KALKULUS DIFERENSIAL

Oleh :
R.Maisaroh Rezyekiyah Siregar, M.Pd.

CV. Prokreatif

KALKULUS DIFERENSIAL

Penulis:
R.Maisaroh Rezyekiyah Siregar, M.Pd.

ISBN:
978-623-8266-13-5

Tata Letak dan Desain Sampul
Tim Prokreatif

Penerbit:
CV. Prokreatif
Anggota IKAPI No. 059/SUT/2021
Perumahan Mansyur USU Regency Blok A4
Medan, Sumatera Utara
Web : www. penerbit. prokreatif. com
Instagram : @pro_kreatif
E-mail : cv.prokreatif@gmail. com

Cetakan Pertama, Juni 2023
viii + 110 halaman, 15,5 x 23 cm

KATA PENGANTAR

Dengan mengucap syukur alhamdulillah atas segala karunia Allah Swt, penulis dapat mempersembahkan Buku ini kepada para pencinta dan pengembang ilmu pengetahuan, khususnya para mahasiswa, pendidik atau calon pendidik. Buku ini berjudul: ”**Kalkulus Diferensial”.** Melalui karya ini, penulis berusaha memaparkan secara gamblang tentang mata kuliah Kalkulus Diferensial

Penulis mengucapkan terima kasih yang tulus dan penghargaan setinggi-tingginya kepada semua pihak yang telah membantu sejak mulai persiapan sampai selesainya penulisan buku ini, semoga Allah Swt memberikan balasan kebaikan tersebut dengan kebaikan yang lebih banyak.

Medan, April 2023

R.Maisaroh Rezyekiyah Siregar, M.Pd.

DAFTAR ISI

BAB I
SISTEM BILANGAN

1.1 Sistem Bilangan

Pernahkah Anda mendengar sistem bilangan? Pada bab ini, akan dibahas berdasarkan definisi.

Definisi 1.1
Bilangan merupakan "sifat abstrak" dari suatu himpunan yang menunjukkan suatu "kuantitatif atau posisi".

Berdasarkan definisi (1) di atas disimpulkan bilangan merupakan hasil pemikiran yang bersifat abstrak dan berada di alam pemikiran, sebab bilangan tidak dapat dilihat secara fisik. Bilangan berbeda dengan angka, sebab angka hanya sebuah simbol untuk mempresentasikan sebuah bilangan.

Definisi 1.2
"Angka (numeral)" : Sebuah angka adalah sebuah simbol untuk mempresentasikan sebuah bilangan.

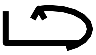
Perhatikan sebuah "tim sepak bola", mudah dipahami jika tim ini merupakan sebuah himpunan "(set) " yang mempunyai sebuah bilangan. Dalam himpunan tersebut berjumlah sebelas pemain, dan kita menggunakan angka "11" untuk merepresentasikan bilangan tersebut. Bilangan sebelas itu tidak eksis secara fisik, itu hanyalah sebuah sifat (property) dari tim sepak bola tersebut. Untuk melihat 'beberapa banyak" unsur/objek di dalam suatu set, digunakanlah "bilangan kardinal".

Definisi 1.3
"Bilangan cardinal" (cardinal number) merupakan sebuah bilangan yang menunjukkan sebuah kuantitas

Untuk mengetahui "posisi relative" dari elemen-elemen suatu himpunan yang telah disusun sesuai urutan tertentu, dapat digunakan bilangan-bilangan ordinal. Contoh pertama, kedua, ketiga, dst …

Definisi 1.4
"Bilangan ordinal" (ordinal numbers) merupakan sebuah bilangan yang menunjukkan posisi

Ada banyak cara yang telah dikembangkan orang dalam merepresentasikan bilangan, di antaranya adalah sebagai berikut.

Hindu- Arab	4	Romawi	IV
Mesir	IIII	Yunani	Δ
Babilonia		China	

bilangan real **R** yang terdiri atas bilangan rasional adalah lapangan yang terurut yang tidak memuat bilangan real seperti $\sqrt{2}, \pi, e$, dsb. Sehingga masih dibutuhkan satu aksioma lagi yaitu aksioma kelengkapan.

1.2.5 Aksioma Kelengkapan

Aksioma kelengkapan pada sistem bilangan real menyatakan bahwa setiap himpunan bagian dari **R** yang terbatas selalu mempunyai batas atas terkecil. Akibatnya setiap himpunan bagian tak kosong dari **R** yang terbatas di bawah selalu mempunyai batas bawah terbesar. Sifat ini tidak dimiliki oleh himpunan bilangan rasional, dan inilah yang membedakan antara himpunan bilangan rasional dan bilangan real.

