ALJABAR LINIER ELEMENTER

Solusi Mudah Memahami
Aljabar Linier Elementer

Siti Salamah Br Ginting, M.Pd.
Rusi Ulfa Hasanah, M.Pd.
Siti Maysarah, M.Pd.

ALJABAR LINIER ELEMENTER

Solusi Mudah Memahami
Aljabar Linier Elementer

ALJABAR LINIER ELEMENTER

Solusi Mudah Memahami Aljabar Linier Elementer

Siti Salamah Br Ginting, M.Pd.
Rusi Ulfa Hasanah, M.Pd.
Siti Maysarah, M.Pd.

EDITOR:
Ammamiarihta, M.Pd.

KENCANA

ALJABAR LINIER ELEMENTER
Solusi Mudah Memahami Aljabar Linier Elementer

Edisi Pertama

ISBN 978-623-384-699-8
ISBN (E) 978-623-384-700-1
14.8 x 21 cm
viii, 202 hlm
Cetakan ke-1, Juni 2024

Kencana 2024.1950

Penulis
Siti Salamah Br Ginting, M.Pd.
Rusi Ulfa Hasanah, M.Pd.
Siti Maysarah, M.Pd.

Editor
Ammamiarihta, M.Pd.

Desain Sampul
Eko Widiyanto

Tata Letak
Suwito & Iam Maher

Penerbit
K E N C A N A
Jl. Tambra Raya No. 23 Rawamangun - Jakarta 13220
Telp: (021) 478-64657 Faks: (021) 475-4134

Divisi dari PRENADAMEDIA GROUP
e-mail: pmg@prenadamedia.com
www.prenadamedia.com
INDONESIA

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. yang telah memberikan nikmat berupa kesehatan dan pikiran, sehingga mampu menghasilkan buku yang akan menjadi pedoman perkuliahan pada matakuliah Aljabar Linier. Tidak lupa pula penulis panjatkan selawat dan beriring salam atas Nabi Besar Muhammad saw. beserta sahabat dan keluarga, yang kita nantikan syafaatnya di Yaumil Akhir kelak.

Buku *Aljabar Linier Elementer: Solusi Mudah Memahami Aljabar Linier Elementer* ini, disusun dalam rangka memenuhi kebutuhan belajar mahasiswa di lingkungan pendidikan matematika. Buku ini membahas tentang matriks, sistem persamaan linier, determinan matriks, invers matriks, vektor di ruang 2 dan ruang 3, ruang vektor umum, ruang eigen dan diagonalisasi, ruang hasil kali dalam, dan transformasi linier serta mampu mengaplikasikannya dalam memecahkan masalah sehari-hari.

Penulis berharap semoga buku *Aljabar Linier Elementer: Solusi Mudah Memahami Aljabar Linier Elementer* ini, dapat dimanfaatkan dan diterapkan oleh mahasiswa/i di lingkungan Pendidikan Matematika sehingga dapat menambah khazanah ilmu pengetahuan dalam bidang akademisi. Selain itu, sebagai ladang amal dan ibadah penulis terhadap yang Maha Khalik.

