Buku Ajar

Matematika Diskrit dan Terapannya

Dr. Rina Filia Sari, M.Si.

BUKU AJAR
MATEMATIKA DISKRIT
DAN TERAPANNYA

Penulis
Dr. Rina Filia Sari, M.Si

Editor
Fitri Armanda

Jika terdapat kesalahan dalam buku cetak, seperti hasil cetak buram, sobek, halaman terbalik, dan finishing tidak rapi, bisa dikembalikan ke percetakan dengan konfirmasi nomor
0815 552 5121

scan disini

BUKU AJAR MATEMATIKA DISKRIT DAN TERAPANNYA

Penulis
Dr. Rina Filia Sari, M.Si

Editor
Fitri Armanda

CAKRAWALA
SATRIA MANDIRI

PENERBIT CAKRAWALA SATRIA MANDIRI

Cetakan Pertama, Desember 2024
Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan cara apa pun tanpa izin tertulis dari penerbit

BUKU AJAR
MATEMATIKA DISKRIT DAN TERAPANNYA

Penulis : Dr. Rina Filia Sari, M.Si
Editor : Fitri Armanda, S.Mat
Layout : Mas Ud
Desain Cover : Brian Dzaki Nasution

Hak Penerbit pada Cakrawala Satria Mandiri
Anggota IKAPI (No. 186/JTE/2020)

PENERBIT
CV. CAKRAWALA SATRIA MANDIRI
Pliken RT.04 / RW.09, Kembaran, Banyumas
Jl. Pesantren XII No.03, Pesantren, Kota Kediri
Telp : 08155525121
Email : redaksi.satria@gmail.com

PEMASARAN
CAKRAWALA, Jl. Brigjend Pol Imam Bahri No. 129,
Pesantren, Kota Kediri
Telp/Fax. 0354.7418363
Email: cakrawalasatria@gmail.com
www.cakrawalasatria.co.id

Hak cipta dilindungi undang-undang pada penulis
All right reserved
ISBN : 978-623-8786-62-6

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI v
DAFTAR TABEL viii
DAFTAR GAMBAR ix
PRAKATA xi
BAB I DASAR-DASAR TEORI HIMPUNAN 1
A. Sejarah Teori Himpunan 2
B. Pengertian Himpunan 3
C. Cara Menyajikan Himpunan 5
D. Jenis-Jenis Himpunan 6
E. Operasi Pada Himpunan 9
F. Sifat-Sifat Operasi Pada Himpunan 12
G. Himpunan Ganda (*Multiset*) 17
H. Penerapan Konsep Himpunan 19
I. Latihan 20
BAB II LOGIKA MATEMATIKA 23
A. Sejarah Logika 24
B. Pengertian Logika 26
C. Operasi Pada Logika 27
D. Tabel Kebenaran 31
E. Tautologi, Kontradiksi Dan Kontingensi 31
F. Konvers, Invers Dan Kontrapositif 33
G. Hukum-Hukum Logika Proposisi 34
H. Inferensi Dan Penarikan Kesimpulan 35
I. Penerapan Konsep Logika 39
J. Latihan 40
BAB III MATRIKS, RELASI dan FUNGSI 41
A. Sejarah Matriks, Relasi dan Fungsi 42
B. Pengertian Matriks 43
C. Jenis-Jenis Matriks 43
D. Operasi Hitung Pada Matriks 47
E. Relasi 56
F. Representasi Relasi 57
G. Sifat-Sifat Relasi Biner 59

H. Fungsi 60
I. Komposisi Fungsi 64
J. Penerapan Konsep Matriks, Relasi Dan Fungsi 65
K. Latihan 66
BAB IV INDUKSI MATEMATIKA 69
A. Sejarah Induksi Matematika 70
B. Pengertian 70
C. Prinsip Induksi Matematika 72
D. Penerapan Konsep Induksi Matematika 79
E. Latihan 80
BAB V KOMBINATORIAL 81
A. Sejarah Kombinatorial 82
B. Pengertian Kombinatorial 82
C. Kaidah Dasar Menghitung 83
D. Perluasan Kaidah Menghitung 84
E. Prinsip Inklusi-Ekslusi 85
F. Permutasi 87
G. Kombinasi 90
H. Penerapan Kobinatorial (Permutasi Dan Kombinasi) 94
I. Latihan 97
BAB VI ALJABAR BOOLEAN 99
A. Sejarah Aljabar Boolean 100
B. Pengertian Aljabar Boolean 100
C. Aljabar Boole Sebagai Suatu Struktur Aljabar 101
D. Fungsi Boolean 103
E. Ekspresi Boolean 104
F. Prinsip Dualitas 105
G. Bentuk Normal Disjungtif (*Disjuctive Normal Form = Dnf*) 106
H. Rangkaian Logika 108
I. Sirkuit Logika 110
J. Aljabar Boolean Dua Nilai 111
K. Penjumlahan Dan Perkalian Dua Fungsi 112
I. Fungsi Komplemen 112
M. Bentuk Baku 113
N. Penyederhanaan Fungsi Boolean 115
O. Penerapan Konsep Aljabar Boolean 123
P. Latihan 124

BAB VII DASAR-DASAR TEORI GRAPH 127
A. Sejarah Singkat Teori Graph 128
B. Pengertian Dasar Teori Graph 128
C. Graph Hingga Dan Graph Tak Hingga 130
D. Insidensi (Bersisian) Dan Ajasensi (Bertetangga) 131
E. Derajat (*Degree*) 131
F. Titik Terisolasi (*Isolated Vertex*) Dan Titik Anting/Ujung 132
G. Graph Kosong (*Null Graph/Empty Graph*) 133
H. Lintasan (*Path*) 134
I. Siklus (*Cycle*) Atau Sirkuit (*Circuit*) 134
J. Graph Terhubung 134
K. Subgraph Dan Komplemen Subgraph 135
L. Spanning Subgraph 136
M. Cut-Set 136
N. Graph Berbobot (*Weighted Graph*) 137
O. Graph Lengkap (*Complete Graph*) 137
P. Graph Lingkaran 137
Q. Graph Teratur (*Reguler Graph*) 138
R. Graph Bipartisi (*Bipartite Graph*) 138
S. Representasi Graph 139
T. Graph Isomorfik 140
U. Graph Planar (*Planar Graph*) Dan Graph Bidang (*Plane Graph*) 141
V. Lintasan, Sirkuit Dan Sirkuit Euler 143
W. Lintasan Dan Sirkuit Hamilton 145
X. Beberapa Aplikasi Graph 147
DAFTAR PUSTAKA 151
BIOGRAFI PENULIS 155

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1. Tabel Kebenaran Konjungsi 28
Tabel 2.2. Tabel Kebenaran Disjungsi (or) 29
Tabel 2.3. Tabel Kebenaran Disjungsi Eksklusif (Xor) 29
Tabel 2.4. Tabel Kebenaran Implikasi..... 30
Tabel 2.5. Tabel Kebenaran Biimplikasi 30
Tabel 2.6. Tabel Kebenaran Tautologi 31
Tabel 2.7. Tabel Kebenaran Kontradiksi..... 32
Tabel 2.8. Tabel Kebenaran Kontingensi 33
Tabel 2.9. Tabel Kebenaran Konvers, Invers dan Kontraposisi. 33
Tabel 2.10. Hukum-Hukum Logika Proposisi 34
Tabel 6.1. Sifat-Sifat Aljabar Boole..... 101
Tabel 6.2. Hukum-Hukum Aljabar Boole 105
Tabel 6.3. Tabel Nilai Kebenaran Penghubung Or dan XOR 106
Tabel 6.4. Tabel Masukan dan Keluaran.....103
Tabel 6.5. Tabel Masukan/Keluaran Fungsi Literal $f(x,y)=y'$..104
Tabel 6.6. Tabel Kebenaran untuk Ekspresi Boole 107
Tabel 6.7. Analogi Struktur Aljabar dengan Rangkaian Listrik..108
Tabel 6.8. Analogi Struktur Aljabar dengan Rangkaian Listrik..109
Tabel 6.9. Kaidah untuk Operator Biner dan Operator Uner.....112

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1. Diagram Venn 6
Gambar 1.2. Diagram Venn untuk Operasi pada Himpunan..... 12
Gambar 3.1. Fungsi Onto 60
Gambar 3.2. Fungsi Into 61
Gambar 3.3. Fungsi Injektif 62
Gambar 3.4. Contoh Bukan Fungsi Injektif 63
Gambar 3.5. Diagram Komposisi Fungsi 64
Gambar 4.1. Ilustrasi Induksi Matematika 71
Gambar 4.2. Ide Dasar Induksi Matematika 74
Gambar 6.1.a Penyajian-1 Peta Karnaugh 2 peubah 116
Gambar 6.1.b Penyajian-2 Peta Karnaugh 2 peubah 116
Gambar 6.1.c Penyajian-3 Peta Karnaugh 2 peubah 116
Gambar 6.2. Penyajian Peta Karnaugh 3 peubah 117
Gambar 6.3. Penyajian Peta Karnaugh 4 peubah 118
Gambar 7.1. Graph yang Terdiri dari 5 Simpul dan 7 Sisi 129
Gambar 7.2a. Graph Sederhana 129
Gambar 7.2b. Graph tak sederhana 129
Gambar 7.3. Graph yang Sama 130
Gambar 7.4. Sisi e tidak berpotongan dengan sisi f 130
Gambar 7.5. Graph Tak Hingga 130
Gambar 7.6. Graph (4,8) 131
Gambar 7.7. Graph (6,9) 132
Gambar 7.8. Graph dengan Titik Terisolasi dan Titik Anting ... 133
Gambar 7.9. Graph Kosong (G(5,0)) 133
Gambar 7.9. Graph Tak Terhubung 134
Gambar 7.10 Graph berarah terhubung lemah (a) dan

