjektif $\leftrightarrow$ $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) \ni f(x) = y$

3. Fungsi f dikatakan **bijektif**atau **berkorespondensi satu-satu** jika f injektif dan surjektif.

   f : X $\rightarrow$ Y adalah fungsi bijektif $\leftrightarrow$ injektif dan surjektif

Contoh:

Misalkan f : **Z** $\rightarrow$**Z**. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ merupakan fungsi injektif, surjektif atau bijektif atau bukan semuanya?

- $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.
- $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi surjektif karena $y = 0 \in Z$ tetapi $(\nexists x \in X) \ni f(x) = x^2 + 1 = 0$.
- $f(x) = x^2 + 1$ bukan bijektif.

6.9. Fungsi Invers

Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (invers) dari f. Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *notinvertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Balikan fungsi disebut fungsi invers dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

Contoh:

Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

$f(x) = x - 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi yang *notinvertible*.

6.10. Komposisi dari Dua Buah Fungsi

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C.

Komposisi f dan g, dinotasikan dengan f o g, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$ [30]

Contoh**:**

Diberikan fungsi: g = {(1, u), (2, u), (3, v)}yang memetakan A = {1, 2, 3} ke B = {u, v, w}, dan fungsif = {(u, y), (v, x), (w, z)}yang memetakan B = {u, v, w} ke C = {x, y, z}. Fungsi komposisi dari A ke C adalah:

f o g = {(1, y), (2, y), (3, x) }

Contoh:

Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan f o g dan g o f .

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

[30] Rinaldi Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika. Hlm. 135

SOAL LATIHAN

1. Tentukan apakah setiap fungsi berikut ini adalah satu ke satu:
   a. Untuk setiap orang di bumi ini berikanlah angka yang menunjukkan usianya.
   b. Untuk setiap negara di dunia ini berikanlah posisi busur dan lintang dari ibukotanya.
   c. Untuk setiap buku yang ditulis hanya oleh satu pengarang berikanlah nama pengarangnya.
2. Diberikan sebuah fungsi $f(x) = x - 1$. Periksa apakah $f(x)$ injektif, surjektif, bijektif? Jelaskan.
3. Misalkan $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{1,2,3,4\}$ dan $Z = \{1,2\}$
   a. Buatlah fungsi $f: X \rightarrow Y$ yang injektif, tetapi tidak surjektif?
   b. Buatlah fungsi $g: X \rightarrow Y$ yang surjektif, tetapi tidak injektif?
   c. Buatlah fungsi $h: X \rightarrow Y$ yang tidak injektif dan tidak surjektif?
   d. Buatlah fungsi $i: X \rightarrow Y$ yang injektif dan surjektif?
4. Sebuah desa dihuni 500 penduduk. Apakah pasti ada paling sedikit 2 penduduk yang berulang tahun pada hari yang sama?
5. Dalam sebuah kelompok yang terdiri dari 30 orang, apakah pasti paling sedikit 3 orang yang lahir pada hari yang sama?
6. Dalam sebuah kelompok yang terdiri dari 2000 orang, apakah pasti ada paling sedikit 5 orang yang lahir ada hari yang sama?
7. Misalkan f, g, dan h adalah fungsi-fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan riil dengan $f(x) = x + 2$; $g(x) = x - 2$; $h(x) = 3x \ \forall x \in R$. Carilah $g \circ f$; $f \circ g$; $f \circ f$; $g \circ g$; $f \circ h$; $h \circ g$; $h \circ f$; $f \circ h \circ g$.

Barakah itu bukan soal APA yang diberikan Allah. Melainkan soal BAGAIMANA Dia mengulurkannya. Dengan senyum ridha ataukah dilempar murka?

Salim A. Fillah

7.1. Pendahuluan

Teori graf atau teori grafik dalam matematikadan ilmu komputer adalah cabang kajian yang mempelajari sifat-sifat "graf" atau "grafik". Banyak sekali struktur yang bisa direpresentasikan dengan graf, dan banyak masalah yang bisa diselesaikan dengan bantuan graf. Jaringan persahabatan pada Facebookbisa direpresentasikan dengan graf, yakni simpul-simpulnya adalah para pengguna Facebook dan ada sisi antar pengguna jika dan hanya jika mereka berteman. [31]

Graf sering digunakan untuk merepresentasikan sebuah objek dan hubungannya dengan objek lain. Sejarah teori graph bermula saat ahli matematika Swiss, Leonhard Euler memecahkan masalah jembatan Königsberg.[32]

7.2. Sejarah Graf (Asal Mula Ilmu GRAF)

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* yang sangat terkenal di Eropa.

Tujuh Jembatan *Konigsberg*; Harus Dilewati Hanya Satu Kali

Gambar 1. Kota Tujuh Jembatan: Kota Kaliningrad (Königsberg).

Sumber gambar :Google.com

[31] Sumber online. Tersedia pada https://id.wikipedia.org/wiki/Teori_graf.

[32] Sumber online. Tersedia pada http://mti.binus.ac.id/2018/03/05/teori-graph-sejarah-dan-manfaatnya/.

Konigsberg adalah sebuah kota pada Jerman kuno (Prussia). Setelah kekalahan Jerman di Perang Dunia 2 pada tahun 1945, kota ini diambil oleh Uni Soviet (sekarang Rusia) dan diubah namanya menjadi Kaliningrad.

Di abad ke 18, Kota *Konigsberg* merupakan kota yang sangat besar dan makmur. Kota ini menjadi pusat perdagangan karena letaknya yang strategis, dilintasi oleh Sungai Pregel. Banyak perahu berlabuh untuk berdagang di sekeliling Pulau Kneiphof yang berada di tengah sungai ini.

Untuk menghubungkan kota serta Pulau Kneiphof, dibangun tujuh buah jembatan. Menurut cerita turun temurun, setiap hari Minggu sore para penduduk Kota *Konigsberg* suka sekali berjalan-jalan di sekitar sungai, menyebrangi jembatan sambil menikmati keindahan Kota *Konigsberg*. Agar lebih menarik, para penduduk iseng menciptakan sebuah tantangan.

Gambar 2. Gambaran Kota *Konigsberg* Zaman Dulu.

Sumber gambar : Google.com

Tantangannya adalah bagaimana mengitari ke tujuh jembatan *Konisberg* tepat satu kali.

Mereka terus mencari-mencari dan berjalan-jalan mengitari pulau, namun **tidak ada** satupun yang berhasil menemukan rute perjalanan tersebut. Meski demikian, tidak ada yang yakin dan dapat menjelaskan bahwa rute seperti itu tidak ada.

Tantangan ini menarik perhatian Leonhard Euler, salah seorang matematikawan terhebat sepanjang masa. Euler pun akhirnya berhasil menjelaskan tantangan ini dengan sangat baik. Euler menyatakan bahwa tidak mungkin setiap jalur pada graf dapat dilalui lebih dari satu kali jika derajat simpulnya tidak seluruhnya genap.

Begitu baiknya solusi Euler ini sampai-sampai menjadi cikal bakal dari salah satu cabang ilmu di Matematika yaitu Teori Graf/ Grafik (*Graph Theory*).

