BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika

Model Matematika adalah salah satu pendekatan yang bisa digunakan untuk menjelaskan kasus yang terjadi didunia nyata serta menemukan penyelesaiannya (Manaqib *et al*, 2019). Masalah penyebaran penyakit menular juga dapat dimodelkan kedalam pemodelan matematika yang disebut model epidemi. Ada beberapa jenis model matematik dengan pendekatan yang dikategorikan menjadi empat model yaitu:

a. Model Empiris

   Model empiris merupakan data yang berhubungan dengan kasus menentukan peran yang penting. Dalam pendekatan ini, gagasan yang utama adalah mengkontruksi formula atau persamaan matematika yang dapat menghasilkan grafik yang terbaik untuk mencocokan data.

b. Model Simulasi

   Model simulasi merupakan model matematika yang dituliskan didasarkan pada aturan - aturan. Simulasi model matemtaika ini dijalankan terhadap waktu sehingga implikasi interaksi dari berbagai variabel dan komponen yang dikaji dan diuji.

c. Model Deterministik

   Model deterministik adalah model matematik yang berfungsi untuk menyelesaikan kasus dalam keadaan yang pasti. Parameter yang dibuat dalam model deterministik bernilai konstata. Pada model epidemi pola penyebarannya berupa fungsi tertentu. Bila dalam inputannya, suatu model tidak memakai variabel random maka model simulasinya yaitu model simulasi deterministic (Aprilia *et al*, 2019).

d. Model Stokastik

Model stokastik berfungsi untuk menyelesaikan suatu kasus yang bersifat tidak pasti atau random. Nilai parameter pada model stokastik tidak pasti karena menggunakan nilai probabilitas. Peluang dari masing-masing kejadian pada model stokastik bisa dihitung sehingga disebut juga sebagai model probabilitas. Model stokastik pada epidemi memiliki pola penyebaran bersifat random serta mempunyai fungsi probabilitas tertentu. Apabila ada satu atau beberapa variabel random maka model simulasi stokastik dimana hasil akhirnya berupa *output* yang random (Banks *et al*, 2001).

2.2 Teori Dasar Peluang

2.2.1 Ruang Sampel

Ruang sampel merupakan himpunan semua hasil (*outcome*) yang bisa jadi dari suatu eksperimen (percobaan). Tiap hasil dari ruang sampel disebut titik sampel ω (omega kecil). Notasi ruang sampel dilambangkan S dan contohnya sebagai berikut:

$$S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

Untuk menghitung panjang kelas dalam ruang sampel, dapat dilakukan dengan cara membagi range dengan banyaknya kelas. Panjang kelas dapat didefinisikan sebagai berikut (Suryandaru, 2015):

$$c = \frac{Range}{Banyaknya \quad Kelas}$$

2.2.2 Kejadian

Kejadian adalah ruang sampel dari bagian himpunan. Notasi kejadian dilambangkan dengan A dan contohnya sebagai berikut (Sugiyarto, 2021) :

$$S = (A, B, C, \ldots)$$

2.2.3 Peluang

Peluang adalah hasil percobaan statistika yang dapat diulang dengan kondisi yang sama tetapi hasilnya (*outcome*) belum tentu sama. Peluang dinotasikan dengan P. Misalkan kejadian A terjadi dalam m cara dari seluruh n cara yang mungkin terjadi dan masing - masing n cara itu mempunyai kesempatan yang sama untuk muncul, maka peluang kejadian A ditandai dengan $P(A)$, yang diperoleh dengan:

$$P(A) = \frac{n(A)}{N(S)} = \frac{m}{n} \tag{2.1}$$

dimana,

$P(A)$ = Peluang munculnya suatu kejadian A

$n(A)$ = Banyaknya anggota dalam kejadian A

$N(S)$ = Banyaknya anggota seluruh kejadian

Jika kejadian A pada ruang sampel Ω/S, bilangan real $P\{A\}$ terdefinisi dan memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $0 \leq P\{A\} \leq 1$ (non-negatif)
2. $P\{S\} = 1$
3. Setiap barisan kejadian $A_1, A_2, \ldots$ yang saling lepas $A_n A_m = \emptyset$ dengan $n \neq m$, maka:

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n\} \tag{2.2}$$

Ada beberapa aturan yang berlaku dalam teori peluang sebagai berikut (Sugiyarto, 2021):

1. $P\{A^c\} = 1 - P\{A\}$
2. $P\{A - B\} = P\{A\} - P\{A \cap B\}$
3. Jika $A \subset B$ maka $P\{A\} = P\{B\}$
4. $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$

Peluang terjadinya B jika peristiwa lain diketahui A yang telah terjadi disebut peluang bersyarat dan ditentukan oleh $P(B|A)$ dibaca sebagai "peluang terjadinya B jika A terjadi" atau singkatnya "peluang B, jika A diketahui". Jika A dan B adalah S, maka peluang bersyarat B jika A diketahui didefinisikan sebagai:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, dengan P(B) > 0 \tag{2.3}$$

Jika peristiwa A dan B dapat terjadi pada waktu yang sama, maka:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot (A|B) \tag{2.4}$$

Berdasarkan kaidah pengadaan umum, jika dalam suatu percobaan kejadian-kejadian $A, A_2, A_3, \ldots, A_k$ dapat terjadi, maka (Walpole, 1993):

$$\begin{aligned} &P\{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\} \\ &= P\{A_1\} P\{A_2|A_1\} P\{A_3|A_1 \cap A_2\} \ldots P\{A_n|A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.3 Variabel Acak dan Distribusi Poisson

2.3.1 Variabel Acak

Variabel acak adalah suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel. Variabel acak di notasikan dengan huruf kapital, sedangkan nilainya di notasikan dengan huruf kecil. Misalkan E adalah eksperimen dengan ruang sampel S. Variabel acak didefinisikan sebagai fungsi S yang memetakan setiap anggota $s \in S$ ke bilangan real $X(s)$.