terhubung kuat (b) 135
Gambar 7.11. Subgraph dan Komplemen Subgraph 135
Gambar 7.12. Upagraph Rentang 136
Gambar 7.13. Graph G dan *cut set* 136
Gambar 7.14. Graph berbobot 137
Gambar 7.15. Graph Lengkap 137
Gambar 7.16. Graph Lingkaran 138
Gambar 7.17. Graph Reguler 138
Gambar 7.18. Graph Bipartisi 139
Gambar 7.19. G1 isomorfik G2, tetapi G1 tidak isomorfik dengan G3 140
Gambar 7.20. Graf (a) dan graf (b) isomorfik 141
Gambar 7.21. Graph Planar dan tak Planar 142
Gambar 7.22. Graph Kuratowski 143
Gambar 7.23 (a) Graph berarah Euler (a, g, c, b, g, e, d, f, a), (b) Graph berarah semi-Euler (d, a, b, d, c, b), (c) Graph berarah bukan Euler maupun semi-Euler 145
Gambar 7.24 (a) graph yang memiliki lintasan Hamilton (misal: 3, 2, 1, 4), (b) graph yang memiliki lintasan Hamilton (1, 2, 3, 4, 1), (c) graph yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton. 145
Gambar 7.25 (a) Dodecahedron Hamilton, (b) graph yang mengandung sirkuit Hamilton 146
Gambar 7.26. Travelling Salesperson Problem 147

PRAKATA

Bismillahirrahmanirrahim,

Puji dan syukur penulis sampaikan kepada Allah Subhanahu Wata'ala dan shalawat beriring salam kepada baginda Nabi Besar Muhammad saw., berkat bimbingan serta hidayah-Nya sehingga penulis bisa menyelesaikan penulisan buku yang berjudul "Matematika Diskrit dan Terapannya".

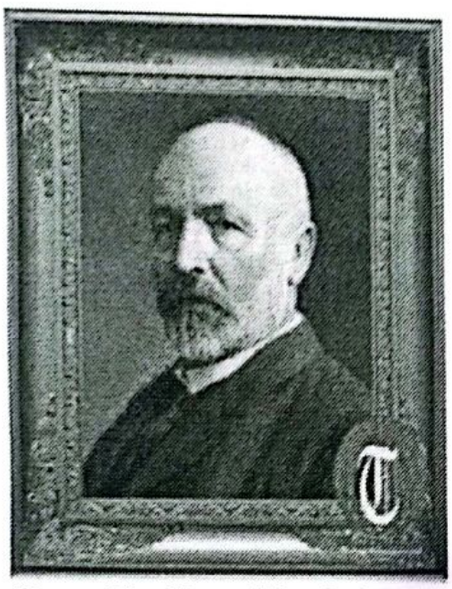
Buku ini disusun sebagai buku teks mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit. Materi yang disajikan dalam buku ini adalah Matematika Diskrit dan Terapannya. Materi diambil dari beberapa sumber yang judul-judulnya dicantumkan dalam daftar pustaka.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada keluarga tercinta yang selalu memberikan dukungan sampai penulis bisa menyelesaikan buku ini. Terimakasih juga disampaikan kepada semua pihak yang membantu dalam tahap penyelesaian buku ini. Buku ini masih jauh dari sempurna. Kritik, ide, dan saran yang membangun sangat diharapkan untuk perbaikan di masa yang akan datang.

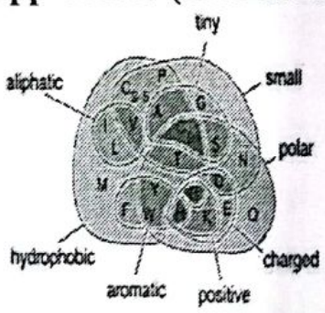
Medan, November 2024

BAB

I DASAR-DASAR TEORI HIMPUNAN



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) berkebangsaan Rusia. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor dilahirkan di St. Petersburg pada tanggal 3 Maret 1845 dari pasangan Georg Woldermar Cantor dan Maria Bohm. Pendidikan dasarnya dijalani dengan pendidikan di rumah melalui guru privat, pada usia 11 tahun pindah ke Jerman dan melanjutkan pendidikan di *Gymnasium* kemudian pindah ke Frankfrut dan Darmstadt. Pada tahun 1960, beliau lulus dari *Realschule* di Darmstadt dengan hasil yang sangat baik. Pada tahun 1867 Cantor menulis thesis doctoralnya yang berjudul "*De Aequationibus Secundi Gradus Indeterminantis*". Karir pertama sebagai dosen di Universitas Halle pada tahun 1869. Pada tahun 1872 berhasil mendapatan gelar asisten profesor dan pada tahun 1879 berhasil mendapatkan gelar profesor penuh.

Karyanya dari tahun 1869 sampai 1873 yaitu membahas teori angka, studinya tentang Gauss, dan pengarus *Kronecker* atas saran Heinrich Eduard Heine.

Kemudian pada teori deret berkala, Cantor memperluas konsep bilangan riil. Kemudian pada trigonometri dan pada fungsi variabel. Pada Tahun 1870 menunjukkan bahwa fungsi dapat diwakilkan dengan satu cara pada serangkaian trigonometri. Pada tahun 1872 mendefinisikan bilangan irrasional dalam hal urutan konvergen dan bilangan rasional (*quotients of integers*), kemudian teori himpunan dan konsep bilangan transfinite. Pada tahun 1873 membuktika bahwa bilangan rasional dapat atau tidaknya dihitung karena ditempatkan dalam konsep korespondensi satu-satu.

A. SEJARAH TEORI HIMPUNAN

Himpunan merupakan konsep dasar semua cabang ilmu matematika, diperkenalkan oleh Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) berkebangsaan Rusia. Awalnya, Cantor mempelajari matematika di Zurich, namun pada Juni 1863 ia pindah ke University or Berlin. Tahun 1867, berhasil mempertahankan disertasinya tentang Teori Bilangan dengan judul "*De Aqequationibus Secundi Gradus Indederminatis*". Terdapat beberapa referensi tentang himpunan karya Cantor sampai abad ke-19. Karya yang paling berpengaruh pada tahun 1874 diterbitkan oleh *Crelle's Jornal*. Cantor mengenalkan konsep himpunan berhingga yang lengkap. Hal inilah yang membuat Cantor diakui sebagai penemu teori himpunan. Cantor meninggal di usia 73 tahun di Jerman pada 6 Januari 1918.

Matematikawan Yunani mendefinisikan lingkaran sebagai himpunan titik pada jarak tetap. Namun mereka menghindari penggunaan istilah konsep himpunan tak berhingga selama berabad-abad. Phytagoras (585-500 SM) menggunakan istilah terbatas dan tak terbatas. Aristoteles (384-322 SM) menyatakan tidak terbatas dengan tidak sempurna. Kaisar Romawi dan Filsuf Marcus Aqarchus (121-180M) mengatakan tak terhingga dengan istilah teluk yang tak dapat diduga.

Penelitian Cantor tahun 1870-an dalam teori dengan rangkaian tanpa batas dan topik yang berhubungan dengan analisis, memberikan arah baru bagi perkembangan teori himpunan. Pada awalnya hasil penelitian beliau tidak langsung diterima oleh para ilmuwan pada zaman itu. Masih terdapat kontradiksi dan yang paling terkenal adalah oleh Bertrand Russell (1872-1970) yang disampaikan pada tahun 1918 dan dikenal dengan paradoks Russell. Untuk menyelesaikan paradoks ini, reaksi pertama dari matematikawan adalah untuk membuat aksioma dari teori himpunan Cantor. Aksioma dimulai dengan

satu himpunan pernyataan yang kebenarannya diasumsikan, sehingga bisa disimpulkan semua sisa proposisi pada teori dengan menggunakan aksioma inferensi logis. Russell dan Alfred North Whitehead (1861-1974) pada tahun 1903 mengusulkan suatu teori aksiomatik himpunan dalam *Principia*.

Meskipun pada zamannya teori Cantor sangat kontroversial namun saat ini dapat kita lihat kegunaannya sangat luas. Aturan himpunan yang dikenalkan beliau adalah sebagai berikut:

1) Himpunan A dan B dikatakan sama jika elemen dalam himpunan A dan B adalah sama
2) Himpunan A merupakan bagian dari himpunan B, jika elemen himpunan A merupakan elemen himpunan B
3) Himpunan A sama dengan himpunan B, maka himpunan A adalah subset dari himpunan B
4) Jika himpunan A merupakan himpunan bagian dari B, dan ada sedikitnya satu elemen B yang bukan merupakan elemen himpunan A maka A adalah proper subset B.
5) Himpunan terdiri sari satu elemen maupun tidak ada elemen.
6) Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong.

Selain itu Cantor juga menyatakan teorema "*For any sets M there exist sets larger than A, in parrticular the set of all subsets of A is larger than A*"

B. PENGERTIAN HIMPUNAN

Himpunan adalah sekumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*) dan memiliki paling sedikit satu kesamaan sifat (memiliki batasan tertentu). Terdefinisi dengan jelas maksudnya adalah pada saat suatu objek kita sebutkan misalkan *a*, kita dapat mengklasifikasikannya masuk ke kelompok tertentu. Objek pada himpunan dinamakan anggota atau elemen dari suatu himpunan. Angota suatu himpunan dinyatakan dengan simbol "

$\in$" (dibaca: elemen/anggota). Untuk menyatakan lawannya atau bukan anggota digunakan simbol "$\notin$" (dibaca: bukan elemen/bukan anggota). Misalnya di atas meja tersaji jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk, donat, pisang goreng, serabi. Maka kita sudah bisa mengelompokkannya menjadi dua buah himpunan, yaitu himpunan A adalah himpunan minuman yang beranggotakan jus jambu, coca cola, sprite, dan teh pucuk, sementara himpunan B adalah himpunan makanan (camilan) yang beranggotakan donat, pisang goreng, serabi.

