DIKTAT
TEORI BILANGAN

(Untuk Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika)

Disusun Oleh:

Ammamiarihta, M.Pd
NIP. 199206142019032034

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
SUMATERA UTARA MEDAN

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUMATERA UTARA
MEDAN
2023

SURAT REKOMENDASI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Dr. Mara Samin Lubis, M.Ed
NIP.	:	197305012003121004
Jabatan / Golongan	:	Lektor Kepala / Pembina (IV/a)
Unit Kerja	:	Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara

menyatakan bahwa diktat saudara

Nama	:	Ammamiarihta, M.Pd
NIP.	:	199206142019032034
Jabatan/ Golongan	:	Asisten Ahli/ Penata Muda Tk.I (IIIb)
Unit Kerja	:	Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara
Judul Diktat	:	Teori Bilangan

telah memenuhi syarat sebagai suatu karya ilmiah (Diktat) dalam mata kuliah Teori Bilangan pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara.

Demikianlah rekomendasi ini diberikan untuk dapat dipergunakan seperlunya.

Medan, 24 Maret 2023
Yang Menyatakan,

Dr. Mara Samin Lubis, M.Ed
NIP. 197305012003121004

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Alhamdulilah, puji syukur kehadirat Allah SWT, dengan rahmat dan izinnya penulisan Diktat Teori Bilangan dapat terlaksana dengan baik. Tujuan pembuatan diktat ini adalah sebagai penunjang dan referensi belajar pada mata kuliah Teori Bilangan diperuntukan bagi mahasiswa program studi Pendidikan Matematika (PMM) UIN Sumatera Utara Medan.

Diktat ini berisi materi mengenai kajian teori bilangan dimana dalam pembahasannya terbatas pada bilangan bulat. Dalam diktat dini membahas definisi dan teorema yang berkaitan dengan bilangan bulat, metode pembuktian dalam matematika, keterbagian, KPK dan FPB, basis bilangan, bilangan prima dan kekongruenan. Disamping itu, pada diktat ini dilengkapi dengan pembuktian teorema, contoh soal dan pembahasan, rangkuman materi, serta soal-soal latihan.

Penyusunan buku ini tidak lepas dari dorongan semua pihak baik berupa moril maupun materil yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu, terutama pada seluruh keluarga besar Program Studi Pendidikan Matematika.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan atas buku ini, oleh sebab itu kritik dan saran terhadap penyempurnaan diktat ini saya harapkan. Penyempurnaan diktat akan dilakukan seiring dengan perkembangan dan respon dari para pemakai utama diktat ini.

Semoga buku ini dapat memperkaya khasanah ilmu pengetahuan, dan bermanfaat bagi para pembaca, khususnya mahasiswa program studi Pendidikan Matematika FITK UINSU.

Penulis,

Ammamiarihta, M.Pd

DAFTAR ISI

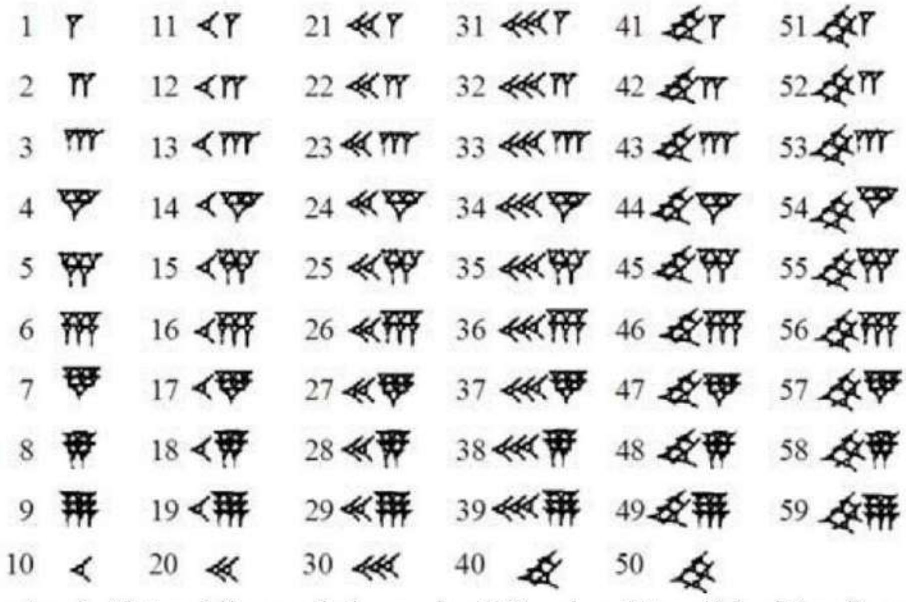
BAB I
PENGANTAR TEORI BILANGAN

A. Sepotong Sejarah

.Teori bilangan merupakan salah satu cabang ilmu dari matematika. Dalam kajian teori bilangan memuat berbagai masalah terbuka dalam kehidupan sehingga mudah dipahami oleh kalangan awam. Menurut sejarah, awal mula penggunaan teori bilangan tidak diketahui secara pasti karena konsepnya muncul sebelum adanya pencatatan sejarah. Konon, pada peradaban primitif bilangan hanya digunakan untuk mengingat jumlah sesuai dengan kebutuhan di zaman itu, namun karena perkembangan zaman dan kebutuhan manusia mulai menyimbolkan bilangan dengan gambar dan huruf tertentu. Serangkaian simbol tersebut kemudian disebut dengan sistem *numerasi*.

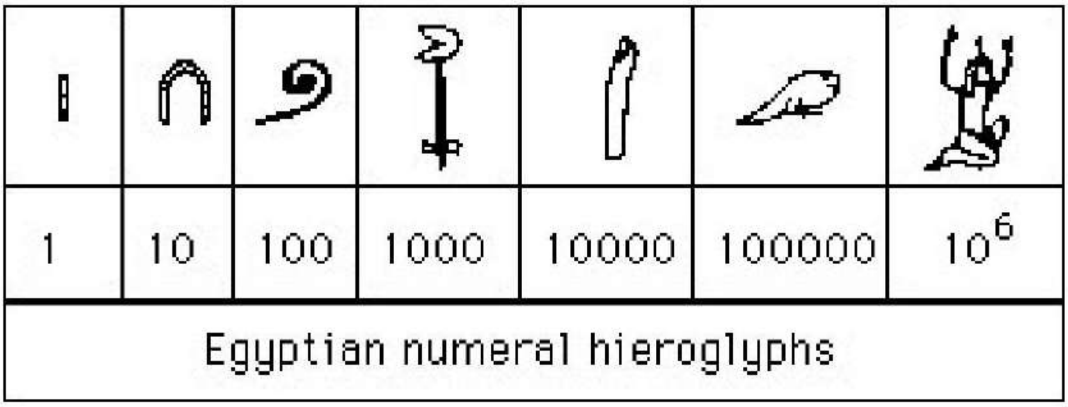
Perkembangan dalam konsep teori bilangan berbeda-beda antar bangsa. Terdapat pula konsep bilangan suatu bangsa merupakan hasil adopsi dan adaptasi bangsa lain, sehingga perkembangannya bergantung pada kemajuan peradaban bangsa dan interaksi dengan bangsa lain. Perkembangan penulisan bilangan mulai dari peradaban bangsa Babilonia, bangsa Mesir, bangsa Cina Kuno, bangsa Maya, bangsa Yunani, bangsa Romawi, bangsa India, hingga bangsa Arab.

Dalam sejarah dikatakan bangsa Babilonia merupakan bangsa pertama yang menggunakan simbolisasi bilangan. Simbolisasi yang dikembangkan oleh bangsa Babilonia adalah simbolisasi sistem bilangan dalam basis 60 atau disebut sistem bilangan *seksagesimal* yang dicampur dengan simbol bilangan basis 10. Dari bangsa inilah yang mengawali penggunaan bilangan 60 detik dalam satu menit, 60 menit dalam satu jam, dan 360 derajat dalam putaran lingkaran penuh. Sistem bilangan ini sudah mengenal tempat dan mulai digunakan sekitar tahun 200 SM (Sebelum Masehi), tetapi dalam penyimbolan ini belum mengenal angka nol. Kemudian sekitar abad ke-2 SM bangsa Babilonia mulai mengenal angka nol yang diwakili dengan spasi.



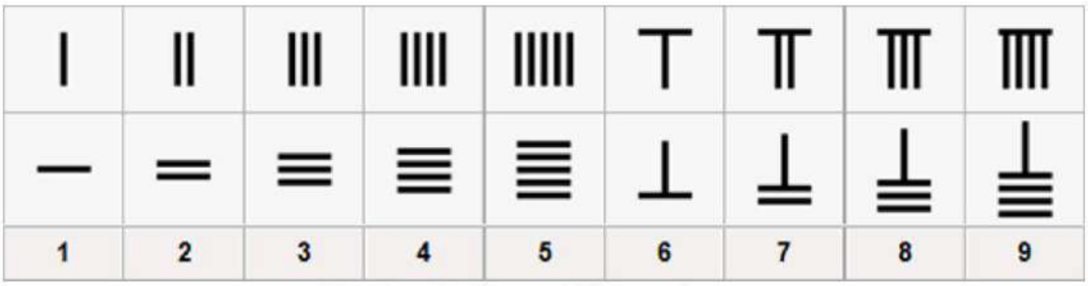
Gambar 1. Sistem bilangan heksagesimal (Sumber: https://id.wikipedia.org)

Penemuan peninggalan bangsa Mesir Kuno menunjukkan bahwa mereka sudah mengenal tulisan dengan menggunakan simbol-simbol. Bangsa Mesir Kuno mengenal tulisan dan sistem bilangan yang disebut dengan sistem *hieroglyph*. Bangsa mesir kuno menggunakan sistem bilangan basis 10 sejak 2.850 SM. Seperti halnya dengan sistem bilangan Babilonia yang masih belum mengenal angka nol, sistem bilangan bangsa Mesir Kuno juga masih memiliki kekurangan pada masalah penempatan dalam penulisan. Masing-masing simbol pada *hieroglyphs* dapat ditulis berulang sesuai yang diinginkan tetapi tidak lebih dari sembilan kali pengulangan. Selain itu, dalam penulisan bilangan juga ditulis dengan leluasa tanpa adanya ketentuan awal penulisan, dapat dimulai dari kiri ke kanan, kanan ke kiri, atas ke bawah, maupun bawah ke atas. Contohnya jika ingin menulis 15.473, maka orang Mesir menggambar satu jari, lima bunga lotus, empat lilitan tali, tujuh U terbalik, dan tiga garis lurus.



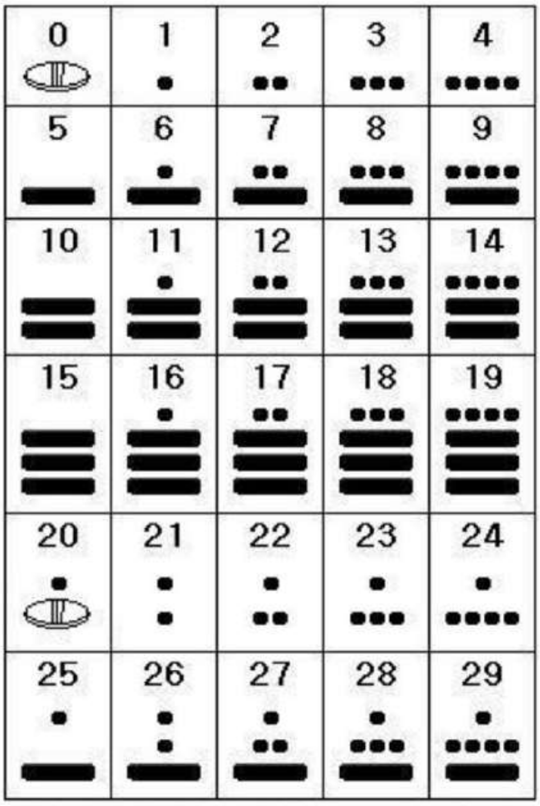
Gambar 2. Sistem bilangan hieroglyphs (Sumber: https://id.wikipedia.org)

Bangsa Cina Kuno menggunakan notasi posisional bilangan yang dikenal dengan bilangan batang atau *rod numeral*. Sistem yang dikenal pada tahun 213 SM ini sudah mengenal nilai tempat/posisi, namun belum mengenal simbol untuk angka nol. Seperti halnya bangsa Babilonia, bangsa Cina Kuno juga menggunakan spasi atau ruang kosong untuk melambangkan angka nol. Bahan yang digunakan sebagai alat dalam perhitungan sistem *rod numeral* berasal dari batang bambu, batang gading, atau besi.



Gambar 3. Sistem bilangan batang
(Sumber: https://omniglot.com/chinese/numerals.htm)

Bangsa Maya adalah kelompok suku yang tinggal di semenanjung Yukatan, Amerika Tengah yang saat ini dikenal dengan Meksiko. Bangsa Maya bagaikan bangsa yang diturunkan dari langit, mengalami zaman yang cemerlang, kemudian lenyap secara misterius. Meskipun bangsa Maya menghilang secara misterius, namum sejarah menyebutkan bangsa ini merupakan suku paling terkenal didunia karena memiliki peradaban yang tinggi di zamannya. Suku yang diceritakan dalam sejarah mencapai kejayaan di bidang teknologinya dan menghasilkan karya peradaban serta peninggalan unik seperti: bangunan (Chichen Itza yang menjadi warisan dunia UNESCO), pertanian (kanal drainase), tanaman jagung dan latex, dan sumurnya yang disebut cenote. Bangsa Maya mengembangkan sistem bilangan yang merupakan hasil adopsi dari tulisan *hieroglyph.* Selain menggunakan sistem bilangan, bangsa Maya juga menggunakan sistem *alphabetic* dalam peradabannya. Tata bilangan ini terdiri dari tiga simbol: bentuk cangkang yang melambangkan nol, titik yang melambangkan satu, dan garis yang melambangkan lima. Sistem angka Maya adalah bilangan basis dua puluh atau disebut *vigesimal.*



Gambar 4. Sistem bilangan vigesimal
(Sumber: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Maya.jpg)

Bangsa Yunani dikenal sebagai bangsa yang teoritikus dan kritis dalam menggali ilmu pengetahuan. Sekitar tahun 600 SM bangsa ini menggunakan sistem *attic* yang dikenal sebagai sistem *acrophonic.* Sistem bilangan *attic* dilambangkan sederhana dengan bentuk seperti tongkat untuk angka 1 sampai angka 4, dan menggunakan simbol tongkat bengkok dan segitiga untuk menyimbolkan bilangan berikutnya. Kemudian mereka mengenal sistem bilangan sebagai hasil adopsi dari bangsa Mesir yang dikembangan menggunakan huruf-huruf *alphabetic.* Oleh karena itu, sistem bilangan bangsa Yunani sering disebut dengan sistem *alphabetic.*

ANCIENT GREEK NUMERALS					
	ACROPHONIC*	ALPHABETIC**		ACROPHONIC*	ALPHABETIC**
1	I	α´	40	ΔΔΔΔ	μ´
2	II	β´	50	𐅄	ν´
3	III	γ´	60	𐅄Δ	ξ´
4	IIII	δ´	70	𐅄ΔΔ	ο´
5	Γ	ε´	80	𐅄ΔΔΔ	π´
6	ΓI	ϝ´	90	𐅄ΔΔΔΔ	ϙ´
7	ΓII	ζ´	100	H	ρ´
8	ΓIII	η´	200	HH	σ´
9	ΓIIII	θ´	300	HHH	τ´
10	Δ	ι´	400	HHHH	υ´
11	ΔI	ια´	500	𐅅	φ´
12	ΔII	ιβ´	600	𐅅H	χ´
13	ΔIII	ιγ´	700	𐅅HH	ψ´
14	ΔIIII	ιδ´	800	𐅅HHH	ω´
15	ΔΓ	ιε´	900	𐅅HHHH	ϡ´
16	ΔΓI	ιϝ´	1000	X	͵α
17	ΔΓII	ιζ´	2000	XX	͵β
18	ΔΓIII	ιη´	3000	XXX	͵γ
19	ΔΓIIII	ιθ´	10,000	M	͵ι
20	ΔΔ	κ´	20,000	MM	͵κ
21	ΔΔI	κ´	50,000	𐅇	͵ν
30	ΔΔΔ	λ´	100,000	𐅇𐅇	͵ρ

Gambar 5. Sistem bilangan bangsa yunani
(Sumber: http://www.saxa-loquuntur.nl/tools/greek-numerals.html)

Dalam sejarah dikatakan sistem bilangan bangsa Romawi berkembang pada awal tahun 100 M. Meskipun demikian, awal mula kemunculan sistem bilangan ini belum diketahui secara pasti. Sistem penomoran ini memakai huruf Latin untuk melambangkan angka numeric. Menurut salah satu teori, perkembangan bilangan Romawi didasarkan pada bilangan 5, yaitu V. Kelemahan dari sistem *numerasi* ini adalah tidak memiliki nilai tempat dan tidak memiliki simbol nol. Angka Romawi masih digunakan hingga saat ini dan menjadi sangat umum digunakan sekarang ini, antara lain digunakan di jam, bab buku, penomoran sekuel film, penomoran seri *event* olahraga seperti Olimpiade. Di dalam bahasa Indonesia, angka Romawi digunakan untuk penulisan bilangan tingkat, contoh abad XX (abad kedua puluh) dan Perang Dunia II (Perang Dunia Kedua).

