Lisa Dwi Afri, M.Pd.

PERSAMAAN DIFERENSIAL ELEMENTER

Editor
Habib Al Ghifari dan Riska Dewi

PERSAMAAN DIFERENSIAL ELEMENTER

Penulis :
Lisa Dwi Afri

Editor :
Habib AlGhifari Nasution dan Riska Dewi

Cetakan Pertama, Juli 2023

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur penulis sampaikan kepada Allah SWT Yang Maha Pemurah, yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga dapat menyelesaikan buku ini dengan baik. Shalawat dan salam dipersembahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang membawa risalah Islam sebagai pedoman hidup untuk meraih keselamatan hidup di dunia dan juga di akhirat kelak.

Alhamdulillah, atas izin Allah SWT, penulis dapat menyelesaikan buku ini. Sebuah buku yang disusun sebagai pengantar bagi mahasiswa dalam memahami mata kuliah Persamaan Diferensial Elementer. Buku ini berjudul Persamaan Diferensial Elementer.

Penulis menyadari pada pembuatan buku ini mungkin masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, untuk itu diharapkan kritik dan saran dari para pembaca. Dan harapan penulis buku ini dapat dijadikan referensi belajar akademik di perguruan tinggi. Semoga buku ini bermanfat kami ucapkan terimakasih.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Medan, Juni 2022

Penulis

Lisa Dwi Afri

DAFTAR ISI

BAB 1

KONSEP-KONSEP DASAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

Suatu *persamaan diferensial* adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari dan turunannnya.

Contoh 1.1. Persamaan-persamaan berikut adalah persamaan-persamaan diferensial yang melibatkan fungsi *y* yang tidak diketahui.

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \qquad (1.1)$$

$$e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \qquad (1.2)$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x)\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \qquad (1.3)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad (1.5)$$

Suatu persamaan diferensial adalah suatu *persamaan diferensial biasa* (PDB) jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu variabel independen. Jika fungsi yang dicari terdiri dari dua atau lebih variabel independen. Jika fungsi yang dicari dua atau lebih variabel independen, persamaan diferensial tersebut adalah *persamaan diferensial parsial* (PDP). *Fokus buku utama ini adalah pesamaan diferensial biasa.*

Contoh 1.2. Persamaan (*1.1*) sampai (*1.4*) adalah contoh dari persamaan diferensial biasa karena fungsi *y* yang tidak diketahui terdiri hanya terdiri pada variabel *x*. Persamaan (*1.5*) merupakan persamaan diferensial parsial, karena *y* terdiri dari variabel independen *t* dan *x*.

Orde dari persamaan diferensial adalah orde dari turunan tertinggi yang muncul di dalam persamaan tersebut.

Contoh 1.3. Persamaan (*1.1*) merupakan persamaan diferensial orde-pertama; (*1.2*) (*1.,4*) dan (*1.5*) merupakan persamaan diferensial orde-kedua. [Perhatikan dalam (*1.4*) bahwa orde dari *turunan* tertinggi yang muncul didalam persamaan tersebut adalah dua.] Persamaan (*1.3*) merupakan persamaan diferensial orde-ketiga.

NOTASI

Ekspresi matematis $y', y'', y''', y^{(4)}, \dots y^{(n)}$ sering kali digunakan untuk menuliskan, masing-masing, turunan pertama, kedua, ketiga, keempat, ..., ke-*n*daro *y* terhadap variabel independen yang dimaksudkan. Jadi, y'' melambangkan d^2y/dx^2 jika variabel independennya adalah x, tapi melambangkan d^2y/dp^2 jika variabel independennya adalah p. Perhatikan bahwa tanda kurung digunakan dalam penulisan $y^{(n)}$ untuk membedakannya dari pangkat ke-n, y^n. Jika yang menjadi variabel independen adalah waktu, biasanya dilambang oleh t, tanda petik biasanya digantikan dengan titik. Jadi, $y, \ddot{y}$ dan $\dddot{y}$ masing-masing melambangkan $dy/dx, d^2y/dt^2,$ dan d^3y/dt^3.

