

$$\begin{aligned} x-2 &= 1 \text{ e } 3 \\ (-=1) &- 1) \end{aligned}$$

Siti Maysarah, M.Pd.

STRUKTUR ALJABAR GRUP

Siti Maysarah, M.Pd.



STRUKTUR ALJABAR GRUP

Edisi Pertama

Copyright © 2025

ISBN 978-623-384-965-4

14,8 x 21 cm

xiv, 146 hlm

Cetakan ke-1, September 2025

Kencana. 2025.2111

Penulis

Siti Maysarah, M.Pd.

Desain Sampul

Irfan Fahmi

Penata Letak

Endang Wahyudin
& Arshinta Andas Tifiri

Penerbit

KENCANA

Jl. Tandra Raya No. 23 Rawamangun Jakarta 13220

Telp: (021) 478-64657 Faks: (021) 475-4134

Divisi dari PRENADAMEDIA GROUP

e-mail: pmg@prenadamedia.com

www.prenadamedia.com

INDONESIA

Dilarang memperbanyak, menyebarluaskan, dan/atau mengutip sebagian atau seluruh isi buku ini dengan cara apa pun, termasuk dengan cara penggunaan mesin fotokopi, tanpa izin tertulis dari penerbit dan penulis.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga buku dengan judul *Struktur Aljabar Grup* ini dapat disusun dan diterbitkan dengan baik. Selawat dan salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad saw., suri teladan umat manusia, yang telah membawa cahaya ilmu dan kebenaran ke seluruh penjuru dunia. Buku ini dirancang khusus untuk mahasiswa program studi S-1 Pendidikan Matematika maupun S-1 Matematika sebagai bahan ajar yang komprehensif dan sistematis dalam mempelajari materi-materi fundamental dalam struktur aljabar, khususnya teori grup.

Materi dalam buku ini disusun secara runtut dan bertahap agar memudahkan mahasiswa dalam memahami konsep-konsep abstrak yang terdapat dalam struktur aljabar. Dimulai dari pembahasan mengenai himpunan dan fungsi sebagai landasan dasar, dilanjutkan dengan operasi biner yang menjadi inti dari struktur-struktur aljabar. Kemudian, pembaca akan diarahkan untuk memahami konsep grup, subgrup, grup permutasi, serta koset. Tidak kalah pentingnya, pembahasan mengenai subgrup normal dan grup faktor juga dihadirkan guna memperluas wawasan mahasiswa terhadap konstruksi aljabar yang lebih kompleks. Buku ini ditutup dengan topik tentang homomorfisma grup, sebagai pengantar menuju kajian lanjutan dalam aljabar abstrak.

Penyusunan buku ini tentunya tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, kami mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pimpinan Universitas Islam Negeri Sumatera Utara atas segala bentuk dukungan, baik secara moral maupun ma-

terial, dalam proses penulisan dan penerbitan buku ini. Dukungan yang diberikan menjadi motivasi tersendiri bagi penulis untuk terus berkarya dalam dunia akademik, khususnya dalam pengembangan bahan ajar yang berkualitas.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, segala bentuk kritik dan saran yang membangun dari para pembaca, khususnya dari rekan-rekan dosen dan mahasiswa, sangat diharapkan demi perbaikan edisi-edisi berikutnya. Harapan penulis, buku ini dapat menjadi referensi utama yang bermanfaat, tidak hanya dalam proses perkuliahan tetapi juga dalam pengembangan wawasan keilmuan mahasiswa di bidang matematika.

Akhir kata, semoga kehadiran buku *Struktur Aljabar Grup* ini dapat memberikan kontribusi positif dalam dunia pendidikan matematika dan menjadi sarana pembelajaran yang efektif bagi mahasiswa. Semoga Allah Swt. senantiasa memberikan kemudahan dan keberkahan dalam setiap langkah kita menuju pengembangan ilmu pengetahuan.