Roman Numerals: 1 - 1000

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

1	I	11	X1	200	CC
2	II	20	XX	300	CCC
3	III	30	XXX	400	CD
4	IV	40	XL	500	D
5	V	50	L	600	DC
6	VI	60	LX	700	DCC
7	VII	70	LXX	800	DCCC
8	VIII	80	LXXX	900	CM
9	IX	90	XC	1000	M
10	X	100	C	1001	MI

Gambar 6. Sistem bilangan romawi (Sumber: https://www.calculatored.com)

Sistem *numerasi* bangsa India telah digunakan pada tahun 300 SM. Angka yang digunakan pertama kali adalah angka *Brahma*, kemudian mengalami perubahan menjad iangka *Gupta*, setelah itu pada tahun 7 SM angka *Gupta* berkembang menjadi *Nagari* atau *Devanagari*. Sama seperti bangsa lain, pada awalnya bangsa India juga tidak mengenal simbol nol. Mereka menuliskan angka nol dengan menggunakan tanda *kha* yang dilambangkan dengan titik atau lingkaran. Tanda ini kemudian mengalami perkembangan, hingga pada tahun 400 M angka nol muncul untuk pertama kali. Pada tahun 628 seorang ahli astronom India Brahma Gupta menulis sistem astronominya yang disebut dengan *Siddhanta*. Dalam sistem ini, ia menggunakan 9 angka India ditambah dengan angka nol. Sehingga sistem ini telah menjadi sistem bilangan yang lengkap.

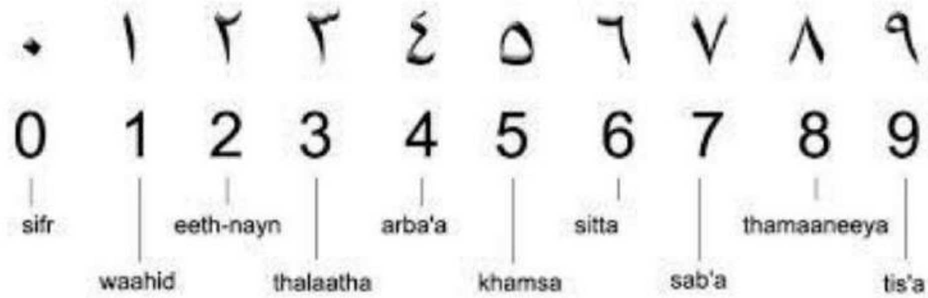
Pada abad ke-7 M, sebelum mengenal angka India bangsa Arab menggunakan huruf untuk melambangkan bilangan. Sistem ini disebut dengan *al-jumal* atau abjad. Kemudian sistem bilangan ini mulai mengalami perkembangan dengan mengadopsi bilangan India ketika masuk ke negara Arab. Sekitar tahun 750 M lambang dan ide nilai suatu tempat sudah dipakai di Baghdad dalam teks bahasa Arab. Ilmuwan Arab yang pertama kali menulis teks berbahasa Latin tentang bilangan India adalah Al-Khawarizmi dengan buku berjudul *Algoritma de Numero Indorum*. Beliau juga dikenal sebagai penemu angka nol yang digunakan sebagai "*Pace Holder*" (Penentu Tempat). Pada awal masuknya angka Hindu-Arab ke Eropa menimbulkan pertentangan. Meskipun demikian, angka Hindu-Arab dapat diterima.

Sampai pada tahun 1500 M angka Hindu-Arab menjadi sistem bilangan resmi yang dipakai di Eropa (Kusaeri, 2017).

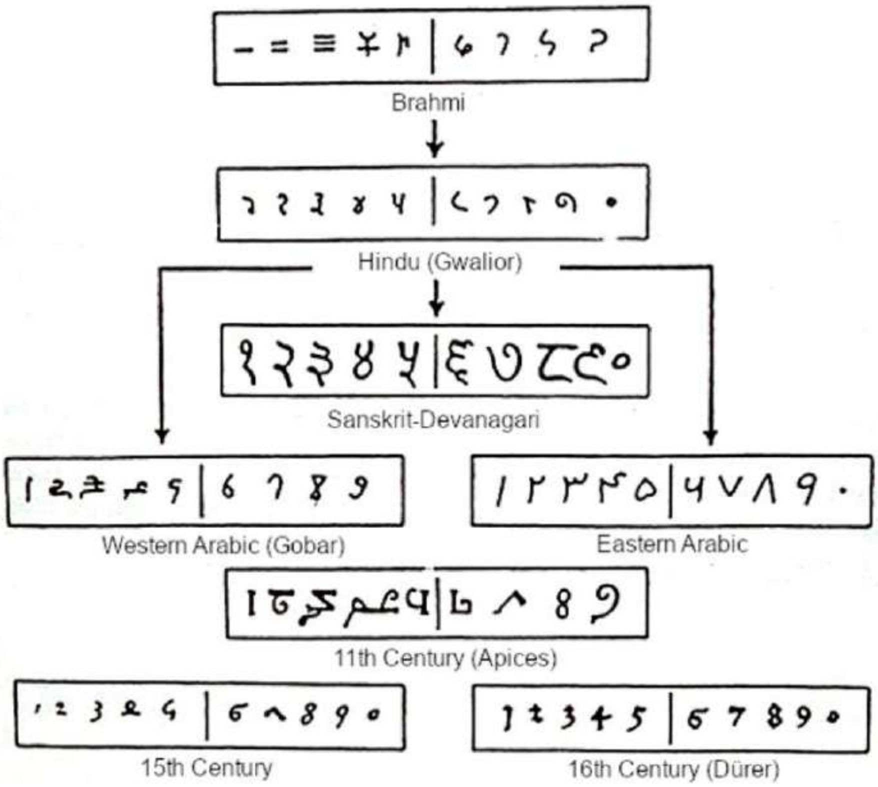
Modern Devanagari	Western Arabic	Words for the cardinal number	
		Sanskrit (wordstem)	Hindi
०	0	*śūnya* (शून्य)	शून्य (*śūny*)
१	1	*eka* (एक)	एक (*ek*)
२	2	*dvi* (द्वि)	दो (*do*)
३	3	*tri* (त्रि)	तीन (*tīn*)
४	4	*catur* (चतुर्)	चार (*cār*)
५	5	*pañca* (पञ्च)	पांच (*pāñc*)
६	6	*ṣaṭ* (षट्)	छह (*chah*)
७	7	*sapta* (सप्त)	सात (*sāt*)
८	8	*aṣṭa* (अष्ट)	आठ (*āṭh*)
९	9	*nava* (नव)	नौ (*nau*)

Gambar 7. Sistem bilangan devanagari (Sumber: https://en.wikipedia.org/wiki/Devanagari_numerals)

Al-Khawarizmi, juga memperkenalkan angka nol melalui karyanya yang monumental, Al-Jabr wa al-Muqbala yang sekarang kita mengenalnya dengan nama Aljabar. Angka nol ini lalu dibawa ke Eropa oleh Leonardo Fibonacci dalam karyanya, Liber Abaci. Semakin dikenal luas di zaman Renaissance dengan tokoh-tokonya, Leonardo da Vinci dan Rene Descartes.



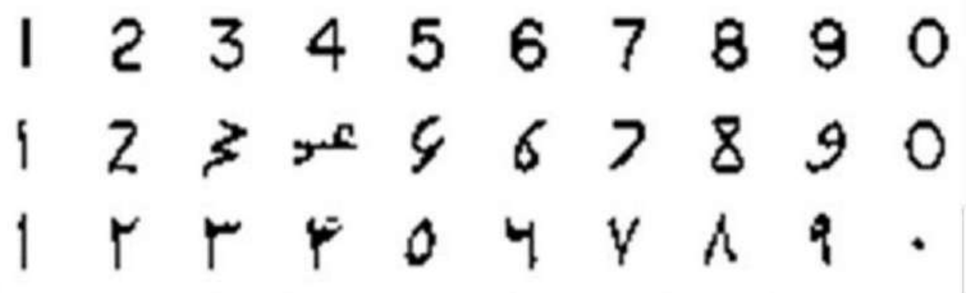
Gambar 8. Sistem bilangan arab (Sumber: https://www.pinterest.com)



Gambar 9. Evolusi Bilangan (Sumber: Wikimedia.org)

Angka Arab barat adalah keturunan dari angka Arab timur, sedangkan angka Arab timur sendiri diadopsi dari angka India dan sistem angka Hindu-Arab yang dikembangkan oleh matematikawan India. Angka India kemudian diadopsi oleh matematikawan Persia di India, dan diteruskan lebih lanjut kepada orang-orang Arab di sebelah barat yang kemudian dikenal dengan sebutan angka Arab timur, karena dipakai oleh orang-orang Arab bagian timur seperti Arab Saudi, Iraq, dan Levant. Bentuk angka-angka Arab timur kemudian mengalami perubahan saat mereka diteruskan ke wilayah Afrika Utara, melalui orang Arab di Afrika Utara tersebut akhirnya dikenal oleh orang-orang Eropa. Akhirnya mencapai bentuk Eropanya (bentuk yang sekarang) pada saat mencapai Afrika Utara, dari sana penggunaan mereka menyebar ke Eropa pada Abad Pertengahan.

Dikarenakan sistem angka ini dikenalkan kepada bangsa Eropa oleh orang-orang Arab, maka dalam istilah bahasa Inggris angka 0123456789 ini dikenal dengan istilah angka Arab (*Arabic numeral*).



Gambar 10. Evolusi bilangan India-Arab Timur-Modern Hindu-Arab
(Sumber: brainacademy.id)

Sebelum sistem Angka Arab (Western) ini diadopsi, Eropa masih menggunakan sistem Angka Romawi. Leonardo Fibonacci termasuk yang mempopulerkan Angka Arab ini ke Eropa melalui bukunya Liber Abaci pada tahun 1202. Kemudian Angka Arab ini mulai populer digunakan di dunia matematika pada abad ke-12. Pada abad ke-15, Angka Arab ini mulai digunakan secara umum menggantikan sistem Angka Romawi (Kusaeri, 2017).

B. Angka dan Bilangan

Salah satu simbol di dalam matematika adalah angka. Dalam KBBI, simbol berarti lambang. Jadi, angka adalah sekadar perlambangan. sebagaiamana lambang-lambang lain, angka juga tidak akan memiliki nilai apapun bila tidak diberi nilai. Angka dalam bahasa inggris disebut dengan "*numeral*". *A numeral is a figure, symbol, or group of figures or symbols denoting a number*. Angka dapat diartikan sebagai suatu symbol konsep matematika yang tersusun dari sebuah atau beberapa digit yang digunakan sebagai lambang dari nilai sebuah bilangan.

Angka yang sering digunakan sekarang yaitu angka hindu-arab dan angka romawi. Angka hindu-arab merupakan angka yang digunakan sekarang yang memiliki 10 simbol digit berbeda, yaitu: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dan 0. Angka romawi angka yang populer di peradaban kuno dengan 7 simbol digit, yaitu: I, V, X, L. C, D, dan M. Setiap angka merupakan simbol atau beberapa simbol digit yang merepresentasikan suatu nilai bilangan.

Contoh:
Angka XII dan 12
Angka XII merupakan tiga digit romawi untuk suatu nilai bilangan “dua belas”
Angka 12 merupakan dua digit hindu-arab untuk suatu nilai bilangan “dua belas”

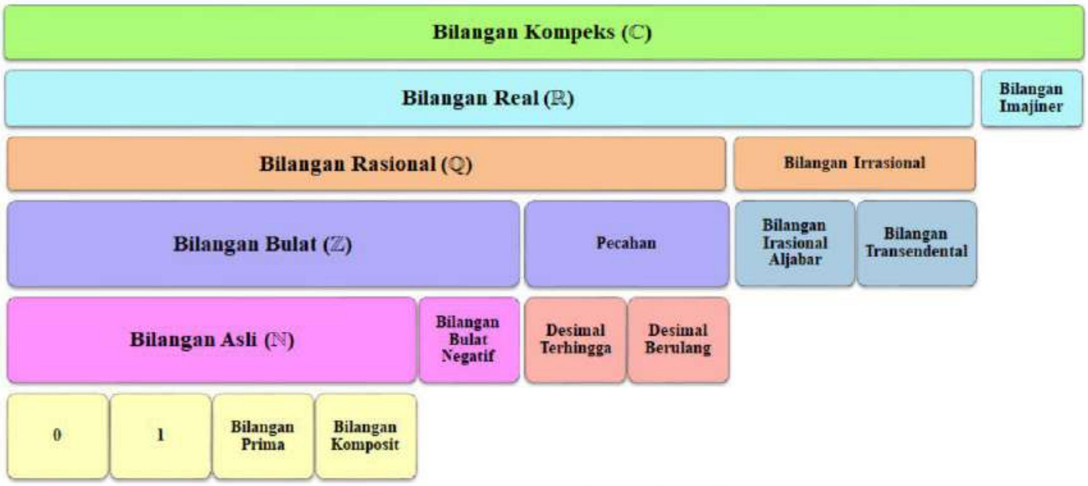
Bilangan dapat diartikan sebagai ekspresi dalam Matematika yang berguna untuk melakukan perhitungan terhadap suatu yang didedinisikan. Bilangan dalam bahasa inggris disebut dengan "*number*" artinya jumlah yang disebutkan. Pada dasarnya angka angka dapat disusun menjadi bilangan karena dijadikan sebagai lambang nilai yang termuat didalamnya. "Bilangan" memberi "Nilai" jumlah terhadap sesuatu yang dihitung, lalu "Angka" digunakan untuk memberikan "Simbol" terhadap nilai tersebut berupa satu atau beberapa "Digit"

Contoh:
Jumlahan 12 buah persegi

1	2	12	
Digit	Digit	Angka	Bilangan

C. Jenis-Jenis Bilangan

Perhitungan dalam ilmu matematika menggunakan beberapa sistem bilangan. Sistem bilangan adalah suatu sistem yang berisi sekumpulan bilangan yang telah didefinisikan karakteristiknya. Istilah sistem bilangan dalam bahasa inggris yaitu "*number system*". Berdasarkan teori bilangan dan himpunan, yang secara garis besar terdapat 5 jenis sistem bilangan dalam ilmu matematika, yaitu bilangan kompleks ($\mathbb{C}$) yang memuat 4 sistem bilangan lain : bilangan real ($\mathbb{R}$), bilangan rasional ($\mathbb{Q}$), bilangan bulat ($\mathbb{Z}$), dan bilangan asli ($\mathbb{N}$).



Gambar 11. Bagan Jenis-Jenis Bilangan

<u>Bilangan Kompleks ($\mathbb{C}$)</u>

Secara umum semua bilangan dalam ilmu matematika merupakan bagian dari bilangan kompleks. Bilangan kompleks disimbolkan dengan $\mathbb{C}$ yang diambil dari kata *Complex* dalam bahasa Inggris. Bilangan kompleks merupakan bilangan yang terdiri atas bagian real dan bagian imajiner. Bilangan kompleks adalah sistem bilangan dalam ilmu matematika dengan notasi a + b*i*, dengan *a, b* merupakan bilangan real dan *i* merupakan bilangan imajiner. Bilangan real a disebut bagian real dari bilangan kompleks, dan bilangan real b disebut bagian imajiner. Jika dalam bilangan kompleks nilai b = 0 maka bilangan kompleks tersebut sama dengan bilangan real a.

Contoh:

$z = 4 + 3i$

Bilangan ini merupakan bilangan kompleks dengan bagian realnya adalah 4 dan bagian imajinernya yaitu 3i.

$g = 5 + 2i$

Bilangan ini merupakan bilangan kompleks dengan bagian realnya adalah 5 dan bagian imajinernya yaitu 2i.

Untuk menuliskan bagian real dapat digunakan simbol Re sedangkan unutk bagian imajiner dapat ditulis dengan Im.

Misalnya pada contoh di atas dituliskan Re(z) = 4 dan Im(z) = 3i.

Bilangan Real ($\mathbb{R}$)

Bilangan real bisa juga disebut bilangan riil. Bilangan real disimbolkan dengan $\mathbb{R}$. Kata real pada bilangan real berasal dari bahasa Inggris "*real*" yang berarti nyata atau dapat ditemukan. Dalam matematika Bilangan real adalah sistem bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk desimal. Sehingga bilangan real dapat dipandang sebagai titi-titik pada garis bilangan tak berhingga. Contoh bilangan real yaitu 1, 0, -2.345, π, e, 75%, ½ , -15, $\sqrt{2}$ dll. Bilangan real terdiri dari bilangan rasional, seperti 1, ½ , -15 dan bilangan irasional e, $\sqrt{2}$, π.