Jika ruang sampel berisi sejumlah titik sampel atau kumpulan anggota terbatas, jumlah anggota sama dengan bilangan bulat (dihitung), maka variabel acak yang ditentukan dalam ruang sampel tersebut adalah variabel acak diskrit (Herrhyanto Nar, 2009). Jika ditentukan interval $(a, b](a < b)$ pada R maka peluangnya adalah

$$P(a < X \leq b) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (a, b]\} \tag{2.6}$$

Distribusi peluang atau distribusi sederhana pada variabel acak X didefinisikan untuk setiap bilangan real x oleh:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\} \tag{2.7}$$

keterangan:

$F_x(x)$ = Fungsi distribusi kumulatif dari variabel x

$P(X \leq x)$ = Probabilitas event

yang mana probabilitas variabel acak X kurang dari sama dengan x. Fungsi distribusi kumulatif $F_x(x)$ pada variabel acakX mengikuti:

1. $F_x(x)$ monoton naik dan $0 \leq F_x(x) \leq 1$
2. $F_x(x)$ kontinu kanan, $\lim\limits_{h=0} F_x(x+h) = F_x(x)$

3. $\lim\limits_{x=0} F_x(x) = 1$ dan $\lim\limits_{x=0} F_x(x) = 0$

variabel acak X dikatakan diskrit jika semua nilai yang mungkin diatas dapat dihitung atau diubah, untuk variabel acak diskrit, fungsi peluang $p_x(x_1)$ didefinisikan oleh

$$p_x(x_1) = P\left(X = x_1\right) = P\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_1\right\} \tag{2.8}$$

Dimana $p_x(x_1) \geq 0, i = 1, 2, 3, \ldots$ dan $\sum_{i=0}^{\infty} p_x(x_1) = 1$. Kemudian distribusi pada variabel acak diskrit X adalah

$$p_x(x_1) = P\left\{X \leq x\right\} = P\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\right\} = \sum\nolimits_{y \leq x} p_x(y) \tag{2.9}$$

keterangan:

$p_x(x_1)$ = Fungsi massa probabilitas (PMF)

Dimana,

$$F_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \tag{2.10}$$

Ekspetasi variabel acak X diskrit,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_x(x_i) \tag{2.11}$$

keterangan:

$E(X)$ = Ekspetasi dari variabel acak X

Sehingga variansi variabel acak X

$$\begin{aligned}
\text{var}(x) &= E\left((X - E(X))^2\right)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 dF_x(x)dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(X) + E(X)^2) dF_x(x)dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_x(x)d - 2E(X)\int_{-\infty}^{\infty} x dF_x(x)dx + E(X)^2\\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2\\
&= E(X^2) - 2E(X) + E(X)^2\\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Maka, meannya adalah $E(X)$ dan standar deviasinya adalah akar positif dari variansi $\left(\sqrt{V(x)}\right)$. Bentuk standar variabel acak Y ke X didefinisikan

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{var}(x)}} \tag{2.13}$$

dimana $E(Y) = 0$ dan $V(Y) = 1$

Bentuk umumnya yaitu:

$$\begin{aligned} E\left(X^n\right) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n fx(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF_x(x)dx, n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$E\left((X - E(X))^n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E\left(X\right)\right)^n dF_x(x)dx \tag{2.15}$$

$$a_n = \frac{E(X - E(X)^n)}{\sqrt{V(x)}^n}, n = 1, 2, 3, \ldots(dimensimomen) \tag{2.16}$$

Fungsi karakteristik variabel acak X didefinisikan

$$\phi_x\left(u\right) = E\left(e^{iuX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuX} dF_x\left(x\right)dx, i = \sqrt{-1} \tag{2.17}$$

Momen ke n pada variabel acak X

$$E\left(X^n\right) = i^{-n} \left.\frac{d^n \phi_n(u)}{du^n}\right|_{u=0} \tag{2.18}$$

Fungsi Pembangkit Momen / MGF (*Moment Genereting Function*) (Sugiyarto, 2021):

$$M_x\left(\theta\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF_x(x)dx \tag{2.19}$$

2.3.2 Distribusi Poisson

Menurut Walpole (1995) distribusi Poisson atau juga disebut distribusi probabilitas diskrit adalah distribusi peluang acak Poisson bilangan X bernilai numerikyang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam selang waktu dan daerah tertentu. Selang waktu tersebut memiliki panjang waktu semenit, sejam, sehari, seminggu, sebulan, ataupun setahun. Sebagai contoh, pengamatan untuk peubah acak X menyatakan bahwa banyaknya suatu panggilan telepon perjam yang diterima suatu kantor, atau banyaknya pertandingan sepakbola yang diundur karena hujan selama musim hujan.

Distribusi poisson pertama kali ditemukan oleh Simeon D. Poisson (1781 - 1840), seorang ahli matematika dari bangsa Perancis. Distribusi Poisson adalah turunan dari distribusi binomial yaitu peristiwa penyebaran peristiwa yang melibatkan beberapa jumlah percobaan yang besar (n), dengan peluang sukses yang sangat kecil (p) (Supranto, 2009). Rataan (μ) dari banyaknya hasil adalah λt, dengan t menyatakan waktu. Distribusi peluang Poisson memiliki karakteristik sebagai berikut:

1. Banyaknya sukses terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu tidak terpengaruh oleh (bebas dari) apa yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpilih

2. Peluang terjadi suatu sukses (tunggal) dalam selang waktu yang amat pendek atau dalam daerah yang kecil sebanding dengan panjang selang waktu atau besarnya daerah dan tidak bergantung pada banyaknya sukses yang terjadi di luar selang waktu atau daerah tersebut

3. Peluang terjadinya lebih dari satu sukses selang waktu yang pendek atau daerah yang sempit tersebut dapat diabaikan

4. Percobaan yang dilakukan bersifat acak (Yerinzo *et al*, 2003)

Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi Poisson dengan parameter $\lambda > 0$, dilambangkan $X \sim$ Poisson (λ), jika X memiliki fungsi massa probabilitas (PMF) (Hidayati, 2018):

$$p(x) = \frac{(\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$$

dimana,

$p(x)$ = Nilai probabilitas distribusi Poisson

λ = Rata-rata banyaknya kejadian tiap satuan waktu

x = Banyaknya kejadian (variabel acak)

e = 2,71828 . . .

Distribusi Poisson mempunyai rata-rata dan standar deviasi sebagai berikut (Sugiarto *et al*, 2020):

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

dimana,

$\bar{X}$ = Rata - rata data

n = Jumlah data

X_i = Nilai x ke-1

s^2 = Standar deviasi

Overdispersi pada distribusi poisson terdapat asumsi yang harus dipenuhi, yaitu asumsi kesamaan rataan dan varians dari variabel acak atau disebut dengan ekuidispersi

2.4 Pengantar Stokastik

2.4.1 Proses Stokastik

Proses stokastik adalah himpunan peubah acak yang merupakan fungsi dari waktu atau sering disebut proses acak (Yerinzon *et al*, 2003). Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan proses menghitung (*counting process*) jika $N(t)$ atau N_t menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi selama waktu t. Kejadian random dapat dijelaskan dengan proses poisson didefinisikan secara tepat dan membuat sketsa proses poisson secara informal (Sugiyarto, 2021).