Notasi dari suatu himpunan adalah huruf kapital A, B, C dan seterusnya. Anggota himpunan diletakkan dalam suatu tanda kurung kurawal "{....}". Tanda kurung kurawal ini berfungsi untuk mengidentifikasikan konten yang dimaksudkan. Anggota himpunan dituliskan menggunakan huruf kecil *a, b, c* dan seterusnya dan angka. Contohnya di atas meja tersaji jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk, donat, pisang goreng, serabi kemudian didapat bahwa A adalah himpunan minuman yang beranggotakan jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk dan himpunan B adalah himpunan makanan (camilan) yang beranggotakan donat, pisang goreng, serabi. Maka dapat dituliskan:

$A = \{$jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk$\}$ dan

$B = \{$donat, pisang goreng, serabi$\}$, dimana:

jus jambu $\in$ A	jus jambu $\notin$ B
coca cola $\in$ A	coca cola $\notin$ B
sprite $\in$ A	sprite $\notin$ B
teh pucuk $\in$ A	teh pucuk $\notin$ B
donat $\in$ B	donat $\notin$ A
pisang goreng $\in$ B	pisang goreng $\notin$ A
serabi $\in$ B	serabi $\notin$ A

C. CARA MENYAJIKAN HIMPUNAN

Himpunan dapat disajikan dengan cara beberapa cara, di antaranya dengan tabulasi (*the roster method*), dengan menyatakan sifat keanggotaannya, dengan notasi pembentuk himpunannya dan dengan diagram Venn.

1. Tabulasi (*the roster method*)

   Pada tabulasi ini disebutkan satu per satu nama anggota dari himpunan tersebut.

   Contoh:

   $A = \{1,3,5,7,9\}$

   $A = \{\text{jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk}\}$

   $B = \{\text{donat, pisang goreng, serabi}\}$

   $C = \{\text{subuh, dzuhur, ashar, maghrib, isya}\}$

2. Deskripsi

   Pada metode ini himpunan disajikan dengan cara menyatakan sifat dari anggotanya

   Contoh:

   A = Himpunan bilangan ganjil yang lebih besar dari nol dan lebih kecil dari 10

   A = Himpunan minuman di atas meja makan

   B = Himpunan makanan di meja makan

   C = Himpunan shalat wajib dalam sehari semalam

3. Notasi pembentuk himpunan (*the rule method*)

   Pada metode ini anggota himpunan dinyatakan dalam bentuk variabel, kemudian diikuiti tanda garis serta sifat atau ciri-ciri himpunan tersebut.

   Contoh:

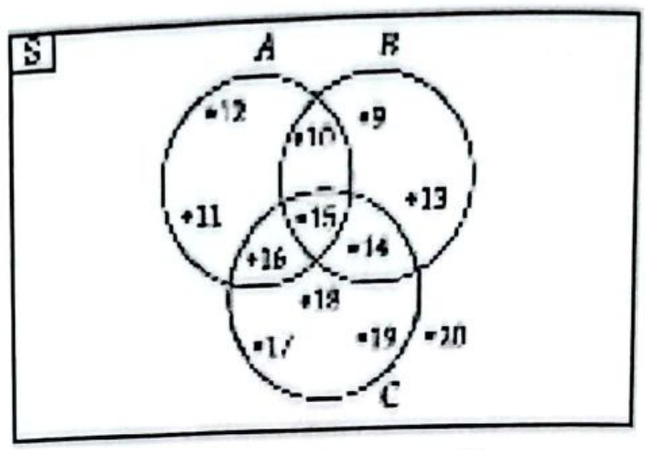
   $A = \{s | 0 \leq s \leq 10, \text{s bilangan ganjil}\}$

4. Diagram Venn

   Pada diagram Venn, suatu himpunan dilambangkan dengan bentuk lingkaran. Penyajian ini disebut juga dengan

penyajian secara grafis. Aturan pembuatan diagram Venn adalah sebagai berikut.

- Himpunan semesta S digambarkan dengan daerah persegi panjang dan dituliskan S pada sudut kiri atas.
- Setiap anggota himpunan digambarkan dengan titik (noktah).
- Setiap himpunan lain yang dibicarakan selain himpunan kosong dinyatakan dalam lingkaran kurva tertutup



Gambar 1.1. Diagram Venn

Diagram Venn di atas menyatakan ada 3 buah himpunan A, B dan C yang terdapat dalam sebuah himpunan semesta S.

D. JENIS-JENIS HIMPUNAN

1. Himpunan Semesta

Pada himpunan semesta anggotanya adalah seluruh objek pembicaraan, dilambangkan dengan U atau S.

Contoh:

S = himpunan hewan berkaki 4

S = himpunan bilangan bulat

S = himpunan hidangan yang ada di meja makan

$S = \{$jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk, donat, pisang goreng, serabi$\}$

2. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota, dilambangkan dengan $\{\ \}$ atau "O".

Contoh:

A = Himpunan manusia yang memiliki sayap.

3. Himpunan Bagian

Jika terdapat dua buah himpunan R dan I dimana seluruh anggota himpunan I ada pada himpunan R.

Contoh:

R = Himpunan Bilangan bulat

(anggotanya adalah semua bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif)

I = Himpunan bilangan bulat positif

Pada kasus ini dikatakan bahwa I adalah himpunan bagian dari himpunan R. Dinotasikan $I \subset R$

$S = \{$jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk, donat, pisang goreng, serabi$\}$

A = {jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk}

B = {donat, pisang goreng, serabi}

Pada kasus ini dikatakan bahwa A adalah himpunan bagian dari himpunan S. Dinotasikan $A \subset S$ dan B adalah himpunan bagian dari himpunan S. Dinotasikan $B \subset S$

Semua anggota A terdapat dalam S dan semua anggota B terdapat dalam S. Pada himpunan:

A = {jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk} juga memiliki himpunan bagian yang

- memiliki 0 anggota (tidak ada anggota) = {}
- memiliki 1 anggota = {jus jambu}, {coca cola}, {sprite}, {teh pucuk}

- memiliki 2 anggota = {jus jambu, coca cola}, {jus jambu, sprite}, {jus jambu, teh pucuk}, {coca cola, sprite}, {coca cola, the pucuk}, {sprite, teh pucuk}.
- memiliki 3 anggota = {jus jambu, coca cola, sprite}, {jus jambu, coca cola, the pucuk}, {jus jambu, sprite, teh pucuk}, {coca cola, sprite, the pucuk}
- memiliki 4 anggota = {jus jambu, coca cola, sprite, the pucuk}.

Maka himpunan bagian dari himpunan A tersebut adalah {{}, {jus jambu}, {coca cola}, {sprite}, {teh pucuk}, {jus jambu, coca cola}, {jus jambu, sprite}, {jus jambu, teh pucuk}, {coca cola, sprite}, {coca cola, the pucuk}, {sprite, teh pucuk}, {jus jambu, coca cola, sprite}, {jus jambu, coca cola, the pucuk}, {jus jambu, sprite, teh pucuk}, {coca cola, sprite, the pucuk}, { jus jambu, coca cola, sprite, the pucuk}}.

Banyaknya himpunan bagian dari himpunan A adalah 16. Uniknya pada himpunan bagian ini, himpunan kosong akan menjadi himpunan bagian dari semua himpunan. Untuk menentukan jumlah himpunan bagian dari suatu himpunan dapat kita gunakan rumus berikut:

4. $Banyaknya\ himpunan\ bagian\ suatu\ himpunan = 2^n$
dimana n = jumlah anggota himpunan

III

punan Sama

Dua himpunan A dan B dikatakan sama jika kedua himpunan tersebut memiliki anggota yang sama dengan mengabaikan urutannya. Dinotasikan $A = B$.
Contoh:

$A = \{b, a, t, u\}$ dan $B = \{t, a, b, u\}$ maka dapat dinyatakan bahwa $A = B$ karena setiap anggota A terdapat pada B dan sebaliknya setiap anggota B juga ada di A.

A = {jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk}, dan

B = {donat, pisang goreng, serabi}

tidak ada anggota A di B dan sebaliknya tidak ada anggota B di A, maka dikatakan A tidak sama dengan B. Dinotasikan $A \neq B$.

5. Himpunan Ekuivalen

Dua himpunan kita katakan ekivalen jika memiliki jumlah anggota yang sama. Dinotasikan dengan $A \sim B$.

Contoh:

A = {jus jambu, coca cola, sprite, teh pucuk}

B = {donat, pisang goreng, serabi}

Jumlah anggota pada himpunan A sama dengan jumlah anggota pada himpunan B, maka dikatakan bahwa $A \sim B$ karena $n(A) = n(B) = 3$

E. OPERASI PADA HIMPUNAN

Terdapat beberapa operasi yang dapat diterapkan pada himpunan. Operasi pada himpunan adalah:

1. Gabungan (*union*)

Gabungan dua buah himpunan A dan B dituliskan dengan $A \cup B$ (dibaca: himpunan A digabung dengan himpunan B). Anggotanya adalah semua anggota himpunan A dan anggota himpunan B.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$B = \{1,3,5,10,11\}$

Maka

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

Dinotasikan: $A \cup B = \{x | x \in A, x \in B, x \notin A \cap B\}$

2. Irisan (*intersection*)

Irisan dua buah himpunan A dan B ditulskan dengan $A \cap B$ (dibaca: himpunan A diiriskan dengan himpunan B). Anggotanya adalah semua anngota himpunan A yang juga ada di himpunan B atau sebaliknya.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$B = \{1,3,5,10,11\}$

Maka

$A \cap B = \{1,3,5\}$

Dinotasikan : $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$

3. Komplemen (*complement*)

Komplemen dari sebuah himpunan A dituliskan dengan A^C atau A'. Anggotanya adalah semua anngota himpunan semesta yang bukan anggota himpunan A.