Bilangan Rasional ($\mathbb{Q}$)

Bilangan rasional dapat dilambangkan dengan $\mathbb{Q}$, yang bersasal dari bahasa jerman *quotient*, yang diartikan "rasio". Bilangan rasional adalah sistem bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $^{a}/_{b}$ dengan a, b = bilangan bulat dan b $\neq$ 0. Pecahan $^{a}/_{b}$ jika diubah menjadi suatu pecahan desimal maka angkanya akan berhenti di suatu bilangan tertentu atau jika angkanya tidak berhenti maka akan membentuk suatu pola pengulangan. Contoh : 1/8 = 0,125 dan 5/7 = 0,71428571428571…

Bilangan Bulat ($\mathbb{Z}$)

Bilangan bulat disimbolkan dengan $\mathbb{Z}$ yang berasal dari bahasa Jerman *Zahlen* yang artinya angka. Bilangan bulat adalah sistem bilangan yang merupakan himpunan dari semua bilangan (bukan pecahan) yang terdiri dari bilangan bulat negatif {…, -3, -2, -1}, nol {0}, dan bilangan bulat positif {1, 2, 3,…}. Dengan menggunakan garis bilangan untuk menyatakan representasi bilangan, dan memberi makna terhadap bilangan-bilangan di sebelah kanan nol sebagai bilangan positif serta di sebelah kiri nol sebagai bilangan negatif, maka himpunan bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai: Z = {…, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}.

Bilangan Asli ($\mathbb{N}$)

Kata bilangan asli dalam Bahasa Inggris dituliskan *natural numbers* yang disimbolkan dengan $\mathbb{N}$. Kata asli ini muncul karena berhitung dimulai dari pengalaman alami orang-orang sebelum mengenal angka dengan anggota badan mereka sendiri ataupun benda-benda di sekitarnya. Bilangan asli adalah bilangan yang diperoleh dari kegiatan menghitung untuk mengetahui jumlah satu benda dalam sebuah kelompok, misalkan menghitung jumlah apel dalam keranjang maka perhitungan dimulai dari 1 sehingga umumnya bilangan asli dimulai dari angka 1. Dalam matematika bilangan asli adalah himpunan bagian dari sistem bilangan bulat yang merupakan bilangan bulat positif yang dimulai dari angka 1, yaitu {1, 2, 3, 4,…}. Di dalam bilangan asli juga ditemukan bilangan prima dan bilangan komposit.

BAB II
BILANGAN BULAT

A. Bilangan Bulat

Ada banyak cara penyebutan bagian dari bilangan bulat. Beberapa penulis menyatakan bilangan bulat terdiri atas 2 bagian dan ada yang menyebutkan terdiri atas 3 bagian. Kesemua pendapat tersebut benar karena semua anggota yang disebutkan merupakan bilangan bulat seperti berikut:

a. Himpunan bilangan bulat terdiri atas bilangan bulat negatif {…, -3, -2, -1}, nol { 0 }, dan bilangan bulat positif {1, 2, 3, …}.
b. Himpunan bilangan bulat terdiri atas bilangan bulat positif {1, 2, 3, …} dan bilangan bulat tak positif {…, -3, -2, -1, 0}.
c. Himpunan bilangan bulat terdiri atas bilangan bulat negatif {.., -3, -2, -1} dan bilangan bulat tak negatif {0, 1, 2, 3, …}.
d. Himpunan bilangan bulat terdiri atas bilangan asli {1, 2, 3, …} dan bilangan bulat non positif {…, -3, -2, -1, 0}.
e. Himpunan bilangan bulat terdiri atas bilangan cacah {0, 1, 2, 3, …} dan bilangan negatif {…, -3, -2, -1}.

B. Sistem Bilangan Bulat

Untuk keperluan menghitung, orang dapat melakukan penjumlahan, pengurangan, perkalian, atau pembagian bilangan. Apa yang dilakukan oleh orang itu kemudian disebut sebagai suatu operasi. Pada dasarnya suatu operasi adalah mengambil sepasang bilangan untuk mendapatkan bilangan lain yang tunggal. Bilangan yang diperoleh mungkin merupakan bagian dari atau bukan bagian dari himpunan tertentu.

Definisi – 1
Suatu sistem matematika adalah suatu himpunan bersama-sama dengan satu atau lebih operasi pada himpunan itu.

Notasi
Suatu sistem matematika yang terdiri dari himpunan S dan operasi * ditunjukkan dengan (S, *) Jika # adalah operasi kedua S, maka (S, *, #) adalah sistem matematika yang terdiri dari himpunan S, operasi pertama *, dan operasi kedua #.

Definisi – 2
Ditentukan bahwa * adalah suatu operasi pada himpunan S. Operasi * disebut bersifat:

a) Tertutup, jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $\mathrm{a} * \mathrm{b} = \mathrm{r}$ dimana $r \in S$
b) Komutatif, jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $\mathrm{a} * \mathrm{b} = \mathrm{b} * \mathrm{a}$
c) Assosiatif, jika untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $\mathrm{a} * (\mathrm{b} * \mathrm{c}) = (a * b) * c$

d) Mempunyai unsur identitas, jika untuk setiap $a \in S$ ada $i \in S$, sehingga $a * i = i * a = a$
Sehingga, i disebut unsur identitas operasi *.
e) Memenuhi sifat invers (invertibel), jika untuk setiap $a \in S$ ada $m \in S$, sehingga $a * m = m * a = i$.
Sehingga m disebut invers dari a, dan a disebut invers dari m.

Definisi – 3
Ditentukan bahwa * adalah operasi pertama dan # adalah operasi kedua pada himpunan S. Operasi * bersifat distributif terhadap # jika
$a * (b \# c) = (a * b) \# (a * c)$ untuk setiap $a, b, c \in S$.

Sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan bilangan bulat:

1. Terhadap Operasi Penjumlahan

Sifat	**Uraian**
Tertutup	$\forall\, a, b \in Z$ maka $a + b \in Z$
Komutatif	$\forall\, a, b \in Z$ maka $a + b = b + a$
Asosiatif	$\forall\, a, b, c \in Z$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$
Ada elemen identitas yaitu 0	$\forall\, a \in Z$, $\exists\, 0 \in Z$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$
Setiap elemen memiliki invers yaitu –a invers dari a	$\forall\, a \in Z$, $\exists\, (-a) \in Z$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$
Hukum kanselasi	Jika $a, b, r \in Z$ dan $a + r = b + r$, maka a = b

2. Terhadap Operasi Perkalian

Sifat	**Syarat**
Tertutup	$\forall\, a, b \in Z$ maka $a \times b \in Z$
Komutatif	$\forall\, a, b \in Z$ maka $a \times b = b \times a$
Asosiatif	$\forall\, a, b, c \in Z$ maka $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
Ada elemen identitas yaitu 1	$\forall\, a \in Z$, $\exists\, 1 \in Z$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$
Setiap elemen memiliki invers yaitu a^{-1} invers dari a	$\forall\, a \in Z$, $\exists\, a^{-1} \in Z$ sehingga $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$
Hukum kanselasi	Jika $a, b, r \in Z$, $r \neq 0$ dan $ar = br$, maka a = b

3. Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan
   $\forall\, a, b, c \in Z$ berlaku $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Untuk selanjutnya himpunan bilangan bulat positif ditulis dengan simbol Z^+ atau disebut juga dengan himpunan bilangan asli yang ditulis dengan simbol N. Himpunan bilangan bulat negatif ditulis dengan simbol Z^-.

Dalam mengurutkan bilangan bulat, jika digambarkan dalam garis bilangan semakin kekanan maka bilangannya semakin besar dan semakin ke kiri bilangannya semakin kecil. Sehingga dapat diketahui bahwa bilangan sebelah kanan lebih besar dari bilangan yang di sebelah kirinya. Hubungan antar dua bilangan bulat dan urutannya dapat didefinisikan dan memiliki prinsip berikut ini.

Definisi – 4
Ditentukan $a, b \in Z$
a disebut kurang dari b (atau b disebut lebih dari a), ditulis $a < b$ atau $b > a$, jika ada suatu bilangan bulat positif r sehingga $b - a = r$

Contoh 1
1) $3 > 2$ sebab ada bilangan bulat positif 1 sehingga $3 - 2 = 1$
2) $4 < 11$ sebab ada bilangan bulat positif 7 sehingga $11 - 4 = 7$
3) $a > 0$ untuk setiap $a \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ sebab ada bilangan bulat positif a sehingga $a - 0 = a$

Definisi – 5
Jika $a, b \in Z$, maka $a - b$ didefinisikan dengan $a + (-b)$

Contoh 2
$8 - 5 = 3$ sama artinya dengan $8 + (-5) = 3$

Sifat dasar tentang urutan bilangan bulat:
a) Sifat tertutup pada bilangan bulat positif;
   Jika dua buah bilangan bulat positif diberi operasi penjumlahan dan perkalian maka hasilnya juga berupa bilangan bulat positif.
   Jika $a, b \in Z^+$ maka $a + b \in Z^+$ dan $ab \in Z^+$

b) Hukum Trikotomi;
   Untuk setiap $a \in Z$ maka terdapat tiga kemungkinan yaitu: $a > 0$ atau $a = 0$ atau $a < 0$

Contoh 3
Buktikan jika $\forall\, a, b, r \in Z$, $a < b$ dan $r > 0$, maka $ar < br$
Bukti:

$a < b$	diketahui pada soal
$b - a > 0$	definisi – 4
$r(b - a) > 0$	diketahui soal $r > 0$
$rb - ra > 0$	sifat distributif
$ra < rb$	definisi – 4
$ar < br$	sifat komutatif

Well Ordering Principle (Gallian, 2010)

a) Suatu himpunan H dikatakan terurut rapi (well ordered) jika setiap himpunan bagian dari H yang tidak kosong mempunyai unsur terkecil.
b) a dikatakan unsur terkecil dari himpunan S jika a kurang dari atau sama dengan x untuk setiap $x \in S$ atau $a \leq x, \ \forall x \in S$ dan $a \in N$

Contoh 4

1) $S = \{2,3,8\}$ mempunyai unsur terkecil 2 sebab $2 \leq x$ untuk setiap $x \in S$, yaitu $2 \leq 2$, $2 \leq 3$, dan $2 \leq 8$
2) $H = \{5\}$ mempunyai unsur terkecil 5 sebab $5 \leq x$ untuk setiap $x \in H$, yaitu $5 \leq 5$

Contoh 5

1) $S = \{2,3,8\}$ adalah himpunan yang terurut rapi sebab setiap himpunan bagian dari S yang tidak kosong, yaitu $\{2\}, \{3\}, \{8\}, \{2,3\}, \{2,8\}, \{3,8\}$ dan $\{2,3,8\}$ mempunyai unsur terkecil.
   $\{2\}$ mempunyai unsur terkecil 2;
   $\{3\}$ mempunyai unsur terkecil 3;
   $\{8\}$ mempunyai unsur terkecil 8;
   $\{2,3\}$ mempunyai unsur terkecil 2;
   $\{2,8\}$ mempunyai unsur terkecil 2;
   $\{3,8\}$ mempunyai unsur terkecil 3;
   $\{2,3,8\}$ mempunyai unsur terkecil 2.

2) $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli yang terurut rapi sebab semua himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ yang tidak kosong mempunyai unsur terkecil.

3) Z adalah himpunan yang tidak terurut rapi sebab ada himpunan bagian dari Z yang tidak kosong dan tidak mempunyai unsur terkecil, misalnya {…,-3, -2, -1, 0,1,2}

4) Z^+ adalah himpunan bilangan bulat positif yang terurut rapi sebab semua himpunan bagian dari Z+ yang tidak kosong mempunyai unsur terkecil, misalnya {1, 2, 3, 4, 5, … }

Definisi – 6

Bilangan riil terbesar [x] adalah bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x, yaitu [x] adalah bilangan bulat yang memenuhi [x] ≤ x ≤ [x] + 1.
Catatan:

Fungsi $f(x) = [x]$ disebut fungsi bilangan bulat terbesar, atau juga disebut dengan fungsi lantai (floor function).

Fungsi $g(x) = \lceil x \rceil$ disebut fungsi atap (ceiling function), dimana $\lceil x \rceil$ adalah bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan x (Jabar, 2013).

Contoh 6

1) [2/3] = 0
2) [– 2/3] = – 1
3) [7/3] = 2

4) [1,3] = 1
5) [π] = 3
6) $\lceil 2/3 \rceil = 1$
7) $\lceil -7/3 \rceil = -2$

C. Rangkuman

Dari paparan materi yang telah disajikan pada BAB II, dirangkum garis besar materi yang dibahas adalah definisi, sifat, contoh tentang konsep bilangan bulat, sistem bilangan bulat, sifat-sifat operasi pada bilangan bulat, prinsip *well ordering* dan hungan antar dua bilangan bulat.

1. Bilangan bulat disimbolkan dengan $\mathbb{Z}$ = Z = {…, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}
2. **Definisi – 1**
   Suatu sistem matematika adalah suatu himpunan bersama-sama dengan satu atau lebih operasi pada himpunan itu.
3. **Notasi**
   Suatu sistem matematika yang terdiri dari himpunan S dan operasi * ditunjukkan dengan (S, *) Jika # adalah operasi kedua S, maka (S, *, #) adalah sistem matematika yang terdiri dari himpunan S, operasi pertama *, dan operasi kedua #.
4. **Definisi – 2**
   Ditentukan bahwa * adalah suatu operasi pada himpunan S. Operasi * disebut bersifat:
   a) Tertutup, jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $\mathrm{a} * \mathrm{b} = \mathrm{r}$ dimana $r \in S$
   b) Komutatif, jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $\mathrm{a} * \mathrm{b} = \mathrm{b} * \mathrm{a}$
   c) Assosiatif, jika untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $\mathrm{a} * (\mathrm{b} * \mathrm{c}) = (a * b) * c$
   d) Mempunyai unsur identitas, jika untuk setiap $a \in S$ ada $i \in S$, sehingga $a * i = i * a = a$
      Sehingga, i disebut unsur identitas operasi *.
   e) Memenuhi sifat invers (invertibel), jika untuk setiap $a \in S$ ada $m \in S$, sehingga $a * m = m * a = i$.
      Sehingga m disebut invers dari a, dan a disebut invers dari m.
5. **Definisi – 3**
   Ditentukan bahwa * adalah operasi pertama dan # adalah operasi kedua pada himpunan S. Operasi * bersifat distributif terhadap # jika
   $a * (b \# c) = (a * b) \# (a * c)$ untuk setiap $a, b, c \in S$.
6. **Definisi – 4**
   Ditentukan $a, b \in Z$
   a disebut kurang dari b (atau b disebut lebih dari a), ditulis $a < b$ atau $b > a$, jika
   ada suatu bilangan bulat positif r sehingga $b - a = r$
7. **Definisi – 5**
   Jika $a, b \in Z$, maka $a - b$ didefinisikan dengan $a + (-b)$
8. **Well Ordering Principle**
   Suatu himpunan H dikatakan terurut rapi (well ordered) jika setiap himpunan bagian dari H yang tidak kosong mempunyai unsur terkecil. a dikatakan unsur

terkecil dari himpunan S jika a kurang dari atau sama dengan x untuk setiap $x \in S$ atau $a \leq x, \ \forall x \in S$ dan $a \in N$

9. **Definisi – 6**
   Bilangan riil terbesar [x] adalah bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x, yaitu [x] adalah bilangan bulat yang memenuhi [x] ≤ x ≤ [x] + 1.

D. Latihan

1. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan $a \in Z$, berlaku :
   a) $0 \times a = a \times 0 = 0$
   b) $(-1) \times a = a \times (-1) = -a$
   c) $-(-a) = a$
   d) $(-1) \times (-1) = 1$
2. Buktikan bahwa tidak ada bilangan bulat positif kurang dari 1
3. Tentukan apakah himpunan-himpunan berikut terurut rapi
   a) A = {-2, 3, 4}
   b) Himpunan bilangan bulat negative
   c) Himpunan bilangan cacah
   d) Himpunan bilangan rasional
   e) Himpunan bilangan riil

4. Carilah nilai-nilai dari:
   a) $[0{,}15]$
   b) $\left[\frac{7}{9}\right]$
   c) $\left[-5\frac{2}{3}\right]$
   d) $\lceil -1{,}6 \rceil$
   e) $\left\lceil \frac{3}{5} \right\rceil$
5. Jika k adalah suatu bilangan bulat, maka buktikan bahwa:
   $[x + k] = [x] + k$ untuk setiap bilangan riil x

BAB III
METODE PEMBUKTIAN DALAM MATEMATIKA

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan dengan penalaran deduktif yang mengandalkan logika dalam memastikan kebenaran dari suatu pernyataan. Proses penemuan dalam matematika dimulai dengan pencarian pola dan struktur, contoh kasus dan objek matematika lainnya. Selanjutnya, semua informasi dan fakta yang terkumpul secara individual ini dibangun suatu koherensi untuk kemudian disusun suatu konjektur. Setelah konjektur dapat dibuktikan kebenarannya atau ketidakbenaranya maka selanjutnya ia menjadi suatu teorema. Pernyataan-pernyataan matematika seperti definisi, teorema dan pernyataan lainnya pada umumnya berbentuk kalimat logika, dapat berupa implikasi, biimplikasi, negasi, atau berupa kalimat berkuantor. Operator logika seperti and, or, not, xor juga sering termuat dalam suatu pernyataan matematika. Jadi membuktikan kebenaran suatu teorema tidak lain adalah membuktikan kebenaran suatu kalimat logika matematika (Jupri, 2020).