Proses stokastik didefinisikan sebagai proses kompilasi dan pengindeksan sekumpulan variabel acak $\{Ct, t \geq 0\}$, dengan indeks t berada dalam satu set T (Hillier, F. S & Lieberman, 2008). Oleh karena itu, T disebut ruang parameter atau ruang indeks $\forall \in t \in T$, di mana t adalah parameter bilangan bulat non-negatif yang mewakili fitur pengukuran yang kita amati pada waktu t. Himpunan variabel acak Ct dalam proses stokastik menggambarkan keadaan (*state*) sistem pada waktu t. Keadaan dalam posisi atau kondisi yang akan diklasifikasikan. Misalkan $\{Ct, t = 0, 1, 2, ..., T\}$ adalah serangkaian variabel acak dengan ruang keadaan himpunan berhingga. Jika $Ct = i, i \in Z+$, maka kita katakan bahwa proses di ?? berada pada keadaan t (Hillier *et al*, 2008).

Satu set variabel acak Ct dalam proses acak menggambarkan keadaan sistem pada waktu t. Keadaan (*State*) adalah lokasi atau status yang akan diklasifikasikan. Misalkan $\{Ct, t = 0, 1, 2, ..., T\}$ adalah serangkaian variabel acak dengan ruang keadaan himpunan berhingga. Jika $Ct = i, i \in Z+$ maka kita katakan bahwa proses di t berada pada keadaan i (Suryandaru, 2015).

2.4.2 Proses Markov

Di tahun 1906, ahli matematika Rusia, A.A. Markov adalah murid Chebysev, dia mengajukan teori korelasi variabel acak dalam proses acak, yang disebut proses Markov. Proses Markov adalah fenomena di mana peristiwa masa depan hanya dipengaruhi oleh masa kini dan bukan masa lalu. Proses Markov memiliki sifat jika diketahui nilai Ct maka Cs dimana $s > t$ tidak terpengaruh oleh Cu dimana $u < t$. (Rabiner *et al*, 1989). Proses stokastik $\{X_n, n \geq 0\}$ pada ruang keadaan S disebut *Discrette Time Markov Chain* (DTMC) jika,

$$P\left(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1}, ..., X_0\right) = P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right) \tag{2.20}$$

dimana,

X_{n+1} = Keadaan masa depan

X_n = Keadaan sekarang

Proses stokastik dinamakan sebagai suatu rantai (*chain*) jika state spacenya diskrit. $DTMC\left\{X_n, n \geq 0\right\}$ dikatakan waktu homogen jika untuk semua $n = 1, 2, 3, ...$

$$P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right) = P\left(X_1 = j | X_0 = i\right) \tag{2.21}$$

Probabilitas transisi satu langkah dinyatakan sebagai P_{ij}:

$$P_{ij} = \left(X_{n+1} = j | X_n = i\right), i, j = 1, 2, ..., N \tag{2.22}$$

Matriks transisi dari rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ dengan *state space* $S = 0, 1, 2,$ dari probabilitas transisi satu langkah P_{ij} dinyatakan dengan $P = P_{ij}$, atau ditulis:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nN} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

2.5 Rantai Markov Diskrit

Analisis Rantai Markov adalah teknik peluang yang dapat menganalisis pergerakan peluang dari satu keadaan ke keadaan lain. Proses stokastik $\{Ct : t \in N\}$ adalah rantai markov dengan waktu diskrit jika masing-masing $t \in N$ berlaku:

$$\Pr\left(Ct + 1 | Ct, Ct - 1, ..., C1\right) = \Pr\left(Ct + 1 | Ct\right) \tag{2.24}$$

keterangan:

C = Kejadian

Persamaan di atas dapat didefinisikan bahwa untuk rantai markov, distribusi bersyarat dari setiap keadaan masa depan $\{Ct + 1\}$ asalkan keadaan di masa lalu adalah $\{Ct - 1, ..., C1\}$ dan keadaan saat ini adalah $\{Ct\}$, tidak bergantung pada semua keadaan lampau dan hanya bergantung pada keadaan saat ini (kita mendefinisikan $C(t)$ sebagai kemunculan $\{C1, C2, ..., Ct\}$. Persamaan (2.24) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Pr\left(Ct + 1|C\left(t\right)\right) = \Pr\left(Ct + 1|\right) \tag{2.25}$$

Kuantitas terpenting yang terkait dengan rantai markov adalah peluang bersyarat yang disebut dengan peluang transisi (*transition probabilities*) dimana pada kasus rantai Markov homogen persamaannya adalah sebagai berikut (Zucchini *et al*, 2009):

$$\gamma ij = \Pr\left(Cn + 1 = j|Cn = i\right) \tag{2.26}$$

Untuk semua $i, j, n = \{1, 2, ...\}$. Nilai γij adalah elemen dari (1) yang merupakan *one-step transition probabilities matrix* (matriks peluang transisi satu langkah). Kita definisikan $\Gamma(1) = \Gamma$. Nilai γij merupakan peluang jika proses rantai Markov yang semula berada pada kondisi i, maka keadaan berikutnya ke kondisi j setelah satu langkah dan memenuhi syarat-syarat berikut (Hillier *et al*, 2008):

a. $\gamma ij \geq 0$, untuk semua $i, j = \{1, 2, 3, ..., m\}$

b. $\gamma ij = 1$, untuk semua $i = \{1, 2, 3, ..., m\}$

dimana m mewakili jumlah status dalam rantai markov, dan jumlah baris dalam matriks Γ sama dengan
$1.\Gamma\left(1\right) = \Gamma = \|y_{11}y_{12} \dots y_1my_{21}y_{21} \dots y_{2m}Nym_1ym_2 \dots y_{mm}\|$