Ilmu Matematika ini sekarang banyak digunakan untuk menganalisa berbagai hal di kehidupan sehari-hari, mulai dari ilmu komputer, masalah transportasi, masalahan jaringan listrik, hingga masalah kimia hidrokarbon.[33]

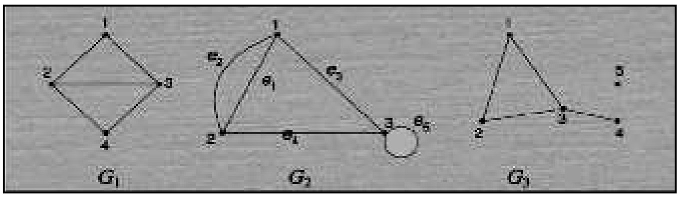
7.3.Definisi

Graf (G = V, E) adalah struktur diskrit yang terdiri atas himpunan simpul (V) dan himpunan jalur (E), dimana V$\neq \emptyset$.

Sebuah graf boleh saja tidak mengandung jalur, tetapi tidak boleh tidak mengandung simpul.

7.4. Istilah-Istilah pada Graf

Untuk memahami istilah-istilah pada graf, dapat dijelaskan dengan merujuk gambar graf berikut:



Sumber: Rinaldi Munir (2010, hal 365)

a) Simpul bertetangga

Simpul a dan b dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung (ada jalur) dengan sebuah jalur.

[33] Sumber online. Tersedia pada https://scienceatelier.wordpress.com/2015/08/15/satu-kali-jalan-tujuh-jembatan-konigsberg/.

Contoh: Pada G_1, simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3 tetapi tidak bertetangga dengan simpul 4.

b) Jalur Bersisian

Jalur e_1 dikatakan bersisian dengan simpul v jika jalur e_1 menghubungkan simpul v ke simpul lain.

Contoh: Pada G_2, e_1 bersisian dengan simpul 1 dan 2 tetapi e_1 tidak bersisian dengan simpul 3 dan 4.

c) Simpul Terpencil

Simpul v dikatakan simpul terpencil jika tidak ada simpul yang bertetangga dengannya.

Contoh: Pada G_3,simpul 5 adalah simpul terpencil.

d) Derajat

Derajat sebuah simpul pada graf tak berarah adalah jumlah jalur yang bersisian dnegan simpul tersebut.

Contoh: Pada G_1, derajat simpul 1 adalah dua.

e) Lintasan (*Path*)

Lintasan adalah barisan berselang seling: simpul– jalur – simpul.

Contoh: lintasan 1 – 2 – 3 – 4 – 2

f) Sirkuit (Circuit = Cycle)

Lintasan yang simpul awal = simpul akhir.

Contoh: lintasan 1 – 2 – 3 – 4 – 2

g) Terhubung

G dikatakan graf terhubung jika untuk setiap pasangan simpul pada G terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya.

Simpul u dan v dikatakan simpul terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya.

Contoh: G_1 terhubung karena setiap pasangan simpulnya terhubung.

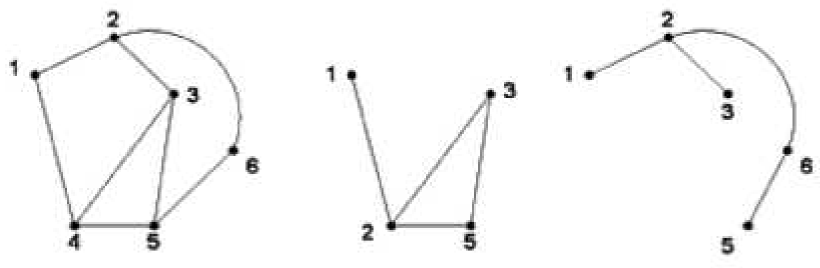
h) Subgraf

$G_1 = (V_1, E_1)$ dikatakan subgraf dari graf $G = (V, E)$ jika $V_1 \subset V$ dan $E_1 \subset E$.

g) Komplemen dari Subgraf

$G_2 = (V_2, E_2)$ dikatakan komplemen dari subgraf $G_1 = (V_1, E_1)$ jika $E_2 = E - E_1$dan E = himpunan simpul yang jalur-jalur pada E_2 bersisian dengannya.

Contoh:



(i) (ii) (iii)

(i) Graf G = (V, E)

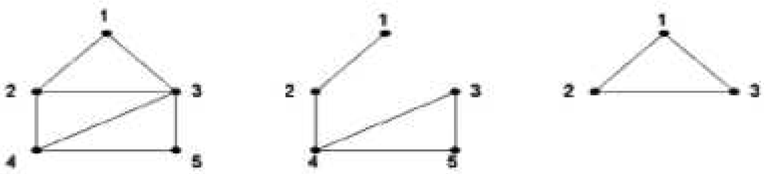
(ii) Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah subgraf dari G

(iii) $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah komplemen dari subgraph G_1

h) Subgraf merentang

Subggraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari graf G = (V, E) dikatakan subgraph merentang dari G = (V, E) jika $V_1 = V$.

Contoh:



(i) (ii) (iii)

(i) Graf G

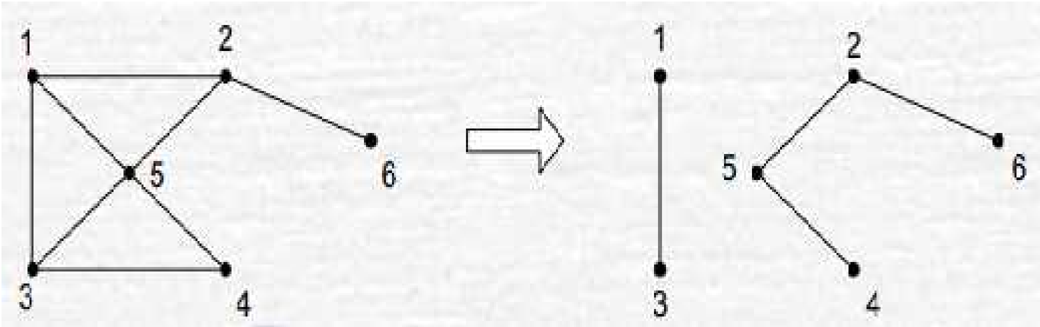
(ii) Subgraf merentang dari G

(iii) Subgraf dari G (subgraf biasa)

i) Jembatan (Cut-set)

Graf G terhubung. Cut set adalah himpunan jalur yang apabila dihilangkan dari V maka graf terhubung G = (V,E) menjadi graf tak terhubung yang terdiri dari 2 komponen yang masing masing komponennya terhubung.

Contoh:

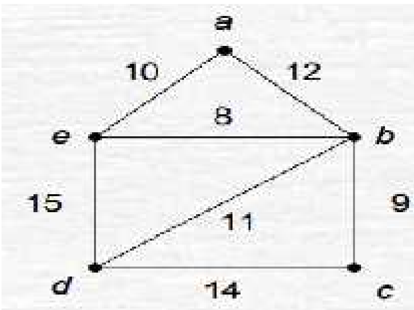


Cut set = {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah himpunan simpul yang dibuang dari graf G sedemikian sehingga G menjadi tak terhubung yang terdiri dari 2 komponen yang masing-masingnya terhubung.

j) Graf berbobot

G dikatakan graf berbobot jika setiap jalurnya mempunyai bobot.