Matematika mengenal tiga metode yang umum digunakan dalam membuktikan kebenaran suatu pernyataan atau logika, yaitu pembuktian langsung, pembuktian tak langsung, dan induksi matematika.

A. Metode Pembuktian Langsung

Pembuktian langsung merupakan metode pembuktian yang menggunakan alur maju, yang di mulai dari pendefinisian, proses pembuktian, hingga menghasilkan kesimpulan. Dalam pembuktian dengan alur maju, pernyataan-pernyataan sebelumnya harus didefinisikan terlebih dahulu dengan benar agar dapat menghasilkan kesimpulan yang benar. Metode pembuktian langsung ini biasanya digunakan untuk membuktikan pernyataan berbentuk implikasi. Pernyataan implikasi biasanya berbentuk "$jika\ p\ maka\ q$" sehingga dalam membuktikannya kita menggunkaan pernyataan p sebagai informasi, kemudian informasi tersebut diolah sehingga diperoleh pernyataan q.

Contoh 1
Buktikan pernyataan:
Jika a adalah bilangan ganjil, maka a^2 juga bilangan ganjil

Bukti:
Jika a adalah bilangan ganjil, maka a dapat dituliskan dengan

$$a = 2n + 1, \quad \text{dengan } n \in Z$$

maka,

$$a^2 = (2n+1)^2$$
$$a^2 = 4n^2 + 4n + 1$$
$$a^2 = (4n^2 + 4n) + 1 \qquad \text{Sifat asosiatif}$$
$$a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1 \qquad \text{Sifat distributif}$$

Karena $n \in Z$ maka hasil kali dua bilangan bulat adalah bilangan bulat, dan hasil penjumlahan dua bilangan bulat juga bilangan bulat (sifat ketertutupan) maka dapat dituliskan $(2n^2 + 2n) = m$ dengan $m \in Z$.
Sehingga dapat dituliskan.

$$a^2 = m + 1, \quad \text{dengan } m \in Z$$

Yang artinya a^2 merupakan bilangan ganjil (Terbukti).

Contoh 2
Buktikan pernyataan:
Hasil penjumlahan dua bilangan genap adalah bilangan genap

Bukti:
Jika dua bilangan a dan b adalah bilangan genap, maka a dan b dapat dituliskan dengan

$$a = 2n, \text{ dan } b = 2m \quad \text{dengan} \quad n, m \in Z$$

maka,

$$a + b = 2n + 2m$$
$$a + b = 2(n + m) \quad \text{Sifat distributif}$$

Karena $n, m \in Z$ maka hasil penjumlahan dua bilangan bulat juga bilangan bulat (sifat ketertutupan) maka dapat dituliskan $n + m = p$ dengan $p \in Z$.
Sehingga dapat dituliskan.

$$a + b = 2p, \quad \text{dengan } p \in Z$$

Yang artinya $a + b$ merupakan bilangan genap
Terbukti bahwa penjumlahan dua bilangan genap adalah bilangan genap.

B. Metode Pembuktian Tak Langsung

Beberapa pernyataan matematika tidak dapat dibuktikan kebenarannya dengan metode pembuktian langsung yaitu dengan alur maju. Dalam pembuktian tak langsung, proses pembuktian dapat dilakukan dengan memulai proses dengan mengubah susunan kalimat pernyataannya ataupun menegasikan pernyataan.

Ada dua cara pembuktian pernyataan matematis dengan metode pembuktian tak langsung. Pertama, pembuktian dengan menggunakan kontraposisi. Kedua, pembuktian dengan menggunakan kondradiksi.

Pembuktian dengan Kontraposisi

Kontraposisi biasa juga disebut kontrapositif, yaitu suatu pernyataan balikan yang memiliki nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan awal yang ingin dibuktikan. Pembuktian dengan kontraposisi ini memanfaatkan prinsip logika matematika dalam penggunaannya. Jika implikasi yang akan dibuktikan adalah $jika\ p\ maka\ q$ maka dengan metode ini pembuktian dilakukan dengan membuktikan kalimat kontraposisinya yaitu $jika\ bukan\ q\ maka\ bukan\ p$. Dalam logika matematika dituliskan dengan implikasi $p \rightarrow q$ kontraposisinya $\sim q \rightarrow \sim p$ dimana simbol "~" disebut negasi/ingkaran/kebalikan.

Contoh 3
Buktikan bahwa jika $3n + 2$ bilangan ganjil, maka n bilangan ganjil

Bukti:
Bentuk ini sulit dibuktikan secara langsung, maka akan dibuktikan dengan kontraposisi.

Dari pernyataan
$3n + 2$ bilangan ganjil bentuk negasinya menjadi $3n + 2$ bukan bilangan ganjil (bilangan genap)
n bilangan ganjil bentuk negasinya menjadi n bukan bilangan ganjil (bilangan genap)
Sehingga kontraposisinya menjadi:
Jika n bilangan genap maka $3n + 2$ bilangan genap
Kita buktikan pernyataan kontraposisinya dengan cara pembuktian langsung, jika pernyataan kontraposisi terbukti benar maka pernyataan awal juga bernilai benar.
Dari pernyataan

$$n \text{ bilangan genap maka } \quad n = 2k \quad \text{dengan } k \in Z$$

maka,

$$\begin{aligned} 3n + 2 &= 3(2k) + 2 \\ &= 2(3k) + 2 \\ &= 2(3k + 1) \\ &= 2p \quad , \qquad p \in Z \end{aligned}$$

Yang artinya $3n + 2$ merupakan bilangan genap
Terbukti kontraposisi Jika n bilangan genap maka $3n + 2$ bilangan genap
Artinya pernyataan jika $3n + 2$ bilangan ganjil, maka n bilangan ganjil adalah benar.

Pembuktian dengan Kontradiksi

Kontradisksi mengandung kata "kontra" yang artinya berlawanan atau bertolak belakang. Dalam pembuktian kontradiksi memanfaatkan prinsip logika matematika dalam penggunaannya. Dalam logika matematika implikasi $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ pernyataan tersebut ekivalen atau bernilai sama. Sehingga Jika implikasi yang akan dibuktikan adalah $jika\ p\ maka\ q$ maka dengan metode ini pembuktian dilakukan dengan membuktikan kalimat kontradiksinya yaitu $jika\ bukan\ q\ maka\ bukan\ p$.

Contoh 4
Buktikan $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional

Bukti:
Untuk membuktikan pernyataan tersebut dengan cara kontradiksi maka diasumsikan $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional.

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai a / b di mana a, b ϵ bilangan bulat dan b $\neq$ 0. Agar dapat dinyatakan sebagai a / b maka faktor persekutuan terbesar antara a dan b haruslah 1 atau dikatakan a dan b saling prima. Sehingga :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$
$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$2b^2 = a^2$$
$$a^2 = 2b^2$$

Diperoleh bahwa a^2 adalah bilangan genap yang artinya a juga bilangan genap. Karena a bilangan genap berarti b haruslah bilangan ganjil, karena diawal diasumsikan a dan b saling prima.
Karena diperoleh a bilangan bulat, dapat dituliskan a = 2k, k ϵ bilangan bulat.

$$2b^2 = a^2$$
$$2b^2 = (2k)^2$$
$$2b^2 = 4k^2$$

Jika kita asumsikan k^2 = n, maka :

$$2b^2 = 4n$$
$$b^2 = 2n$$

Diperoleh bahwa b^2 adalah bilangan genap, yang artinya b juga bilangan genap. Sehingga kontradiksi dengan asumsi bahwa b ganjil. Hal ini membuktikan bahwa asumsi $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional adalah salah sehingga $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional terbukti benar.

C. Induksi Matematika

Induksi Matematik merupakan salah satu proses pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli. Dalam pembuktian dengan induksi matematik terdiri dari dua langkah yaitu langkah basis induksi dan langkah induksi.

Langkah- langkah pembuktian dengan induksi matematik :
Misalkan p(n) adalah suatu preposisi yang akan dibuktikan benar untuk setiap bilangan asli n.
Langkah (1) (Basis Induksi):
Ditunjukkan bahwa pernyataan p(n) benar untuk n = 1 [ditunjukkan p(1) benar]
Langkah (2) (Langkah Induksi):
Diasumsikan bahwa pernyataan p(n) benar untuk suatu bilangan asli k [diasumsikan p(k) benar] Selanjutnya ditunjukkan bahwa p(k+1) benar.

Jika langkah (1) dan (2) berhasil ditunjukkan benar, maka disimpulkan bahwa p(n) benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 5

Buktikan pernyataan berikut : p(n) $\rightarrow 2^n < 2^{n+1}$ untuk setiap bilangan asli n

Bukti :

Langkah (1) : Akan ditunjukkan p(1) benar

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(1) \rightarrow\ & 2^1 < 2^{1+1} \\ & 2^1 < 2^2 \\ & 2 < 4 \end{aligned}$$

Langkah (2) :

- Diasumsikan p(k) benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu:
  p(k) $\rightarrow 2^k < 2^{k+1}$ benar

- Akan ditunjukkan untuk p(k + 1) benar, yaitu:
  $\mathrm{p}(k+1) \rightarrow 2^{k+1} < 2^{k+2}$
  Ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2^k &< 2^{k+1} \\ 2^k.2 &< 2^{k+1}.2 \\ 2^k.2^1 &< 2^{k+1}.2^1 \\ 2^{k+1} &< 2^{k+1+1} 2^{k+1} < 2^{k+2} \end{aligned}$$

  Karena langkah (1) dan (2) berhasil ditunjukkan benar, maka disimpulkan bahwa $2^n < 2^{n+1}$ untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 6

Buktikan deret $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ Untuk setiap bilangan asli n

Bukti :

$$p(n) \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Langkah (1) : Akan ditunjukkan p(1) benar

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(1) \rightarrow 1 &= \frac{1}{2}1(1+1) \\ 1 &= \tfrac{1}{2}(2) \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Langkah (2) :

- Diasumsikan p(k) benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu:
  $\mathrm{p}(k) \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$ benar

- Akan ditunjukkan untuk p(k + 1) benar, yaitu:
  $$\mathrm{p}(k+1) \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$
  Ditunjukkan sebagai berikut:
  $$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) &= [1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k] + (k+1) \\ &= \left[\tfrac{1}{2}k(k+1)\right] + (k+1) \end{aligned}$$

$$= (k+1)\left[\frac{1}{2}k+1\right]$$
$$= (k+1)\left[\ \frac{1}{2}\ (k+2)\ \right]$$
$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Karena langkah (1) dan (2) berhasil ditunjukkan benar, maka disimpulkan bahwa : $1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ Untuk setiap bilangan asli n

Contoh 7
Buktikan untuk setiap bilangan asli n berlaku $7^n - 2^n$ selalu habis dibagi 5

Bukti :

$p(n) \rightarrow 7^n - 2^n$ Habis dibagi 5

Langkah (1) : Akan ditunjukkan p(1) benar

$$\begin{aligned} p(1) &\rightarrow 7^1 - 2^1 \\ &\quad 7-2 \\ &\quad 5 \quad \text{Habis dibagi 5} \end{aligned}$$

Langkah (2) :

- Diasumsikan p(k) benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu:
  $p(k) \rightarrow 7^k - 2^k$ Habis dibagi 5 benar

- Akan ditunjukkan untuk $\mathrm{p(k+1)}$ benar, yaitu:
  $\mathrm{p(k+1)} \rightarrow 7^{k+1} - 2^{k+1}$ Habis dibagi 5
  Ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7^k.7^1 - 2^k.2^1 \\ &= 7^k.\ 7 - 2^k.2 \\ &= 7^k.\ 7 - 2^k.7 + 2^k.7 - 2^k.2 \\ &= 7(7^k - 2^k) + 2^k(7-2) \\ &= 7(7^k - 2^k) + 2^k.5 \end{aligned}$$

✓ **Dari $7(7^k - 2^k)$**

Karena telah diasumsikan bahwa $7^k - 2^k$ Habis dibagi 5
Maka hasil kali $(7^k - 2^k)$ dengan 7 yaitu $7(7^k - 2^k)$ juga habis dibagi 5. (Sifat bilangan bulat)

✓ **Dari $2^k.5$**

Karena telah jelas bahwa 5 Habis dibagi 5
Maka hasil kali 2^k dengan 5 yaitu $2^k.5$ juga habis dibagi 5. (Sifat bilangan bulat)

Sehingga, karena $7(7^k - 2^k)$ habis dibagi 5 dan $2^k.5$ habis dibagi 5
Maka hasil penjumlahannya yaitu $7(7^k - 2^k) + 2^k.5$ juga habis dibagi 5
(Sifat bilangan bulat)
Jadi terbukti $7^{k+1} - 2^{k+1}$ habis dibagi 5, maka p(k+1) benar

Karena langkah (1) dan (2) berhasil ditunjukkan benar, maka disimpulkan bahwa : Untuk setiap bilangan asli n berlaku $7^n - 2^n$ selalu habis dibagi 5.

Contoh 8
Buktikan untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ berlaku $n^2 \leq 2^n$

Bukti :

$$p(n) \rightarrow n^2 \leq 2^n \text{ untuk } n \geq 4$$

Langkah (1) : Akan ditunjukkan p(1) benar

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(4) &\rightarrow 4^2 \leq 2^4 \\ &16 \leq 16 \\ &\text{benar} \end{aligned}$$

Langkah (2) :

- Diasumsikan p(k) benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu:
  $p(k) \rightarrow k^2 \leq 2^k$ untuk $k \geq 4$ benar

- Akan ditunjukkan untuk $\mathrm{p(k+1)}$ benar, yaitu:
  $\mathrm{p(k+1)} \rightarrow (k+1)^2 \leq 2^{k+1}$ untuk $k \geq 4$
  Ditunjukkan sebagai berikut:
  $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$
  $k^2 + 2k + 1 < 2k^2 \leq 2.2^k$
  Karena $2.2^k = 2^{k+1}$
  Maka diperoleh : $(k+1)^2 \leq 2^{k+1}$

Karena langkah (1) dan (2) berhasil ditunjukkan benar, maka disimpulkan bahwa : berlaku $n^2 \leq 2^n$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$

D. Rangkuman

Dari paparan materi yang telah disajikan pada BAB III, dirangkum garis besar materi yang dibahas adalah definisi, prinsip dan langkah serta contoh pembuktian suatu pernyataan matematika.

1. Terdapat 3 metode yang biasa digunakan dalam melakukan permbuktian kebenaran suatu pernyataan matematika: Pertama; metode pembuktian Langsung. Kedua; metode pembuktian tak langsung. Ketiga; Induksi Matematika.
2. Terdapat 2 cara dalam pembuktian tak langsung yaitu: pembuktian dengan kontraposisi dan pembuktian dengan kontradiksi.

3. Pembuktian langsung merupakan metode pembuktian yang menggunakan alur maju, yang di mulai dari pendefinisian, proses pembuktian, hingga menghasilkan kesimpulan. Pernyataan implikasi biasanya berbentuk "$jika\ p\ maka\ q$" sehingga dalam membuktikannya kita menggunkaan pernyataan p sebagai informasi, kemudian informasi tersebut diolah sehingga diperoleh pernyataan q.
4. Kontraposisi biasa juga disebut kontrapositif, yaitu suatu pernyataan balikan yang memiliki nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan awal yang ingin dibuktikan. Jika implikasi yang akan dibuktikan adalah $jika\ p\ maka\ q$ maka dengan metode ini pembuktian dilakukan dengan membuktikan kalimat kontraposisinya yaitu $jika\ bukan\ q\ maka\ bukan\ p$.
5. Dalam pembuktian kontradiksi memanfaatkan prinsip logika matematika dalam penggunaannya. Jika implikasi yang akan dibuktikan adalah $jika\ p\ maka\ q$ maka dengan metode ini pembuktian dilakukan dengan membuktikan kalimat kontradiksinya yaitu $jika\ bukan\ q\ maka\ bukan\ p$.

E. Latihan

Buktikanlah pernyataan-pernyataan berikut ini dengan menggunakan metode pembuktian yang tepat !