Medan, Agustus 2025

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
PENDAHULUAN	1
1. Deskripsi Mata Kuliah.....	1
2. Rencana Pembelajaran.....	1
3. Petunjuk Penggunaan Buku Ajar.....	2
4. Capaian Pembelajaran (CP).....	2
BAB 1 HIMPUNAN	5
1.1 Definisi Himpunan	6
1.2 Cara Penyajian Himpunan.....	6
1.3 Kardinalitas.....	8
1.4 Himpunan Kosong.....	8
1.5 Himpunan Bagian (<i>Subset</i>)	9
1.6 Himpunan yang Sama	10
1.7 Himpunan yang Ekuivalen.....	10
1.8 Himpunan Saling Lepas.....	11
1.9 Himpunan Kuasa.....	11

1.10 Operasi Himpunan.....	12
1.11 Sifat-sifat Aljabar Himpunan.....	16
1.12 Prinsip Dualitas.....	17
1.13 Prinsip Inklusi dan Eksklusi.....	19
BAB 2 FUNGSI	27
2.1 Relasi.....	28
2.2 Sifat-sifat Relasi.....	30
2.3 Fungsi.....	31
2.4 Jenis-jenis Fungsi.....	32
2.5 Komposisi Dua Fungsi.....	37
2.6 Bilangan Bulat.....	38
2.7 Faktor Persekutuan Terbesar (<i>Greatest Common Divisor</i>).....	39
2.8 Kelipatan Persekutuan Terkecil (<i>Least Common Multiple</i>).....	40
2.9 Kekongruenan.....	41
2.10 Induksi Matematika.....	42
BAB 3 OPERASI BINER	51
3.1 Operasi Biner.....	52
3.2 Sifat-sifat Operasi Biner.....	53
3.3 Penerapan Operasi Biner.....	54
BAB 4 GRUP	63
4.1 Semi Grup.....	64
4.2 Monoid.....	64
4.3 Grup.....	65
4.4 Teorema-teorema Dasar tentang Grup.....	72
BAB 5 SUBGRUP	79
5.1 Subgrup.....	80
5.2 Order dari Suatu Unsur.....	86



5.3	Order dari Suatu Grup	88
5.4	Grup Siklik	90
BAB 6 GRUP PERMUTASI		95
6.1	Grup Permutasi.....	96
6.2	Lingkaran dan Transposisi	101
BAB 7 KOSET, SUBGRUP NORMAL, DAN GRUP FAKTOR		109
7.1	Koset	110
7.2	Subgrup Normal	121
7.3	Grup Faktor	124
BAB 8 HOMOMORFISMA GRUP		131
8.1	Homomorfisma Grup.....	132
8.2	Kernel	135
8.3	Monomorfisma Grup	136
8.4	Epimorfisma Grup	137
8.5	Isomorfisma Grup.....	138
8.6	Endomorfisma Grup	138
8.7	Automorfisma Grup	139
DAFTAR PUSTAKA		143
TENTANG PENULIS		145



DAFTAR TABEL

Tabel 1.1 Sifat-sifat Aljabar Himpunan Beserta Dualnya	18
Tabel 3.1 Cayley dari $(U_{12}, *)$	60
Tabel 4.1 Cayley $\langle U_8, \times \rangle$	66
Tabel 4.2 Cayley $\langle x^4 = 1, \times \rangle$	69
Tabel 4.3 Cayley $\langle Z_8, + \rangle$	70
Tabel 5.1 Cayley dari Grup $\langle Z_8, + \rangle$	80
Tabel 5.2 Cayley dari Grup H_1	80
Tabel 5.3 Cayley dari Grup H_2	81
Tabel 5.4 Cayley dari Grup $\langle Z_{20}, + \rangle$	82
Tabel 5.5 Cayley dengan Operasi Komposisi Pemetaan Terhadap Persegi Panjang	84
Tabel 5.6 Cayley $\langle Z_4, + \rangle$	89
Tabel 6.1 Cayley Segitiga (D_3 Simetris)	98
Tabel 6.2 Cayley Persegi D_4	100
Tabel 7.1 Cayley dari $H = \{0, 3, 6\}$ dalam Z_9	113
Tabel 7.2 Cayley dari Grup $\langle Z/3Z, + \rangle$	115
Tabel 7.3 Cayley $(S_3, *)$	115
Tabel 7.4 Cayley $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Grup dalam Perkalian Modulo 7	120
Tabel 7.5 Cayley $H = \{0, 2\}$ dalam $(G, +) = Z_4$	121
Tabel 7.6 Grup Faktor dari $G = Z_6$ oleh $H = \{0, 2, 4\}$	126
Tabel 7.7 Grup Faktor $Z_6/H = \{H, 1+H, 2+H\}$	127
Tabel 7.8 Cayley dari Grup Faktor $\langle Z_{30}/\langle 5 \rangle, + \rangle$	127