Contoh:

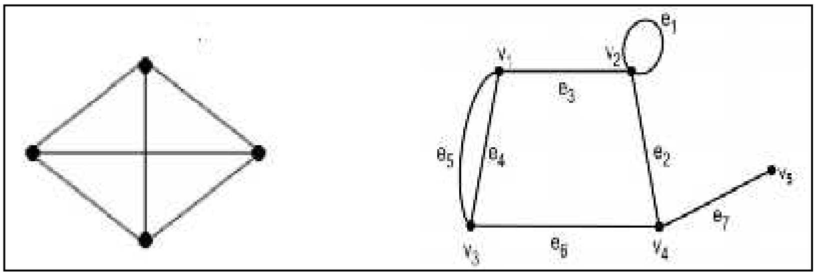


7.5. Jenis Graf

Berdasarkan ada atau tidaknya jalur ganda dan atau loop:

1. Graf sederhana: graf yang tidak mengandung jalur ganda dan atau loop.
2. Graf tidak sederhana: graf yang mengandung jalur ganda dan atau loop.

Contoh:



(i) (ii)

(i) Graf sederhana

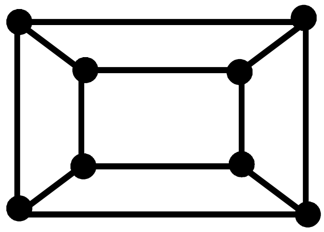
(ii) Graf tidak sederhana

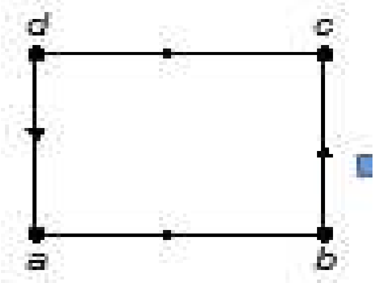
Berdasarkan ada tidaknya arah pada jalurnya:

1. Graf tidak berarah: graf yang jalurnya tidak memiliki arah.

2. Graf berarah: graf yang jalurnya memiliki arah.

Contoh:





(i) (ii)

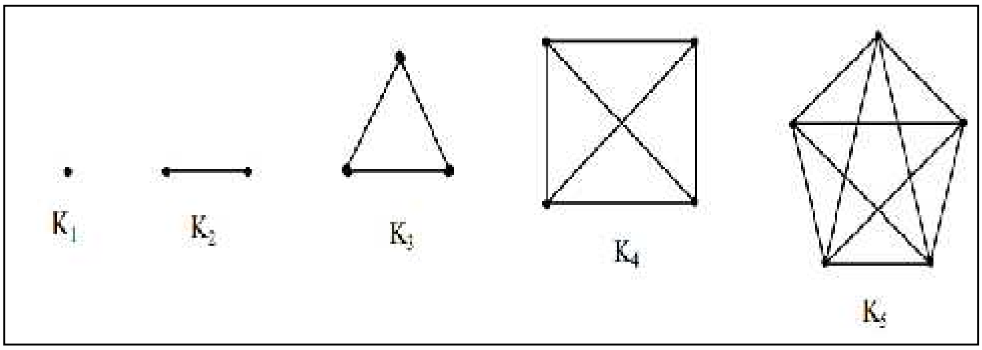
(i) Graf tidak berarah

(ii) Graf berarah

7.6. Graf Sederhana Khusus

1) Graf Lengkap (*complete graph*)

Graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat 2. Notasinya: K_n

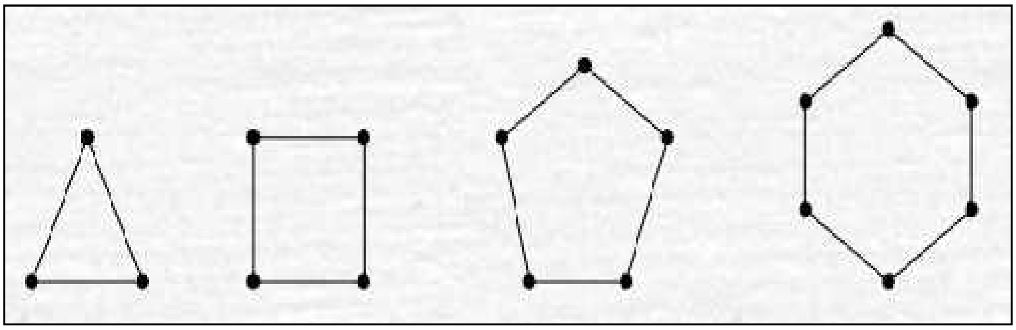


Jumlah jalur pada K_n = [n(n-1)]/2

Derajat setiap simpul pada K_n = n – 1

2) Graf Lingkaran (*Cycle Graph*)

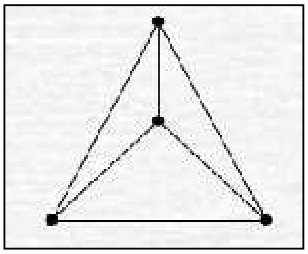
Graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat 2. Notasinya: C_n



3) Graf Teratur (*Regular Graph*)

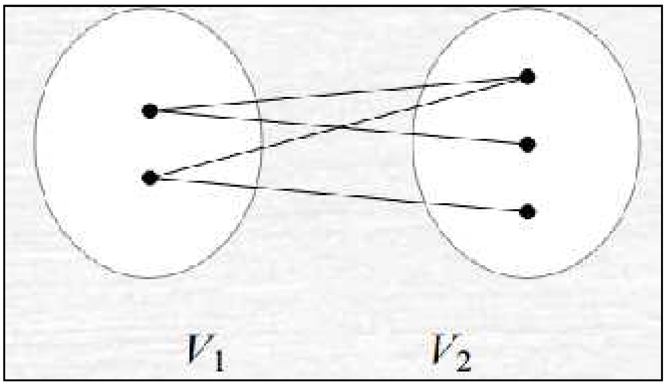
Graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama.

Contoh:



4) Graf Bipartit (*BipartiteGraph*)

G = (V, E) dikatakan bipartit apabila V dapat dibagi menjadi V_1 dan V_2 sedemikian sehingga jalur-jalur pada E hanya menghubungkan simpul V_1 dan V_2.



7.7. Graf Euler dan Graf Hamilton

- Lintasan dan Sirkuit Euler

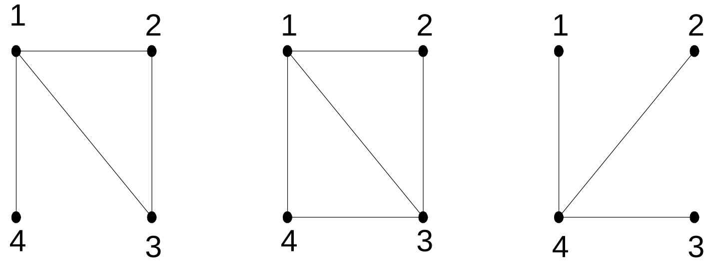
  Lintasan Euler: adalah lintasan yang melalui setiap jalur pada graf tepat satu kali. Graf yang mengandung lintasan euler disebut Graf Semi Euler.

  Sirkuit Euler: adalah sirkuit yang melalui setiap jalur pada graf tepat satu kali. Graf yang mengandung sirkuit euler disebut Graf Euler.

- Lintasan dan Sirkuit Hamilton

  Lintasan Hamilton: adalah lintasan yang melalui setiap simpul pada graf tepat satu kali. Graf yang mengandung lintasan hamilton disebut Graf Semi Hamilton.

  Sirkuit Hamilton: adalah sirkuit yang melalui setiap simpul pada graf tepat satu kali. Graf yang mengandung sirkuit hamilton disebut Graf Hamilton.