Dalam langkah probabilitas transisi t langkah, ini adalah probabilitas bahwa proses yang awalnya dalam keadaan i bergerak ke keadaan langkah j setelah langkah t didefinisikan sebagai :

$$Y_{ij}\left(t\right) = \Pr\left(Cs + t = j|Cs = i\right) \tag{2.27}$$

Untuk semua $i, j, s, t \in N$. Nilai $\gamma ij(t)$ adalah elemen dari matriks probabilitas transisi matriks langkah-t $\Gamma(t)$. Berdasarkan persamaan *Chapman-Kolmogorov*, langkah matriks probabilitas variabel t dapat ditentukan dengan mengalikan matriks Γ dan waktu t dengan persamaan berikut:

$$\Gamma(t+u) = \Gamma(t).\Gamma(u), untuksemuat, u \in N \tag{2.28}$$

dimana,

Γ = Matriks peluang transisi Persamaan *Chapman-Kolmogorov* menunjukan bahwa

$$\Gamma(t) = \Gamma(1)t, untuksemuat \in N \tag{2.29}$$

Semua peluang yang ditentukan sejauh ini adalah peluang bersyarat. Misalnya $\Gamma(t)$ adalah probabilitas bahwa pada waktu ?? proses berada dalam keadaan t asalkan keadaan awalnya adalah i. Dalam distribusi rantai markov tanpa syarat, distribusi nilai probabilitas ditentukan oleh distribusi probabilitas di keadaan awal. Probabilitas tak bersyarat $Pr\ (Ct = j)$ dari rantai markov berada dalam keadaan tertentu pada waktu t didefinisikan sebagai vektor garis sebagai berikut (Zucchini *et al*, 2009):

$$(t) = \Pr(Ct = 1), \ldots, \Pr(Ct = m), t \in N \tag{2.30}$$

2.6 Poisson *Hidden* Markov Model (PHMM)

Poisson *Hidden* Markov Model (PHMM) merupakan perpanjangan dari HMM (*Hidden* Markov Model), dimana setiap observasi dihasilkan oleh salah satu status tersembunyi dengan distribusi Poisson. Saat memahami PHMM, ini menjelaskan teori dasar *Hidden* Markov Model (HMM), HMM marjinal dan distribusi momen, dan *Likehood HMM* (Suryandaru, 2015).

Model Poisson *Hidden* Markov adalah model *Hidden* Markov dengan waktu diskret yang terdiri atas pasangan $\{C_t, Y_t\}_{t \in N}$ di mana $\{C_t\}_{t \in N}$ merupakan penyebab kejadian yang tidak diamati secara langsung dan membentuk suatu rantai markov, sedangkan $\{Y_t, t \in N\}$ adalah proses observasi yang bergantung pada $\{C_t, t \in N\}$. Model Poisson *Hidden* Markov dapat digunakan untuk mengatasi gejala overdispersi, yaitu nilai variansinya lebih besar dari nilai ekspektasi.

$\{Y_t\}t \in N$ adalah proses observasinya yang bergantung pada $\{C_t\}t \in N$. Jika diasumsikan untuk setiap t, Y_t dengan diketahui C_t adalah peubah acak Poisson, maka pasangan $\{C_t, Y_t\}$ disebut model Poisson *Hidden* Markov.

Karakteristik model Poisson *Hidden* Markov dapat dicirikan sebagai berikut.

1. Diasumsikan $\{C_t\} \in N$ adalah rantai markov yang diskrit, homogen, *ergodic*, dan tak tereduksi dengan ruang *state* $Q_c = \{1, 2, ..., m\}$. Matriks peluang transisi *state* $\Gamma = [\gamma_{ij}]$, dimana Γ adalah matriks berukuran $m \times m$ dengan

   $\gamma ij = \mathrm{P}\left(C_t = j | C_{t-1} = i\right) = P\left(C_2 = j | C_1 = i\right), 0 \leq 1, 1 \leq i, j \leq m$

   $$\sum_{j=1}^{m} \gamma ij = 1, i \in Q_c \tag{2.31}$$

2. Vektor peluang state awal $\delta = [\delta_i]$, dimana δ merupakan vektor berukuran $m \times 1$ dengan $\delta_i = P(C1 = i), i = 1, 2, ..., m$

   $$\sum_{i \in Q_c} = 1 \tag{2.32}$$

   Karena rantai Markov $\{C_t\}_{\in N}$ diasumsikan rantai markov yang *ergodic*, maka δ merupakan sebaran stasioner sehingga memenuhi persamaan $\delta' = \delta'\Gamma$.

3. Dalam model Poisson *Hidden* Markov, sebaran bersyarat Y_t jika diketahui C_t berada pada *state* $(i \in Q_c; t \in N)$ adalah Poisson dengan parameter λ_i. Matriks peluang dari prose observasi $\Pi = [\pi_{yi}]$, dengan

   $\pi_{yi} = \mathrm{P}\left(Y_t = y | C_t = i\right) = e^{\lambda i \frac{\lambda_{iy}}{y!}}, y \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

   $$\sum_{y=0}^{\infty} \pi_{yi} = 1, i \in Q_c \tag{2.33}$$

   Jadi, model Poisson *Hidden* Markov $\{C_{t,t}\}_{t \in N}$ dicirikan oleh parameter δ dan $\theta = (m, \Gamma, \lambda)$ dengan

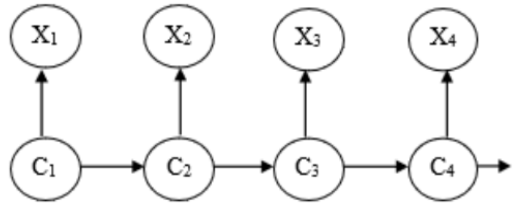
   $$\delta = [\delta_i], i \in Q_c$$

   $$\Gamma = [Y_{ij}], i \in Q_c$$

   $$\Pi = [\pi_{yi}] = e^{\lambda i}\frac{\lambda_{iy}}{y!}, y \in \{0, 1, 2, \ldots\}, i \in Q_c dan \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)' \tag{2.34}$$

2.6.1 ***Hidden* Markov Model (HMM)**

Hidden Markov Model adalah proses stokastik yang terdiri dari bagian yang tidak teramati ($\{Ct : t\}N$) yang memenuhi sifat Markov (parameter proses), serta bagian yang diamati $\{Xt : t, N\}$, atau disebut sebagai "Proses status bergantung". Pada bagian yang dapat diamati, Distribusi X_t hanya bergantung pada kondisi di C_t dan tidak bergantung pada keadaan yang diamati sebelumnya. Model Markov Tersembunyi dapat direpresentasikan dalam Gambar 2.1



Gambar 2.1 Graf dasar HMM

Hidden Markov Model $\{Xt : t \in N\}$ adalah distribusi campuran dependen, di mana $X(t)$ dan $C(t)$ merepresentasikan peristiwa masa lalu dari waktu 1 ke waktu t, yang diakhiri model sederhana dengan persamaan:

$$\Pr\left(C_t|C^{(t-1)}\right) = \Pr\left(C_t|C_{t-1}\right), t = 2, 3, \ldots \tag{2.35}$$

$$\Pr\left(X_t|X^{(t-1)}, C^{(t)}\right) = \Pr\left(X_t|C_t\right), t \in N \tag{2.36}$$

Jika rantai markov $\{C_t\}$ memiliki keadaan tersembunyi m, kita katakan $\{X_t\}$ adalah HMM dengan keadaan m.