SOLUSI

Solusi dari persamaan diferensial dalam fungsi y yang tidak diketahui dan variabel independen x pada interval ι, adalah fungsi $y(x)$ yang memenuhi persamaan diferensial secara identik untuk x dalam ι.

Contoh 1.4. Apakah $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$, dimana c_1 dan c_2 adalah konstan sembarang, merupakan solusi dari $y'' + 4y = 0$? Dengan mendiferensiasikan y, kita akan memperoleh

$$y' = 2c_1 \cos 2x - c_2 \sin 2x \text{ dan } y'' = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (-4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x) + 4(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) \\ &= (-4c_1 + 4c_1) \sin 2x + (-4c_2 + 4c_2) \cos 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ memenuhi persamaan diferensial yang dimaksud untuk semua nilai x sehingga merupak solusi dari pola interval $(-\infty, \infty)$.

Contoh 1.5. Tentukan apakah $y = x^2 - 1$ merupakan solusi dari $(y)^4 + y^2 = -1$.

Perhatikan bahwa sisi kiri dari persamaan diferensial tersebut harus non-negatif untuk setiap fungsi real *y(x)* dan setiap *x*, karena merupakan penjumlahan suku-suku yang dipangkatkan dua dan empat, sedangkan sisi kanan dari persamaan tersebut adalah negatif. Karena tidak ada fungsi *y(x)* yang memenuhi persamaan ini, persamaan diferensial yang diberikan disini tidak memiliki solusi.

Kita lihat bahwa beberapa persamaan diferensial memiliki solusi dengan jumlah yang tidak terbatas (Contoh 1.4), sedangkan persamaan-persamaan lain tidak memiliki solusi sama sekali (Contoh 1.5). Terdapat pula kemungkinan bahwa suatu persamaan diferensial hanya memiliki satu solusi. Misalnya saja $(y)^4 + y^2 = 0$, dengan alasan-alasan yang sama seperti didalam Contoh 1.5 hanya memiliki satu solusi $y = 0$.

Sebuah *solusi khusus* dari persamaan diferensial adalah satu solusi. *Persamaan umum* dari persamaan diferensial merupakan kumpulan dari semua solusi.

Contoh 1.6. Dapat ditunjukkan bahwa solusi umum untuk persamaan diferensial dalam Contoh 1.4 adalah (lihat Bab 7 dan 8) $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$. Artinya, setiap solusi tertentu dari persamaan diferensial tersebut memiliki bentuk umum ini. Beberapa solusi tertentu misalnya : $(a)\ y = 5 \sin 2x$ (pilih $c_1 = 5$ dan $c_2 = -3$), $(b)\ y = \sin 2x$ (pilih $c_1 = 1$ dan $c_2 = 0$), dan $(c)\ y = 0$ (pilih $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$).

Solusi umum dari suatu persamaan diferensial tidak selalu dapat diekspresikan melalui satu formula tunggal. Sebagai contoh perhatikan persamaan diferensial $y' + y^2 = 0$, yang memiliki dua solusi tertentu $y = 1/x$ dan $y = 0$.

SOAL-SOAL NILAI AWAL DAN NILAI BATAS

Suatu persamaan diferensial bersama dengan kondisi-kondisi tambahan terhadap fungsi yang dicari dan turunannya, yang semuanya diberikan pada nilai variabel independen yang sama, merupakan *soal nilai-awal*. Kondisi-kondisi tambahan merupakan *kondisi-kondisi awal.* Jika kondisi-kondisi tambahan diberikan untuk lebih dari satu nilai variabel independen, soal tersebut merupakan *soal nilai-batas* dan kondisi-kondisi yang diberikan merupakan *kondisi-kondisi batas*.

Contoh 1.7. Soal $y'' + 2y' = e^x; y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2$ adalah soal nilai-awal, karena kedua kondisi tambahan diberikan pada $x = \pi$. Soal $y'' + 2y' = e^x; y(0) = 1, y(1) = 1$ adalah soal nilai-batas, karena kedua kondisi tambahan diberikan pada nilai $x = 0$ dan $x = 1$ yang berbeda.