1. Jika x^2 habis dibagi 3, maka x habis dibagi 3.
2. Jika $x^2 = 3$, maka x bukan bilangan rasional.
3. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n + 1)$, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$
4. $1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + 4 . 5 + 5 . 6 + \cdots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$
5. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$
6. $4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) = n(3n + 1)$, untuk setiap bilangan asli n
7. Buktikan untuk setiap bilangan asli n berlaku : $11^n - 4^n$ habis dibagi oleh 7

BAB IV
KETERBAGIAN

A. Definisi Keterbagian

Konsep bilangan bulat banyak digunakan dalam permasalahan aljabar abstrak, oleh karena itu pembahasan berikut ini akan menyangkut konsep tersebut terutama terkait dengan sifat-sifat bilangan bulat. Bilangan bulat memiliki sifat terurut dengan baik yang mengandung arti setiap himpunan bulat positif tidak kosong mengandung bilangan terkecil. Disamping itu konsep keterbagian pada bilangan bulat juga tidak kalah penting dan sangat mendasar.

Definisi – 1
Bilangan bulat **a** membagi habis bilangan bulat **b** (ditulis **a|b**) jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga **b = ka.** Jika **a** tidak membagi habis b maka ditulis $\mathbf{a \nmid b}$.

Contoh 1
$7 \mid 35$ karena ada bilangan bulat $k = 5$ sedemikian sehingga $7 \cdot 5 = 35$
$9 \nmid 24$ karena tidak ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $4.k = 17$

B. Teorema Keterbagian

Terdapat banyak teorema yang mendasari konsep keterbagian. Sebuah teorema harus dibuktikan terlebih dahulu untuk memeriksa kebenarannya. Teorema yang telah dibuktikan dapat digunakan untuk membuktikan kebenaran dari terorema berikutnya.

Teorema – 1
$a, b \in B$ (Bilangan bulat) dan $a \neq 0$, jika ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga **b = ka** maka **k** adalah tunggal.

Bukti:
Andaikan ada bilangan-bilangan bulat k dan m dengan $k \neq m$ sedemikian sehingga $b = ka$ dan $b = ma$.
Dari $b = ka$ dan $b = ma$
maka :

$$
\begin{aligned}
b &= ma \\
ka &= ma \\
ka - ma &= 0 \\
a(k - m) &= 0
\end{aligned}
$$

Dari $a(k - m) = 0$ terdapat dua kemungkinan, yaitu:
$a = 0$ atau $k - m = 0$
Karena $a \neq 0$ maka yang mungkin adalah $k - m = 0$ berartri $k = m$
Hal ini kontradiksi dengan pengandaian $k \neq m$, sehingga pengandaian salah, berarti $k = m$.

Teorema – 2
Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$ (sifat transitif)

Bukti:
$a \mid b$ berarti ada $k \in B$ sedemikian sehingga $b = ka$ ……… (i)
$b \mid c$ berarti ada $m \in B$ sedemikian sehingga $c = mb$ ……. (ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh:

$c = m\,b$
$c = m\,k\,a$, misal $m.k = p$, $p \in B$ (sifat tertutup)
$c = p\,a$

Dari $c = pa$, $p \in B$ berarti (Definisi – 1) $a \mid c$

Teorema – 3
Jika $a \mid b$ maka $a \mid mb$ $\forall\, m \in B$ (Bilangan Bulat)

Bukti :
$a \mid b$ berarti ada $k \in B$ sedemikian sehingga $b = ka$ ……. (i)
ambil sembarang $m \in B$
sehingga $b = ka$
$m.b = m.ka$,misal $m.k = p$, $p \in B$ (sifat tertutup)
$mb = pa$
Dari $mb = pa$, $p \in B$ berarti (Definisi – 1) $a \mid mb$ $\forall\, m \in B$

Teorema – 4
Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (b+c)$; $a \mid (b - c)$ dan $a \mid (bc)$

Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (b+c)$
Bukti:
$a|b$ berarti ada $k \in B$ sedemikian sehingga $b = k.a$ ……... (i)
$a|c$ berarti ada $m \in B$ sedemikian sehingga $c = m.a$ ……. (ii)
Dari (i) dan (ii) diperoleh :

$b + c = ka + ma$
$b + c = (k + m)\,a$,misal $k + m = r$, $r \in B$ (sifat tertutup)
$b + c = r\,a$

Dari $b + c = r\,a$, $r \in B$ berarti (Definisi – 1) $a \mid (b + c)$

Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (b - c)$
Bukti:
$a|b$ berarti ada $k \in B$ sedemikian sehingga $b = k.a$ ……... (i)
$a|c$ berarti ada $m \in B$ sedemikian sehingga $c = m.a$ ……. (ii)
Dari (i) dan (ii) diperoleh :

$b - c = ka - ma$
$b - c = (k - m)\,a$,misal $k - m = t$, $t \in B$ (sifat tertutup)
$b - c = t\,a$

Dari $b - c = t\,a$, $t \in B$ berarti (Definisi – 1) $a \mid (b - c)$

Jika a | b dan a | c maka a | (b.c)

Bukti:

a|b berarti ada $k \in B$ sedemikian sehingga $b = k.a$ ……... (i)

a|c berarti ada $m \in B$ sedemikian sehingga $c = m.a$ ……. (ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh :

$$b \,.\, c = ka \,.\, ma$$

$$b\,c = (k\,a\,m)\,a \qquad \text{,misal } k.a.m = v\,,\; v \in B \quad \text{(sifat tertutup)}$$

$$b\,c = v\,a$$

Dari $b\,c = v\,a$, $v \in B$ berarti (Definisi – 1) $a \mid (bc)$

Teorema – 5

a |a untuk setiap bilangan bulat a (sifat reflektif)

Bukti:

$a \mid a \quad \forall a \in B$

Maka akan ditunjukkan ada $k \in B$ sedemikian sehingga $a = k.a$

Ambil sembarang $a \in B$, $\ni$ $a = 1.a$ (Identitas perkalian 1)

Karena $1 \in B$, maka berdasarkan definisi – 1 berarti $a \mid a$

Teorema – 6

Jika $a \mid b$ maka $ma \mid mb$ untuk setiap bilangan bulat m

Bukti:

$a \mid b$ berarti ada $k \in B$ sedemikian sehingga $b = k.a$

Ambil sembarang $m \in B$

Sehingga $m.b = m.ka$

$$m\,b = k\,ma \quad \text{(sifat komutatif)}$$

Dari $mb = k\,ma$, $k \in B$ berarti (Definisi J-1) $ma \mid mb \quad \forall m \in B$

Teorema – 7

Jika $ma \mid mb$ dengan $m \neq 0$, maka $a \mid b$.

Bukti:

$ma \mid mb$, $m \neq 0$ berarti ada $k \in B$ sedemikian sehingga $mb = k.ma$

Dari $mb = k.ma$, $m \neq 0$

$$mb - kma = 0$$

$$m\,(b - ka) = 0$$

Dari $m(b - ka) = 0$ terdapat dua kemungkinan, yaitu:

$$m = 0 \quad \text{atau} \quad b - ka = 0$$

Karena $m \neq 0$ maka yang mungkin adalah $b - ka = 0$ berarti $b = ka$

Dari $b = k\,a$, $k \in B$ berarti (Definisi – 1) $a \mid b$

Teorema – 8

$1|a$ dan $a \mid 0$

Bukti :

(i) Akan ditunjukkan $1 \mid a$ berarti ada $k \in B \ni a = k.1$
ambil sembarang $a \in B$ sehingga $a = a \,.\, 1$ (identitas perkalian)

dari $a = a \cdot 1$, $a \in B$ maka berdasarkan definisi J-1 berarti $1 \mid a$

(ii) Akan ditunjukkan $a \mid 0$ berarti ada $k \in B \ni 0 = k.a$
ambil sembarang $a \in B$, $a \neq 0$ sehingga $0 = 0.\ a$ (perkalian dengan unsur nol)
Dari $0 = 0.\ a$, $0 \in B$ maka berdasarkan definisi J-1 berarti $a \mid 0$

Teorema – 9
Jika $0|a$ maka $a=0$

Bukti :
$0 \mid a$ berarti ada $k \in B$ sedemikian sehingga $a = k.0$
Dari $a = k.0$ berdasarkan sifat perkalian dengan unsur nol
Maka $a = 0$

Teorema – 10
Jika $a \mid b$ dengan $b \neq 0 \rightarrow |a| \leq |b|$

Bukti :
$a \mid b$ berarti ada $k \in B$ sedemikian sehingga $b = k.a$
Akan dibuktikan dengan kontradiksi.
Andaikan $|a| > |b|$
$|a| > |ka|$

$|a| > |k||a|$
$|a| - |k|\,|a| > 0$
$|a|\,|1 - k| > 0$ (Sifat distributif)

Dari $|a|\,(1 - |k|) > 0$ maka terdapat dua kemungkinan yaitu $|a| = 0$ dan $|a| > 0$

- Jika $|a| = 0$ maka $0.(1-|k|) > 0$, berarti $|a| = 0$ salah.
- Jika $|a| > 0$
  maka $1-|k| > 0$
  $1 > |k|$ atau $|k| < 1$
  Dari $|k| < 1$ maka hanya ada satu kemungkinan yaitu $k = 0$

Sehingga $b = k.a$
Menjadi $b= 0\ .\ a$
$b = 0$
Kontradiksi dengan $b \neq 0$ sehingga pengandaian salah jadi $|a| \leq |b|$

Teorema – 11
Jika $a|b$ dan $b|a$ maka $|a|=|b|$

Bukti :
Untuk membuktikan $|a|=|b|$ maka harus ditunjukkan $|a| \leq |b|$ dan $|b| \leq |a|$ (sifat ekuivalen)
Dari :
$a \mid b$ berdasarkan teorema maka $|a| \leq |b|$
$b \mid a$ berdasarkan teorema maka $|b| \leq |a|$
Karena $|a| \leq |b|$ dan $|b| \leq |a|$ hal ini berarti $|a| = |b|$

Teorema – 12 (Algoritma Pembagian)

Jika a dan b bilangan–bilangan bulat dengan $a > 0$, maka ada dengan tunggal pasangan bilangan–bilangan bulat q dan r yang memenuhi $b = qa + r$, dengan $0 \leq r < a$. q disebut hasilbagi oleh a, dan r disebut sisa pembagian b oleh a.

Bukti :

Bangun himpunan $S = \{b - xa | x$ bilangan bulat dan $b - xa \geq 0\}$

$S \neq \emptyset$ sebab jika $x = -|b|$ dan karena $a > 0$, maka $(b\text{-}xa) \in S$.

S beranggotakan bilangan - bilangan bulat tak negatif berbentuk $(b - xa)$, maka S pasti memiliki anggota terkecil, misalnya r (Well Ordering Principle).

- Akan ditunjukkan $0 \leq r < a$, berarti harus ditunjukkan bahwa $r \geq 0$ dan $r < a$
  - Sesuai dengan bentuk anggota dari S, maka $r = b - qa$, untuk suatu bilangan bulat q dan $r \geq 0$.
  - Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $r < a$.

Andaikan $r \geq a$, maka $r = a + k$ dengan $k \geq 0$. Atau $k = r - a$

karena $r = b - qa$

Maka $a + k = b - qa$

$k = b - qa - a$

$k = b - (q+1)\ a$ Ini berarti bahwa k adalah suatu anggota dari S

Dari $k \geq 0$ dan $r - a < r$

karena $r - a = k$ maka $k \geq 0$ dan $k < r$ atau $0 \leq k < r$

Diperoleh $k < r$, terjadi kontradiksi karena r adalah bilangan bulat tak negatif yang terkecil dalam S. Maka pengandaian salah, berarti $r < a$

Sehingga diperoleh bahwa $r \geq 0$ dan $r < a$ berarti ada q dan r sedemikian hingga $b = qa + r$ dengan $0 \leq r < a$.

- Selanjutnya akan ditunjukkan ketunggalan q dan r.

Andaikan ada q_1, q_2 dan r_1, r_2 yang memenuhi $b = qa + r$, yaitu :

$b = aq_1 + r_1$ dengan $0 \leq r_1 < a$

$b = aq_2 + r_2$ dengan $0 \leq r_2 < a$

Sehingga : $aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2$ n

$r_1 - r_2 = aq_1 - aq_2$

$r_1 - r_2 = a\ (q_2 - q_1)$ (sifat distributif)

Diperoleh $r_1 - r_2 = a\ (q_2 - q_1)$

- Dari $a \mid r_1 - r_2$, ada dua kemungkinan untuk $r_1 - r_2$ yaitu $r_1 - r_2 \neq 0$ dan $r_1 - r_2 = 0$

untuk $r_1 - r_2 \neq 0$ maka $a \leq r_1 - r_2$. Ini tidak mungkin (atau kontradiksi) karena $r_1 - r_2 < a$.

Jadi yang mungkin adalah $r_1 - r_2 = 0$ atau $r_1 = r_2$ yang berarti hanya ada satu r.

- Kemudian akan ditunjukkan hanya ada satu q

$0 \leq r_1 < a$

$-a \leq -r_1 < 0$

$-a < r_1 - r_2 < a$

Berarti $r_1 - r_2 < a$ atau $| r_1 - r_2 | < a$

$| r_1 - r_2 | = | a (q_2 - q_1)| < a$

$|a (q_2 - q_1)| < a$ atau $|a| |(q_2 - q_1)| < a$ atau $a |(q_2 - q_1)| < a$

Dari $a |(q_2 - q_1)| < a$

$|(q_2 - q_1)| < 1$

Sehingga diperoleh $q_2 - q_1 = 0$ atau $q_2 = q_1$ yang berarti hanya ada satu q

C. Rangkuman

Dari paparan materi yang telah disajikan pada BAB IV, dirangkum garis besar materi yang dibahas adalah definisi, dan teorema dalam kajian keterbagian. Teorema-teorema yang disajikan dalam bab ini sudah dilengkapi dengan pembuktian dari teoremanya. Pembahasan materi keterbagian akan berkaitan mengenai faktor dari suatu bilangan. Materi ini penting karena akan mejadi dasar untuk materi berikutnya seperti masalah faktor persekutuan terbesar, kelipatan persekutuan terkecil dan bilangan prima.

1. **Definisi – 1**
   Bilangan bulat **a** membagi habis bilangan bulat **b** (ditulis **a|b**) jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga **b = ka.** Jika **a** tidak membagi habis b maka ditulis **a ∤ b**.
2. **Teorema – 1**
   a, b ∈ B (Bilangan bulat) dan $a \neq 0$, jika ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga **b = ka** maka **k** adalah tunggal.
3. **Teorema – 2**
   Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$ (sifat transitif)
4. **Teorema – 3**
   Jika $a \mid b$ maka $a \mid mb$ $\forall m \in B$ (Bilangan Bulat)
5. **Teorema – 4**
   Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (b+c)$; $a \mid (b - c)$ dan $a \mid (bc)$
6. **Teorema – 5**
   $a \mid a$ untuk setiap bilangan bulat a (sifat reflektif)
7. **Teorema – 6**
   Jika $a \mid b$ maka $ma \mid mb$ untuk setiap bilangan bulat m
8. **Teorema – 7**
   Jika $ma \mid mb$ dengan $m \neq 0$, maka $a \mid b$.
9. **Teorema – 8**
   $1 \mid a$ dan $a \mid 0$
10. **Teorema – 9**
    Jika $0 \mid a$ maka $a=0$
11. **Teorema – 10**
    Jika $a \mid b$ dengan $b \neq 0 \rightarrow |a| \leq |b|$
12. **Teorema – 11**
    Jika $a \mid b$ dan $b \mid a$ maka $|a|=|b|$
13. **Teorema – 12 (Algoritma Pembagian)**
    Jika a dan b bilangan–bilangan bulat dengan $a > 0$, maka ada dengan tunggal pasangan bilangan–bilangan bulat q dan r yang memenuhi $b = qa + r$, dengan $0 \leq r < a$. q disebut hasilbagi oleh a, dan r disebut sisa pembagian b oleh a.

D. Latihan

1. Tunjukkan bahwa untuk setiap $a \in Z$ berlaku $2|a(a+1)$
2. Untuk setiap $a \in Z$, tunjukkan bahwa $3|a(a+1)(a+2)$
3. Tunjukkan bahwa kuadrat dari sembarang bilangan bulat dapat dinyatakan dengan $3k$ atau $3k+1$
4. Jika n adalah bilangan ganjil, tunjukkan bahwa $n^4 + 4n^2 + 11$ dapat ditulis dalam bentuk $16k$
5. Untuk setiap bilangan bulat positif yang lebih besar atau sama dengan satu, buktikan bahwa $21|4^{n+1} + 5^{2n-1}$
6. Untuk setiap bilangan bulat p, tunjukkan bahwa $3|p(2p^2+7)$
7. Jika a dan b adalah bilangan ganjil, buktikan bahwa $16|a^4 + b^4 - 2$

BAB V
FPB DAN KPK

A. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Secara umum, pengertian tentang faktor persekutuan dari dua bilangan bulat dituliskan dengan defenisi berikut :

Definisi – 1

a, b $\in$ Z ; a,b $\neq$ 0 (himpunan bilangan bulat tak nol), bilangan bulat **d** disebut faktor persekutuan dari a dan b jika dan hanya jika d|a dan d|b.