(i) (ii) (iii)

(i) Graf semi euler karena hanya mengandung lintasan euler, yaitu 4-1-2-3-1
Graf semi hamilton karena hanya mengandung lintasan Hamilton, yaitu 4-1-2-3

(ii) Graf semi euler karena hanya mengandung lintasan euler, yaitu 3-1-4-3-2-1
Graf hamiltonian karena menganding sirkuit Hamilton, yaitu 1-2-3-4-1

(iii) Bukan graf euler dan bukan graf Hamilton

7.8. Lemma Jabatan Tangan

Lemma jabatan tangan (*hand shaking lemma*) berbunyi:

"Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap yaitu dua kali banyaknya jalur."

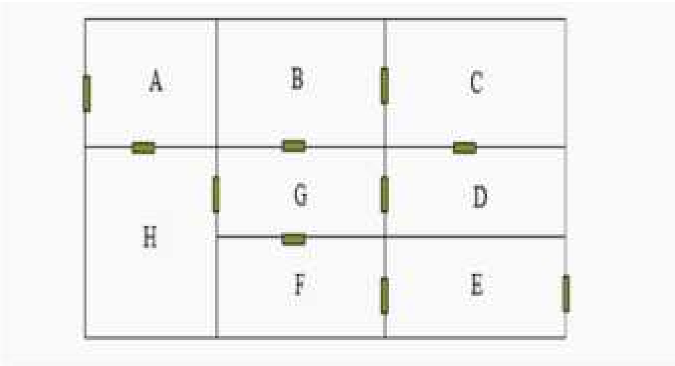
SOAL LATIHAN

1. Gambarkan sebuah graf yang terdiri dari:

   a) 5 titik, tanpa sikel, dan terhubung

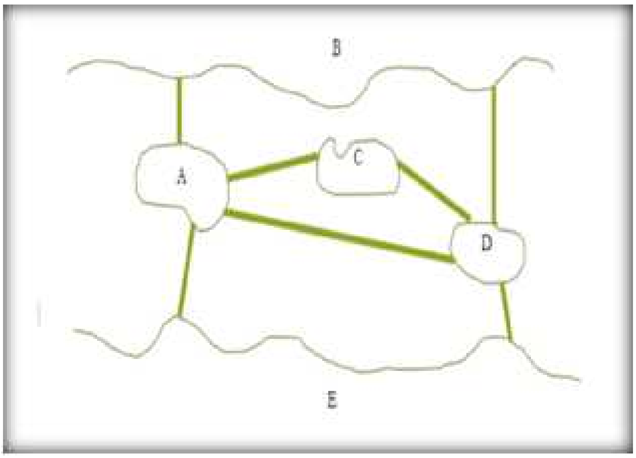
   b) 6 titik, reguler-2, dan terdiri dari 2 komponen.

2. Gambar berikut menunjukkan denah suatu rumah. Mungkinkah seseorang memasuki rumah dari ruang A, melewati setiap ruang tepat satu kali dan keluar rumah dari ruang E? Jika bisa, bagaimana caranya? Jika tidak bisa, berikan alasannya. Modelkan grafnya.



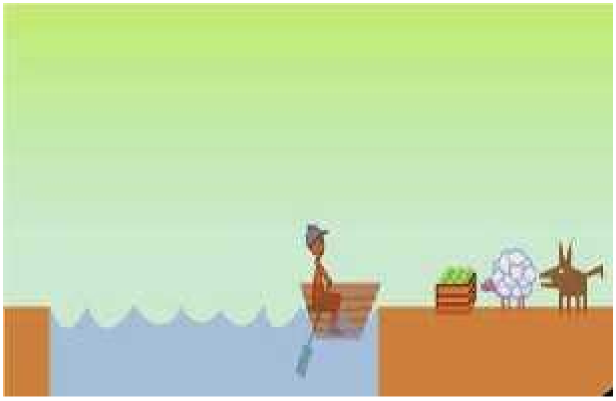
(Soal diadopsi dari Jek Siang: 2006, 319)

3. Seseorang hendak berjalan mengelilingi kota yang petanya tampak pada gambar berikut. Mungkinkah ia memulai dan mengakhiri perjalanannya dari titik yang sama dan melalui setiap jembatan tepat satu kali? Jika mungkin, bagaimana caranya? Modelkan grafnya.



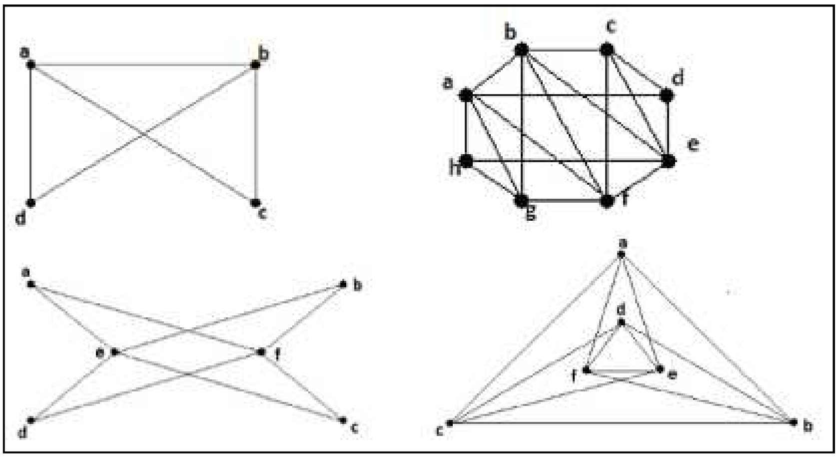
(Soal diadopsi dari Jek Siang: 2006, 318)

4. Ada seorang petani yang membawa seekor kambing, seekor serigala, dan sekeranjang sayur. Mereka berada di tepi sebuah pulau dan ingin menyebrang ke pulau seberang. Di tepi pulau itu hanya ada sebuah perahu yang cukup untuk dua penumpang. Dengan catatanlain, bahwa kambing tidak boleh ditinggal berdua dengan serigala tanpa adanya pemuda karena serigala akan memakan kambing, kemudian kambing tidak boleh ditinggal bersama sayur, karena kambing akan memakan sayurnya. Yang bisa menggunakan perahu hanyalah petani. Bagaimana
caranya agar mereka semua bisa menyebrang ke pulau seberang dengan utuh? Carilah minimum penyebrangan.



(Soal diadopsi dari https://andikasaputra.web.id/2014/12/soal-algoritma-menyebrangkan-kambing-serigala-sayur.html.

5. Tentukan apakah graf dibawah ini planar atau tidak. Jika ya, tunjukan graf planarnya tanpa jalur yang bersilangan.



BAB VIII POHON (TREE)

8.1. Pendahuluan

Di antara sekian banyak konsep dalam teori graf, konsep pohon (*tree*) merupakan salah satu konsep yang paling penting, karena terapannya yang luas dalam berbagai bidang ilmu. Banyak terapan, baik dalam bidang ilmu komputer maupun di luar bidang ilmu komputer, yang telah mengkaji pohon secara intensif sebagai objek matematika. Dalam kehidupan sehari-hari, orang telah lama menggunakan pohon untuk menggambarkan hirarkhi. Misalnya, pohon silsilah keluarga, struktur organisasi, organisasi pertandingan, dan lain-lain. Para ahli bahasa menggunakan pohon untuk menguraikan kalimat, yang disebut pohon pasing (*parse tree*).[34]

Pohon sudah lama digunakan sejak tahun 1857, ketika matematikawan inggris Arthur Cayley menggunakan pohon untuk menghitung jumlah senyawa kimia. Bab ini membahas pohon dari sudut pandang teori graf. Pohon sebagai struktur data rekursif merupakan bagian dari perkuliahan Struktur Data.