Medan, Juni 2024

Tim Penulis

DAFTAR ISI

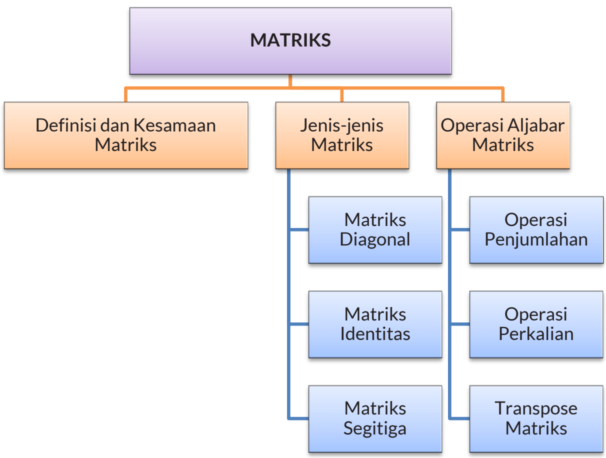
Bab 1

MATRIKS

INDIKATOR PEMBELAJARAN

- Mahasiswa mampu menyebutkan definisi matriks.
- Mahasiswa mampu menyusun matriks yang ordonya diketahui.
- Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan terkait kesamaan matriks.
- Mahasiswa mampu menyusun matriks untuk setiap jenisnya.
- Mahasiswa mampu menjumlahkan matriks.
- Mahasiswa mampu mengalikan matriks.
- Mahasiswa mampu membentuk transpose dari sebuah matriks.

PETA KONSEP



1.1 PENDAHULUAN MATRIKS

1.1.1 Definisi Matriks

DEFINISI 1.1

Matriks adalah kumpulan elemen-elemen atau entri-entri yang disusun berdasarkan *m* baris dan *n* kolom yang membentuk sebuah segiempat siku-siku dan diapit oleh tanda kurung biasa atau kurung siku.

Huruf kapital biasanya digunakan pada penamaan dari sebuah matriks, sedangkan entri-entri di dalamnya dinotasikan dengan huruf kecil. Berdasarkan definisi di atas, matriks dapat dinotasikan sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tampak bahwa matriks $A = [a_{ij}]$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ merupakan matriks berukuran $m \times n$. Elemen a_{23} menyatakan bahwa entri tersebut berada pada baris kedua dan kolom ketiga. Sehingga a_{ij} menunjukkan bahwa entri tersebut berada pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Ukuran matriks disebut dengan **ordo** matriks yang mana ukuran ini menyatakan banyaknya baris dan kolom pada suatu matriks. Sebuah matriks dapat berbentuk **matriks persegi** dan **matriks persegi panjang** berdasarkan ordo dari matriks tersebut. Matriks akan menjadi matriks persegi apabila $m = n$ dan akan menjadi matriks persegi panjang apabila $m \neq n$. Perhatikan bahwa matriks B di bawah adalah matriks persegi dengan jumlah baris dan kolomnya sebanyak n.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Elemen atau entri yang terletak pada b_{11}, b_{22}, b_{33}, …, b_{nn} merupakan diagonal utama dari matriks B.

Sebuah matriks juga dapat membentuk **matriks baris** dan **matriks kolom**. Matriks baris akan terbentuk apabila berordo $1 \times n$ dan akan membentuk matriks kolom apabila berordo $m \times 1$. Terdapat pula matriks yang seluruh elemen atau entrinya terdiri dari angka 0 disebut dengan **matriks nol**. Matriks nol dapat berupa matriks persegi, matriks persegi panjang, matriks baris, ataupun matriks kolom.

Contoh 1.1:

Berikut ini merupakan beberapa matriks. Tentukan ordo dari matriks tersebut!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

A adalah matriks persegi yang berordo 2×2.

B adalah matriks persegi panjang yang berordo 2×3.

C adalah matriks baris yang berordo 1×3.

D adalah matriks kolom yang berordo 4×1.

E adalah matriks kolom yang berordo 1×1. Tetapi khusus untuk kasus ini, biasanya tidak ditulis [3], tetapi ditulis sebagai 3.

O adalah matriks nol yang berordo 3×3.

Contoh 1.2:

Berikut diberikan sebuah matriks.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 \\ -3 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah:

a. Ordo B

b. Entri b_{24} dan b_{13}

Penyelesaian:

a. Ordo dari B adalah 3×4, karena B mempunyai 3 baris dan 4 kolom.

b. Entri b_{24} adalah entri yang terletak pada baris kedua dan kolom keempat, yaitu 11. Entri b_{13} adalah entri yang terletak pada baris pertama dan kolom ketiga, yaitu –1.

1.1.2 Kesamaan Matriks

Dalam matriks dikenal dengan istilah **kesamaan dua matriks**. Dua matriks akan dikatakan **sama** jika keduanya mempunyai ukuran/ordo/jumlah baris dan kolom yang sama serta entri-entri yang seletak juga bernilai sama.