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$B = \{1,3,5,10,11\}$

Maka

$B^c = \{2,4,6,7,8,9\}$

Dinotasikan $B^c = \{x | x \notin B dan x \in S\}$

4. Selisih (*difference*)

Selisih dua buah himpunan A dan B dituliskan $A-B$ adalah sebuah himpunan yang anggotanya terdiri dari anggota himpunan A yang bukan anggota himpunan B.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$B = \{1,3,5,10,11\}$

Maka

$A - B = \{2,4,6,7,8,9\}$ dan $B - A = \{10,11\}$

Dinotasikan: $A - B = \{x | x \in A \rightleftarrows, x \notin B\}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Beda setangkup antara dua himpunan dinotasikan dengan $\oplus$.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$B = \{1,3,5,10,11\}$

Maka

$A \oplus B = \{2,4,6,7,8,9,10,11\}$

Dinotasikan: $A \oplus B = \{A - B\} \cup \{B - A\}$

6. Perkalian kartesius (*cartesian Product*)

Pada perkalian kartesius dua himpunan $A \times B$ dihasilkan suatu himpunan pasangan berurutan dari anggota himpunan A ke himpunan B

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{5,10,11\}$

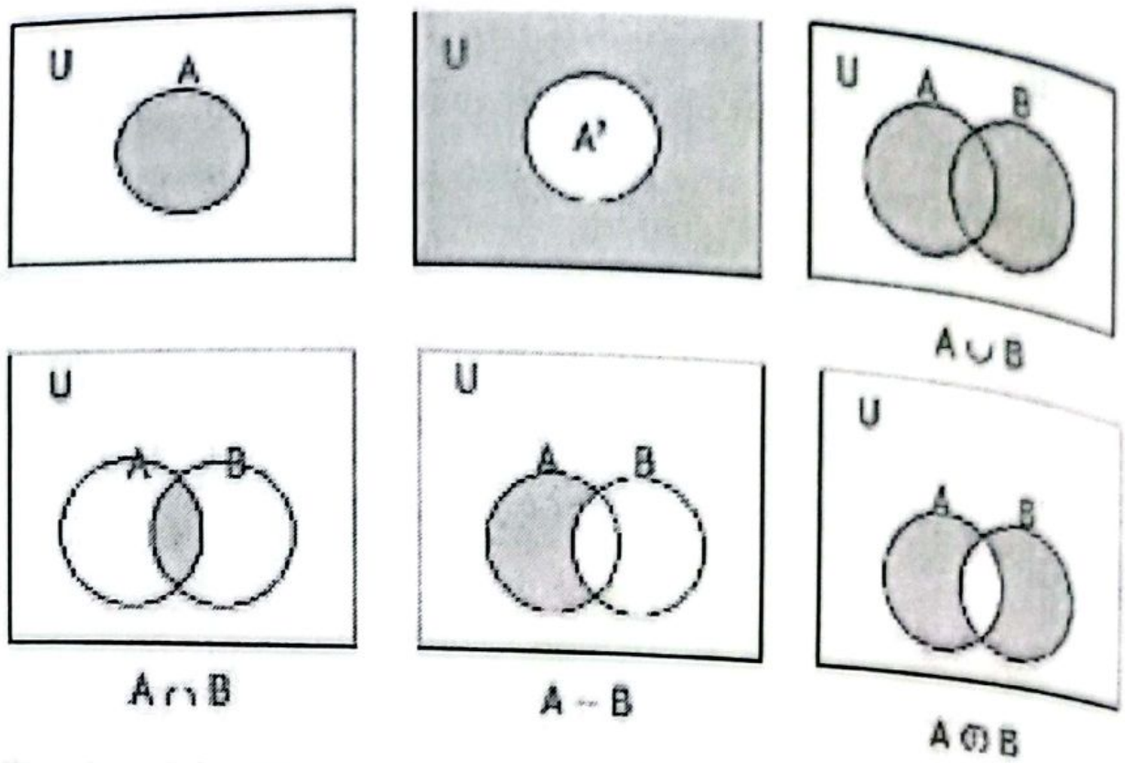
Maka

$$A \times B = \begin{Bmatrix} \{1,5\},\{1,10\},\{1,11\},\{2,5\}, \\ \{2,10\},\{2,11\},\{3,5\},\{3,10\},\{3,11\} \end{Bmatrix}$$

Jumlah himpunan pasangan berurutan yang dihasilkan adalah $|A| \bullet |B| = 3 \times 3 = 9$

Dinotasikan: $A \times B = \{(a,b)|a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Secara grafis (diagram Venn) operasi di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1.2. Diagram Venn untuk Operasi pada Himpunan

F. SIFAT-SIFAT OPERASI PADA HIMPUNAN

Sifat-sifat operasi pada himpunan adalah sebagai berikut:

1. Komutatif

   Pada himpunan A dan B maka berlaku $A \cup B = B \cup A$ dan $A \cap B = B \cap A$

   Contoh:

   $A = \{1,2,3,5,7\}$ dan $B = \{2,4,6,7\}$

$A \cup B$	=	$B \cup A$
$\{1,2,3,5,7\} \cup \{2,4,6,7\}$	=	$\{2,4,6,7\} \cup \{1,2,3,5,7\}$
$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	=	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$A \cup B$	=	$B \cup A$
$\{1,2,3,5,7\} \cap \{2,4,6,7\}$	=	$\{2,4,6,7\} \cap \{1,2,3,5,7\}$
$\{2,7\}$	=	$\{2,7\}$

2. Asosiatif

   Pada himpunan A, B, dan C maka berlaku

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ dan $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Contoh:

$A = \{1,2,3,5,7\}$, $B = \{2,4,6,7\}$ dan $C = \{3,5,7,9\}$

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\
(\{1,2,3,5,7\} \cup \{2,4,6,7\}) \cup \{3,5,7,9\} &= \{1,2,3,5,7\} \cup (\{2,4,6,7\} \cup \{3,5,7,9\}) \\
\{1,2,3,4,5,6,7\} \cup \{3,5,7,9\} &= \{1,2,3,5,7\} \cup \{2,3,4,5,6,7,9\} \\
\{1,2,3,4,5,6,7.9\} &= \{1,2,3,4,5,6,7.9\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\
(\{1,2,3,5,7\} \cap \{2,4,6,7\}) \cap \{3,5,7,9\} &= \{1,2,3,5,7\} \cap (\{2,4,6,7\} \cap \{3,5,7,9\}) \\
\{2,7\} \cap \{3,5,7,9\} &= \{1,2,3,5,7\} \cap \{7\} \\
\{7\} &= \{7\}
\end{aligned}
$$

3. Distributif

Pada himpunan A, B dan C maka berlaku

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dan

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
\{1,2,3,5,7\} \cup (\{2,4,6,7\} \cap \{3,5,7,9\}) &= (\{1,2,3,5,7\} \cup \{2,4,6,7\}) \cap \\
&\quad (\{1,2,3,5,7\} \cup \{3,5,7,9\}) \\
\{1,2,3,5,7\} \cup \{7\} &= \{1,2,3,4,5,6,7\} \cap \{1,2,3,5,7,9\} \\
\{1,2,3,5,7\} &= \{1,2,3,5,7\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
\{1,2,3,5,7\} \cap (\{2,4,6,7\} \cup \{3,5,7,9\}) &= (\{1,2,3,5,7\} \cap \{2,4,6,7\}) \cup \\
&\quad (\{1,2,3,5,7\} \cap \{3,5,7,9\}) \\
\{1,2,3,5,7\} \cap \{2,3,4,5,6,7,9\} &= \{2,7\} \cup \{3,5,7\} \\
\{2,3,5,7\} &= \{2,3,5,7\}
\end{aligned}
$$

4. Idempoten

Pada suatu himpunan A berlaku

$A \cup A = A$ dan $A \cap A = A$

$$A \cup A = A$$
$$\{1,2,3,5,7\} \cup \{1,2,3,5,7\} = \{1,2,3,5,7\}$$
$$\{1,2,3,5,7\} = \{1,2,3,5,7\}$$

$$A \cap A = A$$
$$\{1,2,3,5,7\} \cap \{1,2,3,5,7\} = \{1,2,3,5,7\}$$
$$\{1,2,3,5,7\} = \{1,2,3,5,7\}$$

5. Identitas

Pada suatu himpunan A pada himpunan semesta, $A \cup S = S$ dan $A \cap S = A$.