Dalam kasus pengamatan diskrit, jika rantai markov pada waktu t berada dalam keadaan i maka fungsi massa probabilitas (pmf) X_t didefinisikan sebagai :

$$pi(x) = \Pr\left(X_t = x|C_t = i\right), i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.37}$$

Distribusi pi dengan keadaan tersembunyi m dapat dikatakan sebagai distribusi keadaan tergantung (*state-dependent distributions*).

2.6.2 Distribusi Marginal HMM

Pada kasus stasioner, nilai harapan bergantung (*state-dependent*) $E(g(X_t))$ dan$E(g(X_t, X_{t+k}))$ untuk setiap fungsi g adalah sebagai berikut (Zucchini *et al*, 2009):

$$E\left(g\left(X_t\right)\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \delta_1 E\left(g\left(X_t\right)|C_t = i\right) \tag{2.38}$$

$$E\left(g\left(X_t\right)\right) = \sum\nolimits_{i,j=1}^{m} E\left(g\left(X_t, X_{t+k}|C_t = i, C_{t+k} = j\right)\right) = \delta_1 Y_{ij}\left(k\right))$$

$$= \sum\nolimits_{i,j=1}^{m} E\left(g\left(X_t\right)\right) = \sum\nolimits_{i,j=1}^{m} E\left(g_1\left(X_t, C_t =\right)\right) E\left(g_2\left(X_{t+k}, C_t =\right)\right) \tag{2.39}$$

Persamaan di atas berguna untuk mendapatkan nilai ekspektasi pada HMM. Misal, jika terdapat dua keadaan HMM dimana rantai markov berdistribusi Poisson dan stasioner, maka (Hidayati, 2018):

$$E\left(X_t\right) = \delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2 \tag{2.40}$$

dimana,

δ = Peluang awal kejadian pada masing - masing keadaan tersembunyi

λ = Rata - rata kejadian pada masing - masing keadaan tersembunyi

2.7 Penskalaan *Likelihood*

Dalam kasus distribusi yang bergantung pada keadaan diskrit, ketika t meningkat, hasil akhirnya adalah nilai elemen αt akan lebih kecil, dan pada akhirnya akan dibulatkan menjadi 0, yang disebut *underflow*. Salah satu cara untuk mengatasi masalah *underflow* tersebut adalah dengan menggunakan *likelihood scaling* yaitu menghitung algoritma dari *likelihood* atau disebut juga *forward*

$$\Phi_t = \alpha_t / w_t$$

Probability vector scaling α_t. Didefinisikan sebuah *vector*, untuk $t = 0, 1, ...,$ (Zucchini, Iain, & McDoald, 2009):

$$w_t = \sum\nolimits_i \alpha_t 1' \tag{2.41}$$

Pertama kita perhatikan akibat langsung dari definisi $\emptyset_t$ dan w_t

$$w_0 = \alpha_0 1' = \delta 1' = 1;$$

$$\emptyset_0 = \delta;$$

$$w_t \emptyset_t = w_{t-1} \emptyset_{t-1} \Gamma P(x_t);$$

$$L_T = \alpha_T 1' = w_T\left(\emptyset_T 1'\right) = w_T$$

Karena $L_T = w_T = \prod_{t=1}^{T}\left(w_t/w_{t-1}\right)$ berdasarkan persamaan di atas diperoleh:

$$w_t = w_{t-1}\left(\emptyset_{t-1} \Gamma P(x_t) 1'\right)$$

Sehingga:

$$\log L_T = \sum_{t=1}^{T} \log\left(w_t/w_{t-1}\right) = \sum_{t=1}^{T} \log\left(\emptyset_{t-1} \Gamma P(x_t) 1'\right)$$

2.8 Estimasi *Expectation Maximization Algorithm* (EM)

Salah satu metode yang biasa digunakan untuk mengestimasi parameter dalam HMM adalah dengan menggunakan Algoritma EM. Dalam konteks HMM, Algoritma EM disebut Algoritma Baum-Welch, dimana rantai Markov pada HMM bersifat homogen dan tidak harus stasioner. Parameter HMM yang diestimasi oleh algoritma EM adalah distribusi status dependen pi, matriks probabilitas transisi dan distribusi awal. Dalam penerapannya Algoritma EM membutuhkan alat bantu yaitu peluang maju (*Forward*) dan peluang mundur (*Backward*) yang keduanya dapat digunakan untuk prediksi keadaan (Hidayati, 2018).

1. Peluang *Forward*

   Peluang *forward* αt untuk $t = 1, 2, ..., T$ didefinisikan sebagai vektor baris:

   $$\alpha_t = \delta P(X_1) \Big| P(X_2) \ldots \Big| P\left(X_t = \delta P(X_1) \prod\nolimits_{s=2}^{t} |P(X_s)\right) \tag{2.42}$$

   dengan δ adalah distribusi inisial rantai markov. Berdasarkan definisi peluang forward di atas, untuk $t = 1, 2, ..., T - 1$.

2. Peluang *Backward*

   Peluang *backward* βt untuk $t = 1, 2, ..., T$ didefinisikan sebagai vektor baris :

   $$\beta'_t = |P(X+1) \Big| P(X+2) \ldots \Big| P(XT)1' \left(\prod\nolimits_{s=2}^{t} |P(X_s)1'\right) \tag{2.43}$$

   dimana untuk $t = T$, $\beta T = 1$. Berdasarkan definisi peluang backward di atas, untuk $t = 1, 2, ..., T - 1$.