Contoh 1.3:

Perhatikan matriks-matriks berikut.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -8 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan apakah:

a. $M = N$
b. $M = P$
c. $M = Q$

Penyelesaian:

a. $M \neq N$ dikarenakan ordo dari kedua matriks ini berbeda
b. $M \neq P$. W alaupun ordo keduanya sama yaitu 2×2, namun terdapat elemen seletak yang nilainya tidak sama yaitu $a_{12} = 3$ sedangkan $c_{12} = -3$.
c. $M = Q$, karena ordonya sama dan semua entri yang seletak bernilai sama.

Contoh 1.4:

Diketahui persamaan matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} x & 2 & -1 \\ -3 & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai $x + y - z$.

Penyelesaian:

Dari persamaan matriks tersebut, diperoleh nilai $x = 2$, $y = 5$, dan $z = 7$. Maka nilai $x + y - z = 2 + 5 - 7 = 0$

Contoh 1.5:

Diketahui dua matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} x - y & 2x + 3w \\ 2x - 3y & w - z \end{bmatrix} \text{dan}\, B = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Apabila $A = B$, tentukan nilai w, x, y, z.

Penyelesaian:

$$A = B$$

$$\begin{bmatrix} x - y & 2x + 3w \\ 2x - 3y & w - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Diperoleh empat persamaan yaitu:

$x - y = -4$ (1)

$2x + 3w = 4$ (2)

$2x - 3y = -11$ (3)

$w - z = 5$ (4)

Apabila keempat persamaan ini diselesaikan:

Eliminasi (1) dan (3):

$$\begin{array}{rlcl} x - y = -4 & \text{(dikali 2)} & \underline{2x - 2y} & \underline{= -8} \\ 2x - 3y = -11 & \text{(dikali 1)} & 2x - 3y & = -11 \quad (-) \\ & & & y = 3 \end{array}$$

Substitusi $y = 3$ ke (1):

$x - y = -4$

$x - 3 = -4$

$x = -1$

Substitusi $x = -1$ ke (2):

$2x + 3w = 4$

$2(-1) + 3w = 4$

$-2 + 3w = 4$

$3w = 6$

$w = 2$

Substitusi $w = 2$ ke (4):

$w - z = 5$

$2 - z = 5$

$z = -3$

Sehingga diperoleh $w = 2$, $x = -1$, $y = 3$, $z = -3$.

Soal Latihan 1.1 Pendahuluan Matriks

1. Buatlah masing-masing sebuah matriks yang berordo 3×3, 5×4, 3×1, dan 1×6.
2. Diketahui matriks

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 5 & 8 \\ -3 & 2 & 5 & 0 & 9 & 11 \\ 6 & 5 & -4 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. Ordo matriks B

b. Entri b_{33}, b_{45}, b_{51}, dan b_{56}

3. Tentukan nilai *x, y,* dan *z* apabila:

a. $\begin{bmatrix} 2+x & 3-2y \\ 4 & x+2y-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -11 \\ 4 & 23 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} x+y & y-z & x-1 \\ 5x-2z & 2 & 2y-z \\ x+y+z & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2z-3y \\ -1 & 2z-4 & 1 \\ 6 & 5x-7 & x+y-2z \end{bmatrix}$

1.2 JENIS-JENIS MATRIKS

Sebelumnya telah dinyatakan bahwa matriks dapat berbentuk matriks persegi. Pada matriks persegi, terdapat jenis-jenis matriks istimewa yang berbentuk persegi, yaitu matriks diagonal, matriks identitas, dan matriks segitiga.

1.2.1 Matriks Nol

DEFINISI 1.2

Matriks yang seluruh elemen-elemen atau entri-entri adalah nol dinamakan dengan matriks nol.