Misal: $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$$A \cup S = S$$
$$\{1,2,3,5,7\} \cup \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$
$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A \cap S = A$$
$$\{1,2,3,5,7\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$
$$\{1,2,3,5,7\} = \{1,2,3,5,7\}$$

6. Komplementer

Untuk suatu himpunan A pada himpunan semesta S maka berlaku $A^c \cup A = S$ dan $A \cap A^c = \emptyset$

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$$A^c \cup A = S$$
$$\{4,6,8,9,10\} \cup \{1,2,3,5,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$
$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$
\begin{aligned}
A \cap A^c &= \{\} \\
\{1,2,3,5,7\} \cap \{4,6,8,9,10\} &= \{\} \\
\{\} &= \{\}
\end{aligned}
$$

7. Hukum De Morgan

Untuk himpunan A dan B berlaku $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ dan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$$
\begin{aligned}
(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\
(\{1,2,3,5,7\} \cap \{2,4,6,7\})^c &= \{1,2,3,5,7\}^c \cup \{2,4,6,7\}^c \\
\{2,7\}^c &= \{4,6,8,9,10\} \cup \{1,3,5,8,9,10\} \\
\{1,3,4,5,6,8,9,10\} &= \{1,3,4,5,6,8,9,10\}
\end{aligned}
$$

Contoh Soal:

Berdasarkan survei yang dilakukan untuk melihat kebiasaan mahasiswa dalam mendapatkan akses informasi didapat bahwa 250 orang mengakses melalui koran, 350 orang mengekses melalui TV, 300 orang mengakses melalui internet, 150 mengakses melalui koran dan TV, 200 orang melalui TV dan internet dan 125 orang mengakses melalui koran dan internet. 50 orang mengakses melalui ketiganya. Tentukanlah:

a. Berapa mahasiswa yang tidak mengakses ketiganya? Jika jumlah mahasiswa adalah 985 orang
b. Berapa orang yang hanya mengakses informasi melalui 2 media saja?
c. Berapa orang yang hanya mengakses informasi melalui 1 media saja?

Diketahui :

Misalkan:

A = Himpunan mahasiswa yang mengakses lewat koran

B = Himpunan mahasiswa yang mengakses lewat TV
C = Himpunan mahasiswa yang mengakses lewat internet
Maka:

$n(A) = 250$
$n(B) = 350$
$n(C) = 300$
$n(A \cap B) = 150$
$n(B \cap C) = 200$
$n(A \cap C) = 125$
$n(A \cap B \cap C) = 50$

Ditanya :

a. Jumlah mahasiswa yang tidak mengakses ketiganya, jika jumlah keseluruhan mahasiswa adalah 985 orang.
b. Jumlah mahasiswa yang mengakses melalui dua media
$\big(n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)\big) +$
$\big(n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)\big) +$
$\big(n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)\big) = \cdots ?$
c. Jumlah mahasiswa yang mengakses informasi melalui satu media
$\big(n(A) - n(A \cap B)\big) + \big(n(B) - n(B \cap C)\big)$
$+\big(n(C) - n(A \cap C)\big) = \cdots ?$

Jawab:

Mahasiswa yang tidak mengakses ketiganya
$= n(S) - \big(n(A) + n(B) + n(C)\big)$
$= 985 - (250 + 350 + 300)$
$= 985 - 900$
$= 85$

Mahasiswa yang mengakses melalui 2 media
$= \big(n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)\big) +$
$\big(n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)\big) +$
$\big(n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)\big)$
$= (150 - 50) + (200 - 50) +$

$$
\begin{aligned}
& (125 - 50) \\
= \; & 100 + 150 + 75 \\
= \; & 325
\end{aligned}
$$

Mahasiswa yang mengakses melalui 1 media

$$
\begin{aligned}
= \; & \big(n(A) - n(A \cap B)\big) + \\
& \big(n(B) - n(B \cap C)\big) \\
& + \big(n(C) - n(A \cap C)\big) \\
= \; & \big(250 - (150 + 125 - 50)\big) + \\
& \big(350 - (200 + 125 - 50)\big) + \\
& \big(300 - (125 + 200 - 50)\big) \\
= \; & (250 - 225) + (350 - 275) + \\
& (300 - 275) \\
= \; & 25 + 75 + 25 \\
= \; & 125
\end{aligned}
$$

G. HIMPUNAN GANDA (*MULTISET*)

Pada himpunan dikenal juga adanya himpunan ganda atau *multiset*. Pada *multiset* elemen himpunannya boleh berulang (tak harus berbeda). Multiplisitas suatu elemen pada *multiset* ditentukan dengan jumlah kemunculan elemen tersebut pada *multiset*.

Contoh:

$A = \{a, a, a, b, b, b, c, c, a\}$

Himpunan A dikatakan multiset, dengan multiplisitas a adalah 4, multiplisitas b adalah 3 dan multiplisitas c adalah 2.

Himpunan merupakan bentuk khusus dari multiset dengan multiplisitas elemmennya adalah 0 dan 1. Untuk himpunan dengan multiplisitas 0 disebut juga dengan himpunan kosong. Misalkan A dan B adalah multiset, maka operasi yang berlaku pada dua multiset tersebut adalah:

1. $A \cup B$

   Merupakan multiset yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada kedua himpunan.

   Contoh:

   $A = \{a, a, a, b, b, b, c, c, a\}$ dan $B = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}$, maka

   $A \cup B = \{a, a, a, a, b, b, b, c, c, c, d\}$

2. $A \cap B$

   Merupakan multiset yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada kedua himpunan.

   Contoh:

   $A = \{a, a, a, b, b, b, c, c, a\}$ dan $B = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}$, maka

   $A \cap B = \{a, a, a, b, b, c, c\}$

3. $A - B$

   Merupakan multiset yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas elemen pada A dikurangi multiplisitas pada B, hal ini berlakunjika selisihnya adalah positif. Jika selisihnya 0 atau negatif maka multiplisitas elemen tersebut adalah 0.

   Contoh:

   $A = \{a, a, a, b, b, b, c, c, a\}$ dan $B = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}$, maka

   $A - B = \{a, b\}$

   $B - A = \{c, d\}$

4. $A + B$

   Merupakan multiset yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada A dan B.

Contoh:

$A = \{a, a, a, b, b, b, c, c, a\}$ dan $B = \{a, a, a, b, b, c, c, c, d\}$, maka

$A + B = \{a, a, a, a, a, a, a, b, b, b, b, b, c, c, c, c, c, d\}$

H. PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN

Himpunan dapat digunakan dalan seleksi citra digital. Citra digital dapat digambarkan sebagai suatu matriks yang elemennya berupa *pixel*. Bentuk matriks ini yang diubah ke bentuk himpunan (koordinat dari *pixel* dan dari citra digital dianggap sebagai elemen himpunan tersebut). Elemen tersebut juga dapat memberikan informasi tentang warna. Hal ini juga memanfaatkan operasi sederhana pada himpunan. Hal ini dibahas oleh Edwin Zaniar Putra dalam artikelnya yang berjudul "Pemanfaatan Himpunan Dalam Seleksi Citra Digital".

Teori himpunan juga dapat digunakan dalam menganalisis akord dalam musik. Hal ini dilakukan dengan mengkonstruksikan setiap akord ke dalam Z_{12}. Dengan menggunakan operasi penjumlahan pada himpunan maka akan dapat ditentukan himpunan pembentuk dari setiap akord yang diberikan. Hal ini dibahas oleh Kalep Jepunege Silitongadalam tulisannya yang berjudul "Aplikasi Teori Himpunan dan Grup untuk menganalisis akord dalam musik".

Teori himpunan juga dapat digunakan dalam menetapkan FBP dan KPK dari suatu bilangan bulat. Hal ini dapat dilakukan berdasarkan himpunan pembagi bilangan bulat. Misalkan himpunan pembagi suatu bilangan bulat adalah himpunan A untuk bilangan bulat a, dan himpunan B untuk bilangan bulat b, maka

$$FPB(a, b) = AB \text{ dan } KPK(a, b) = \frac{a.b}{FPB(a,b)}$$

Hal ini dibahas oleh Mijdan dalam tulisannya yang berjudul "Penerapan Teori Himpunan dalam menetapkan FPB dan KPK bilangan bulat".

I. LATIHAN

1. Diketahui $A = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $C = \{2,4,6,8,12,16\}$. Tentukan hasil operasi himpunan $(A \cup C) \cap (B \cup C)$!
2. Diketahui $A = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $C = \{2,4,6,8,12,16\}$. Tentukan hasil operasi himpunan $(A \cap B) \cup (B \cap C)$!
3. Diketahui $A = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $C = \{2,4,6,8,12,16\}$. Tentukan hasil operasi himpunan $(A - B) \cup (B - C)$!
4. Diketahui $A = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $C = \{2,4,6,8,12,16\}$. Tentukan hasil operasi himpunan $(A \oplus B) \cup (B - C)$!
5. Mahasiswa program studi matematika semester 1 berjumlah 135 orang. Jika A dalah himpunan mahasiswa laki laki yang berjumlah 89 orang dan B adalah himpunan mahasiswa perempuan, C adalah himpunan mahasiswa laki-laki yang mengendarai sepeda motor, D himpunan mahasiswa perempuan yang suka main tenis meja. S adalah himpunan seluruh mahasiswa program studi matematika semester 1. Maka tentukanlah:
   a) Apakah anggota himpunan A merupakan anggota pada himpunan S?
   b) Apakah anggota himpunan B merupakan aggota pada himpunan S?
   c) Apakah anggota himpunan C merupakan aggota pada himpunan S?

d) Apakah anggota himpunan D merupakan aggota pada himpunan S?

e) Apakah anggota himpunan A merupakan anggota pada himpunan C?

f) Apakah anggota himpunan B merupakan anggota pada himpunan D?

6. Misalkan $S = \{l, o, v, e, s, t, r, y, c, i, a, f, z, n\}$,
$A = \{l, o, v, e\}, B = \{s, t, o, r, y\}, C = \{c, a, f, e\}$.

a) Buatlah Diagran Venn untuk himpunan di atas.

b) Nyatakan jumlah yang hanya anggota himpunan A

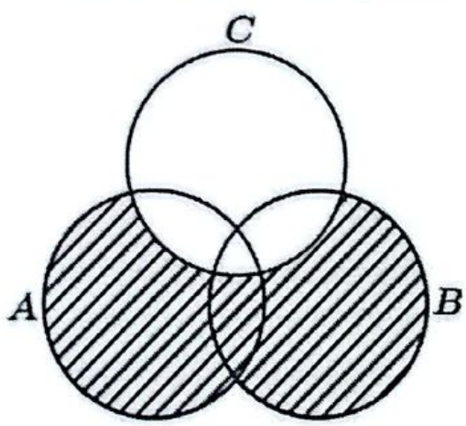
c) Nyatakan jumlah yang hanya anggota himpunan B

d) Nyatakan jumlah yang hanya anggota himpunan C

e) Nyatakanlah jumlah yang bukan anggota himpunan A, B dan C

7. Jika A adalah himpunan huruf yag terdapat pada kata "CATATAN", maka tentukanlah banyak himpunan bagian dari himpunan A.