3. Peluang *Forward* dan Peluang *Backward*

   Kombinasi peluang maju dan mundur αt dan βt dapat digunakan untuk menghitung $Pr(X(T) = x(T), C_t = i)$. Kombinasi peluang tersebut dibutuhkan dalam Algoritma Maksimalisasi Harapan di HMM. Dalam penerapannya dibutuhkan dua ciri di antara keduanya:

   a. $t = 1, 2, ..., T$,

   $$\Pr\left(C_t = j | X^{(T)} = x^{(T)}\right) = \frac{\alpha_t(j)\beta_t(J)}{L_t} \tag{2.44}$$

   b. $t = 1, 2, ..., T$,

   $$\Pr\left(C_{t+1} = j, C_t = k | X^{(T)} = x^{(T)}\right) = \frac{\alpha_{t-1}(j)Y_{jk}(x_t)\beta_t(k)}{L_t} \tag{2.45}$$

Keadaan garis rantai markov yang tidak teramati akan menyebabkan kehilangan data yang menyebabkan data tidak lengkap. Algoritma EM dapat menghitung estimasi kemungkinan maksimum dari data yang tidak lengkap. Di setiap literasi Algoritma EM, ada tahap E (Ekspektasi) dan M (Maksimalisasi) (Hidayati, 2018).

1. Tahap Ekspektasi

   Mengganti semua nilai vjk dan $uj(t)$ dengan ekspektasi bersyaratnya jika diberikan observasi $x^{(T)}$.

$$\hat{u}_j(t) = \Pr\left(C_t = j|x^{(T)}\right) = \frac{\alpha_t(j)\beta_t(J)}{L_t} \tag{2.46}$$

$$\hat{v}_{jk}(t) = \Pr\left(C_{t+1} = j, C_t = k|x^{(T)}\right) = \frac{\alpha_{t-1}(j)Y_{jk}P_k(x_t)\beta_t(k)}{L_t} \tag{2.47}$$

2. Tahap Maksimilisasi

   Setelah mengganti nilai vjk dan $uj(t)$ dengan $\widehat{u}j\,(t)$ dan $\widehat{v}j\,(t)$, maka dilakukan maksimalisasi CDLL dengan memperhatikan tiga parameter yaitu parameter distribusi *state-dependent* $(\lambda 1, \lambda 2, ..., \lambda 3)$, distribusi awal δ, matriks dan peluang transisi. Log-likelihood CDLL berisi urutan observasi $x_1, x_2, ..., x_T$ dan data yang hilang $c_1, c_2, ..., c_T$ ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$\log\left(\Pr X^{(T)}, c^{(T)} = \sum\nolimits_{j=1}^{m} u_j(1)\log\delta_j + \right.$$
$$\left(\sum\nolimits_{t=2}^{T} v_{jk}(t)\log\sum\nolimits_{j=1}^{m} u_j\right) + \sum\nolimits_{j=1}^{m}\sum\nolimits_{t=1}^{T} u_j(t)\log p_j(X_t) \tag{2.48}$$

2.9 Pemilihan Model berdasarkan *Akaike Information Criterion* (AIC)

Kriteria pemilihan *model* estimasi terbaik dalam penelitian ini didasarkan pada nilai AIC (*Akaike Information Criterion*). Standar AIC didefinisikan dalam persamaan berikut (Suryandaru, 2015):

$$AIC = -2\log L + 2p \tag{2.49}$$

dimana $lohgL$ adalah nilai kemungkinan log masing-masing model, dan merupakan jumlah parameter dalam model. Dalam penelitian ini akan digunakan metode algoritma EM untuk mencari 3 model estimasi yaitu model dengan *hidden state* $m = (2, 3, 4)$. Model estimasi terbaik berdasarkan standar AIC adalah model dengan nilai AIC terkecil (Suryandaru, 2015).

2.10 Hepatitis B

Salah satu penyakit menular yang berbahaya diakibatkan pada Virus Hepatitis B (VHB) pada peradagangan hati yang melanda seluruh gologngan usia muda sampai usia tua tanpa gejala merupakan penyakit Hepatitis B (Widoyono, 2011). Sekitar 5% penduduk dunia mengalami Hepatitis B tanpa gejala. Virus Hepatitis B menimbulkan peradangan hati akut ataupun kronis yang bisa bersinambung jadi kanker hati (Mustofa *et al*, 2013). Infeksi virus ini dimulai dengan proses Hepatitis B akut, apabila proses ini tidak efisien hingga sel yang terinfeksi tidak sukses dihilangkan sepenuhnyasehingga akan terjadi infeksi Hepatitis B kronis. Didunia, sedikitnya terdapat 300 juta penduduk yang terkena Hepatitis B kronis. Dari bermacam riset yang terdapat, frekuensi penderita HBsAg berkisar antara 3-20%. Penelitian dari berbagai wilayah di Indonesia menampilkan angka yang berbeda - beda tergantung pada tingkat endemisitas Hepatitis B di masing - masing wilayah.

Terdapat dua kelompok cara penularan infeksi VHB, pertama penularan secara vertikal yaitu terjadi dari seorang penderita VHB yang berbadan dua kepada balita dan yang kedua penularan secara horizontal bisa terjadi lewat kulit (suntikan, transfusi darah, tato), hubungan seksual ataupun lewat selaput lendir (mulut, mata, hidung). Berbagai penelitian epidemiologi yang pernah dilakukan di indonesia mengesankan bahwa penularan infeksi VHB vertikal ataupun horizontal yang banyak terjadi pada masa anak - anak dan bayi memegang kedudukan yang sangat berarti (Soewignjo, 2008).

2.10.1 Faktor Yang Mempengaruhi

Seluruh faktor yang ada pada diri manusia yang dapat mempengaruhi timbul serta perjalanan penyakit Hepatitis B. Faktor resikonya adalah sebagai berikut:

a. Umur

   Hepatitis B bisa melanda seluruh kalangan umur.Sangat kerap pada bayi dan anak (25 - 45,9%) resiko untuk menjadi kronis, menyusut dengan bertambahnya umur dimana pada anak bayi 90% akan menjadi kronis, pada anak usia sekolah 23 - 46% dan pada orang dewasa 3 - 10%. Karena ini berkaitan dengan tercipta antibodi dalam jumlah lumayan untuk menjamin bebas dari hepatitis kronis.

b. Jenis kelamin

Bersumber pada sex ratio, wanita 3 kali lebih kerap mengidap Hepatitis B dibandingkan laki-laki.

c. Mekanisme pertahanan tubuh

Bayi baru lahir ataupun bayi 2 bulan pertama sehabis lahir lebih kerap terinfeksi Hepatitis B, paling utama pada bayi yang kerap terinfeksi Hepatitis B, dan pada bayi yang belum mendapat imunisasi Hepatitis B. Hal ini karena sistem imun belum berkembang sempurna.

d. Kebiasaan hidup

Sebagian besar penularan pada masa muda diakibatkan sebab kegiatan intim serta gaya hidup seperti homo seksual, pecandu obat narkotika suntikan, pemakaian tatto, pemakaian akupuntur.

e. Pekerjaan

Golongan efek besar yang dapat terinfeksi Hepatitis B yaitu dokter, dokter bedah, dokter gigi, perawat, bidan, petugas kamar operasi, petugas laboratorium dimana mereka berpekerjaan tiap hari berkontak dengan penderita dan material manusia (darah, tinja, air kemih).