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Diagram Venn	8
Gambar 1.2 Himpunan Bagian (<i>Subset</i>)	9
Gambar 1.3 Himpunan Saling Lepas	11
Gambar 1.4 Irisan (<i>Intersection</i>)	12
Gambar 1.5 Gabungan (<i>Union</i>)	13
Gambar 1.6 Komplemen (<i>Complement</i>)	13
Gambar 1.7 Selisih (<i>Difference</i>)	14
Gambar 1.8 Beda Setangkup (<i>Symmetric Difference</i>)	15
Gambar 2.1 Menunjukkan Relasi f dari Himpunan P ke Himpunan Q	30
Gambar 2.2 Menunjukkan Relasi sebagai Suatu Pemetaan	32
Gambar 2.3 Menunjukkan Pemetaan Injektif	33
Gambar 2.4 Menunjukkan Pemetaan Surjektif	34
Gambar 2.5 Menunjukkan Pemetaan Bijektif	35
Gambar 5.1 Lattice Diagram $\langle Z_8, + \rangle$	81
Gambar 5.2 Lattice Diagram $\langle Z_{20}, + \rangle$	83
Gambar 5.3 Diagram Lattice Operasi Komposisi Pemetaan Terhadap Persegi Panjang	85
Gambar 5.4 Lattice Diagram dari $G = \langle Z_{24}, + \rangle$	89
Gambar 6.1 Diagram Lattice D_4	101

PENDAHULUAN

1. DESKRIPSI MATA KULIAH

Mata kuliah ini dirancang sebagai pengantar komprehensif untuk memahami konsep-konsep dasar dalam struktur aljabar, dengan fokus utama pada teori grup. Materi disusun secara sistematis dan bertahap, dimulai dari pembahasan himpunan dan fungsi, dilanjutkan dengan operasi biner, grup, subgrup, grup permutasi, koset, subgrup normal, grup faktor, hingga homomorfisma grup. Seluruh materi pada mata kuliah ini membutuhkan pemikiran tingkat tinggi, sehingga setelah mempelajari mata kuliah ini mahasiswa diharapkan mampu berpikir secara kritis, logis, dan sistematis dalam menyelesaikan permasalahan. Selain itu, juga memberikan persiapan mahasiswa untuk melanjutkan materi pada mata kuliah Struktur Aljabar Ring.

2. RENCANA PEMBELAJARAN

Pertemuan ke-1 : Silabus dan kontrak perkuliahan

Pertemuan ke-2 : Himpunan

Pertemuan ke-3 : Fungsi

Pertemuan ke-4 : Operasi biner

Pertemuan ke-5 : Grup

Pertemuan ke-6 : Subgrup

Pertemuan ke-7 : Order dari suatu unsur, order dari suatu grup, grup siklik, dan generator

Pertemuan ke-8 : Ujian Tengah Semester (UTS)

Pertemuan ke-9 : Grup permutasi

Pertemuan ke-10 : Koset

Pertemuan ke-11 : Subgrup normal dan grup faktor

Pertemuan ke-12 : Homomorfisma grup dan kernel

Pertemuan ke-13 : Monomorfisma dan epimorfisma grup

Pertemuan ke-14 : Isomorfisma, endomorfisma, dan automorfisma grup

Pertemuan ke-15 : *Critical book review*

Pertemuan ke-16 : Ujian Akhir Semester (UAS)

3. PETUNJUK PENGGUNAAN BUKU AJAR

a. Bagi Mahasiswa

Buku ini dimulai dari uraian penjelasan setiap materi. Setelah itu, dilanjutkan dengan pembuktian teorema, pemberian contoh dan bukan contoh pada setiap materi, rangkuman materi, dan diakhiri dengan latihan soal sebagai penguatan terhadap penguasaan mahasiswa terhadap materi yang telah disajikan.

b. Bagi Dosen

Peran dosen dalam pembelajaran ini adalah selain sebagai penyaji, juga sebagai fasilitator.