Contoh 1

Faktor bulat positif dari 30 = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
Faktor bulat positif dari 45 = {1, 3, 5, 9, 15, 45)
Faktor persekutuan dari 30 dan 45 adalah 1, 3, 5, 15

Contoh 2

Faktor-faktor bulat positif dari -16 adalah 1, 2, 4, 8, dan 16
Faktor-faktor bulat positif dari 24 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, dan 24
Faktor-faktor persekutuan yang positif dari -16 dan 24 adalah 1, 2, 4, dan 8

Contoh 3

Faktor-faktor bulat positif dari 21 adalah 1, 3, 7, dan 21
Faktor-faktor bulat positif dari 12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12
Faktor-faktor persekutuan dari 21 dan 12 adalah 1 dan 3

Dapat dipahami bahwa 1 adalah pembagi (faktor) dari setiap bilangan bulat, dengan demikian 1 merupakan faktor persekutuan dari sebarang dua bilangan bulat a dan b. Sehingga himpunan faktor persekutuan dari sebarang a dan b tidak pernah kosong. Dari himpunan semua faktor persekutuan tersebut pastilah terdapat bilangan terbesar dan bilangan tersebut dinamakan faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b (Handayani & Yulina, 2020).

Definisi – 2

a, b $\in$ Z (himpunan bilangan bulat tak nol), bilangan bulat **d** disebut faktor persekutuan terbesar (Greatest Common Divisor) dari a dan b dinotasikan gcd(a,b) jika dan hanya jika memenuhi :

1. d|a dan d|b
2. jika e|a dan e|b, maka e$\leq$d

Defenisi diatas menunjukkan bahwa jika gcd(a,b) = d, maka d $\geq$ 1, dan apabila ada faktor persekutuan lain, misalnya e, maka e $\leq$ d

Contoh 4

Faktor bulat positif dari 30 = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
Faktor bulat positif dari 45 = {1, 3, 5, 9, 15, 45)

Faktor persekutuan dari 30 dan 45 adalah 1, 3, 5, 15
Sehingga gcd (30,45) = 15

Contoh 5
Faktor-faktor bulat positif dari -16 adalah 1, 2, 4, 8, dan 16
Faktor-faktor bulat positif dari 24 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, dan 24
Faktor-faktor persekutuan yang positif dari -16 dan 24 adalah 1, 2, 4, dan 8
Sehingga gcd (-16, 24) = 8

Contoh 6
Faktor-faktor bulat positif dari 21 adalah 1, 3, 7, dan 21
Faktor-faktor bulat positif dari 12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12
Faktor-faktor persekutuan dari 21 dan 12 adalah 1 dan 3
Sehingga gcd (21, 12) = 3

Contoh 7
Bilangan 5 dan 7 merupakan saling prima karena gcd (5,7) = 1
Bilangan 13 dan 23 merupakan saling prima karena gcd (13, 23) = 1
Bilangan 3 dan 31 merupakan saling prima karena gcd (3, 31) = 1

Teorema – 1
Jika gcd (a,b)= d maka gcd (a:d,b:d) =1

Bukti:
Misalkan gcd (a : d, b : d) = c , maka kita harus membuktikan bahwa c = 1.
Berdasarkan konsep kesamaan, maka harus di tunjukkan bahwa $c \geq 1$ dan $c \leq 1$.

(i) Karena c adalah faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat maka **$c \geq 1$** (Definisi 2)

(ii) Dari gcd (a : d, b : d) = c maka $c \mid (a:d)$ dan $c \mid (b:d)$ (Definisi 2 (i))
$c \mid (a:d)$ berarti ada $m \in B$ sehingga a : d = c.m
Dari a : d = c.m ; menurut defenisi pembagian
maka a = (cm) d
a = (cd) m (sifat komutatif)
Karena a = (cd) m , $m \in B$ maka (Definisi J-1) **$cd \mid a$** ....(*)
$c \mid (b:d)$ berarti ada $n \in B$ sehingga b : d = c.n (Definisi J-1)
Dari b : d = c.n ; menurut defenisi pembagian
maka b = (cn) d
b = (cd) n (sifat komutatif)
Karena b = (cd) n , $n \in B$ maka (Definisi J-1) **$cd \mid b$** ....(**)

Dari persamaan (*) dan (**) diperoleh: $cd \mid a$ dan $cd \mid b$
Maka berdasarkan Definisi K-1 maka cd adalah faktor persekutuan dari a dan b.
Karena gcd (a,b) = d, maka (Definisi K-2) $cd \leq d$.
Dari $cd \leq d$ dan karena $d \geq 1$ maka haruslah **$c \leq 1$.**
Karena terbukti bahwa $c \leq 1$ dan $c \geq 1$, maka terbukti bahwa c = 1.

Contoh 8
Gcd (45,120) = 15, menurut teorema gcd (45:15, 120:15)= gcd (3,8) = 1.

Teorema – 2
Jika b = aq + r maka gcd (b,a) = gcd (a,r)

Bukti:
Misalkan gcd (b,a) = d maka (definisi K-2) $d|b$ dan $d|a$
Karena $d|b$ maka $d | aq+r$ dan berdasarkan teorema J-2 berarti $d|aq$ dan $d|r$
Diperoleh $d|a$ dan $d|r$ maka d merupakan faktor persekutuan a dan r
Andaikan ada bilangan bulat c yang merupakan faktor persekutuan antara a dan r dimana
$c > d$ berarti $c|a$ dan $c|r$.
Dari teorema, jika $c | a$ maka $c | ag$, $\forall q \in B$
Diperoleh $c | aq$ dan $c | r$ maka $c | aq+r$ berarti $c | b$
Karena $c | a$ dan $c | b$ maka c faktor persekutuan dari a dan b
Dari gcd (b,a) = d maka $d \geq c$ hal ini kontradiksi dengan pengandaian $c \geq d$ jadi pengandaian salah maka $c \leq d$ berarti gcd (a,r) = d
Sehingga gcd (b,a) = gcd(a,r) = d

Contoh 9
Berapakah gcd (75, 21) ?
Penyelesaian:
Berdasarkan teorema K-1 ② maka: a = 21 dan b = 75
sehingga $b = a\,q + r$
$75 = 21 \cdot 3 + 12$
diperoleh r = 12
Jadi, gcd (75, 21) = gcd (21, 12) = 3

Contoh 10
Berapakah gcd (1356, 744) ?
Penyelesaian:
Berdasarkan teorema K-1 ② maka: a = 744 dan b = 1356
(b = aq + r) :

$1356 = 744 \cdot 1 + 612 \Rightarrow$ gcd (1356, 744) = gcd (744, 612)
$744 = 612 \cdot 1 + 132 \Rightarrow$ gcd (744, 612) = gcd (612, 132)
$612 = 132 \cdot 4 + 84 \Rightarrow$ gcd (612, 132) = gcd (132, 84)
$132 = 84 \cdot 1 + 48 \Rightarrow$ gcd (132, 84) = gcd (84, 48)
$84 = 48 \cdot 1 + 36 \Rightarrow$ gcd (84, 48) = gcd (48, 36)
$48 = 36 \cdot 1 + 12 \Rightarrow$ gcd (48, 36) = gcd (36, 12)
$36 = 12 \cdot 3 + 0 \Rightarrow$ gcd (36, 12) = 12

Jadi, gcd (1356, 744) = 12

Teorema – 3
Jika $a, b \neq 0 \in Z$ (himpunan bilangan bulat) maka ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga ax + by = gcd (a,b)

Bukti :
Bangun himpunan $S = \{ma + nb | m, n \text{bilangan bulat dan } ma + nb \geq 0\}$
$S \neq \emptyset$ sebab jika $b < 0$ maka $-b = 0a + (-1)b \in S$.

S beranggotakan bilangan - bilangan bulat tak negatif berbentuk (ma + nb), maka S pasti memiliki anggota terkecil, misalnya d (Well Ordering Principle).
Sesuai dengan bentuk anggota dari S, maka d = xa + by, untuk suatu bilangan bulat x dan y.
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa d = gcd (a,b).
Misalkan $a = dq + r$ untuk $q, r \in Z$ dengan $0 \leq r < d$, sehingga

$$r = a - dq$$
$$r = a - (xa + yb)\,q$$
$$r = (1 - xq)\,a + (1 - yq)\,b$$

Jika $r > 0$ maka $r \in S$ dan $r < d$ hal ini kontradiksi dengan definisi d, Sehingga yang mungkin adalah
$r = 0$ maka $a = dq$ berarti $d \mid a$.
Jika c adalah bilangan bulat dimana $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $a=c.k$ dan $b = c.p$, Sehingga

$$d = xa + yb$$
$$d = xck + ycp$$
$$d = c\,(xk + yp)$$

Ini berarti $c \mid d$ maka d = gcd (a,b).

B. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Secara umum , pengertian tentang kelipatan persekutuan terkecil (Least Common Multiple) dari dua bilangan bulat didefenisi sebagai berikut :

Definisi – 3
Kelipatan persekutuan terkecil dari a, $b \in Z$ (himpunan bilangan bulat tak nol), adalah bilangan bulat positif terkecil **k** yang memenuhi :

1 $a \mid k$ dan $b \mid k$
2 jika $a \mid m$ dan $b \mid m$, maka $k \leq m$

Kelipatan persekutuan terkecil dari **a** dan **b** dinotasikan dengan **lcm(a,b)**

Contoh 11

1. Lcm (4, 6) = 12
2. Lcm (10, 12) = 60
3. Lcm (4, 8) = 8
4. Lcm $(2^2 \times 3^2 \times 5,\ 2 \times 3^3 \times 7^2) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^2$

Teorema – 4

1. a,b (himpunan bilangan bulat tak nol), jika c adalah suatu kelipatan persekutuan dari a dan b , maka lcm (a,b) membagi c
2. Jika $c > 0$, maka lcm (ac,bc) = c lcm (a,b)
3. a, $b \in Z$ (himpunan bilangan bulat tak nol), jika a dan b saling prima maka gcd (a,b)lcm (a,b)=ab

Bukti:
Misalkan lcm (a,b) = m, maka harus ditunjukkan bahwa $m \mid c$.

Andaikan $m \nmid c$, maka menurut teorema algoritma pembagian, ada tunggal bilangan - bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga $c = qm + r$ atau $r = c - qm$, dengan $0 < r < m$.
Karena c adalah kelipatan persekutuan dari a dan b, maka $a \mid c$ dan $b \mid c$.
Karena lcm $(a,b) = m$, maka $a \mid m$ dan $b \mid m$.
$a|m$ maka $a|qm$, dan $a|c$ maka $a|(c-qm)$. Ini berarti $a|r$

Demikian pula $b|m$ maka $b|qm$ dan karena $b|c$ maka $b|(c-qm)$ berarti $b|r$
Karena $a|r$ dan $b|r$, maka r adalah kelipatan persekutuan dari a dan b.
Tetapi lcm $(a, b) = m$ dan $0 < r < m$, maka hal tersebut tidak mungkin (kontradiksi).

Jadi pengandaian di atas tidak benar, berarti $m|c$ atau lcm $(a,b) \mid c$
Jadi kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan selalu membagi setiap kelipatan persekutuan dari dua bilangan itu.

Contoh 12
Lcm (2,5) = 10
Kelipatan 2 : 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,…
Kelipatan 5 : 5,10,15,20,25,30,35,40,…
Kelipatan persekutuan dari 2 dan 5 adalah { 10, 20, 30,.....}
Dapat dilihat bahwa $10 \mid 20$, atau $10 \mid 30$
Sehingga kelipatan persekutuan dari 2, dan 5 atau lcm (2,5) adalah 10

Lcm (4,6) = 12
Kelipatan 4 : 4,8,12,16,20,24,28,32,36
Kelipatan 6 : 6,12,18,24,30,36,40
Kelipatan persekutuan dari 4 , dan 6 adalah { 12,24,36,.....}
Dapat dilihat bahwa $12 \mid 24$, atau $12 \mid 36$
Sehingga kelipatan persekutuan dari 4, dan 6 atau lcm (4,6) adalah 12

Contoh 13
Carilah KPK antara 15 dan 40.
Jawab:
$15=3 \times 5$
$40=2^3 \times 5$
Perhatikan bahwa faktor prima yang sama adalah 5.
Perhatikan pangkatnya, karena semua berpangkat sama maka ambil satu saja
Fakor prima yang tidak memiliki pasangan adalah 2 dan 3
Sehingga lcm(5.10.15) = 2 x 3 x 5 = 30

Kelipatan persekutuan terkecil dari bilangan 12, 36, dan 4 adalah…
Jawab :
Kelipatan 4 = 4,8,12,16,20,24,28,32,36,40
Kelipatan 12 = 12,24,36,48
Kelipatan 36 = 36, 72 dan seterusnya
Dari ketiga kelipatan diatas kita dapat mengetahui kelipatan yang memiliki bilangan yang sama adalah 36

Berapakah KPK dri 6 dan 12 adalah…
Jawab :
Dalam mengerjakan soal KPK maka kita akan mencari kelipatan dari kedua tersebut, maka dapat dilihat sebagai berikut :
Kelipatan 6 = 6, 12, 18. dan seterusnya
Kelipatan 12 = 12,24, 36, dan seterusnya
Maka KPK didapat adalah kelipatan terkecil yang terdapat dari kedua bilangan tersebut. Bilangan yang sama dari kelipatan kedua bilangan tersebut adalah 12.
Jadi KPK dari 6 dan 12 adalah 12

C. Rangkuman

Dari paparan materi yang telah disajikan pada BAB V, dirangkum garis besar materi yang dibahas adalah definisi, dan teorema serta contoh soal penentuan FPB dan KPK dari beberapa bilangan bulat. Pemahaman tentang definisi dan teorema ini penting karena menjadi dasar pemahaman, apa, mengapa, dan bagaimana KPK dan FPB yang selama ini diajarkan disekolah.

1. **Definisi – 1**
   a, b $\in$ Z ; a,b $\neq$ 0 (himpunan bilangan bulat tak nol), bilangan bulat **d** disebut faktor persekutuan dari a dan b jika dan hanya jika $d|a$ dan $d|b$.
2. **Definisi – 2**
   a, b $\in$ Z (himpunan bilangan bulat tak nol), bilangan bulat **d** disebut faktor persekutuan terbesar (Greatest Common Divisor) dari a dan b dinotasikan **gcd(a,b)** jika dan hanya jika memenuhi :
   1. $d|a$ dan $d|b$
   2. jika $e|a$ dan $e|b$, maka $e \leq d$
3. **Teorema – 1**
   Jika gcd (a,b)= d maka gcd (a:d,b:d) =1
4. **Teorema – 2**
   Jika b = aq + r maka gcd (b,a) = gcd (a,r)
5. **Teorema – 3**
   Jika a, b $\neq$ 0 $\in$ Z (himpunan bilangan bulat) maka ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga ax + by = gcd (a,b)
6. **Definisi – 3**
   Kelipatan persekutuan terkecil dari a, b $\in$ Z (himpunan bilangan bulat tak nol), adalah bilangan bulat positif terkecil **k** yang memenuhi :
   1. $a \mid k$ dan $b \mid k$
   2. jika $a \mid m$ dan $b \mid m$, maka $k \leq m$

   Kelipatan persekutuan terkecil dari **a** dan **b** dinotasikan dengan **lcm(a,b)**
7. **Teorema – 4**
   - a,b (himpunan bilangan bulat tak nol), jika c adalah suatu kelipatan persekutuan dari a dan b , maka lcm (a,b) membagi c
   - Jika c > 0 , maka lcm (ac,bc) = c lcm (a,b)
   - a, b $\in$ Z (himpunan bilangan bulat tak nol), jika a dan b saling prima maka gcd (a,b)lcm (a,b)=ab

D. Latihan

1. Buktikan bahwa jika $a, b \in Z^+$ yang memenuhi $gcd(a, b) = lcm(a, b)$ maka $a = b$
2. Buktikan bahwa $gcd\big((a + b), 4\big) = 4$ jika $gcd(a, 4) = 2$ dan $gcd(b, 4) = 2$
3. Carilah KPK dari 482 dan 1687 !
4. Dengan menggunakan algoritma carilah FPB dari: 5767 dan 4453
5. Jika (a,b) = 1, buktikan bahwa (ac,b) = (c,b)
6. Jika c merupakan suatu kelipatan persekutuan dari a dan b, maka gcd(a,b)|c
7. Tentukanlah KPK dari (a – 1) , (a + 1), dan (a^2 – 1)
8. Buktikan bahwa :
   a. Jika c | gcd(a,b) maka c | lcm(a,b)
   b. Jika d | lcm(a,b) maka d | gcd(a,b)

BAB VI
REPRESENTASI BILANGAN BULAT

A. Basis Bilangan

Basis bilangan adalah bilangan yang menjadi dasar terbentuknya bilangan lain dalam suatu sistem bilangan. Basis bilangan ini dikelompokkan ke dalam dua kelompok, yaitu basis sepuluh dan basis non sepuluh. Basis sepuluh sering disebut juga dengan desimal yang terdiri dari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Basis non sepuluh adalah basis bilangan yang kurang atau lebih dari sepuluh. Dalam makalah ini akan dibahas empat jenis basis bilangan yaitu bilangan biner, basis lima, basis dua belas, dan basis lima belas. Bilangan biner atau binary digit (bit) adalah bilangan yang terdiri dari 1 dan 0. Bilangan desimal terdiri dari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Sedangkan, bilangan basis lima terdiri dari 0, 1, 2, 3, dan 4. Bilangan basis dua belas terdiri dari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B. Dan bilangan sistem lima belas terdiri dari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, dan E.