Definisi 1.10 Himpunan bilangan real adalah lapangan terurut lengkap

Bentuk-Bentuk Aljabar

Bentuk Perpangkatan

Misalkan a sebuah bilangan real,

(a). $a^2 = axa$; $a^3 = axaxa$; $\underbrace{a^n = axaxax\ldots xa}_{\text{n faktor}}$, $n \in N$

(b). Untuk $a \neq 0$ berlaku

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad ; \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Contoh: $6^{-2} = \dfrac{1}{6^2} = \dfrac{1}{36}$; $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10000}$

Untuk setiap bilangan real a dan b yang tidak nol dan untuk setiap bilangan bulat p dan, n maka :

(a)	$a^n x a^p$	=	a^{n+p}		$2^3 x 2^2$	=	2^5	=	32
(b)	$(a^n)^p$	=	a^{np}		$(2^2)^3$	=	2^6	=	64
(c)	$(ab)^n$	=	$a^n.b^n$	Contoh	$(2x5)^3$	=	$2^3 x 5^3$	=	1000
(d)	$\frac{a^n}{a^p}$	=	a^{n-p}		$\frac{3^2}{3^3}$	=	3^{-1}	=	$\frac{1}{3}$
(e)	$\left(\frac{a}{b}\right)^n$	=	$\frac{a^n}{b^n}$		$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	=	$\frac{3^3}{2^3}$	=	$\frac{27}{8}$

Kesamaan Istimewa

Misal $a,b \in R$, maka :

(a). $(a+b)^2 = a^2 + 2.ab + b^2$

Contoh $(n+4)^2 = n \quad + 8n + 16$

(b). $(a-b)^2 = a^2 - 2.ab + b^2$

Contoh $(4x-6)^2 = 16x - 48x + 36$

(c). $(a+b)^3 = a^3 + 3a \ b + 3ab \ + b^3$

Contoh $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36x^2 y + 54xy^2 + 27y^3$

(d). $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

1.2.6 Bentuk Akar

Definisi 1.11

a) Akar Kuadrat dari bilangan positif a ditulis, didefinisikan sebagai bilangan positif x yang memenuhi $x^2 = a$. Dengan kata lain, $\sqrt{a}$ satu-satunya bilangan real positif yang memenuhi $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Contoh. :

$\sqrt{25} = 5$, karena 5 adalah bilangan positif yang memenuhi $x^2 = 25$.

$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$, karena 2 adalah bilangan positif yang memenuhi $x^2 = 4$.

b) Akar kubik dari bilangan real a, ditulis $\sqrt[3]{a}$, didefinisikan sebagai bilangan real x yang memenuhi $x^3 = a$. Contoh:

$\sqrt[3]{8} = 2$, karena 2 adalah bilangan real yang memenuhi $x^3 = 8$

$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$, karena $\frac{2}{3}$ adalah bilangan real yang memenuhi $x^3 = \frac{8}{27}$

$\sqrt[3]{(-27)} = -3$, karena -3 adalah bilangan real yang memenuhi $x^3 = -27$

c) Jika " n bilangan genap positif", akar ke –n dari bilangan positif a, ditulis $\sqrt[n]{a}$, didefinisikan sebagai bilangan positif x yang memenuhi $x^n = a$

Contoh: $\sqrt[4]{81}$ = 3, karena 3 bilangan positif yang memenuhi $x^4 = 81$

d). Jika "n bilangan ganjil positif", n > 1, akar ke-n dari bilangan real a , ditulis $\sqrt[n]{a}$, didefinisikan sebagai bilangan real x yang memenuhi $x^n = a$

Contoh: $\sqrt[5]{(-32)} = -2$, karena -2 bilangan real yang memenuhi $x^5 = -32$.

<u>Sifat-Sifat Bilangan Bentuk Akar Kuadrat</u>

Misal a dan b bilangan real positif, maka :

(a). $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

Contoh : * $\sqrt{15} = \sqrt{5x3} = \sqrt{5}x\sqrt{3}$

(b). $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Contoh * $\sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$

(c). $\frac{0}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

Contoh * $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

1.4. Definit Positif dan Definit Negatif

Bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$; dengan $a \neq 0$, dikatakan bersifat "definit positif" bilamana nilainya <u>selalu positif</u> $\forall x \in R$. Perhatikan bahwa :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}), a \neq 0$$

$$= a(x + \frac{b}{2}a)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}\text{, di mana}$$

$D = b^2 - 4a.c$ disebut deskriminan

bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ bersifat definitif positif jika dan hanya jika a>0 dan D<0.

<u>Diskusikan di Kelas (Dosen Dan Mahasiswa)</u>

1) Berikan definisi bentuk kuadrat yang definit negative dan tentukan syarat-syarat-nya , kemudian berikan contohnya.

2) Uraikan bentuk $x^6 - a^6$ dan $x^6 + a^6$.

Soal Latihan

(1). Pada setiap pernyataan berikut, berikan argumentasinya bila pernyataannya benar, dan berikan contoh penyangkal bila argumentasinya salah

a. bilangan 27 adalah bilangan prima
b. setiap bilangan prima yang lebih besar dari 2 adalah bilangan ganjil
c. bilangan 0 adalah bilangan yang tidak positif dan tidak negatif
d. bilangan 0 adalah bilangan yang tidak genap dan tidak ganjil
e. kuadrat sebuah bilangan ganjil adalah bilangan ganjil
f. jika x bilangan ganjil maka x^2 juga bilangan ganjil
g. jika x^2 bilangan genap maka x juga bilangan genap
h. setiap bilangan yang tidak positif adalah bilangan negatif
i. jika x^2 adalah bilangan bulat kelipatan 3, maka x bilangan bulat kelipatan 3
j. bilangan 0 tidak dapat ditulis dalam bentuk desimal berulang
k. himpunan bilangan real positif tidak mempunyai unsur terkecil
l. jika $S \subseteq R$, maka himpunan $\mathbf{S} = \left\{ \frac{1}{x} : x > 0 \right\}$ tidak mempunyai unsur terbesar
m. $4 + \sqrt{2}$ bukan bilangan rasional
n. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ adalah bilangan irrasional.