8.2. Definisi

Pohon T adalah graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit.

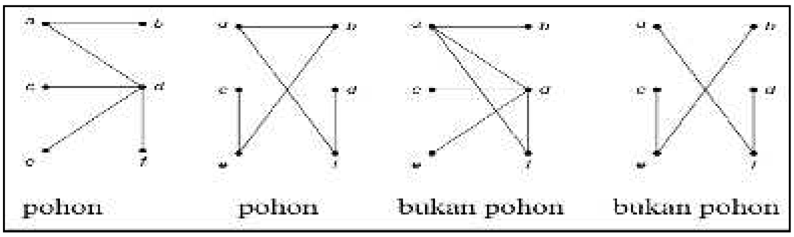
Pohon biasa juga disebut secara khusus yaitu pohon bebas (*free tree*), hal ini untuk membedakan pohon dengan pohon berakar (*rooted tree*).

Dari definisi tersebut diketahui ada 2 syarat dari pohon yaitu:

1) Graf terhubung
2) Tidak mengandung sirkuit.

Syarat ini harus dipenuhi kedua-duanya.

Contoh:



G_1 G_2 G_3 G_4

[34] Sumber online. www.google.com

G_3 bukan pohon karena mengandung sirkuit, misalnya sirkuit a-d-f-a.

G_4 bukan pohon karena bukan graf terhubung(titik silang jalur (a,f) dan jalur (b,e) bukan menyatakan simpul).

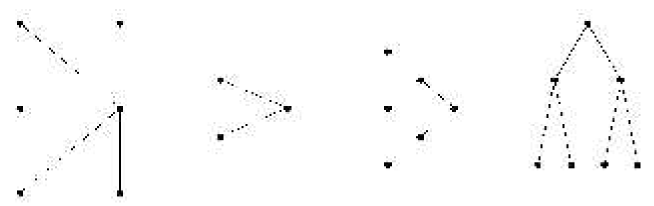
Kita ketahui bahwa definisi pohon mengacu pada graf, maka sebuah pohon mungkin saja hanya mengandung sebuah simpul tanpa sebuah jalur pun (ingat kembali graf trivial)

Selanjutnya, kumpulan pohon disebut hutan.

Definisi Hutan

Hutan (*forest*) adalah:

- ❖ Kumpulan pohon yang saling lepas, atau
- ❖ Graf tidak terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Setiap komponen di dalam graf terhubung tersebut adalah pohon.



Hutan yang terdiri dari tiga buah pohon

8.3. Sifat-Sifat Pohon

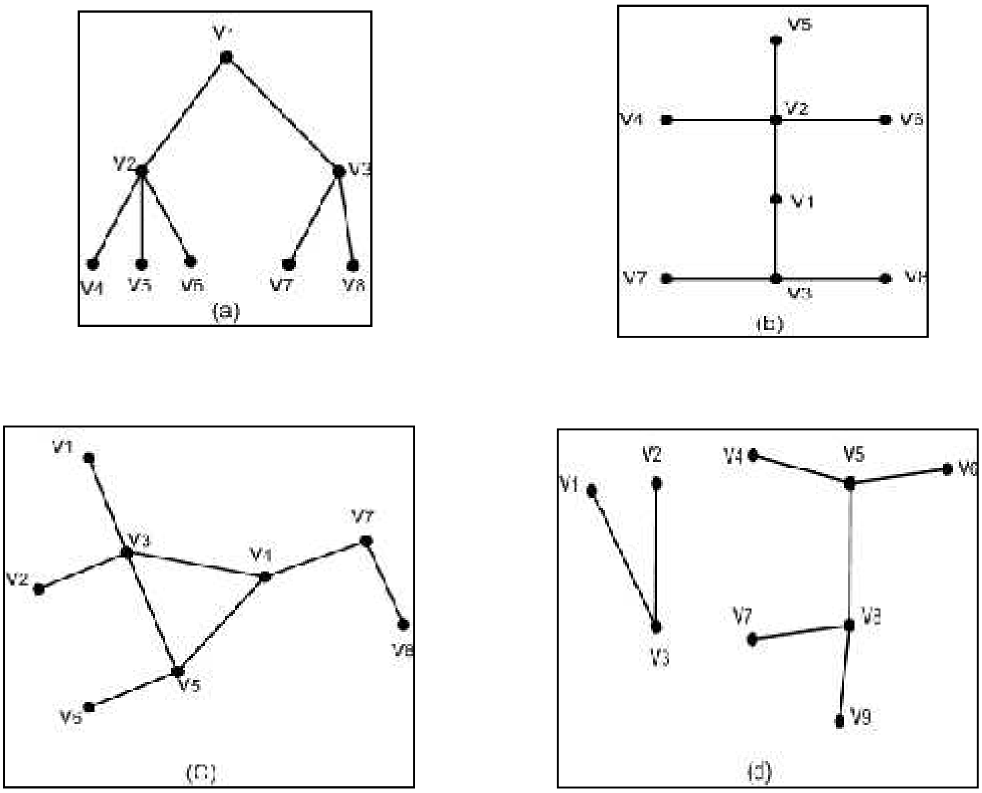
- ➢ Teorema:

  Misalkan G = (V, E) adalah graf tak-berarah sederhana dan jumlah simpulnya n. Maka, semua pernyataan di bawah ini adalah ekivalen:

  1) G adalah pohon.
  2) Setiap pasang simpul di dalam G terhubung dengan lintasan tunggal.
  3) G terhubung dan memiliki m = n – 1 buah sisi.
  4) G tidak mengandung sirkuit dan memiliki m = n – 1 buah sisi.
  5) G tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf akan membuathanya satu sirkuit.
  6) G terhubung dan semua sisinya adalah jembatan.

Contoh:

Tentukan mana diantara graf – graf dibawah ini yang merupakan pohon atau hutan!



a. Pohon, karena graf tersebut terhubung dan tidak memiliki sirkuit;
b. Pohon, karena graf tersebut terhubung dan tidak memiliki sirkuit;
c. Bukan pohon (dan bukan hutan), karena mengandung sirkuit v_3, v_4, v_5;
d. Hutan, karena merupakan kumpulan pohon.

8.4. Pohon Berakar (*RootedTree*)

Pohon berakar adalah sebuahpohon dimana ada satu simpulnya yang dikhususkan dari simpulnya dan simpul tersebut disebut dengan akar (*root*), dan jalur-jalurnya digambarkan menjauh dari akar.

Derajat masuk simpul akar adalah 0 (nol). Derajat masuk simpul-simpul lainnya adalah 1.

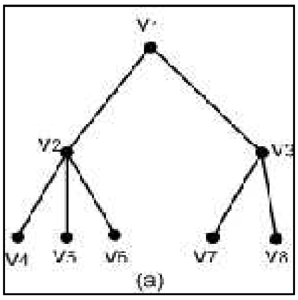
Daun (= simpul terminal) adalah simpul yang mempunyai derajat keluar 0 (nol).

Cabang (= simpul dalam) adalah simpul yang mempunyai derajat keluar bukan 0 (nol).

Setiap simpul pada pohon berkar dapat dicapai dari akar dengan sebuah lintasan tunggal.