8. Nyatakan daerah yang diarsir pada diagram Venn di bawah ini dalam bentuk himpunan.

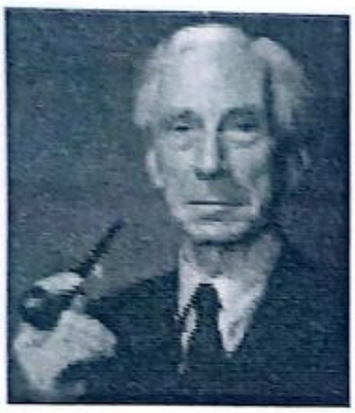


9. Hasil dari suatu survei yang dilakukan kepada 300 orang mahasiswa suatu perguruan tinggi menyatakan bahwa 75 orang mahasiswa memiliki mobil sebagai alat transportasi, 180 memiliki sepeda motor. Jika ternyata ada 90 orang yang tidak memiliki mobil maupun sepeda motor, maka tentukanlah:

BAB

II

LOGKA MATEMATIKA



Bertrand Arthur William Russell

Bertrand Arthur William Russell adalah seorang ahli matematika, filsuf, ahli Sejarah, dan ahli Logika. Merupakan putra dari pasangan Viscount Amberly dan Katherine. Sang ayah merupakan putra dari Lord John Russell, perdana menteri yang menjabat selama dua periode pada masa pemerintahan Ratu Victoria. Sementara sang ibu adalah putri kedua dari Baron Stanly. Dilahirkan pada tanggal 18 Mei 1872 di Trellech, Mountmouthshire, Inggris. Menikah dengan Alays Pearsall Smith pada 13 Desember 1894. Pernikahannya berakhir pada tahun 1921 dan menikah kembali dengan Dora Black dan memiliki 3 orang anak. Meninggal pada 2 Februari 1970 di Wales.

Awal pendidikan Russell dilakukan dengan mengundang guru secara *private* sebelum masuk *Trinity College Cambridge* untuk mempelajari matematika dan sains moral pada tahun 1890. Lulus pada tahun 1893 dan beberapa bulan kemudian diangkat menjadi atase kedutaan Inggris di Perancis. Pada tahun 1901, Russell mengungkapkan apa yang kemudian dikenal sebagai paradoks Russell (Russell Paradox), yang muncul dalam karyanya. *Principle of Mathematics* (1910).

A. SEJARAH LOGIKA

Salah satu hal yang membedakan manusia dengan makhluk Allah yang lainnya adalah adanya aktifitas berfikir yang dimiliki oleh manusia. Kenyataan inilah yang menyebabkan munculnya istilah manusia adalah hewan yang berpikir (*al-insanu khayawan al-nathiq*). Berdasarkan kisah sejarah Zeno dari Citium (340-265 SM), tokoh Stoa adalah orang pertama yang menggunakan istilah logika.

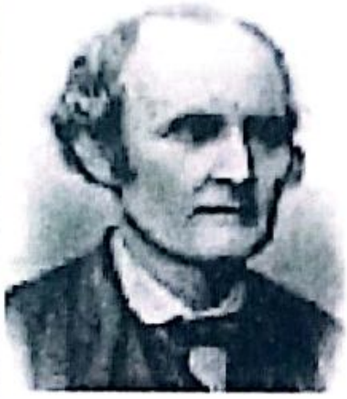
Sokrates (470-399 SM) mengemukakan suatu metode yang dikenal dengan metode Sokrates yang dikemukakan melalui "*ironi dan maieutika de facto*". Metode ini mengembangkan konsep metode induktif. Metode ini mengumpulkan kasus dan peristiwa yang konkrit kemudian dicari keumumannya. Aristokles (428-374 SM) yang dikenal juga dengan Plato mengembangkan metode Sokrates menjadi teori ide yang dikenal dengan teori *Dinge an Sich* versi Plato. Menurut Plato, ide adalah model yang bersifat umum dan sempurna yang disebut *prototype* dan benda hanyalah bentuk tiruan yang tak sempurna yang disebut dengan *ectypa*. Gagasan Plato ini menjadi dasar dfari perkembangan logika.

Logika ilmiahnya baru terwujud dengan karya Aristoteles (384-322 SM) disebut "*To Oraganon*" yang dikembangkan oleh muridnya yang bernama Andronikos yang berasal dari Rhodos. Buku ini memuat *Kategoriat* (logika, istilah dan prediksi), *Peri Hermeneias* (logika proposisi), *Analytica Protera* (silogisme dan pemikiran), *Analytica Hystera* (pembuktian), *Topica* (metode berdebat) dan *Peri Sophistikoon* (kesalahan berpikir). Pada buku ini, aristoteles mengurai masalah kategori, struktur bahasa, hukum formal konsistensi, silogisma kategoris, pembuktian ilmiah, perbedaan atribut hakiki dan bukan hakiki sebagai satu kesatuan pemikiran yang sudah mulai menyinggung bentuk logika.

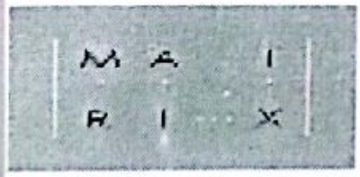
BAB

III

MATRIKS, RELASI dan FUNGSI



Arthur Cayley (1821-1895 M)



Arhur Cayley !1821-1895 M) adalah seorang matematikawan berkebangsaan Inggris. Lahir 16 Agustus 1821 dan wafat 26 Januari 1895). Kuliah pada tahun 1838 di Trinity Collage, berhasil menamatkan kuliah dalam waktu 3 tahun. Hobinya adalah membaca novel Jane Austin, Byron, Thackeray dan Shakespeare. Mengawali karirnya sebagai pengajar di Cambridge sambil melanjutkan studinya dan menghasilkan dua puluh delapan karya di *Cambrige Mathematical Journal*. Karyanya bergaya Laplace dan Langrange. Setelah habis kontrak di Cambridge, menjadi tutor di *Fellow of Trinity*. Sebenarnya dia adalah mahasiswa jurusan hukum namun matematika adalah bakat alamiahnya. Pada usia 17 tahun berhasil menemukan matriks dan dinobatkan sebagai penemu matriks dalam matematika. Teoremanya dikenal dengan Teorema Cayley. Tahun 1862 diterima sebagai pengajaar di Cambridge dibidang matematika murni.

A. SEJARAH MATRIKS, RELASI DAN FUNGSI

Arthur Cayley (1821-1895) adalah seorang ahli matematika yang pertama sekali menemukan rumus matriks. Teorema yang terkenal adalah teorma Cayley. Matriks pertama sekali dikenalkan pada tahun 1859 di Inggris dalam studi sistem persamaan Linier dan Transformasi Linier. Tahun 1925 matriks digunakan pada mekanika kuantum. Konsep determinan matriks untuk pertamakalinya diperkenalkan oleh matematikawan asal Jepang Seki Takakazu pada tahun 1683. Bukunya berjudul *Method of Solving the Dissimulated Problems* yang memuat metode matriks. Namun pada saat itu Seki belum menggunakan istilah determinan matriks, Seki memperkenalkan cara menemukan determinan untuk matriks 2×2, 3×3, 4×4 dan 5×5. Kemudian diteruskan oleh Leibniez.

Pada tahun 1730 Maclaurin menulis buku berjudul *Triatise of Algebra* yang memuat aturan Cramer untuk matriks 2×2 dan 3×3 namun bukunya baru diterbitkan pada tahun 1748. Cramer pada tahun 1750 memperjelas konsep determinan pada bukunya yang berjudul *Introduction to The Analysis of Algebraic Curve* yang memaparkan tentang aturan umum pada aturan Cramer untuk matriks $n \times n$. Metode menghitung determinan ini dilanjutkan oleh Benzout pada tahun 1764 dan Vandermonde pada tahun 1771. Pada tahun1772, Laplace memperkenalkan aturan ekspansi Laplace dengan menambahkan resultan pada determinan. Istilah determinan diperkenalkan pertamakali oleh Gauss dalam bukunya *Disquistiones Arithmaticae* pada tahun 1801. Pada buku tersebut dibahas tentang bentuk-bentuk kuadrat dengan determinan. Pada tahun 1812, Cauchy memperkenalkan istilah eliminasi Gauss. Dia merintis konsep "***minor***" dan "***adjoint***" serta hasil kali matriks.