4. CAPAIAN PEMBELAJARAN (CP)

a. Capaian Pembelajaran Program Studi (CP-Prodi)

- S-1 : Bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan mampu menunjukkan sikap religius.
- S-3 : Menunjukkan sikap bertanggung jawab atas pekerjaan di bidang keahliannya secara mandiri.
- KU1 : Menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau mentansi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan



- : dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya.
- KU2 : Menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.
- KU5 : Mampu mengambil keputusan secara tepat dalam konteks penyelesaian masalah di bidang keahliannya, berdasarkan hasil analisis informasi dan data.
- Pengetahuan : Mahasiswa dapat memahami teori himpunan dan fungsi, operasi biner, grup, subgrup, grup permutasi, koset, subgrup normal, grup faktor, dan homomorfisma grup.
- Keterampilan : Mahasiswa dapat menerapkan teori himpunan dan Khusus fungsi, operasi biner, grup, subgrup, grup permutasi, koset, subgrup normal, grup faktor, dan homomorfisma grup.

b. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CP-MK)

- CPMK 1: Mahasiswa mampu mengaplikasikan teori himpunan.
- CPMK 2: Mahasiswa mampu mengaplikasikan teori fungsi.
- CPMK 3: Mahasiswa mampu mengaplikasikan teori operasi biner.
- CPMK 4: Mahasiswa mampu membuktikan teori grup.
- CPMK 5: Mahasiswa mampu membuktikan teori subgrup.
- CPMK 6: Mahasiswa mampu menentukan grup permutasi.
- CPMK 7: Mahasiswa mampu menentukan koset, subgrup normal, dan grup faktor.
- CPMK 8: Mahasiswa mampu membuktikan homomorfisma grup.

EVALUASI DAN UMPAN BALIK PROSES PEMBELAJARAN

- a. Evaluasi dari proses pembelajaran ini adalah berupa tes uraian.
- b. Pengukuran tingkat penguasaan terhadap materi dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Banyak jawaban yang benar}}{\text{Banyak soal}} \times 100$$



- c. Jika mahasiswa mendapatkan tingkat penguasaan materi ≥ 75 , maka mahasiswa tersebut dapat melanjutkan ke bab berikutnya.
- d. Namun, jika tingkat penguasaan mahasiswa berada pada rentang < 75 , maka mahasiswa tersebut dianjurkan untuk mengulang materi pada bab ini, terutama pada materi yang belum dikuasai.



DAFTAR PUSTAKA

- Artin, M. 2010. *Algebra* (2nd ed.). Boston: Pearson.
- Birkhoff, G., & Mac Lane, S. 1997. *A survey of Modern Algebra* (5th ed.). Boca Raton: CRC Press.
- Beachy, J.A., & Blair, W. D. 2006. *Abstract Algebra* (3rd ed.). Long Grove, IL: Waveland Press.
- Dummit, D.S., & Foote, R. M. 2003. *Abstract Algebra* (3rd ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Frleigh, J. B. 2002. *A first Course in Abstract Algebra* (7th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson.
- Gallian, J.A. 1998. *Contemporary Abstract Algebra* (4th ed.). Boston: Houghton Mifflin.
- Gallian, J.A. 2017. *Contemporary Abstract Algebra* (9th ed.). Boston: Cengage Learning.
- Hall, M. Jr. 1976. *The theory of Groups*. New York: Chelsea Publishing Company.
- Herstein, I.N. 1990. *Abstract Algebra* (3rd ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Hungerford, T.W. 1974. *Algebra*. New York: Springer-Verlag.
- Isaacs, I.M. 1994. *Algebra: A Graduate Course*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing.
- Jacobson, N. 1985. *Basic algebra I* (2nd ed.). New York: W.H. Freeman and Company.
- Lang, S. 2002. *Algebra* (Revised 3rd ed.). New York: Springer.