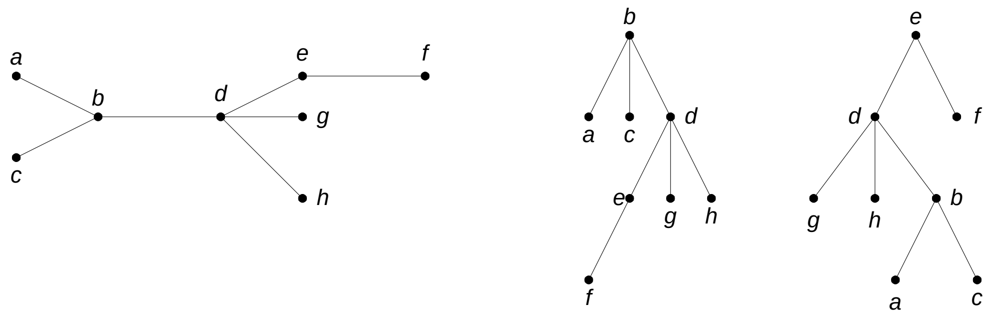
Lintasan dalam pohon berakar selalu berasal dari akar (dari atas ke bawah).

Contoh:



- Simpul $v_1$adalah akar.
- Simpul v_4, v_5, v_6, v_7, v_8 derajatnya = 1, jadi titik – titik tersebut merupakan daun.
- Titik v_1, v_2, v_3 derajatnya masing – masing >1, maka titik – titik tersebut merupakan titik cabang.

Sebuah pohon tak berakar dapat diubah menjadi pohon berakar dengan cara menetapkan sebuah simpulnya sebagai akar.



b sebagai akar

e sebagai akar

Pohon dan dua buah pohon berakar yang dihasilkan dari pemilihan dua simpul berbeda sebagai akar

8.5. Istilah – Istilah dalam Pohon Berakar

- Anak: simpul y dikatakan anak dari simpul x jika terdapat jalur dari x ke y.
- Orangtua: simpul x dikatakan orangtua dari simpul y jika terdapat jalur dari x ke y.

- ➢ Lintasan: lintasan sederhana tunggal(simpul-jalur-simpul) dari simpul u ke simpul v sedemikian sehingga simpul u adalah leluhur atau orangtua dari simpul v. lintasan mempunyai panjang yaitu banyaknya jalur yang dilalui dalam lintasan.
- ➢ Leluhur: simpul u adalah leluhur dari simpul v jika terdapat lintasan dari simpul u ke simpul v.
- ➢ Keturunan: simpul v adalah keturunan dari simpul u jika terdapat lintasan dari simpul u ke simpul v.
- ➢ Saudara kandung: simpul-simpul yang mempunyai orangtua yang sama.
- ➢ Derajat: derajat simpul u adalah banyaknya anak dari simpul v.

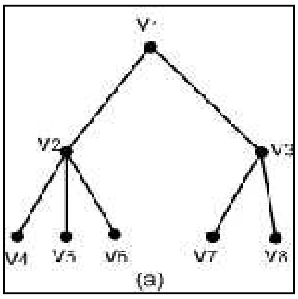
  Derajat pohon berakar adalah derajat maksimum dari simpul-simpulnya.

  Derajat sebuah simpul pada graf berbeda dengan derajat simpul pada pohon.
- ➢ Daun: simpul yang berderajat nol atau simpul yang tidak memiliki anak.
- ➢ Cabang (simpul dalam): simpul u disebut cabang jika simpul itu mempunyai anak.
- ➢ Aras (level): aras dari simpul u adalah panjang lintasan dari akar ke simpul v.

  Aras dari akar adalah nol (0)
- ➢ Tinggi (kedalaman): aras (level) maksimum dari sebuah pohon berakar.

Contoh:

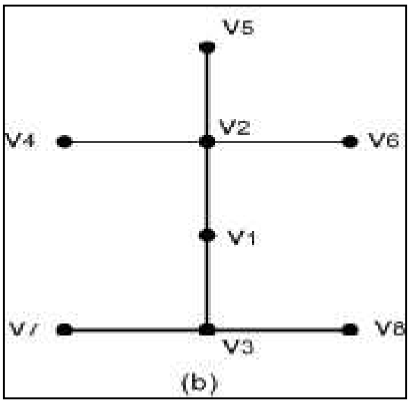
Tentukan daun dan titik cabang pohon pada gambar di bawah ini.



(a)

- Titik v_4, v_5, v_6, v_7, v_8 derajatnya = 1, jadi titik – titik tersebut merupakan Daun.
- Titik v_1, v_2, v_3 derajatnya masing – masing >1, maka titik – titik tersebut merupakan titik cabang.

Contoh:



a. Tentukan tingkat tiap – tiap titik jika akarnya adalah V_2!

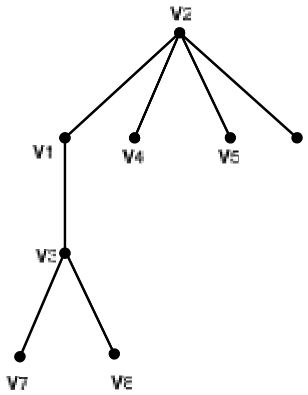
b. Berapa tinggi pohon jika akarnya adalah V_2?

c. Tentukan anak, orang tua, dan saudara titik V1 jika akarnya adalah V_2.

d. Apakah pertanyaan a – c memiliki jawaban yang berbeda jika akarnya adalah v_1?

Penyelesaian:

Gambar Pohon dengan akar v_2 adalah sebagai berikut:



a. Tingkat titik $v_1 = v_4 = v_5 = v_6 = 1$

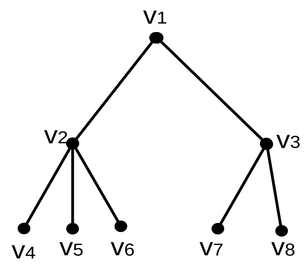
   Tingkat titik $v_3 = 2$

   Tingkat titik $v_7 = v_8 = 3$

b. Tinggi pohon = 3

c. Anak $v_1 = v_3$; orang tua $v_1 = v_2$; saudara $v_1 = v_4\ \ v_5\ \ v_6$

d. Gambar pohon dengan akar v_1



Tingkat titik $v_2 = v_3 = 1$

Tingkat titik $v_4=v_5=v_6=v_7=v_8=2$

Tinggi pohon = 2

Anak $v_1 = v_2\ v_3$; orang tua dan saudara v_1 tidak ada karena v_1 merupakan akar.

8.6. Pohon Merentang

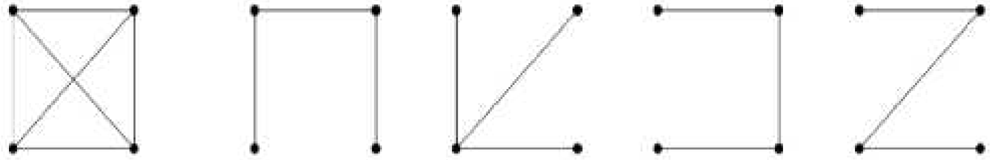
Pohon merentang dari graf terhubung adalah subgraf merentang yang berupa pohon. Atau dapat diartikan pula dengan subgraf terhubung yang mengandung semua simpul pada graf dan tidak mengandung sirkuit. Jadi, himpunan simpul pada pohon merentang dari graf G sama dengan himpunan simpul pada graf G.

Pohon merentang diperoleh dengan memutus sirkuit di dalam graf.