Matriks nol disimbolkan dengan O. Apabila ingin menekankan ukuran pada matriks nol, dapat menuliskan $O_{m \times n}$ artinya matriks nol dapat berbentuk persegi ataupun persegi panjang.

Contoh 1.6:

Berikut merupakan matriks nol yang masing-masing berordo 2×2, 2×4, 3×1, 1×5, dan 1×1.

$$O_{2\times2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad O_{2\times4}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad O_{3\times1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$O_{1\times5}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad O_{1\times1}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

1.2.2 Matriks Diagonal

DEFINISI 1.3

matriks persegi yang elemen-elemen atau entri-entri selain daripada diagonal utama bernilai 0 disebut dengan matriks diagonal.

Berdasarkan definisi tersebut, matriks diagonal dinotasikan sebagai:

$$D=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\0&a_{22}&0&\cdots&0\\0&0&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

Contoh 1.7:

Berikut merupakan matriks diagonal yang berordo 2×2, 3×3, dan 4×4.

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&-5\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

1.2.3 Matriks Identitas

DEFINISI 1.4

Matriks persegi yang elemen-elemen atau entri-entri diagonalnya adalah 1 sedangkan entri lainnya adalah 0 disebut dengan matriks identitas.

Matriks identitas disimbolkan dengan huruf I. Berdasarkan definisi di atas, matriks identitas dengan ordo $n \times n$ dinotasikan sebagai:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Jika ukuran matriks I harus ditekankan maka dapat menggunakan simbol $I_{n \times n}$.

Contoh 1.8:

Berikut merupakan matriks identitas yang masing-masing berordo 2×2, 3×3, dan 4×4.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.4 Matriks Segitiga

DEFINISI 1.5

Matriks yang keseluruhan entri di bawah atau di atas diagonal utamanya adalah 0 disebut dengan matriks segitiga.

Secara umum, terdapat dua jenis matriks segitiga. Kedua matriks ini disebut dengan istilah **matriks segitiga atas (*upper triangular*)** dan **matriks segitiga bawah (*lower triangular*)**. Matriks segitiga atas disimbolkan dengan U dan matriks segitiga bawah disimbolkan dengan L. Notasi dari U dan L adalah sebagai berikut.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh 1.9:

U merupakan matriks segitiga atas yang berordo 3×3, yaitu:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

L merupakan matriks segitiga bawah yang berordo 5×5.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Soal Latihan 1.2 Jenis-jenis Matriks

1. Susunlah matriks nol $O_{4\times 3}$, $O_{2\times 1}$, $O_{4\times 4}$.
2. Susunlah matriks identitas $I_{1\times 3}$, $I_{5\times 1}$, $I_{3\times 3}$, dan $I_{4\times 2}$.
3. Buatlah masing-masing bentuk matriks diagonal, matriks segitiga bawah, dan matriks segitiga atas yang ordonya adalah 3×3, 4×4, 5×5, dan 6×6.

1.3 OPERASI ALJABAR MATRIKS

Secara umum, pada matriks hanya berlaku dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian. Berikut akan dijelaskan operasi aljabar matriks tersebut.

1.3.1 Penjumlahan Matriks

DEFINISI 1.6

Misalkan A dan B mempunyai ordo yang sama. Jumlah dari A dan B, dinotasikan dengan $A + B$ adalah matriks yang dihasilkan dengan menjumlahkan entri-entri yang seletak. Apabila A dan B tidak berordo sama, maka kedua matriks tersebut tidak dapat dijumlahkan.

Misalkan terdapat matriks A dan B yang keduanya berordo $m\times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka secara umum penjumlahan dari A dan B adalah:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh 1.10:

Diketahui matriks-matriks sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah:

a. $A+B$

b. $A+C$

c. $B+C$

Penyelesaian:

a. Tidak dapat dikerjakan karena ordonya berbeda.

b. $A+C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 2+1 & -4+6 \\ 0+(-3) & 3+2 & 5+5 \\ -2+0 & 1+3 & 7+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 10 \\ -2 & 4 & 14 \end{bmatrix}$$

c. Tidak dapat dikerjakan karena ordonya berbeda.