(2). Apakah himpunan bilangan bulat B disertai operasi penjumlahan dan perkalian membentuk suatu lapangan (medan)? Jika tidak, sebutkan aksioma-aksioma mana saja yang tidak dipenuhi ?

(3). Dengan memberikan contoh-contoh, tunjukkan bahwa jika $a \in R, a \neq 0$, maka $(-a)$dapat merupakan bilangan positif atau negatif. Hal ini tergantung daripada x.

(4). Ubahlah bilangan-bilangan rasional berikut sebagai hasil bagi bilangan bulat $({}^{p}\!/_{q} \quad p,q \in B, \quad q \neq 0)$.

a. 23,23,23,23……, d. 2,037037037…,
b. -0,039039039…, e. 21,82037037037…,
c. 13,212212212…, f. 5,157404040…,

(5). Nyatakan bilangan-bilangan berikut dalam bentuk desimal

a). $(7x10^{2})+(0x10^{1})+(3x10^{0})+(5x10^{-1})+(3x10^{-2})$

b). $(5x10^{0})+(8x10^{-1})-(7x10^{-2})$

(6). Uraikan bilangan-bilangan berikut dalam bentuk seperti soal no 5

a). 12,0043 c). -5,71 e). 720
b). 214,607 d). 0,0119

(7). Jika m, n, p, q adalah bilangan bulat dengan $p \neq 0, q \neq 0,$ tunjukkan bahwa

a). $\left(\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}\right) \in Q$ *b).* apakah $\left[\left({}^{m}\!/_{p} \right) \Big/ \left({}^{n}\!/_{q} \right) \right] \in Q$

b). $\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{n}{q}\right) \in Q$ Q = himpunan bilangan rasional.

(8). Hitung nilai tiap bentuk berikut (jika ada). Dalam tidak terdefinisi sebutkan.

a). 0 + 0 dan 0 – 0 c). $\frac{0}{4}$ dan $\frac{4}{0}$ e). $\frac{3x0}{4x0}$

b). 0 . 0 dan $\frac{0}{0}$ d). 0 - $\frac{0}{5}$

(9). Bilangan-bilangan manakah yang berikut rasional atau irrasional ?

a). $\sqrt{8}$ c). 3,7225 e). $(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}0$

b). $\sqrt{225}$ d). $2+\sqrt{3}$

(10).Tentukan pernyataan berikut benar atau salah

a). 0 < -12 e). $-\frac{46}{59} > -\frac{5}{7}$

b). 3 < -25 f). $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$

c). $-5 < \frac{1}{3}$

d). $\frac{6}{} < \frac{34}{}$

DISKUSIKAN DI KELAS (DOSEN DENGAN MAHASISWA)

Berhubungan dengan materi selang, pembaca diharapkan mampu menyelesaikan pertanyaan berikut dengan argumentasi yang tepat.

1. Bandingkan sebuah bilangan dengan negatifnya, kapankah negatifnya sama, kapankah negatifnya lebih besar dan kapankah negatifnya lebih kecil dari bilangan tersebut ?
2. Bandingkan sebuah bilangan dengan kubiknya, kapankah kubiknya sama, kapankah kubiknya lebih besar dan kapankah kubiknya lebih kecil dari bilangan tersebut ?
3. Jika a sebuah bilangan real positif, bandingkan antara kuadrat dengan akar kuadratnya, kapankah kuadratnya sama dengan akar kuadratnya, kapankah kuadratnya lebih kecil dari akar kuadratnya, dan kapankah kuadratnya lebih besar dari akar kuadratnya?

1.7. Pertaksamaan Dan Nilai Mutlak

<u>Pertaksamaan</u>

Kita ingat kembali aksioma urutan bilangan real :

i. (i). $a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow b - a > 0$

ii. (ii). $a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow b - a < 0$

iii. (iii). Tepat satu dan hanya satu di antara ketiga kalimat berikut yang benar :

$a < b \quad : \quad a = b \quad : \quad a > b$

Kalimat-kalimat matematika yang berbentuk $a < b$; $b \leq e$; $c > e$ dan $i \geq j$ disebut “ketidaksamaan (pertaksamaan)”.