Caranya:

Pilih sebuah sirkuit, putus sirkuit tersebut dengan menghapus salah satu jalurnya, periksa apakah masih mengandung sirkuit atau tidak. Bila masih mengandung sirkuit maka ulangi langkah tersebut kembali sampai semua sirkuit pada graf terhubung G tidak ada lagi. Pohon yang diperoleh pasti pohon merentang karena kita hanya menghapus jalur, dan tidak menghapus simpul.

Contoh:



G T_1 T_2 T_3 T_4

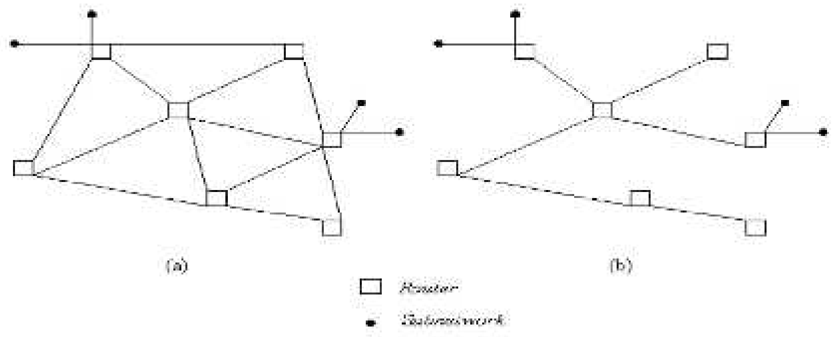
Setiap graf terhubung mempunyai paling sedikit satu buah pohon merentang.

Graf tak-terhubung dengan k komponen mempunyai k buah pohon merentang disebut hutan merentang (*spanning forest*).

8.7. Mengenal Aplikasi Pohon Merentang

Teori mengenai pohon merentang ini mempunyai beberapa aplikasi, diantaranya yaitu:

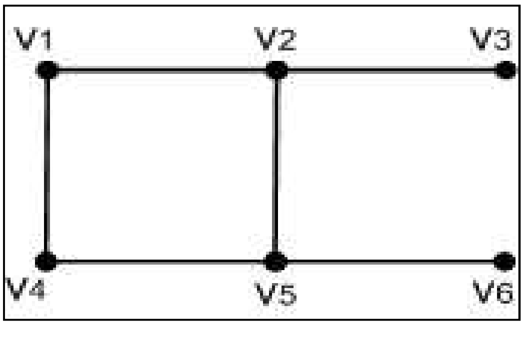
1. Jumlah ruas jalan seminimum mungkin yang menghubungkan semua kota sehingga setiap kota tetap terhubung satu sama lain. Hal ini diperlukan misalnya untuk meminimumkan biaya pembuatan jalan.
2. Perutean (routing) pesan pada jaringan komputer. Hal ini diperlukan misalnya untuk meminimumkan panjang kabel komputer yang dibutuhkan.



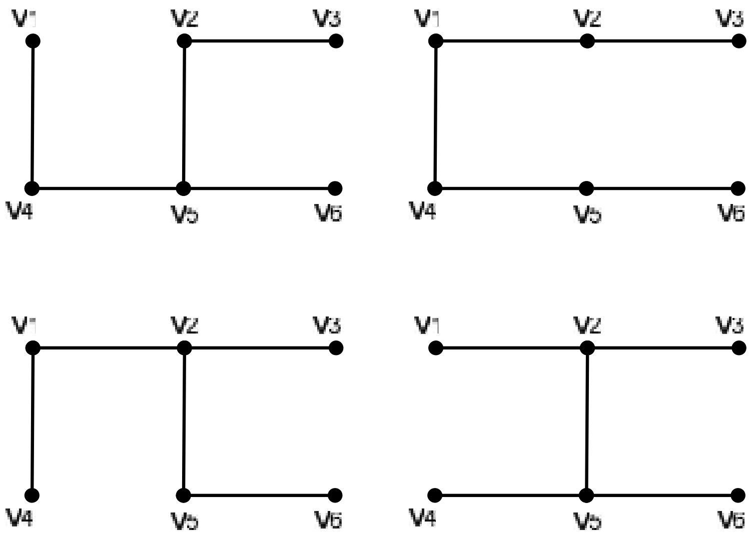
(a) Jaringan komputer. (b) Pohon merentang *multicast*

Contoh:

Carilah semua pohon rentang yang mungkin dibuat dari graf G yang tampak pada gambar dibawah ini.



Di dalam graf tersebut terdapat satu buah sirkuit, yakni sirkuit dari titik v_1 v_2 v_5 v_4 v_1, karena pohon merupakan graf yang tidak memiliki sirkuit dan pohon rentang adalah subgraf yang harus melibatkan semua titik dalam G, jadi pohon rentang dari Graf tersebut di atas adalah sebagai berikut:



8.8. Pohon Merentang Minimum

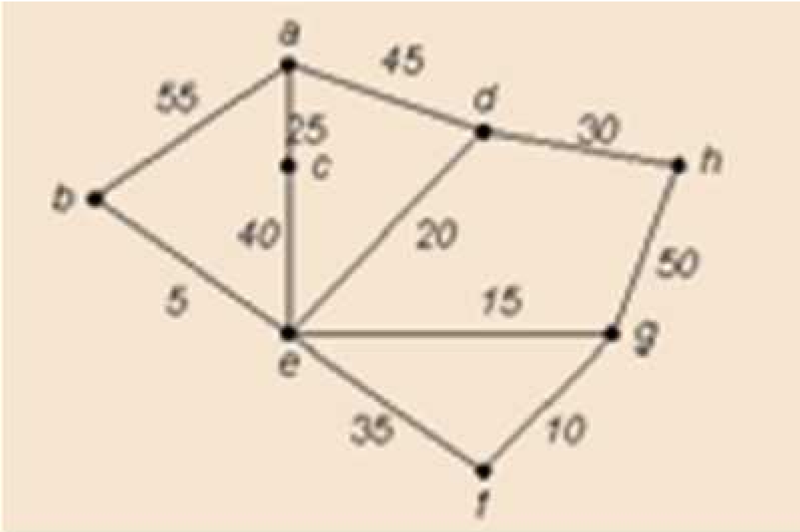
Sebuah graf berbobot yang terhubung mungkin saja mempunyai lebih dari 1 pohon merentang. Adakalanya kita memerlukan pemecahan masalah yaitu bagaimana memperoleh pohon merentang yang berbobot minimum. Pohon merentang yang berbobot minimum dinamakan pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*).

Terdapat dua buah algoritma yang dapat digunakan untuk memperoleh pohon merentang minimum dari sebuah graf berbobot yang terhubung G. Algoritma tersebut yaitu:

1. Algoritma
2. Algoritma Kruskal

Contoh:

Berikut ini gambar sebuah graf berbobot terhubung. Akan ditemukan pohon merentang minimumnya dengan menggunakan algoritma Prim dan algoritma Kruskal.



1. Algoritma Prim

Misalkan T adalah pohon merentang yang jalur-jalurnya diambil dari graf G. Algoritma Prim membentuk pohon merentang minimum langkah per langkah. pada setiap langkah kita mengambil jalur e dari graf G yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul-simpul di dalam T tetapi e tidak membentuk sirkuit di dalam T.

Algoritma Prim:

Langkah 1 : Pilih jalur yang berbobot minimum, masukkan ke dalam T.

Langkah 2 : Pilih jalur (u, v) yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul di T, tetapi (u, v) tidak membentuk sirkuit di T. Masukkan (u, v) ke dalam T.