2.11 Penelitian Terdahulu

Kajian pustaka tentang penelitian terdahulu bertujuan buat mengenali ikatan penelitian yang pernah dicoba dengan yang hendak dicoba. Hingga dalam kajian pustaka ini peneliti mencantumkan hasil - hasil penelitian terdahulu sebagai berikut:

1. Laila (2021) meneliti tentang analisis model stokastik penularan virus Hepatitis B. Penyebaran infeksi virus Hepatitis B ini menggunakan model deterministik SIR, dimana orang yang sembuh dari infeksi akut mempunyai imunitas sementara pada virus. Tetapi, model deterministik ini memakai laju infeksi virus yang konstant di sepanjang waktu. Ada pula tujuan dari penelitian ini ialah untuk mengkonstruksi model stokastik SIR dengan membagi laju infeksi menjadi 2 yaitu laju infeksi akut dan kronis mengikuti proses wiener.

2. Fikri, B. Setiawaty, I G. Purnaba (2016) meneliti tentang pendugaan parameter dan kekonvegeraan penduga parameter Model Poisson *Hidden* Markov. Pada penelitian ini kasus utama MPHM ialah menduga parameter yang memaksimumkan fungsi *Likelihood*. Fungsi *Likelihood* dihitung menggunakan algoritma *Forward-Backward*. Algoritma *Expectation Maximization* (AEM) digunakan untuk memaksimumkan fungsi *Likelihood*. Penduga parameter MPHM yang diperoleh memakai Algoritma EM konvergen ke titik stasioner dari fungsi *Likelihood*.

3. Prabandari, *et al* (2018) meneliti tentang model Poisson *Hidden* Markov dan penerapan pada klaim asuransi kendaraan bermotor. Penelitian ini menggunakan *Akaike Information Criteria* (AIC) untuk memperoleh model terbaik dengan model Poisson *Hidden* Markov dua *state* dengan nilai terkecil. Dua *state* tersebut yaitu perbuatan jahat orang lain dan kecelakaan. Rata - rata pengajuan klaim dengan sebab perbuatan jahat orang lain adalah 11,499 klaim per minggu, sedangkan rata - rata pengajuanklaim dengan sebab kecelakaan adalah 23,935 klaim per minggu. Jika banyaknya klaim mengalami overdispersi, serta penyebab pengajuan klaim yang tidak diamati secara langsung diasumsikan membentuk rantai markov, maka banyaknya klaim dapat dimodelkan dengan Model Poisson *Hidden* Markov.

4. Irawan (2021) meneliti tentang implementasi Poisson *Hidden* Markov Model & *Expectation Maximization Algorithm* untuk estimasi kejadian gempa bumi di Indonesia. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah nilai AIC terkecil dari hasil estimasi Poisson *Hidden Markov Models* dengan menggunakan *Algoritma Expectation Maximization* yang didapat ($AIC = 1101,559$), maka model Poisson *Hidden* Markov dengan 3 keadaan tersembunyi merupakan model yang optimum untuk estimasi parameter. Dari model yang dipilih, model terbaik dengan 3 kondisi tersembunyi merupakan model terbaik untuk estimasi jumlah gempa, dan estimasi terbaiknya adalah estimasi parameter bahwa rata - rata jumlah gempa yang terjadi dalam sebulan adalah 4.084374 nilai kejadian.

5. Nurhasanah, *et al* (2016) meneliti tentang pemodelan Poisson *Hidden* Markov untuk prediksi banyaknya kecelakaan di Jalan Tol Jakarta - Cikampek. Hasil prediksi dari banyaknya kecelakaan ini dapat menjadi dasar untuk penanganan kasus kecelakaan pada lokasi ruas tol yang sering terjadi kecelakaan,

seperti penentuan banyaknya mobil derek, alat pengangkut kendaraan yang mengalami kecelakaan, banyaknya mobil ambulans yang bersiaga, banyaknya mobil patroli, maupun banyaknya mobil *rescue*, yakni mobil yang berisi peralatan yang digunakan dalam kecelakaan berat di jalan tol. Oleh karena itulah, maka untuk memodelkan banyaknya kecelakaan di tol digunakan model poisson campuran, yakni model Poisson *Hidden* Markov. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah nilai AIC diperoleh model Poisson *Hidden* Markov 2 *state* sebagai model terbaik. Menggunakan model terbaik dilakukan prediksi banyaknya kecelakaan sampai empat periode ke depan dan diperoleh nilai MAPE berkisar 34%. Dari nilai MAPE yang diperoleh mengindikasikan bahwa hasil prediksi banyaknya kecelakaan termasuk peramalan yang layak, tapi belum cukup baik.