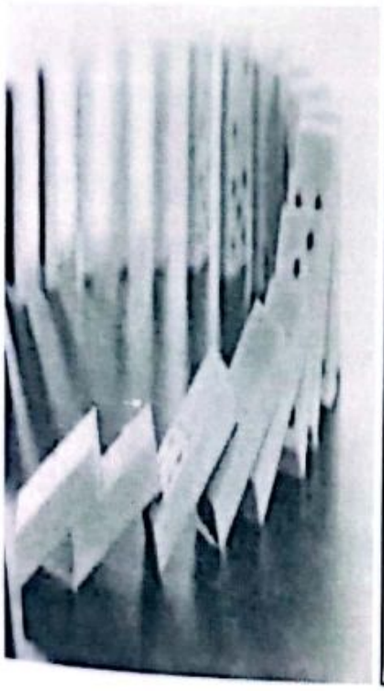
Konsep fungsi merupakan salah satu konsep paling penting dalam matematika. Newton (1642-1721) menunjukkan

BAB

IV

INDUKSI MATEMATIKA

Augustus De Morgan
(1806-1871M)



Augustus De Morgan (1806-1871M), seorang matematikawan berkebangsaan Inggris, lahir 20 Juni 1860 di Madras (India). Pada usia 7 tahun pindah ke Inggris. Pendidikan awalnya adalah sekolah privat. Selama masa sekolah menengah dibimbing oleh seorang guru dari Oriel College, Oxford. Tahun 1823 melanjutkan studinya ke Trinity College, Cambridge. Gelar sarjananya di bidang sains, master di bidang theologi. Augustus De Morgan terlibat aktif dalam mempromosikan ahli matematika Ramchundra yang berasal dari India yang merupakan seorang juru taksir otodidak. Pada tahun1837 menikah dengan Shopia Elizabeth, memiliki 3 orang anak laki-laki dan 4 orang anak perempuan. Salah satu anaknya Mary de Morgan terkenal sebagai seorang penulis. De Morgan berkolaborasi dengan Wiliam Hamilton selama 25 tahun tentang hal-hal yang berhubungan dengan matematika dan permasalahan umum lainnya. De Morgan juga berkontribusi di bidang filsuf di Cambridge dengan menghasilkan 4 karya tentang logika. Karya terbaiknya di bidang Aljabar "*Trigonometry and Double Algebra*" terbit tahun 1849 dengan karya berjudul "*Budget of Paradoxes*". Menemukan aljabar hubungan melalui karya "*Syllabus of a Proposed System of Logic*", terbit tahun 1860. Dia membuat kerangka dari Hukum De Morgan dan pencipta istilah matematika induktor. Kata induktor ini pertama kalinya digunakan pada artikel "*Induction*" (matematika) yang diterbitkan oleh Penny Cyclopedia yang dikenal dengan jurnal dari "*Society for the Diffusion of Useful*

A. SEJARAH INDUKSI MATEMATIKA

Al-Karaji sekitar 1000 M, menggunakan induksi dalam membuktikan teorema binomial dan sifat segitiga pascal, begitu juga seorang ilmuwan Yunani kuno menggunakannya untuk menyatakan sifat bilangan prima yang tak terbatas. Namun hal tersebut masih secara implisit. Tahun 1005 M ilmuwan Perancis, Blaise Pascal, membuktikannya secara eksplisit dalam bukunya yang berjudul "*Traite Du Triangle Arithmatique*". Selanjutnya diperkenalkan melalui artikel "*Induction*" dalam Jurnal *Penny Cyclopedia* pada tahun 1838 oleh Augustus de Morgan (1806-1871). Prinsip induksi matematika ini dijadikan ke dalam lima aksioma pada tahun 1889 oleh Richard Dedekind dan Giuseppe Peano (1858-1932). Peano memperbaiki aksioma tersebut dan memberikan interpretasi logis. Semua aksioma tersebut kita kenal dengan Postulat Peano.

B. PENGERTIAN

Induksi matematika merupakan salah satu metode pembuktian yang baku dalam matematika yang dapat digunakan untuk menyatakan suatu bilangan bulat. Induksi matematika dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian. Induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan tentang berbagai objek diskrit yang luas. Misalnya dalam membuktikan hasil tentang kompleksitas algoritma, pembetulan tipe program komputer, teorema tentang graph dan tree. Induksi matematika bukanlah metode yang digunakan untuk merumuskan suatu masalah tertentu, tetapi digunakan dalam hal membuktikan dan memeriksa suatu rumus atau pernyataan sehingga bisa diketahui kebenarannya. Oleh karena itu, induksi matematika ini tidak dapat kitaa gunakan dalam penurunan rumus.

Contoh pernyataan matematika yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika adalah sebagai berikut.

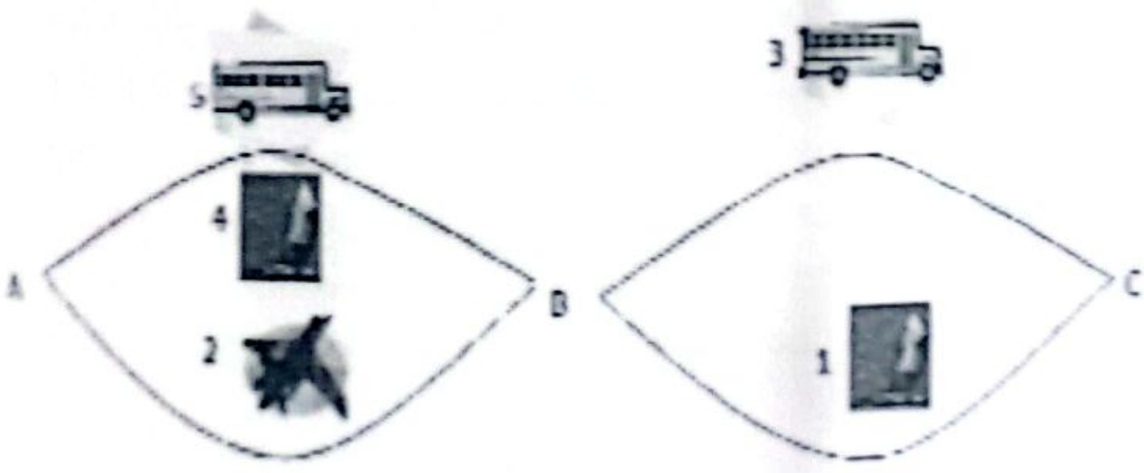
BAB

V

KOMBINATORIAL

Percy Alexander MacMahon
(1854-1929)

Percy Alexander MacMahon seorang ahli matematika dilahirkan di Malta pada tanggal 26 September 1854 dan meninggal di Inggris pada tanggal 25 Desember 1929. MacMahon sekolah di Cheltenham. Masuk akademi militer kerajaan pada Februari 1871 di Woolwich sebagai kadet pria. Bertugas di India mulai tahun 1873. Dipromosikan menjadi Kapten tahun 1881, diangkat sebagai instruktur matematika pada Akademi Militer Kerajaan pada tahun 1882. Bergabung dengan *London Mathematical Society* tahun 1883. MacMahon terkenal dengan kajiannya dalam fungsi simetri dan perhitungan partisi. Menghasilkan Teorema Master MacMAhon dalam kombinatorik berangka dan aljabar linear tahun 1916.



A. SEJARAH KOMBINATORIAL

Matematika kombinatorial disebut juga dengan kombinatorik, merupakan bidang ilmu matematika yang berhubungan dengan masalah memilih, mengatur dan operasi dalam sistem diskrit (terbatas). Perihal kombinatorial yang menarik pada awalnya muncul dalam sebuah buku berbahasa Mandarin I Ching pada abad ke-12 SM. Pada abad ke-17 Blaise Pascal dan Pierre de Fermat, berkebangsaan Perancis mengemukakan hasil kombinatorial klasik. Istilah kombinatorial untuk pertama kalinya digunakan dalam matematika modern oleh seorang filsuf dan matematikawan berkebangsaan Jerman bernama Gottfried Wilhelm Leibniz dalam karyanya "*Dissertatio de Arte Combinatorial*". Kemudian dikembangkan selanjutnya oleh Leonhard Euler seorang ahli matematika berkebangsaan Swiss pada abad ke 18. Buku kombinatorial diterbitkan juga oleh ahli matematika Jerman Eugen Netto pada tahun 1901 sebagai buku teks kombinatorial dengan judul *Lehrbuch der Combinatorik* dan ahli matematika Inggris Percy Alexander MacMahon (1915-1916) dengan bukunya Analisis Kombinatoris.

Lajunya perkembangan teori kombinatorial salah satunya adalah karena perkembangan teori statistik dan teori grafik. Aplikasinya mencakup *operational research*, kimia, mekanika statistik, dan masalah sosial ekonomi.

B. PENGERTIAN KOMBINATORIAL

Kombinatorial adalah cabang matematika yang digunakan untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya. Kajian ini cukup menarik, salah satu contoh permasalahan yang diselesaikan menggunakan kombinatorial adalah menghitung banyaknya kombinasi angka nomor polisi sebuah mobil yang terdiri dari 5 angka dan diikuti 2 huruf dan angka pertama bukan

BAB

VI ALJABAR BOOLEAN

George Boole
(1815-1861).

George Boole lahir di Lincoln, Inggris pada tanggal 2 November 1815. Menikah dengan Mary Everest pada tahun 1849. Umur 16 tahun mengajar di sekolah Heigham di Doncaster. Pada usia 19 tahun memiliki sekolah sendiri di Lincoln. Dia seorang matematikawan yang menginspirasi dan menciptakan logika deduktif. Merupakan pengajar terbaik di *Institut Mechanic*. Pada usia 24 tahun berhasil memenangkan medali emas dari *Royal Society* sebagai matematikawan melalui tulisan pertamanya: *Research on The Theory of Analitical Transformation*". Pada tahun 1844, menemukan cara menggabungkan aljabar dengan kalkulus. Pada tahun 1847 memperkenalkan simbol logika modern melalui bukunya "*The Mathematical Analysis of Logic*". Karya lainnya adalah: "*On General Method of Analysis*", "*Treatise on Calculus of Finite Differences*", "*An Investigation of The Law of Thought Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* yang diperkenalkan tahun 1854 yang merupakan salah satu karya terbaik Boole. Pada tahun 1857 menerima beasiswa di *Royal Society* dan penghargaan dari University of Dublin and Oxford. Kontribusi lainnya adalah "Aljabar Boolean" dan "Logika Boolean". Sistem Boole didasarkan pada pendekatan biner. Boole juga menemukan bentuk tata bahasa aljabar dengan penggunaan "dan", "atau", serta "bukan". Meninggal dunia pada tanggal 8 Desember 1864.