Kalimat terbuka 3x -2 < 9 adalah <u>benar</u> untuk beberapa bilangan real tertentu, dan <u>salah</u> untuk bilangan real yang lain. Misalnya, jika bilangan real 2 disubtitusikan untuk x maka kalimat tersebut menjadi benar yaitu 6 – 2 < 9, akan

Latihan:

A. Nilai Mutlak

1. Tanpa melakukan penyederhanaan, tuliskan bilangan-bilangan berikut tanpa menggunakan tanda mutlak

a). $|\pi - \sqrt{3}||\pi - \sqrt{3}|$ b). $|2-\sqrt{3}|$ c). $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$

d). $|\sqrt{5}-\pi|$ e). $|10^{-5}|$ f). $-|\sqrt{5}-2|$

g). $-\left|\frac{1-\pi}{1+\pi}\right|$ h). $|-3.10^{-3`}|$

2. Tentukan Himpunan Penyelesaian dari persamaan berikut:

a). $|3x-1|=5$ b). $|3x + 5| = 5x - 3$

c). $|x - 1| = |x + 1|$ d). $|2x + 4| = |x - 1|$

e). $\left|\dfrac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$ f). $\big||x|-x\big| = 0$

3. Tentukan Himpunan Penyelesaian dari pertidaksamaan berikut :

a). $|2x + 3| \leq 2$ b). $|2x + 4| < 5 - 4x$

c). $|5x + 3| \geq 9$ d). $|2x + 3| < |4x - 5|$

e). $|x^2 - 3x + 2| > |4x - 5|$

f). $\big||x|+1\big| \leq 2$

g). $\left|\dfrac{3x}{5}+1\right| < 3$

4. Tentukan Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan berikut :

a). $\left|\dfrac{2x-1}{x}\right| \leq 1$ b). $\left|\dfrac{6-5x}{3+x}\right| \leq \dfrac{1}{2}$

c). $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| \leq \left|\dfrac{2}{x+1}\right|$ d). $\left|\dfrac{5}{2x+1}\right| < \left|\dfrac{1}{2x-2}\right|$

e). $\left|\dfrac{2-3x}{x+3}\right| > \dfrac{1}{4}$ f). $2 \leq x^2 - |x| \leq 6$

g). $(x-4)^2 - 3|x-4| + 2 > 0$

5. Tentukan sebuah pertidaksamaan yang mengandung nilai mutlak yang ekivalen dengan pertaksamaan b > a + c dan b > a – c

6. Tunjukkan bahwa $|b| = \text{maka}\{b,-b\}$; $b \in \Re$

7. Buktikan bahwa:

$$|x-4| < 0{,}006 \Rightarrow 7-0{,}03 < \frac{1}{2}x+5 < 7+0{,}03$$

8. Buktikan $|x-5| < \delta \Rightarrow 14-\delta < 10x-36 < 14+\delta$; dengan δ bilangan positif.

9. Tunjukkan bahwa $0 < |x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$; dengan $x \neq a$

10. Tunjukkan bilangan positif δ sehingga $|x - 3| < \delta \Rightarrow 6{,}9 < 4x - 5 < 7{,}1$

11. Misal $\varepsilon > 0$, tentukan bilangan positif δ sehingga : $|x - 4| < \delta \Rightarrow 18 - \varepsilon < 3x+6 < 18 + \varepsilon$

12. Jika a, b bilangan rill positif, berlaku : $|a - b| < k\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, Buktikan bahwa $a = b$.

13. Jika a, b, c bilangan rill, buktikan bahwa :
$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

BAB II
FUNGSI

2.1 Produk Cartesius

Jika A dan B merupakan dua himpunan tak kosong, maka produk Cartesius himpunan A dan himpunan B adalah himpunan semua pasangan terurut (x,y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ dan ditulis $AxB = \{(x,y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$.

2.2 Relasi

Misal:

A x B adalah produk Cartesius himpunan A dan B, maka relasi atau hubungan R dari A ke B adalah sembarang himpunan bagian dari produk Cartesius A x B.

Pada relasi $R = \{(x,y) \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$ dapat dinyatakan dengan :

a. Himpunan ordinat pertama dari pasangan terurut (x,y) disebut daerah asal (domain).

b. Himpunan B, disebut daerah kawan (kodomain).

c. Himpunan bagian dari B yang bersifat Ry dengan $y \in B$ disebut daerah hasil (range) relasi R. Suatu relasi R

= {(x,y) | x $\in$ A dan x $\in$ B} dinyatakan dengan menggunakan :

❖ **Diagram panah**

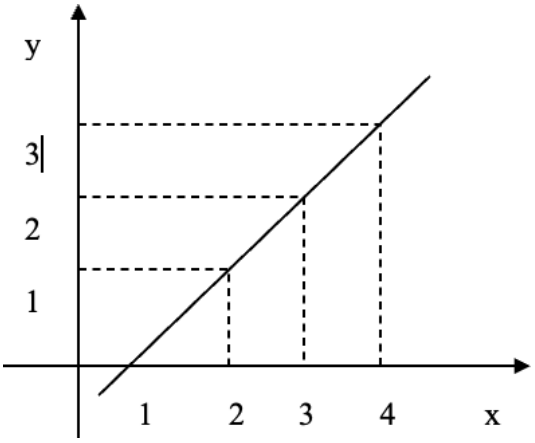
Grafik pada bidang Cartesius, contoh:

Relasi dari himpunan A : {1,2,3,4} ke himpunan B : {0,1,2,3,4} ditentukan oleh f : {(1,0), (2,1), (3,2), (4,3)} dapat dituliskan rumus fungsi f : {(x,y) | y = x-1, x $\in$ A, y $\in$ B}.