1.3.2 Perkalian Matriks

Dalam operasi perkalian, matriks dapat dikali dengan skalar dan matriks dapat dikali dengan matriks. Untuk perkalian skalar dan matriks dapat didefinisikan sebagai berikut.

DEFINISI 1.7

Misalkan *A* adalah sembarang matriks, *k* adalah suatu bilangan skalar. Hasil kali antara bilangan skalar dengan matriks, yang dinotasikan dengan *kA*, diperoleh dengan mengalikan nilai skalar *k* dengan masing-masing entri pada matriks *A*.

Dari definisi tersebut, misalkan terdapat A yang berordo $\mathrm{m} \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dan sebuah skalar bernilai k, maka:

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Perkalian matriks dan skalar ini sangat membantu untuk menghitung $A - B$. Jika B adalah sembarang matriks, maka $-B$ adalah hasil kali dari $(-1)B$. Maka $A - B$ dapat dihitung sebagai $A + (-B)$ dengan syarat matriks A dan B berordo sama.

Contoh 1.11:

Diketahui $A \aleph \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ dan B $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

Tentukanlah:

a. $2A$

b. $-A$

c. $2A + B$

d. $B - A$

Penyelesaian:

a. $2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 6 & 10 \\ -4 & 2 & 14 \end{bmatrix}$

b. $-A = -1\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$

c. $2A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 6 & 10 \\ -4 & 2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & 4+1 & -8+6 \\ 0-3 & 6+2 & 10+5 \\ -4+0 & 2+3 & 14+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -3 & 8 & 15 \\ -4 & 5 & 21 \end{bmatrix}$$

d. $B - A = B + (-A)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \left(-1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(-1) & 1+(-2) & 6+4 \\ -3 & 2+(-3) & 5+(-5) \\ 0+2 & 3+(-1) & 7+(-7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 10 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengetahui konsep pengurangan pada matriks, maka B – A pun dapat dihitung dengan pengurangan biasa, yaitu:

$$B - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 & 6-(-4) \\ -3-0 & 2-3 & 5-5 \\ 0-(-2) & 3-1 & 7-7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 10 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.12:

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan:

3A – 2B

Penyelesaian:

$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -12 \\ 0 & 9 & 15 \\ -6 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$2B = 2\begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 18 \\ 4 & 10 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -12 \\ 0 & 9 & 15 \\ -6 & 3 & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 & 18 \\ 4 & 10 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-6 & 6-4 & -12-18 \\ 0-4 & 9-10 & 15-(-4) \\ -6-2 & 3-(-2) & 21-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 & -30 \\ -4 & -1 & 19 \\ -8 & 5 & 21 \end{bmatrix}$$

Untuk perkalian matriks dengan matriks yang perlu diperhatikan adalah ordo dari kedua matriks. Dua matriks hanya dapat dikalikan apabila ***jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua***. Hal ini sesuai dengan definisi perkalian matriks berikut.

DEFINISI 1.8

Jika A adalah sebuah matriks berordo $m \times n$ dan B adalah sebuah matriks berordo $n \times p$ maka perkalian matriks A dan B yang ditulis AB adalah matriks berordo $m \times p$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk menghitung entri dalam baris ke i dan kolom j dari AB, pilihlah baris i pada matriks A dan pilih kolom j pada matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama kemudian jumlahkan hasil kali tersebut.

Secara sederhana, perkalian antara kedua matriks adalah penjumlahan dari perkalian setiap baris matriks pertama dengan setiap kolom matriks kedua. Pemilihan baris dan kolom tergantung pada baris dan kolom yang akan diisi pada matriks hasil kali.