Solusi dari soal nilai-awal atau nilai-batas adalah fungsi *y(x)* yang memenuhi persamaan diferensial pada kondisi-kondisi tambahan yang diberikan.

Soal-Soal dengan Penyelesaian

1.1 Tentukanlah orde, fungsi yang dicari, dan variabel independen di dalam persamaan-persamaan diferensial berikut:

a. $y''' - 5xy' = e^x + 1$

⇨ Orde-ketiga, karena turunan orde-tertinggi adalah yang ketiga. Fungsi yang dicari adalah *y*; variabel independennya adalah *x*.

b. $t\ddot{y} + r^2\dot{y} - (\sin t)\sqrt{y} = t^2 - t + 1$

⇨ Orde-kedua, karena turunan orde-tertinggi adalah yang kedua. Fungsi yang dicari adalah *y*; variabel independennya adalah *t*.

c. $s^2 \frac{d^2t}{ds^2} + st\frac{dt}{ds} = s$

⇨ Orde-kedua, karena turunan orde-tertinggi adalah yang kedua. Fungsi yang dicari adalah *t*; variabel independennya adalah *s*.

d. $5(\frac{d^4b}{dp^4})^5 + 7(\frac{db}{dp})^{10} + b^7 - b^5 = p$

⇨ Orde-keempat, karena turunan orde-tertinggi adalah yang keempat. Pemangkatan turunan tidak mengubah jumlah turunan yang terlibat. Fungsi yang dicari adalah b;variabel independennya adalah *p*.

1.2 Tentukanlah orde, fungsi yang dicari, dan variabel independen didalam persamaan-persamaan diferensial berikut:

a. $y\frac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$

⇨ Orde-kedua. Fungsi yang dicari adalah *x*; variabel independennya adalah *y*.

b. $y(\frac{dx}{dy})^2 = x^2 + 1$

⇨ Orde-pertama, karena turunan orde-tertinggi adalah yang pertama walaupun dipangkatkan dua. Fungsi yang dicari adalah *x*; variabel independennya adalah *y*.

c. $2\ddot{x} + 3\dot{x} - 5x = 0$

⇨ Orde-ketiga. Fungsi yang dicari adalah *x*; variabel independennya adalah *t*.

d. $17y^{(4)} - t^6 y^{(2)} - 4{,}2y^5 = 3\cos t$

⇨ Orde-keempat. Fungsi yang dicari adalah y; variabel independennya adalah t. Perhatikan perbedaan notasi antara turunan keempat $y^{(4)}$, dengan tanda kurung, dan pangkat lima y^5, tanpa tanda kurung.

1.3 Tentukan apakah $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ adalah solusi dari $y'' + 2y' + y = 0$.

Dengan mendeferensiasi *y*(*x*), diperoleh

$$y'(x) = -2e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = -e^{-x} - xe^{-x}$$

$$y''(x) = e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai ini kedalam persamaan diferensial yang dimaksud, kita memperoleh

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x} + 2(-e^{-x} - xe^{-x}) + (2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$= 0$$

Jadi, *y*(*x*) merupakan solusi.

Soal – Soal Tambahan

1.4 Tentukanlah (*a*) orde, (*b*) fungsi yang dicari, dan (*c*) variabel independen dari persamaan diferensial berikut ini.

$$(y'')^2 - 3yy' + xy = 0$$

1.5 Tentukanlah (*a*) orde, (*b*) fungsi yang dicari, dan (*c*) variabel independen dari persamaan diferensial berikut ini.