Fungsi f disajikan dalam diagram panah sebagai berikut :

Domain: Df : {1,2,3,4}
Kodomain: Kf : {0,1,2,3,4}
Range: Rf : {0,1,2,3}

Fungsi f dapat digambarkan grafik pada bidang kartesius :

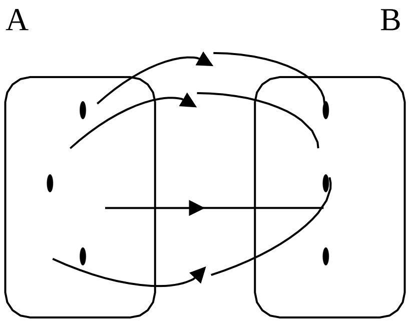


2.3 Fungsi atau Pemetaan

Relasi dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi atau pemetaan, jika dan hanya jika tiap anggota himpunan A berpasangan tepat hanya dengan sebuah anggota himpunan B.

f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B, maka fungsi f dilambangkan dengan $f : A \rightarrow B$

jika $x \in A$ dan $y \in B$, sehingga $(x,y) \in f$, maka y disebut peta atau bayangan dari x oleh fungsi f dinyatakan dengan lambang y : f (x)
(ditunjukkan dalam gambar di samping)



$$f : x \rightarrow y = f(x)$$

y = f (x) : rumus untuk fungsi f
x sebagai variabel bebas
y sebagai variabel tak bebas

Contoh:

Diketahui $f : A \rightarrow B$ dan dinyatakan oleh rumus $f(x) = 2x - 1$

Latihan:

1. Fungsi f dan g di bawah ini merupakan pemetaan dari R ke R. Tentukan rumus untuk fungsi komposisi (f o g) (x) dan (g o f) (x).
    a. $f(x) = 3x - 1$ dan $g(x) = x^2$
    b. $f(x) = 4x + 3$ dan $g(x) = 3 - 1x$
    c. $f(x) = x^2 + 2x$ dan $g(x) = x - 1$
    d. $f(x) = x^3 + 2x$ dan $g(x) = x^2$

2. Fungsi f dan g dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut sebagai berikut:

    f : {(1,-2), (4,-3), (5,0), (7,-1)}
    g : {(-3,3), (-2,1), (-1,5), (0,3)}

    Nyatakan fungsi-fungsi komposisi berikut dalam pasangan terurut:
    a. f o g
    b. g o f
    c. f o g (4)
    d. f o g (7)
    e. g o f (-2)
    f. g o f (1)

3. Fungsi f : R → R dan g : R → R ditentukan dengan rumus :

    $$f(x) = 3x^2 + 2 \text{ dan } g(x) = \frac{2}{x+2}$$

    a. Tentukan daerah asal fungsi f dan fungsi g
    b. Tentukan rumus (f o g) (x) dan (g o f) (x)

c. Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi (f o g) (x)
d. Tentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi (g o f) (x)

4. Diketahui fungsi f : R → R ditentukan dengan rumus

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & \text{jika } x \le 1 \\ 4x, & \text{jika } x > 1 \end{cases}$$

   a. Hitung f (-2), f (-1), f (0), f (1) dan f (2)
   b. Hitunglah (f o f) (-2), (f o f) (-1) dan (f o f) (2)

5. Fungsi f dan g adalah fungsi dari R ke R ditentukan dengan rumus

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{dan} \quad f(x) = \frac{2}{2x+3}$$

   Tentukan:
   a. (f o g) (x)
   b. (g o f) (x)
   c. (f o g) (-1)
   d. (g o f) (2)

2.5. Invers Fungsi

Jika fungsi f : A → B dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(a,b) | a ∈ A dan b ∈ B} maka invers dari fungsi f adalah f^{-1} : B → A ditentukan oleh f^{-1} : {(b,a) | b ∈ B dan a ∈ A}
Invers suatu fungsi tidak selalu merupakan fungsi. Jika invers suatu fungsi merupakan fungsi maka invers fungsi itu disebut fungsi invers.

Contoh:

1. A : {-2, -1, 0, 1} , B : {1, 3, 4}.

   Fungsi f : A → B ditentukan oleh f : {(-2,1), (-1,1), (0,3), (1,4)}.

   Carilah invers fungsi f, dan selidiki apakah invers fungsi f merupakan fungsi.

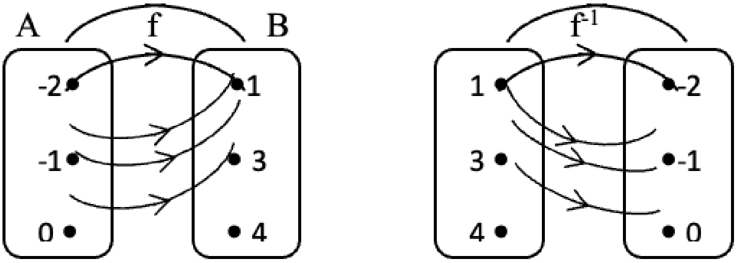
   Jawab :

   Invers fungsi f adalah f^{-1} = B → A ditentukan oleh :

   f^{-1} : {(1,-2), (1,-1), (3,0), (4,1)}.