Perhatikan bentuk perkalian matriks ordo 2×2 berikut. Misal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Maka untuk mengisi entri baris pertama kolom pertama, dilakukan hal berikut.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

Untuk mengisi entri baris pertama kolom kedua, dilakukan hal berikut:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \square & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

Untuk mengisi entri baris kedua kolom pertama, dilakukan hal berikut:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \square & \square \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & \square \end{bmatrix}$$

Untuk mengisi entri baris kedua kolom kedua, dilakukan hal berikut:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh sebagai berikut.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa A berordo 2×2 dan B juga berordo 2×2 maka hasil AB adalah matriks dengan ordo 2×2. Definisi perkalian matriks mengharuskan jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua. Apabila hal ini tidak terpenuhi maka perkalian antara kedua matriksnya tidak dapat didefinisikan. Perhatikan ilustrasi berikut.

$$\begin{array}{ccccc} A & \times & B & = & AB \\ & & & & m \times n \\ m \times r & & r \times n & & \end{array}$$

Harus sama

Contoh 1.13:

Misalkan terdapat matriks A, B, dan C dengan karakteristik sebagai berikut.
A adalah matriks dengan ordo 3×6,
B adalah matriks dengan ordo 2×3, dan
C adalah matriks dengan ordo 6×3.
Maka tentukan ordo untuk matriks AB, BA, AC, CA, BC, dan CB!

Penyelesaian:

- Matriks AB tidak dapat didefinisikan karena jumlah kolom matriks A adalah 6 dan jumlah baris matriks B adalah 2.
- Matriks BA didefinisikan sebagai matriks berordo 2×6.
- Matriks AC didefinisikan sebagai matriks berordo 3×3.

- Matriks CA didefinisikan sebagai matriks berordo 6×6.
- Matriks BC tidak dapat didefinisikan.
- Matriks CB tidak dapat didefinisikan.

Contoh 1.14:

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Tentukan AB!

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.3 + 2.1 + (-1)1 & 1.2 + 2.0 + (-1)(-2) \\ 0.3 + 3.1 + 2.1 & 0.2 + 3.0 + 2.(-2) \\ -2.3 + 1.1 + 4.1 & -2.2 + 1.0 + 4(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 + 2 + (-1) & 2 + 0 + 2 \\ 0 + 3 + 2 & 0 + 0 + (-4) \\ -6 + 1 + 4 & -4 + 0 + (-8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -4 \\ -1 & -12 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Contoh 1.14 tampak bahwa perkalian antara dua matriks yang dipertukarkan letaknya tidak menghasilkan hasil yang sama (tidak berlaku sifat komutatif pada perkalian matriks). Perhatikan bahwa ordo matriks AB dan BA berbeda.

Contoh 1.15:

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Tentukan AB dan BA!

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+(-4) & 6+2 & -3+8 \\ 1+0 & 2+0 & -1+0 \\ 1+4 & 2+(-2) & -1+(-8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2-1 & 2+0+2 \\ -6+1+4 & -4+0-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -12 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan sifat perkalian di atas, maka matriks A^2 dapat dihitung dengan menghitung matriks AA, namun dengan syarat matriks A adalah sebuah matriks persegi. Begitu juga $A^3 = A^2 A = AAA$.

Contoh 1.16:

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, tentukan A^2 dan A^3!

Penyelesaian:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+15-4 & 6+3+4 & 8+0-8 \\ 10+5+0 & 15+1+0 & 20+0+0 \\ -2+5+2 & -3+1-2 & -4+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 13 & 0 \\ 15 & 16 & 20 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 15 & 13 & 0 \\ 15 & 16 & 20 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(Silakan kerjakan sebagai latihan)

1.3.3 Sifat Penjumlahan dan Perkalian Matriks

Beberapa sifat penjumlahan dan perkalian matriks yang perlu diketahui adalah sebagai berikut.