- Ledermann, W. 1984. *Introduction to Group Theory* (2nd ed.). Essex: Longman Scientific & Technical.
- Lubis, A. 2009. *Aljabar Abstrak I*. Medan: Fakultas Tarbiyah IAIN-SU.
- Munir, R. 2015 *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
- Rotman, J. J. 1995. *An Introduction to the Theory of Groups* (4th ed.). New York: Springer-Verlag.
- Rose, J. S. 1978. *A Course on Group Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Saragih, S. 2014. *Struktur Aljabar 1*. Medan: Larispa.
- Setiawan, A. 2014. *Dasar-dasar Aljabar Modern: Teori Grup & Teori Ring*. Salatiga: Tisara Grafika.



TENTANG PENULIS



Siti Maysarah, M.Pd., lahir di Kecamatan Tanjung Morawa Kabupaten Deli Serdang Sumatera Utara pada tanggal 31 Agustus 1988 dan merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Buchari dan Ibu Nurmala. Lulus Sarjana (S-1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah Institut Agama Islam Negeri Sumatera Utara tahun 2011. Tahun 2013 melanjutkan S-2 di Program Studi

Pendidikan Matematika Universitas Negeri Medan dan meraih gelar Magister Pendidikan pada tahun 2015.

Kemudian melanjutkan Pendidikan S-3 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Medan pada tahun 2022. Penulis menjadi dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri Sumatera Utara dari tahun 2015 sampai dengan sekarang. Saat ini aktif dalam mengajar mata kuliah struktur aljabar grup dan struktur aljabar ring. Beberapa mata kuliah yang pernah diajarkan, di antaranya: aljabar linier, program linier, matematika keuangan, matematika ekonomi, dan desain media pembelajaran matematika. Selain kegiatan mengajar, penulis juga aktif menulis dan meneliti dalam bidang pendidikan matematika. Fokus penelitiannya antara lain mencakup pengembangan bahan ajar yang dapat meningkatkan kemampuan matematis mahasiswa, penerapan media pembelajaran berbasis teknologi, serta analisis

terhadap literasi matematis dan aljabar. Beberapa hasil penelitiannya telah dipublikasikan di jurnal nasional terakreditasi, sebagai kontribusi nyata terhadap penguatan kualitas pendidikan matematika di Indonesia.

STRUKTUR ALJABAR GRUP

Buku ajar ini disusun berdasarkan pada rumusan Capaian Pembelajaran Program Studi (CP-Prodi) dan rumusan Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CP-MK) yang tertuang pada Rencana Pembelajaran Semester (RPS) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan Universitas Islam Negeri Sumatera Utara. Buku ajar ini terdiri dari delapan bab, yaitu: 1) Himpunan; 2) Fungsi; 3) Operasi biner; 4) Grup; 5) Subgrup; 6) Grup permutasi; 7) Koset, subgrup normal, dan grup faktor; dan 8) Homomorfisma grup.

Buku ajar ini ditulis dalam rangka melengkapi perangkat pembelajaran pada mata kuliah Struktur Aljabar Grup yang merupakan mata kuliah inti dari Program Studi Pendidikan Matematika. Selain itu juga, menjadi mata kuliah prasyarat untuk mengambil mata kuliah Struktur Aljabar Ring. Setiap materi pada buku ini disajikan dalam bentuk definisi, teorema, contoh dan bukan contoh, serta diakhiri dengan latihan untuk mengukur pemahaman mahasiswa dalam menguasai materi. Penyusunan yang runtut bertujuan untuk memudahkan mahasiswa memahami konsep-konsep abstrak dalam aljabar. Buku ini diharapkan menjadi referensi utama dalam perkuliahan dan pengembangan wawasan keilmuan mahasiswa, serta berkontribusi positif dalam dunia pendidikan matematika.



Penerbit
KENCANA
[Divisi dari PRENADAMEDIA GROUP]
Email: pmg@prenadamedia.com
<http://www.prenadamedia.com>

CLS MATHEMATICS

ISBN 978-623-364-965-4



9

786233

849654

Harga P. Jawa Rp100.000,00