   Fungsi f dan f^{-1} disajikan dalam gambar diagram panah

Terlihat bahwa f^{-1} adalah relasi biasa (bukan fungsi).



Diskusi Dosen dan Mahasiswa

1. A : {1,2,3} B : {2,4,6,8}. Fungsi g : A → B ditentukan oleh g : {(1,2), (2,4), (3,6)}.

Tentukan invers fs g, dan selidiki apakah invers fungsi g merupakan fungsi ?

BAB III
LIMIT FUNGSI ALJABAR DAN TRIGONOMETRI

3.1. Limit Fungsi

Limit Fungsi. Limit fungsi f(x) merupakan **nilai hampiran** dari f(x) untuk nilai x mendekati nilai tertentu misal x=a. Bentuk umum : Lim f(x) x->a

Jika diketahui dua buah fungsi f(x) dan g(x) masing-masing memiliki sebuah nilai limit, maka jumlah, selisih, perkalian, dan pembagian dari kedua fungsi tersebut juga mempunyai sebuah nilai limit. Di bawah ini sifat-sifat limit fungsi aljabar :

*Limit penjumlahan fungsi merupakan penjumlahan limit masing-masing fungsi.
lim (f(x) +g(x)) = lim f(x) + lim g(x)
*Limit selisih fungsi merupakan selisih limit masing-masing fungsi.
lim (f(x) – g(x)) = lim f(x) – lim g(x)
*Limit perkalian fungsi merupakan perkalian limit masing-masing fungsi.
lim (f(x).g(x)) = lim f(x) . lim g(x)

*Limit pembagian fungsi merupakan pembagian limit masing-masing fungsi.

$$\lim = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

3.2 Limit Fungsi Aljabar

a. Limit hingga merupakan limit yang mempunyai nilai hampiran, dan nilai ini menghampiri nilai tersebut. spt X $\longrightarrow$ 0 atau X $\longrightarrow$ 1 dan lain-lain.

Contoh:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

b. Limit tak hingga adalah limit yang tidak memiliki nilai hampiran. Dan limit tersebut tidak terbatas nilainya. spt limit x $\longrightarrow$ ∞

Contoh:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

3.2.1 Menentukan Limit Fungsi Aljabar Bila Variabelnya Mendekati Nilai Tertentu

Menentukan limit dengan cara di atas tidaklah efisien. Untuk mengatasinya, kita dapat menentukan nilai limit suatu fungsi dengan beberapa cara, yaitu:

a. Substitusi

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh:

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 3}\left(x^2 - 6\right)$!

Penyelesaian :

Nilai limit dari fungsi f(x) = x^2 – 6 dapat kita ketahui secara langsung, yaitu dengan cara menyubstitusikan x =3 ke f(x)

$$\lim_{x \to 3}\left(x^2 - 8\right)$$

$$= 3^2 - 6 = 9 - 6$$

$$= 3$$

Artinya jika x mendekati 3 maka x^2 – 6 mendekati pada 3^2 – 6 =9 – 6 = 3 dengan berikut:

a) Jika f (a) = c, maka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$

b) Jika f (a) = $\frac{c}{0}$, maka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \sim$

c) Jika f (a) = $\frac{0}{c}$, maka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

b. Pemfaktoran

Pemfaktoran digunakan jika fungsi-fungsi tersebut dapat difaktorkan, sehingga menghasilkan nilai terdefinisi.

Contoh:

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$!

Jika x = 2 kita substitusikan maka f (2) = $\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$.

Kita telah mengetahui bahwa semua bilangan yang dibagi dengan 0 tidak terdefinisi. Ini berarti untuk menentukan nilai $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, kita harus mencari fungsi yang baru sehingga tidak terjadi pembagian dengan nol. Untuk menentukan fungsi yang baru itu, kita tinggal memfaktorkan fungsi f (x) sehingga menjadi:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = (x+2).$$

Jadi, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

c. Merasionalkan Penyebut

Cara ini digunakan jika penyebut berbentuk akar dan perlu dirasionalkan, sehingga tidak terjadi pembagian angka 0 dengan 0.

Perhatikanlah contoh berikut!

<u>Contoh:</u>

Tentukan nilai!

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}}$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$$

Latihan:

Hitunglah nilai limit fungsi-fungsi trigonometri berikut!

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x}{5x}$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{4x}$

BAB IV
TURUNAN FUNGSI

4.1 Turunan Fungsi

Definisi turunan : Fungsi $f : x \rightarrow y$ atau $y = f(x)$ mempunyai turunan yang dinotasikan $y' = f'(x)$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ dan di definisikan :

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{h}$$

Notasi kedua ini disebut notasi Leibniz.