TEOREMA 1.1

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks-matriks berikut dapat dioperasikan, maka akan berlaku:

a. $A + B = B + A$ (komutatif pada penjumlahan)

b. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asosiatif pada penjumlahan)

c. $(AB)C = A(BC)$ (asosiatif pada perkalian)
d. $A(B + C) = AB + AC$ (distributif)
e. $(A + B)C = AC + BC$ (distributif)
f. $A(B - C) = AB - AC$
g. $(A - B)C= AC - BC$
h. $k(B + C) = kB + kC$
i. $k(B - C) = kB - kC$
j. $(k + l)A = kA + lA$
k. $(k - l)A = kA - lA$
l. $klA = (kl)A = k(lA)$
m. $kAB = (kA)B = A(kB)$ Dengan k dan l merupakan skalar

Beberapa hal dari matriks yang terkait dengan matriks identitas dan matriks nol juga mempunyai beberapa ketentuan.

TEOREMA 1.2

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks-matriks berikut adalah yang dapat dioperasikan, maka akan berlaku:

a. $A + O = O + A = A$
b. $A - A = O$
c. $O - A = -A$
d. $AO = OA = O$
e. $kAB = (kA)B = A(kB)$

Pembuktian untuk teorema 1.1 dan 1.2 ditinggalkan sebagai latihan.

1.3.4 Transpose Matriks

Pada sebuah matriks, matriks transpose adalah matriks yang setiap baris dari matriks tersebut dapat diubah menjadi kolom, dan sebaliknya setiap kolom pada matriks tersebut dapat diubah menjadi baris. Misalkan terdapat sebuah matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka transpose dari matriks A adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dari bentuk di atas tampak bahwa baris ke-1 akan menjadi kolom ke-1, baris ke-2 akan menjadi kolom ke-2 dan seterusnya. Sehingga apabila suatu matriks mempunyai ordo $m \times n$ maka ordo dari transpose matriks tersebut adalah $n \times m$.

Beberapa sifat matriks transpose yang perlu diketahui adalah sebagai berikut.

a. $(A+B)^T = A^T + B^T$

b. $(A^T)^T = A$

c. $(kA)^T = k(A^T)$, dengan k adalah bilangan skalar

d. $(AB)^T = (B^T)(A^T)$

Contoh 1.17:

Diketahui matriks A dan B adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah transpose dari matriks-matriks tersebut.

Penyelesaian:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soal Latihan 1.3 Operasi Aljabar Matriks

Diketahui matriks sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

1. Tentukanlah hasil dari operasi berikut:
   a. $A + B$
   b. $A - 3C$
   c. $-C - D^T$
   d. $A^T C$
   e. FE
   f. FD
   g. CE
   h. $DC + 2AB$
   i. $(2A - 3B)C$
   j. $DA^T + C^T A^T$

k. $A^2 C$
l. $A^3 C$
m. $A^2 B^2$
n. $(AC)^T + D^T$
o. $(ABC)^T - D$

2. Buktikan Teorema 1.1. dan 1.2!

ALJABAR LINIER ELEMENTER

Solusi Mudah Memahami
Aljabar Linier Elementer

Buku *Aljabar Linier Elementer: Solusi Mudah Memahami Aljabar Linear Elementer* ini, disusun dalam rangka memenuhi kebutuhan belajar mahasiswa di lingkungan pendidikan matematika. Buku ini membahas tentang matriks, sistem persamaan linier, determinan matriks, invers matriks, vektor di ruang 2 dan ruang 3, ruang vektor umum, ruang eigen dan diagonalisasi, ruang hasil kali dalam, dan transformasi linier serta mampu mengaplikasikannya dalam memecahkan masalah sehari-hari.

Buku ini cukup komprehensif sehingga dapat dimanfaatkan dan diterapkan oleh mahasiswa/i di lingkungan Pendidikan Matematika dan dapat menambah khazanah ilmu pengetahuan pada umumnya dan dalam bidang matematika pada khususnya.

CLS MATHEMATICS

ISBN 978-623-384-699-8

Harga P. Jawa Rp78.000,00

Penerbit
PRENADAMEDIA GROUP
[DIVISI KENCANA]
Email: pmg@prenadamedia.com
http:www.prenadamedia.com