A. SEJARAH ALJABAR BOOLEAN

Aljabar Boole (Boolean Algebra) diperkenalkan pada tahun 1854 oleh seorang matematikawan asal Inggris bernama George Boole (1815-1864). Tulisannya yang terkenal adalah "*The Law of Thought*" yang ditebitkan pada tahun 1854 yang berisikan konsep aljabar boolean. Pada tahun 1938 seorang ahli komunikasi Claude Shannon menggunakan dan menyempurnakan konsep tersebut. Clade Shannon menunjukkan cara menganalisis dan merancang sirkuit logika digital menggunakan persamaan aljabar dengan pendekatan konsep aljabar boolean. Pada saat ini, aljabar boole tidak hanya digunakan dalam logika akan tetapi juga pada teori peluang atau kemungkinan, teori informasi atau komunikasi, teori himpunan dan lainnya. Aljabar boole juga dapat digunakan dalam merancang komputer elektronik dengan menerjemahkan ke dalam rangkaian saklar (*switching circuit*}.

B. PENGERTIAN ALJABAR BOOLEAN

Aljabar Boolean adalah ilmu matematika yang berhubungan dengan variabel biner dan operasi logik. Aljabar boole merupakan aljabar yang terdiri atas suatu himpunan dengan dua operator biner + (penambahan) ekivalen dengan $\vee$ (OR) dan $\cdot$ (perkalian) ekivalen dengan $\wedge$ (AND) dan operator uner $'$ yang didefinisikan pada himpunan tersebut. misalkan 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari B maka, $\{B, +, ., ', 0, 1\}$ disebut aljabar boolean jika memenuhi aksioma (Postulat Huntington) berikut:

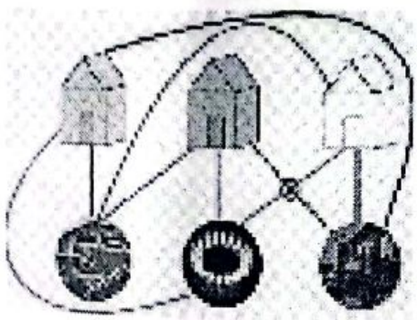
1. Identitas
   a) $a + 0 = a$
   b) $a \cdot 1 = a$
2. Komutatif
   a) $a + b = b + a$
   b) $a \cdot b = b \cdot a$

BAB

VII DASAR-DASAR TEORI GRAPH

Leonhard Euler
(1707-1783)

Leonhard Euler adalah seorang matematikawan dan Fisikawan yang berasal dari Swiss. Lahir 15 April 1707 di Swiss dan meninggal 18 September 1783 di Rusia. Ayahnya seorang Pastur Calvinisme bernama Paul Euler dan ibunya bernama Marguerite Brucker. Mendaftar di Universitas Basel pada usia 13 tahun dan menerima gelar master of Philosophy pada tahun 1723 dengan disertasi yang membandingkan filsafat dari Descarte dan Newton. Pada usia 24 tahun Euler sudah mendapatkan gelar profesor Fisika Akademi. Pada tahun 1731 menjabat sebagai direktur departeman matematika Akademi. Euler menemukan penemuan penting di bidang kalkulus dan teori graf. Menikah dengan Katarina Gsell dan memiliki 13 orang anak. Di antaranya adalah Johan Euler yang merupakan anggota akademi Berlin karena pengetahuannya yang menonjol di bidang matematika dan astronomi. Karya Euler di antaranya adalah "Pengantar dalam Analisis Infinitorum (1748) dan Lembaga Kalkulus Differentialis (1755). Euler adalah orang pertama yang mengusulkan bahwa hasil dari beberapa operasi adalah fungsi jika nilai pertama tergantung pada nilai kedua. Dia juga memperkenalkan "number Euler" yang menghubungkan fungsi logaritmik Jon Napier dan fungsi eksponensial. Euler menetapkan penggunaan "angka-*e*" dengan nilai 2.71828



A. SEJARAH SINGKAT TEORI GRAPH

Teori Graph diperkenalkan pada tahun 1736 oleh Euler, digunakan dalam pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* yang sangat terkenal di Eropa. Tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824 – 1887) berhasil mengembangkan teori pohon (*Theory of Trees*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Coyley (1821 – 1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan permasalahan kimia yaitu hidrokarbon. Pada masa inilah lahir teori bahwa untuk mewarnai atlas cukup hanya menggunakan 4 warna sehingga tiap negara yang berbatasan akan memiliki warna yang berbeda.

Pada tahun 1859, Sir W.R. Hamilton berhasil menemukan permainan yang terbuat dari kayu yang berbentuk dodecahedron beraturan (polihedron dengan 12 sisi dan 20 sudut) yang setiap sisinya berbentuk sebuah pentagon beraturan dan tiap sudut dibentuk oleh 3 sisi yang berbeda. Pada tahun 1920 Konig berupaya mengumpulkan pemikiran para ahli matematika tentang teori graph dan kemudian menerbitkannya dalam sebuah buku pada tahun 1936.

B. PENGERTIAN DASAR TEORI GRAPH

Suatu graph $G = (V, E)$ terdiri dari sekumpulan objek $V = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ yang dikenal sebagai himpunan titik (*vertex*/simpul), dan himpunan $E = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ yang dikenal sebagai himpunan sisi (*edges*). Terdapat suatu sisi e_k yang dihubungkan ke simpul v_i, v_j. Simpul v_i, v_j yang terhubung dengan sisi e_k disebut sebagai simpul ujung dari sisi e_k. Direpresentasikan dalam bentuk diagram, simpul dinyatakan dalam bentuk noktah dan sisi dinyatakan dalam bentuk garis. Dapat dilihat pada contoh berikut.

DAFTAR PUSTAKA

Grimaldi, Ralph P., 2003. *Discrete and Combinatorial Mathematics 5th Ed: An Applied* Introduction. Pearson Addison Wesley

Johnsonbaugh, R., 2001. *Discrete Mathematics 5th Edition.* Prentice Hall *International*

Liu, C. L., 1986. *"Elements of Discrete Mathematics"*, New York: McGraw Hill.

Rinaldi Munir, 2010. *Matematika Diskrit*. Jakarta:Informatika

Rosen, Kenneth H., *Discrete Mathematics and Its Applications 5th Ed.* New York: McGrawHill.

Seymour Lipschutz and Marc lipson, 2007. *Discrete mathematic, Third edition Schaum's OutLines.* The Mcgraw-Hill Companies.

Suryadi H. S., 1994. *"Pengantar Struktur Diskrit"*, Jakarta: Universitas Gunadarma.

PROFIL PENULIS

Dr. Rina Filia Sari, M.Si.

Lahir di Bukittinggi, Sumatera Barat pada tanggal 01 Maret 1977. Pendidikan S1 didapatkan di Fakultas Matematika dan Imu pengetahuan Alam Jurusan Matematika Universitas Sumatera Utara, tamat tahun 2000. Pada tahun 2009 melanjutkan pendidikan S2 di Program Magister Matematika di Universitas Sumatera Utara, tamat tahun 2009. Menyelesaikan Program Doktor di Universitas Sumatera Utara pada Program Doktor Matematika pada tahun 2016.

Saat ini bertugas sebagai dosen pada Universitas Islam Negeri Sumatera Utara Medan. Mengampu matakuliah Matematika Diskrit sejak tahun 2005.

Buku-buku yang pernah ditulis diantaranya adalah "Matriks dan Transformasi Linier" pada tahun 2017 dan "Matematika Diskrit dan Ayat Al-Qur'an" pada tahun 2021. Penulis aktif dalam organisasi kelimuan diantaranya IndoMs dan ADMAPETA.

Buku Ajar Matematika Diskrit dan Terapannya

Buku Ajar "Matematika Diskrit dan Terapannya" ini terdiri dari 7 bab. Poin-poin utama yang tercakup dalam buku ini yaitu:

1. Dasar Teori Himpunan: membahas mengenai sejarah, jenis- jenis, operasi, dan sifat-sifat pada himpunan.
2. Logika Matematika: menjelaskan tentang pengertian, operasi pada logika, tabel kebenaran, hukum-hukum logika, dan penerapan konsep logika.
3. Matriks, Relasi, dan Fungsi: membahas tentang jenis-jenis matriks, operasi hitung matriks, relasi, sifat-sifat relasi biner, dan penerapan konsep matriks, relasi, dan fungsi.
4. Induksi Matematika: menjelaskan tentang pengertian induksi matematika, prinsip-prinsip, dan penerapan prinsip induksi matematika.
5. Kombinatorial: membahas mengenai sejarah kombinatorial, pengertian, kaidah dasar menghitung, prinsip inklusi-eksklusi, permutasi, kombinasi, dan penerapan prinsip kombinatorial.
6. Aljabar Boolean: membahas tentang fungsi boolean, prinsip dualitas, rangkaian logika, penjumlahan dan perkalian dua fungsi, dan penyederhanaan fungsi boolean.
7. Dasar-Dasar Teori Graph: menjelaskan sejarah, konsep dasar, jenis-jenis graph, dan aplikasinya.

Penerbit Cakrawala Satria Mandiri
Email: redaksi.satria@gmail.com
www.cakrawalasatria.co.id
Anggota IKAPI

CAKRAWALA SATRIA MANDIRI

ISBN 978-623-8786-62-6
9 786238 786626