<u>Contoh 1:</u>

Tentukan turunan dari $f(x) = 3x - 2$

Jawab

$f(x) = 3x - 2$

$f(x + h) = 3(x + h) - 2$

$\qquad\quad = 3x + 3h - 2$

Sehingga: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3x + 3h - 2) - (3x - 2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x + 3h - 2 - 3x + 2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 3$$
$$= 3$$

Contoh 2:

Tentukan turunan dari $f(x) = 3x^2$

Jawab :

$f(x) = 3x^2$

$f(x + h) = 3\ (x + h)^2$

$= 3\ (x^2 + 2xh + h^2)$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2$

Sehingga : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2) - 3x^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 6x + 3\text{h}$$
$$= 6x + 3.0$$
$$= 6x$$

Latihan

Dengan definisi di atas tentukan nilai turunan berikut:

1. $f(x) = 5 - x$
2. $f(x) = 6x^2 + 3x$

Latihan soal :

Tentukan turunan dari fungsi berikut :

1. $f(x) = \sin x - 3 \cos x$
2. $f(x) = \sin 3x$
3. $f(x) = \cos (3x + \pi)$
4. $f(x) = \tan \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \right)$
5. $f(x) = \sec x$
6. $f(x) = \sin x . \cos x$
7. $f(x) = \cos^2 x$
8. $f(x) = \frac{x}{\sin 2x}$

4.3 Dalil Rantai

Apabila $y = f(g(x))$ maka $y' = f'(g(x)).\ g'(x)$

Dari rumus $y = f(g(x)) \rightarrow y' = f'(g(x)).\ g'(x)$

Jika $g(x) = u \rightarrow g'(x) = \frac{du}{dx}$ dan $f(g(x)) = f(u) \rightarrow y = f(u) \rightarrow$

$\frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x))$

Maka $f'(x) = f'(g(x)).\ g'(x)$ dapat dinyatakan ke notasi Leibniz menjadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

Dan bentuk tersebut dapat dikembangkan jika $y = f(u(v))$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dv} . \frac{dv}{dx}$$

Contoh:

Dengan notasi Leibniz tentukan turunan dari :

a. $y = (x^2 - 3x)^{\frac{4}{3}}$

b. $y = \cos^5 \left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

Jawab:

a. $y = (x^2 - 3x)^{\frac{4}{3}}$

misal : $u = x^2 - 3x \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 3$

$y = u^{\frac{3}{4}} \rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{4}{3} u^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{4}{3} (x^2 - 3x)^{\frac{1}{3}}$

Sehingga :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{4}{3} (x^2 - 3x)^{\frac{1}{3}} . (2x - 3)$$

$$= \left(\frac{8}{x} - 4\right)\left(x^2\right) 3\,3x^{\frac{1}{}}$$

b. $y = \cos^5 \left(\frac{\pi}{3 - 2x}\right)$

Misal: $v = \frac{\pi}{3} - 2x \rightarrow \frac{dv}{dx} = -2$

$u = \cos v \rightarrow \frac{du}{dv} = - \sin v = - \sin \left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

$y = u^5 \rightarrow \frac{dy}{du} = 5u^4 = 5(\cos v)^4$

Sehingga :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} = 5(\cos v)^4 . - \sin \left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) . -2$$

$$= 10\,(\cos v)^4 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$$

$$= 10\,\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right)^4 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$$

DISKUSI DOSEN DAN MAHASISWA

1. Dengan rumus turunan y = f (g(x)) adalah f' (x) = f'(g(x)). g'(x)

   Tentukan turunan dari:

   a. $y = (4x + 5)^{\frac{3}{2}}$

   b. $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

2. Dengan notasi Leibniz tentukan turunan fungsi berikut :

   a. $y = (6 - x^2)^3$

   b. $y = \cos(4x - \pi)$

   c. $y = \sin^{-3}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

Latihan

1. Tentukan gradien garis singgung pada kurva:

   a. $y = x^2 - 6x$ di titik (-1,7)

   b. $y = \sin 2x$ di titik $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva

   a. $y = x^2 - 2x - 3$ di titik (3,1)

   b. $y = x - 2x^2$ di titik dengan absis 1

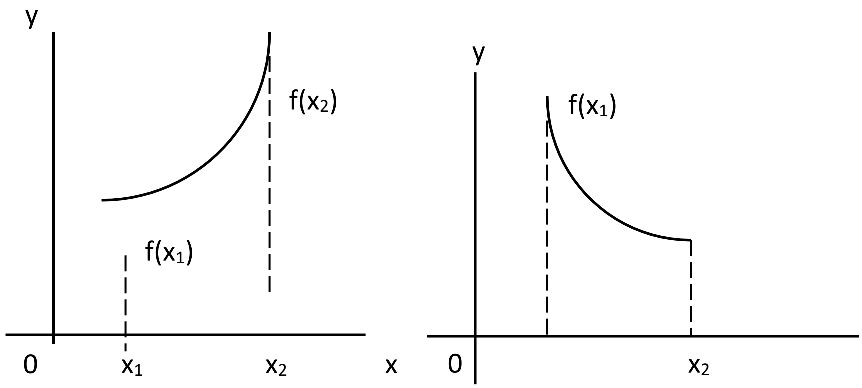
   c. $y = (2-x)(2x + 1)$ di titik dengan ordinat 8