$$y^{(4)} + xy''' + x^2y'' - xy' + \sin y \ = 0$$

1.6 Manakah diantara fungsi-fungsi berikut ini yang merupakan solusi dari persamaan diferensial $y' - 5y = 0$?

a. $y = 5$,

b. $y = 5x$,

c. $y = x^5$,

d. $y = e^{5x}$,

e. $y = 2e^{5x}$,

f. $y = 5e^{2x}$

BAB 2
KLASIFIKASI PERSAMAAN DIPERENSIAL ORDE-PERTAMA

BENTUK STANDAR DAN BENTUK DIPERENSIAL

Bentuk standar dari persamaan diferensial orde-pertama dalam fungsi yo) yang dicari adalah

$$y^I = f(x, y) \qquad (2.1)$$

di mana turunan y^I muncul hanya di sisi kiri dari (2.1). Banyak, walaupun tidak semua, persamaan diferensial orde-pertama dapat dituliskan dalam bentuk standar melalui penyelesaian y^I secara aljabar dan menetapkan f(x, y) sama dengan sisi kanan dari persamaan yang dihasilkan. Si kanan dari (2.1) dapat selalu dituliskan sebagai pembagian dua fungsi lainnya M(x, y) dan -N(x, y). Dengan demikian (2.1) menjadi dy/dx M(x, y)-N(x, y), yang ekuivalen dengan bentuk diferensial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (2.2)$$

PERSAMAAN-PERSAMAAN LINEAR

Perhatikan sebuah persamaan diferensial dalam bentuk standar (2.1). Jika f(x, y) dapat dituliskan sebagai f(x, y) = -

DAFTAR PUSTAKA

Arnold, V. *Ordinary Differential Equations* (MT Press, Cambridge, Mass., 1973).

Boyce, W., & R. Diprima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 3rd ed. (Wiley, New York, 1997).

Brauer, F., & J. Nohel. *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equationss* (Benjamin, New York, 1969).

Braun, M. *Differensial Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics*, 3rd ed. (Springer-Verlag, New York, 1983).

Cole, R. *Theory of Ordinary Differential Equations* (Appleton-Century-Crofts, New York, 1968).

Corduneanu, C. *Principles of Differential and Integral Equations* (Allyn & Bacon, Boston, 1971).

Derrick, W., & S. Grossman. *Elementary Differential Equations with Applications*, 2nd ed. (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981).

Finney, R., & D. Ostberg. *Elementary Differential Equations with Linear Algebra* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1976).

Hirsch, M., & S. Smale. *Differential Equations, Dynamical System, and Linear Algebra* (Academic Press, New York, 1974).

Jordan, D., & P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations* : A Potpourri (Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1970).

Lakin, W., & D. Sanchez. *Topics in Ordinary Differential Equations* : A Potpourri (Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1970).

Miller, R., & A. Michel. *Ordinary Differential Equations* (Academic Press, New York, 1982).

Powers, D. *Boundary Value Problems*, 2nd ed. (Academic Press, New York, 1979).

Sagan, H. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics* (Wiley, New York, 1961).

Weinberger, H. *A First Course in Partial Differential Equations* (Blaisdell, New York, 1965).

BIODATA PENULIS

Nama : Lisa Dwi Afri, M.Pd.

Tempat/Tanggal Lahir : Padang Panjang/12 Mei 1989

Alamat : Jatian Residence no 1, Deli Serdang

Email : lisadwiafri@uinsu.ac.id

Pekerjaan : Dosen Pendidikan Matematika

UIN Sumatera Utara Medan

Pendidikan :

2007-2011 S1 Pendidikan Matematika Univeristas Negeri Padang

2013-2015 S2 Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia

PERSAMAAN DIFERENSIAL ELEMENTER

Persamaan Diferensial memiliki signifikansi yang besar dalam pembelajaran kita karena merupakan dasar untuk menerapkan konsep-konsep dalam kehidupan sehari-hari yang melibatkan turunan fungsi dengan benar. Oleh karena itu, penting bagi kita untuk memiliki kerangka pemahaman yang jelas tentang konsep turunan fungsi.

Buku ini telah disusun sebagai pengantar yang bertujuan untuk memudahkan mahasiswa dan siapa pun yang ingin mempelajari Persamaan Diferensial dengan mudah. Bahasa yang digunakan dalam buku ini sederhana dan dapat dipahami dengan baik oleh mahasiswa. Selain itu, setiap bab juga dilengkapi dengan contoh dan pembahasan untuk memberikan pemahaman yang lebih baik.