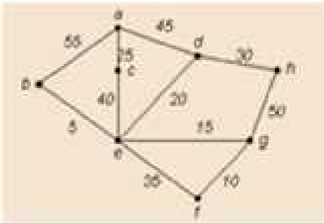
Langkah 3 : Ulangi langkah 2 sebanyak n – 2 kali atau dengan kata lain sampai T telah memuat semua simpul pada Graf.

Jumlah langkah seluruhnya di dalam algoritma Prim adalah

(1 + (n – 2)) = (n – 1), dengan n banyak simpul.

Contoh:

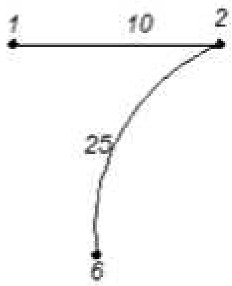
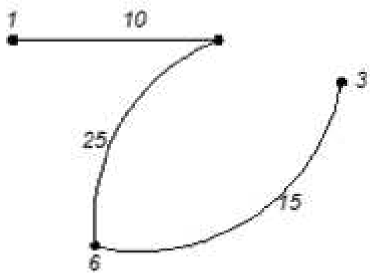
Temukan pohon merentang minimum dari graf berikut ini dengan menggunakan algoritma Prim.

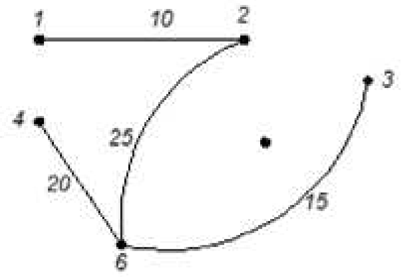
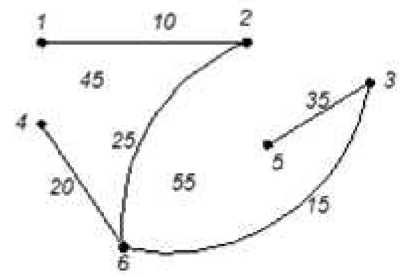


Penyelesaian:

Langkah-langkah pembentukan pohon merentang minimum diperlihatkan pada tabel berikut:

Tabel pembentukan pohon merentang minimum dengan algoritma Prim

Langkah	Jalur	Bobot	Pohon Rentang
1	(1,2)	10	
2	(2,6)	25	
3	(3,6)	15	

4	(4,6)	20	
5	(3,5)	35	

Bobot pohon merentang minimum ini adalah

$$10 + 25 + 15 + 20 + 35 = 105$$

Catatan: tampak bahwa dengan algoritma Prima, seiap langkah demi langkahnya selalu membentuk pohon terhubung.

2. Algoritma Kruskal

Algoritma Kruskal sedikit lebih sederhana dibandingkan dengan algoritma Prim dalam pemeriksaan jalur-jalur yang akan dipilih. Hal ini karena pada algoritma Prim, setiap langkah per langkah jalur yang dipilih selain harus yang berbobot terkecil harus pula selalu terhubung dengan pohon yang sudah terbentuk sebeumnya. Sedangkan pada algoritma Kruskal ini, pertimbangan memilih jalur hanya bobotnya yang harus terkecil.

Algoritma Kruskal:

Langkah 0 : (Persiapan) Jalur-jalur pada graf diurutkan dari bobot yang terkecil hingga terbesar.

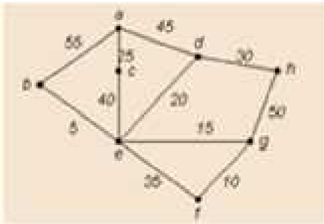
Langkah 1 : T masih kosong.

Langkah 2 : Pilih jalur (u, v) dengan bobot minimum yang tidak membentuk sirkuit di T. Tambahkan (u, v) ke dalam T.

Langkah 3 : Ulangi langkah 2 sebanyak n – 1 kali

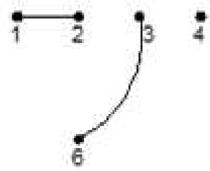
Contoh:

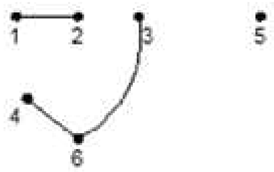
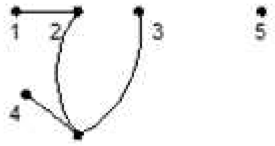
Temukan pohon merentang minimum dari graf berikut ini dengan menggunakan algoritma Kruskal.



Penyelesaian:

Langkah-langkah pembentukan pohon merentang minimum diperlihatkan pada tabel berikut:

Langkah	Jalur	Bobot	Hutan Rentang
0			
1	(1,2)	10	
2	(3,6)	15	

4	(4,6)	20	
5	(3,5)	35	

DAFTAR PUSTAKA

Jong Jek Siang. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Penerbit Andi.

Rinaldi Munir. 2005. *Matematika Diskrit.* Bandung: Penerbit Informatika.

Seymour Lipschutz dan Marc Lipson. 2008. *Matematika Diskret, Schaum'sOutlines*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Sumber Online. Tersedia pada *https://andikasaputra.web.id/2014/12/soal-algoritma-menyebrangkan-kambing-serigala-sayur.html*. Telah diakses pada 5 Agustus 2018.

Sumber Online. Tersedia pada https://scienceatelier.wordpress.com/2015/08/15/satu-kali-jalan-tujuh-jembatan-konigsberg/. Telah diakses pada 5 Agustus 2018.

Sumber online. Tersedia pada http://askyourdaddy.blog.uns.ac.id/2014/09/12/contoh-pembuktian-dengan induksi-matematika/. Telah diakses pada 6 Agustus 2018.

Sumber online. Tersedia pada http://repository.ut.ac.id/4704/1/PAUD4305-M1.pdf. Telah diakses pada 6 Agustus 2018. Telah diakses pada 6 Agustus 2018.

Sumber online. Tersedia pada http://staff.unila.ac.id/coesamin/files/2017/01/Himpunan.pdf. Telah diakses pada 6 Agustus 2018. Telah diakses pada 6 Agustus 2018.

Sumber online. Tersedia pada http://repository.usu.ac.id/bitstream/handle/123456789/40683/Chapter%20I.pdf;jsessionid=0EB0D618320214E7AC6F1ED168D8DA72?sequence=4. Telah diakses pada 6 Agustus 2018. Telah diakses pada 6 Agustus 2018.

Sumber online. Tersedia pada http://bahanajarguru.blogspot.com/2011/10/fungsi-dan-relasi-bab-ii.html. Telah diakses pada 6 Agustus 2018.

Sumber online. Tersedia pada https://id.wikipedia.org/wiki/Teori_graf. Telah diakses pada 6 Agustus 2018.

Sumber online. Tersedia pada http://mti.binus.ac.id/2018/03/05/teori-graph-sejarah-dan-manfaatnya/. Telah diakses pada 6 Agustus 2018. Telah diakses pada 6 Agustus 2018.

Sumber online. Tersedia pada https://scienceatelier.wordpress.com/2015/08/15/satu-kali-jalan-tujuh-jembatan-konigsberg/. Telah diakses pada 6 Agustus 2018. Telah diakses pada 6 Agustus 2018.

Sumber online. Tersedia pada *https://andikasaputra.web.id/2014/12/soal-algoritma-menyebrangkan-kambing-serigala-sayur.html*. Telah diakses pada 6 Agustus 2018.