2.12 Konsep Wahdatul Ulum

Sakit dan penyakit merupakan suatu peristiwa yang selalu menyertai hidup manusia sejak jaman Nabi Adam a.s. Kita memahami apapun yang menimpa manusia adalah takdir, sakit pun merupakan takdir. Tidak ada seorangpun yang menginginkan dirinya sakit. Namun Allah SWT Maha Berkehendak dan Maha Mengetahui yang tersirat maupun yang tersurat. Tugas manusia adalah berusaha sebisa mungkin mempertahankan dirinya dalam keadaan sehat

Ayat al-Qur'an yang menjelaskan tentang keadaan sakit dalam al-Qur'an Surah al-Anbiya ayat 83-84:

وَ اَيُّوبَ إِذنَادَى رَبَّهُ اَنِّي مَسَّنِيَ اَلْضَّرَّ وَانْتَ اَرْحَمُ اَلْرَّحِمِينَ (٨٣) فَاسْتَجَبْنَا لَهُ فَكَشَفْنَا مَا بِهِ مِنْ ضُرٍّ وَّاتَيْنَهُ اَهْلَهُ وَمِثْلَهُمْ رَحْمَةً مِّنْ عِنْدِنَا وَذِكْرَى لِلْعَبِدِينَ (٨٤) (اَ لَا نْبِيَاءْ/ ٢١:٨٤-٨٣)

Terjemahnya: dan (ingatlah kisah) Ayyub, ketika dia berdoa kepada Tuhannya, "(Ya Tuhan-ku), sungguh, aku telah ditimpah penyakit, padahal Engkau Tuhan Yang Maha Penyayang dan semua yang penyayang". Maka Kami kabulkan (doa) nya, lalu kami lenyapkan penyakit yang ada padanya dan kami kembalikan keluarganya kepadanya dan (kami lipat gandakan jumlah mereka) sebagai suatu rahmat dari Kami, dan untuk menjadi peringatan bagi semua yang menyembah Kami. (Departemen Agama RI.2006:329).

Ayat diatas mengisahkan bahwa Nabi Ayyub a.s yang ditimpa penyakit, kehilangan harta dan anak-anaknya. Dari seluruh tubuhnya hanya hati dan lidahnya yang tidak tertimpa penyakit, karena dua organ inilah yang dibiarkan Allah SWT, dan Allah SWT pun mengabulkan doanya, hingga akhirnya Nabi Ayuub a.s sembuh dan dikembalikan harta dan keluarganya. Dari sini dapat diambil pelajaran agar manusia tidak berprasangka buruk kepada Allah SWT, tidak berputus asa akan rahmat Allah serta bersabar dalam menerima takdir Allah. Karena kita sebagai manusia perlu meyakini bahwa apabila Allah menakdirkan sakit maka kita akan sakit, begitu pula apabila Allah menakdirkan kesembuhan, tiada daya.

فَلَمَّا فَصَلَ طَالُوتُ بِٱلْجُنُودِ قَالَ إِنَّ ٱللَّهَ مُبْتَلِيكُمْ بِنَهَرٍ فَمَنْ شَرِبَ مِنْهُ فَلَيْسَ مِنِّي وَمَنْ لَمْ يَطْعَمْهُ فَئِنَّهُ مِنِّي إِلَّا مَنِ آ غْتَرَفَ غُرْفَةً بِيَدِهِ فَشَرِبُو آ مِنْهُ إِ لَّا قَلِيلًا مِنْهُمْ فَلَمَّا جَاوَزَهُ هُوَ وَلَّذِينَ آ مَنُو آ مَعَهُ قَالُو آ لَا طَاقَةَ لَنَا ٱلْيَوْمَ بِجَالُوتَ وَجُنُودِهِ قَالَ ٱلَّذِينَ يَظُنُّونَ أَنَّهُمْ مُلَاقَوْ ٱللَّهِ كَمْ مِنْ فِئَةٍ قَلِيلَةٍ غَلَبَتْ فِعَةً كَثِيرَةً بِذْنِ ٱللَّهِ وَا ٱللَّهُ مَعَ ٱلصَّابِرِينَ

Terjemahnya: “(Maka ketika Thalut membawa bala tentaranya, dia berkata, ‘Allah akan menguji kamu dengan sebuah sungai’. Maka barang siapa meminum (airnya), dia bukanlah pengikutku. Dan barang siapa tidak meminumnya, maka dia adalah pengikutku kecuali menciduk seciduk dengan tangannya. ‘Tetapi mereka meminumnya kecuali sebagian kecil di antara mereka. Ketika dia (Thalut) dan orang - orang yang beriman bersamanya menyeberangi sungai itu, mereka berkata, ‘Kami tidak kuat lagi pada hari ini melawan Jalut dan bala tentaranya’. Mereka yang meyakini bahwa mereka akan bertemu dengan Allah berkata, ‘Betapa banyak kelompok kecil mengalahkan kelompok besar dengan izin Allah’. Dan Allah beserta orang - orang yang sabar”.

Mengutip Rasyid Ridha dalam Tafsir Al-Manar, Abdul Mutaali menjelaskan bahwa pasukan yang meminum di sungai tersebut justru tambah merasakan haus dan kering di bagian tenggorokan. Tidak berhenti di situ, yang paling akut adalah tubuh sebagian pasukan Thalut menjadi lemah dan merasakan demam yang sangat tinggi. “Makna ini di dapat dari dua diksi; mubtaliikum, yakni Allah mengujimu dengan bala’ (penyakit) dan binahar (sungai). Kalimat mubtaliikum (Allah mengujii kalian) berasal dari kata balaa yang artinya musibah atau ujian. Dalam beberapa kamus balaa juga biasa diartikan dengan Aahaat atau virus,” tulis dia.

Dalam sebuah hadits disebutkan bahwa di zaman Rasulullah pernah terjadi wabah/tha'un. Rasulullah SAW pun bersabda mengenai cara menghadapi wabah penyakit, yakni jangan memasuki daerah tersebut dan bagi masyarakatnya jangan keluar dari daerah itu. Keputusan Rasulullah itu juga dikenal dengan nama karantina. Hal itu dilakukan agar penyakit yang mewabah tidak menyebar ke daerah lain.

قَ () اَلَ رَسُولُ ٱللهِ صَلَّى ٱللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ ٱلطَّاعُونُ آيَةٌ ٱلرِّجْزِ ٱبْتَلَى ٱللهُ عَزَّ وَجَلَّ بِهِ نَاسًا
مِنْ عِبَادِهِ فَئِذَا سَمِعْتُمْ بِهِ فَلَا تَدْخُلُوا آ عَلَيْهِ وَئِذَا وَقَعَ بِأَرْضٍ وَأَنْتُمْ بِهَا فَلَا تَفِرُّوا آ مِنْهُ

Artinya: "Rasulullah SAW bersabda: Tha'un (wabah penyakit menular) adalah suatu peringatan dari Allah SWT untuk menguji hamba - hamba-Nya dari kalangan manusia. Maka apabila kamu mendengar penyakit itu berjangkit di suatu negeri, janganlah kamu masuk ke negeri itu.Dan apabila wabah itu berjangkit di negeri tempat kamu berada, jangan pula kamu lari daripadanya". (HR Bukhari dan Muslim)