Teorema – 1
Misalkan b suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 maka setiap bilangan bulat positif n dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk
$n = a_k b^k \mid a_{k-1} b^{k\ 1} \mid a_{k-2} b^{k\ 2} \mid \ldots.. \mid a \mid b \mid a_0$
dengan k suatu bilangan bulat tak negatif , a_j suatu bilangan bulat dengan
$0 \leq a_j \leq b - 1$ untuk $j - 0, 1, 2, \ldots.. k$ dengan $a_k \neq 0$.

Bukti:
Untuk memperoleh representasi dari n seperti yang diinginkan, kita menerapkan alogaritma pembagian sebagai berikut.
Pertama, kita membagi n dengan b untuk mendapatkan,

$$n = bq_0 + a_0 , 0 \leq a_0 \leq b - 1$$

jika $q_0 \neq 0$, kita membagi q_0 dengan b untuk mendapatkan bahwa

$$q_0 = bq_1 + a_1 , \qquad 0 \leq a_1 \leq b_1 .$$

kita melanjutkan proses ini untuk memperoleh

$$q_1 = bq_2 + a_2 , \ 0 \leq a_2 \leq b\text{-}1$$
$$q_2 = bq_3 + a_3 , \ 0 \leq a_3 \leq b\text{-}1$$
$$.$$
$$.$$
$$q_{k-2} = bq_{k} - 1 + a_k - 1, 0 \leq a_{k-1} \leq b\text{-}1$$
$$q_{k-1} = b.0 + a_k, \ldots\ldots.., 0 \leq a_k \leq b\text{-}1$$

langkah terakhir dari proses ini terjadi apanila kita memperoleh hasil bagi 0. Perhatikan bahwa dalam penerapan alogaritma-alogaritma pembagian tersebut, kita memperoleh hasil bagi yang memenuhi

$$n > q_0 > q_1 > q_2 > \ldots\ldots.. \geq 0$$

karena barisan q_0 , q_1 , q_2 , ... adalah suatu barisan turun dari bilangan-bilangan bulat tak negatif maka barisan ini akan berakhir pada suku 0. Selanjutnya dari persamaan pertama q_0 disubtitusi dalam persamaan kedua diperoleh,

$$= bq_0 + a_0$$
$$= b\,(bq_1 + a_1) + a_0 = b^2 q_1 + ba_1 + a_0$$

Proses substitusi dilanjutkan untuk q_1 , q_2 , q_3 , ...
diperoleh

$n = b^3q_2 + b^2a_2 + ba_1 + a_0$
$n = b^4 q_3 + b^3a_3 + b^2a_2 + ba_1 + a_0$
.
.
$n = b^{k-1} qk_{-2} + b^{k-2} ak_{-2} + \ldots\ldots + b^2a_2 + ba_1 + a_0$
$n = b^kak + b^{k-}$
$n = ak_{-1} + \ldots\ldots\ldots + b^2a_2 + ba_1 + a_0$
$n = akb^k + ak_{-1}\ b^{k-1} + a_2\ b^2 + a_1 b + a_0$

Dimana $0 \leq a_1 \leq b - 1$ untuk $j = 0, 1, 2, \ldots\ldots k$ dan $ak \neq 0$ karena $ak = qk_{-1}$, adalah hasil bagi terakhir yang tidak sama dengan 0.
Kita telah mendapatlkan reprentasi dari n seperti yang diinginkan.
Untuk memperlihatkan bahwa reprentasi n tersebut tunggal, misalkan kita mempunyai dua reprentasi dari n, yaitu :

$n = ak\ b^k + ak_{-1}\ b^{k-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 b + a_0 ,\ 0 \leq a_1 \leq b - 1$
dan $n = ck\ b^k + ak_{-1}\ b^{k-1} + \ldots\ldots + c_1 b + c_0 ,\ 0 \leq c_1 \leq b - 1$
jika kedua persamaan tersebut dikurangkan maka di peroleh
$(ak - ck)\ b^k + (ak_{-1} - ck_{-1})\ b^{k-1} + \ldots\ldots + (a_1 - c_1)\ b + (a_0 - c_0) = 0$

Jika dua representasi dari n tersebut berbeda maka ada bilangan bulat terkecil j, $0 \leq j \leq k$, sedemikian hingga $a_j \neq c_j$. jadi

$b^j \{(ak - ck)b^{k-1} + (ak_{-1} - ck_{-1})\ b^{k-} + \ldots + (a_{j+1} - c_{j+1})\ b + (a_j - c_j)\} = 0$

sehingga

$(ak - ck)\ b^{k-} + (ak_{-1} - ck_{-1})\ b^{k-}j1^{-} + \ldots.. + (a_{j+1} - c_{j+1})\ b + (a_j - c_j) = 0$
$a_1 - c_1 = (ck - ak)\ b^{k-}j + (c_{-1} - ak_{-1})\ b^{k-}j1^{-} + \ldots.. + (a_{j+1} - c_{j+1})\ b$
$a_j - c_j = b\{ (ck - ak)\ b^{k-}j\text{-}1 + (ck_{-1} - ak_{-1})\ b^{k-}j^{-2} + \ldots.. + (a_{j+1} - c_{j+1}) \}$

ini berarti bahwa $b \mid)a_j - c_j)$
tetapi karena $0 < a_1 < b$ dan $0 < c_1 < b$. yaitu $-b < a_1 - c_1 < b$
sehingga $a_j = c_j$,
jadi representasi dari n adalah tunggal.

Selanjutnya jika $n = akb^k + ak_{-1}\ b^{k-1} + ak_{-2}\ b^{k-2} + \ldots. + a_1\ b + a_0$.
Yaitu n dinyatakan sebagai jumlahan dari perpangkatan bulat dari b maka n dapat dituliskan sebagai

$n = (akak_{-1}\ ak_{-2} \ldots.\ a1a_0)b$

penulisan bilangan bulat n seperti ini dikatakan bahwa n dituliskan dalam basis b

Basis Sepuluh

Sistem ini menggunakan 10 macam simbol yaitu 0,1,2,3,4,5,6,7,8, dan 9. Sistem ini menggunakan basis 10. Bentuk nilai ini dapat berupa integer desimal atau pecahan. Integer desimal, adalah nilai desimal yang bulat.

Contoh 1

8598 dapat diartikan :

$$\begin{array}{ll} 8 \times 10^3 & = 8000 \\ 5 \times 10^2 & = 500 \\ 9 \times 10^1 & = 90 \\ 8 \times 10^0 & = 8 \; + \\ \hline & 8598 \end{array}$$

position value / palce value

absolute value

Absolute value merupakan nilai untuk masing-masing digit bilangan, sedangkan *position value* adalah merupakan penimbang atau bobot dari masing masing digit tergantung dari letak posisinya, yaitu bernilai basis dipangkatkan dengan urutan posisinya. Pecahan desimal adalah nilai desimal yang mengandung nilai pecahan dibelakang koma.

Contoh 2

Nilai 183,75 adalah pecahan desimal yang dapat diartikan:

$$\begin{array}{ll} 1 \times 10^2 & = 100 \\ 8 \times 10^1 & = 80 \\ 3 \times 10^0 & = 3 \\ 7 \times 10^{-1} & = 0,7 \\ 5 \times 10^{-2} & = 0,005 \; + \\ \hline & 183,75 \end{array}$$

position value / palce value

absolute value

Basis Non Sepuluh

Pada makalah ini akan dibahas empat jenis bilangan yang berbasis non sepuluh, yaitu bilangan berbasis dua, bilangan berbasis lima, bilangan berbasis dua belas, dan bilangan berbasis lima belas. Dengan penjelasan sebagai berikut:

<u>Bilangan Berbasis Dua</u>

Sistem bilangan dengan basis dua disebut juga sistem biner, lambang bilangannya adalah { 0, 1}.

Contoh 3

Bilangan 1001 dapat diartikan:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ x } 2^0 = 1 \\ 0 \text{ x } 2^1 = 0 \\ 0 \text{ x } 2^2 = 0 \\ 1 \text{ x } 2^3 = 8 \; + \\ \hline \phantom{1 \text{ x } 2^3 = } 9_2 \end{array}$$

Operasi aritmetika pada bilangan Biner

a) Penjumlahan

Dasar penjumlahan biner adalah:

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 0$ → dengan 1, yaitu $1 + 1 = 2$,
karena digit terbesar biner 1,
maka harus dikurangi dengan 2 (basis)
jadi $2 - 2 = 0$

b) Pengurangan

Bilangan biner dikurangkan dengan cara yang sama dengan pengurangan bilangan desimal. Dasar pengurangan untuk masing-masing bilangan biner adalah:

$0 - 0 = 0$

$1 - 0 = 1$

$1 - 1 = 0$

$0 - 1 = 1$ → dengan meminjam 1 dari posisi setelah kirinya.
Setelah dipinjam satu maka angka 1 menjadi 0 dan angka 0 menjadi 1

c) Perkalian

Dilakukan sama dengan cara perkalian pada bilangan desimal. Dasar perkalian bilangan biner adalah :

$0 \times 0 = 0$

$1 \times 0 = 0$

$0 \times 1 = 0$

$1 \times 1 = 1$

d) Pembagian

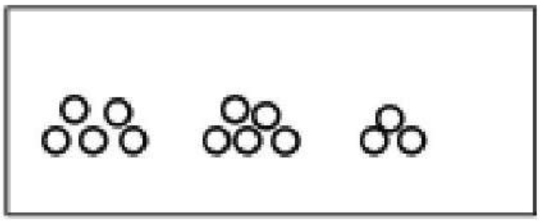
Pembagian biner dilakukan juga dengan cara yang sama dengan bilangan desimal. Pembagian biner 0 tidak mempunyai arti, sehingga dasar pembagian biner adalah:

$0 : 1 = 0$

$1 : 1 = 1$

Bilangan Berbasis Lima

Apabila dalam bilangan basis sepuluh kita dapat mengelompokkan kedalam kelompok sepuluh-sepuluh. Dalam bilangan dasar lima kita mengelompokkan kedalam lima-lima (limaan). Perhatikan himpunan berikut.



Kita dapat mengelompokkan unsur-unsur yang ada pada himpunan tersebut kedalam kelompok limaan dan 3 satuan, dapat ditulis 23_{lima} atau 23_5.

Untuk penulisan "2 kelompok limaan dan 3 satuan" dalam basis lima seharusnya 23_{lima} bukan 23_5. Akan tetapi untuk menyingkat tulisan disini kita tulis 23_5 artinya 2.5 + 3 dan 32_5 artinya 3.5 + 2.

Jika kelompok limanya terdapat lima kelompok, maka kelompok itu dijadikan kelompok baru, yaitu kelompok "25-an", atau kelompok "5^2-an" atau kelompok "5*5 –an". Jika kelompok "25-an" ada lima kelompok maka dijadikan kelompok baru yaitu "125-an".

Lambang bilangannya yang dipakai dalam basis lima adalah {0,1,2,3,4} dan nilai tempatnya adalah sebagai berikut:

... x 5^3 +	... x 5^2 +	... x 5^1 +	... x 5^o
↓	↓	↓	↓
125-an	**25-an**	**limaan**	**satuan**

Contoh 3

Operasi hitung dalam basis bilangan

a. 25 + 35 = 10_5
b. 115 − 45 = 2_5
c. 45 x 35 = 22_{lima}
d. 335 : 35 = 11_{lima}

Bilangan Berbasis Dua Belas

Bilangan Berbasis 12 adalah himpunan bilangan asli yang terdiri dari 1 hingga 12 atau bilangan cacah 0 hingga 11 atau kelompok bilangan dengan banyaknya anggota 12, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A dan B lebih gampang lagi adalah angka-angka yang terdapat pada jam analog (atau jam paling kecil 1 dan angka terbesar 12).

Operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan basis 12 ini bisa diterapkan pada operasi penjumlahan dan pengurangan satuan waktu (bulan ke tahun) dan satuan kuantitas (buah-lusin-garis).

Contoh 4

Jarak lokasi syuting ke rumah sule 2 jam, sule pulang jam 11 malam, jam berapakah sule pulang?

Jawab:

Pada soal di atas tidak mungkin jawabannya 13, ini dikarenakan pada jam angka yang tertinggi adalah 12, maka jawabannya adalah jam 1 malam yaitu 11 + 2 = 1 atau bisa ditulis 0 + 1. Dengan nol adalah satu dua belasan.

Bilangan Berbasis Lima Belas

Pada sistem basis bilagan lima belas, diperlukan lambang bilangan sebanyak lima belas buah. Disini ditentukan kelima belas lambang bilangan_tersebut dengan (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, dan E). Dengan ketentuan A=10, B=11, C=12, D=13, dan E=14.

Contoh 5

a. Mengubah bilangan sistem berbasis lima ke dalam sistem desimal

- $23_{15} = 23.15 + 3 = 33$
- $AC_{15} = A.15 + C = 10.15 + 12 = 162$

b. Mengubah Sistem Desimal Kedalam Basis Lima Belas

$20 = 1 \, . \, 15 + 5 = 15_{15}$

Atau dengan cara:

20/15=1 dengan sisa 5

5/15=5, karena 5 tidak dapat dibagi 15.

Jadi, $20 = 15_{15}$

B. Bilangan Prima

Kita telah mengenal dua bilangan bulat positif saling prima (prima relatif atau koprima),yaitu faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan itu sama dengan 1. apabila $a_1, a_2, a_3, ...a_n$,adalah bilangan-bilangan bulat positif sedemikian hingga $(a_1, a_2, a_3, ...a_n)=1$,dikatakan bahwa $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ saling prima pula. Akan tetapi, jika $(a_i, a_j)=1$ untuk setiap i, j=1,2,3...n dengan $i \neq j$ maka dikatakan bahwa bilangan bulat positif $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ saling prima dua-dua atau saling prima sepasang demi sepasang (Stein, 2009).

Teorema – 2

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari satu (1) dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

Bukti :

Ambil sebarang himpunan bilangan bulat positif $n > 1$. Apabila n suatu bilangan prima maka $n|n$ maka teorema telah terbukti.

Apabila n suatu bilangan komposit maka n mempunyai paktor bulat positif selain 1 dan n sendiri,misalnya d_1, yaitu $d_1|n$, sehingga ada bilangan bulat positif n_1 sedemikian hingga

$n = d_1 \, n_1$ dengan $1 < n_1 < n$.

Jika n suatu bilangan prima maka $n_1|n$ sehingga teorema terbukti. Akan tetapi, jika n_1 suatu bilangan komposit, n_1 mempunyai faktor bulat positif, selain 1 dan n_1, misalnya d_2, yaitu $d_2|n_1$. Sehingga ada bilangan bulat positif n_2 sedemikian hingga

$n_1 = d_2 \, n_2$ dengan $1 < n_2 < n_1$

Jika n_2 suatu bilangan prima maka $n_2 \mid n_1$. Oleh karena itu $n_1 \mid n$ *maka* $n_2 \mid n_1$. Jadi, n terbagi oleh bilangan prima n_2, itu berarati teorema terbukti. Akan tetap, jika n_2 suatu bilangan komposit, n_2 mempunyai faktor bulat positif, selain 1 dan n_2, misalnya d_3, *yaitu* $d_3 \mid n_2$. Ini berarti ada bilangan bulat positif n_3 sedemikian hingga

$n_2 = d_3 \, n_3$ dengan $1 < n_3 < n_2$

Jika n_3 suatu bilangan prima maka $n_3 \mid n_2$. Karena $n_2 \mid n_1$ dan $n_1 \mid n$ maka $n_3 \mid n$. Jadi, n terbagi oleh bilangan prima n_3, itu berarti teorema terbukti. Akan tetapi, jika n_3 suatu bilangan komposit proses seperti diatas dapat dilanjutkan sedemikian hingga diperoleh suatu barisan berikut

$n, n_1, n_2, n_3, \ldots$ dengan $n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots > 1$

Penguraian atas faktor-faktor komposit ini tentu berakhir pada suatu faktor prima karena faktor-faktor tersebut selalu lebih kecil dari bilangan yang difaktorkan dan selalu lebih besar dari 1. Misalkan, pemfaktoran tersebut berakhir pada faktor prima n_1 maka

$n_k \mid n_{k-1}$, $n_{k-1} \mid n_{k-2}$, $n_2 \mid n_1, \ldots$ dan $n_1 \mid n$ sehingga $n_k \mid n$.

Teorema – 3

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 adalah suatu bilangan prima atau bilangan itu dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangaan prima.