3. Suatu garis singgung pada kurva $y = 3 + 2x - x2$ sejajar dengan garis $4x + y = 3$, tentukan :

   a. Titik singgung

   b. persamaan garis singgung

4.5. Fungsi Naik dan Fungsi Turun



1. Fungsi f(x) disebut fungsi naik pada interval $a \leq x \leq b$, jika untuk setiap x1 dan x_2 dalam interval $a \leq x \leq b$ berlaku :
   $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ (gb. 1)

2. Fungsi f(x) disebut fungsi turun pada interval $a \leq x \leq b$, jika untuk setiap x1 dan x2 dalam interval $a \leq x \leq b$ berlaku :
   $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$ (gb. 2)

3. Fungsi f disebut fungsi naik pada titik dengan absis a, jika $f'(a) > 0$
4. Fungsi f disebut fungsi turun pada titik dengan absis a, jika $f'(a) < 0$

<u>Contoh:</u>
Tentukan pada interval mana fungsi $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ merupakan :
  a. Fungsi naik
  b. Fungsi turun

Jawab:
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$
$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$

a. Syarat fungsi naik
$f'(x) > 0$
$3x^2 + 12x + 9 > 0$
$x^2 + 4x + 3 > 0$
$(x+3)(x+1) > 0$
Harga batas
$x = -3, x = -1$
Jadi fungsi naik pada interval
$x < -1$ atau $x > -3$

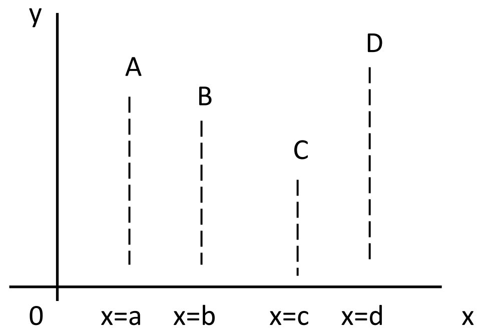
b. Syarat fungsi turun
$f'(x) < 0$
$3x^2 + 12x + 9 < 0$
$x^2 + 4x + 3 < 0$
$(x+3)(x+1) < 0$
Harga batas
$x = -3, x = -1$
Jadi fungsi turun pada interval
$-3 < x < -1$

Latihan:

1. Tentukan pada interval mana fungsi berikut merupakan fungsi naik atau fungsi turun.
   a. $f(x) = x^2 - 6x$
   b. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 20x + 2$
   c. $f(x) = (x^2 - 1)(x+1)$

2. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$ tidak pernah turun.

4.4 Nilai Stasioner



Perhatikan grafik fungsi y = f(x) di atas Pada titik A,B,C dan D dengan absis berturut-turut x = a, x = b, x = c dan x = d menyebabkan f'(x) = 0 maka f(a), f(b), f(c) dan f(d) merupakan nilai – nilai stasioner.

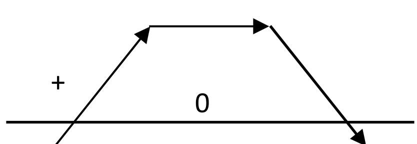
Jenis – jenis nilai stasioner

1. Nilai stasioner di titik A.

   Pada : x < a diperoleh f'(x) > a

   x = a diperoleh f'(x) = a

   x > a diperoleh f'(x) < a



Latihan

Gambarlah grafik :

1. $y = x^2 + 9$
2. $y = x^4 - 2x^2$
3. $y = (x^2 - 1)^2$
4. $x^3 (8 - x)$

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. (1998).Calculus With Analitic Geometry. New York: John Wiley & Sons.

Edwin J. Purcell. Dale Varberg. (2007). Kalkulus dan Geometri Analitis, Edisi kelima, jilid 2. Jakarta: Erlangga.

Faires J.D. (1982). Calculus and Analitic Geometry. Boston: Prindle Webwe & Smith.

Pressley, Andrew. (2001). Elementary Differential Geometry. London: Springer.

Waluya, SB. (2005). Persamaan Diferensial. Yogyakarta: Graha Ilmu.

BIOGRAFI PENULIS

R.Maisaroh Rezyekiyah Siregar, M.Pd. dilahirkan di Nagodang, Labuhanbatu Selatan tahun 1989. Ia menyelesaikan jenjang pendidikan SD, SMP, dan SMA di Kotapinang, Labuhanbatu Selatan. Kemudian ia melanjutkan pendidikan strata 1 di Universitas Islam Negeri Sumatera Utara, jurusan Pendidikan Matematika. Sedangkan strata 2 ia tempuh di Universitas Negeri Medan, jurusan Pendidikan Matematika. Sekarang sedang menempuh program Doktoral di universitas Negeri Medan dengan jurusan yang linear. Saat ini penulis mengabdikan diri sebagai pengajar di Universitas Islam Negeri Sumatera Utara dengan Mata kuliah Edukatif Kalkulus.