Bukti :

Ambil sebarang bilangan bulat positif $n > 1$. Menurut teorema 3.2 maka ada suatu bilangan prima p_1, sedemikian hingga $p_1|n$. Sehingga ada suatu bilangan positif n_1 sehingga

$n = p_1 n_1$ dengan $1 < n_1 < n$

Jika $n_1 = 1$ maka $n = p_1$ sehingga n suatu bilangan prima. Tetapi jika $n_1 > 1$ maka menurut Teorema 3.2 lagi, ada suatu bilangan prima p_2 sedemikian hingga $p_2|n_1$. Sehingga ada suatu bilangan blat positif n_2 sehingga

$n_1 = p_2 n_2$ dengan $1 < n_2 < n_1$

Jika $n_2 = 1$ maka $n_1 = p_2$ sehingga $n = p_1 p_2$. Berarti teorema terbukti. Tetapi jika $n_2 > 1$ maka ada suatu bilangan prima p_3 sedemikian hingga

$\mathrm{n}_2 = \mathrm{p}_3\mathrm{n}_3$ dengan $1 < \mathrm{n}_3 < \mathrm{n}_2$

Jika $n_3 = 1$ maka $n_2 = p_3$ sehingga $n = p_1 p_2 p_3$. Berarti teorema terbukti. Tetapi jika $n_3 > 1$ maka proses seperti diatas dapat dilanjutkan sehingga akan berakhir pada $n_k = 1$ maka diperoleh $n = p_1 p_2 p_3 \ldots\ p_k$, yaitu bilangan bulat positif $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima.

Suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Teorema tersebut sangat memudahkan untuk menentukan FPB dan KPK dari dua bilangan bulat atau lebih, yaitu dengan menyatakan masing-masing bilangan bulat itu dalam bentuk kanoniknya. Tetapi sebelum itu, kita perlu mengenal lebih notasi-notasi beikut ini :

"min (a,b)" menyatakan niali minimum dari a dan b.

"maks (a,b)" menyatakan nilai maksimumnya dari a dan b.

Contoh 6

a) min (7,5) = 5, maks (8,3) = 8
b) min (5,0,3) = 0, maks (7,4,5,0) = 7

c) min (1,4) = 1, maks (1,4) = 4

Misalkan, m,n dan t adalah bilangan-bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 yang bentuk-bentuk kanoniknya beturut-turut sebagai berikut.

m = $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_k^{a_k}$

n = $p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3} \ldots p_k^{b_k}$

t = $p_1^{c_1} p_2^{c_2} p_3^{c_3} \ldots p_k^{c_k}$

Maka FPB dan KPK dari m,n dan t, berturut-turut adalah.

(m,n,t) = $p_1^{d_1} p_2^{d_2} p_3^{d_3} \ldots p_k^{d_k}$ dengan d_1 = min (a_i, b_i, c_i) untuk i = 1,2,3,...,k.

(m,n,t) = $p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$ dengan e_1 = maks (a_i, b_i, c_i) untuk i = 1,2,3,...,k.

Teorema – 4

Jika n suatu bilangan komposit maka n memiliki faktor k dengan $l \leq k \leq \sqrt{n}$.

Bukti :

Karena n suatu bilangan komposit maka ada bilangan-bilangan positif k dan m sedemikian sehingga:

km = n dengan l < k < n dan l < m < n

Apabila k dam m kedua-duanya lebih besar dari $\sqrt{n}$,yaitu k > $\sqrt{n}$ dan m > $\sqrt{n}$ maka

$$n = km > \sqrt{n}\,.\sqrt{n} = n$$

Terdapat n > n, hal ini tidak mungkin. Oleh karena itu, salah satu dari k atau m harus tidak lebih kecil dari $\sqrt{n}$, misalnya k, yaitu $l \leq k \leq \sqrt{n}$. Jadi n memiliki faktor k dengan $l \leq k \leq \sqrt{n}$.

Teorema – 4 tersebut sama benarnya dengan kontraposisinya, yaitu : Apabila bilangan bulat positif n tidak memiliki faktor k dengan $l \leq k \leq \sqrt{n}$ maka n adalah suatu bilangan prima.

Teorema – 5

Jika bialngan bulat positif n tidak memiliki faktor prima p dengan $1 < p \leq \sqrt{n}$ maka n suatu bilangan prima.

Bukti :

Pembuktian teorema – 5 tersebut dengan menyatakan lebih dahulu kontraposisinya, yaitu jika n suatu bilangan komposit, n memiliki faktor prima p dengan $1 < p \leq \sqrt{n}$.

Pembuktian ini dapat menentukan semua bilangan prima yang kurang dari atau sama dengan bilangan asli tertentu n atau yang dinamakan sarinan Erastosthenes.

Sebagai ilustrasi perhatikan Tabel 6.1 dalam menentukan semua bilangan prima kurang dari 100. Setiap bilangan komposit yang kurang dari 100 mesti mempunyai faktor prima yang kurang dari $\sqrt{100}$ = 10. Bilangan prima yang kurang dari 10 hanyalah 2, 3, 5, dan 7 sehingga kita hanya mengecek pembagian bilangan-bilangan bulat yang kurang dari 100 oleh bilangan-bilangan prima itu.

Pertama, coret semua kelipatan 2, selain 2. Selanjutnya, dicoret kelipatan-kelipatan 3, 5, dan 7, kecuali 3, 5, dan 7. Maka itu, sisanya kecuali 1 adalah bilangan-bilangan prima.

Tabel 6.1

Saringan Eratosthenes

1	2	3	4	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	52	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	93	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Contoh 7

1. Tentukan FPB dan KPK dari 198, 216 dan 252

   Jawab

   Apabila 3 bilangan tersebut diuraikan atas faktor-faktor prima maka diperoleh.

   $198 = 2.3^2.11$

   $216 = 2^3.3^3$

   $252 = 2^2.3^2.7$

   Uraikan faktor-faktor prima tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

   $198 = 2.3^2.7^0.11$

   $216 = 2^3.3^3.\ 7^0.\ 11^0$

   $252 = 2^2.3^2.7.\ 11^0$

   $[198,216,252] = 2^{\min(1,2,3)}\,3^{\min(2,3,2)}\,7^{\text{maks}(0,0,1)}\,11^{\min(1,0,0)} = 2^1.3^2.7^0.11^0 = 18$

   $[198,216,252] = 2^{\text{maks}(1,2,3)}\,3^{\text{maks}(2,3,2)}\,7^{\text{maks}(0,0,1)}\,11^{\text{maks}(1,0,0)} = 2^3.3^3.7^1.11^1 = 16{,}632$

2. Apakah 2167 merupakan suatu bilangan prima atau bukan ?

   Jawab

   Membagi bilangan itu dengan 2,3,4,5,...,46, $\sqrt{2167}$.

$$\frac{2167}{2} = 1083.5$$

$$\frac{2167}{3} = 722.3$$

$$\frac{2167}{4} = 541.75$$

$$\frac{2167}{5} = 433.4$$

$$\frac{2167}{46} = 47.11$$

Karena 2167 tidak habis dibagi oleh bilangan-bilangna tersebut, maka 2167 adalah bilangan prima.

C. Faktorisasi Tunggal

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 terbagi oleh suatu bilangan prima sehingga setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1adalah suatu bilangan prima atau bilangan itu dapat dinyatakan sebagai perkalian dari bilangan-bilangan prima tertentu.pada kegiatan belajar ini,akan mempelajarin bahwa pemfaktoran suatu bilngan bulat positif atas faktor-faktor prima adalah faktorisasi tunggal.

Teorema – 6
Jika p suatu bilangan prima dan $p \mid ab$ *maka* $p \mid a$ *atau* $p \mid b$

Bukti :
Karna p suatu bilangan prima, untuk sebarang bilngan bulat a berlaku $(a,p) = 1$ atau $(a,p) = p$.
jika $(a, p) = 1$ dan $p \mid ab$ maka $p \mid b$.
jika $(a, p) = 1$ dan $p \mid ab$ maka $p \mid b$.
jika $(a, p) = p$ maka $p \mid a$.
jadi , terbukti bahwa $p \mid a$ atau $p \mid b$.

Teorema – 7
Pemfaktoran suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 atas faktor – faktor prima adalah tunggal, kecuali urutan dari faktor-faktornya.

Bukti :
Ambil sebarang bilangan bulan positif $n > 1$. Jika n suatu bilangan prima, n adalah faktornya sendiri.
Jika n suatu bilangan komposit dan diandaikan bahwa pemfaktoran n atas faktor – faktor prima adalah tidak tunggal, misalnya

$n = P_1P_2 ... P_1$ *dan* $n = q_1q_2 ... q_r$

Dengan p_i dan qj adalah bilangan-bilangan prima untuk $i = 1,2,3,\ldots, t$ dan $j = 1,2,3, \ldots, r$ serta $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \ldots \geq p_t$ dan $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq \ldots \geq q_r$ dengan $t \leq r$.

Karena $n = p_1 p_2 \ldots p_i$ maka $p_1 \mid n$ sehingga $p_1 \mid q_1q_2q_3 \ldots q_r$. Selanjutnya, menurut perluasan Teorema 3.6, $p_1 = q_t$ untuk k dengan $1 \leq k \leq r$.

Mengingat $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq \ldots \geq q_r$,maka $p_1 \leq q_1$.
Karena $n = p_1 p_2 \ldots q_r$ maka $q_1 \mid n$ sehingga $q_1 \mid p_1p_2 \ldots p_t$. menurut perluasan teorema-6 $q_1 = p_m$ untuk suatu m dengan $1 \leq m \leq t$.

Mengingat $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \ldots \geq p_t$ maka $q_1 \leq p_t$. Karena $p_1 \leq q_1$ dan $q_1 \leq p_1$ maka $p_1 = q_1$ sehingga dari pemisalan n diatas kita memperoleh bahwa
$p_2p_3 \ldots p_t = q_2q_3 \ldots q_r$.

Jika proses seperti diatas diteruskan, kita akan memperoleh bahwa
$p_2 = q_2$ sehingga $p_3 p_4 ... p_t = p_3 q_4 ... q_r$
$p_3 = p_3$ sehingga $p_4 p_5 ... p_t = q_4 q_5 ... q_r$
dan seterusnya.

Apabila $t = r$, proses tersebut akan berakhir pada $p_t = q_r$ dan teorema terbukti. Akan tetapi, apabila $t < r$, akan diperoleh bahwa
$1 = q_{t+1}q_{t+2}q_{t+3} \cdots q_r$

Hal ini mustahil karena $q_r + 1q_t + 2q_r + 3 \ldots q_r$ adalah bilangan – bilangan prima maka haruslah $t = r$ sehingga

$$p_1 = q_1, q_2 = q_2, q_3 = q_3, \ldots, pt = q_r$$

Ini berarti bilangan bulat positif n tersebut hanya dapat dinyatakan sebagai hasil kali faktor – faktor primanya secata tunggal.

Teorema – 8 (Teorema Euclides)
Banyaknya bilangan prima adalah tak berhingga.

Bukti :
Pada pembuktian Teorema Euchlides tersebut, yang menarik adalah pembentukan bilangan bulat positif N sebagai hasil kali semua bilangan prima ditambah 1. Apakah N tersebut suatu bilangan prima ?

Misalkan, kita memulai untuk bilangan prima pertama yaitu 2 maka kita memperoleh:

N1 = 2 + 1 = 3
N2 = 2.3 + 1 = 7
N3 = 2.3.5 + 1 = 31
N4 = 2.3.5.7 + 1 = 211
N5 = 2.3.5.7.11 + 1 = 2311

Coba tunjukkan bahwa N_1, N_2, N_3, N_4, dan N_5 tersebut masing – masing adalah bilangan prima. Selanjutnya, tentukanlah N_6 N_7 dan N_8. Tunjukan bahwa bilangan – bilangan ini bukan bilangan prima!

N6 = 59509

N7 = 1997277

N8 = 34727953

Suatu pertanyaan yang jawabannya belum diketahui, apakah ada banyak tak terhingga k sedemikian hingga N_k suatu bilanga prima pula. Demikian pula, apakah ada banyak tak terhingga bilangan komposit N_k?

Perhatikan barisan bilangan prima 2, 3, 5, 7, …, P_n. P_n adalah bilangan prima ke – n. sekarang, kita ingin menentukan suatu batas atas dari barisan Pn tersebut. Pada pembuktian teorema Euchlides diatas dapat diambil kesimpulan bahwa

$$p_{n+1} \leq p_1 p_2 p_3 \dots p_n + p_n^n + 1$$

Teorema – 9

Dalam suatu baris bilangan prima, jika p_n menyatakan bilangan prima ke-n maka :

$P_n \leq 2^{n-1}$

Bukti :

Pembuktian menggunakan induksi matematika pada n.

Untuk $n = 1$ di peroleh $p_n \leq 2^{2^0}$ yaitu $p_n \leq 2$ maka hasilnya adalah benar karena bilangan prima pertama adalah 2.

Maka untuk $n = k$ benar yaitu, $p_k \leq 2^{2^{k-1}}$

Untuk $n = k+1$ yaitu $p_{k+1} \leq 2^{2^k}$

Maka :

$$p_{k+1} \leq (p_1 p_2 p_3 \dots p_k) + 1$$

$$p_{k+1} \leq \left(2(2^2)(2^{2^2})(2^{2^3})\dots\left(2^{2^{k+1}}\right)\right) + 1$$

$$p_{k+1} \leq \left(2^{1+2+2^2+2^k+\dots+2^{k+1}}\right) + 1$$

maka di tujukkan bahwa $1+2+2^2+2^3+\dots+2^{k-1} = 2^k - 1$ yaitu suatu deret geometri dengan rasio 2 sehingga di peroleh

$$p_{k+1+1} \leq 2^{k-1} + 1.$$

Karena $2^{k-1} > 1$ untuk setiap bilangan asli k maka ketidak samaan itu menjadi

$$p_{k+1}^{+1} \leq 2^{2-1} + 2^{k-1}$$

$$p_{k+1} \leq 2^{2^k}$$

Maka dapat di lihat bahwa untuk pembuktian $n = 1$ benar, $n = k$ dan juga $n = k+1$ tersebut adalah benar untuk setiap bilangan asli n maka dengan memperhatikan teorema ini, bilangan prima ke $(n+1)$ yaitu $p_n \leq 2^{2^n}$. maka itu banyaknya bilangan prima yang lebih kecil dari 2^{2^n} tidak kurang dari $(n+1)$ buah. Jadi untuk $n \geq 1$, ada paling sedikit $n+1$ buah bilangan prima yang lebih kecil dari 2^{2^n}.

Contoh 9

Jika $n = 3$ maka tentukan ketidaksamaan tersebut ?

Jawab
Maka rumusnya yaitu $p_{n+1} \leq p^{n}{}_{n+1}$
n = 3 yaitu $p_{3+1} \leq p^{3}{}_{3} + 1 = 5^3 + 1 = 126$
$p^4 \leq p^{3}{}_{3} + 1 = 5^3 + 1 = 126$
126 yaitu terletak pada ketidaksamaan bilangan prima yang ke-4 yaitu 2.3.5.7 = 210 menurut teorema euclides

Contoh 10
Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat berbentuk $n^3 + 1$ yang merupakan bilangan prima, kecuali angka 2 !
Jawab
n harus bilangan bulat positif
Jika n bukan bilangan bulat positif maka $n^3 + 1 \leq 1$ dan tidak ada bilangan bulat yang seperti nitu yang prima.
Karena $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$ $n^3 + 1$ prima jika salah satu dari dua faktor adalah 1 dan $n^3 + 1$ sendiri
Untuk $n+1 = 1$ (salah) karena $n + 1 > 1$ untuk setiap bilangan bulat positif n
Untuk $n+1 = n^3 + 1$ di peroleh $n^3 = n$ dan nilai n yang memenuhi adalah 1
Sehingga tidak ada bilangan bulat berbentuk $n^3 + 1$ yang prima, kecuali $n = 1$ dan 2 adalah satu satunya bilngan prima dari bentuk tersebut.

D. Rangkuman

Dari paparan materi yang telah disajikan pada BAB VI, dirangkum garis besar materi yang dibahas adalah bentuk-bentuk representasi dari bilangan bulat. Terdapat tiga jenis representasi yang dibahas dalam BAB ini antara lain basis bilangan, bilangan prima, dan faktorisasi tunggal. Dalam basis bilangan prima, representasi bilangan bulat dapat diubah kedalam bentuk basis yang diinginkan, missal : basis 2, 3, 4, 5, .. 15. Setiap subbab dalam BAB ini berisikan definisi, teorema serta contoh soal penentuan representasi bilangan bulat.

1. **Teorema – 1**
   Misalkan b suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 maka setiap bilangan bulat positif n dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + a_{k-2} b^{k-2} + \ldots + a_1 b + a_0$ dengan k suatu bilangan bulat tak negatif , a_j suatu bilangan bulat dengan $0 \leq a_j \leq b - 1$ untuk $j - 0, 1, 2, \ldots k$ dengan $a_k \neq 0$.
2. **Basis Sepuluh**
   Sistem ini menggunakan 10 macam simbol yaitu 0,1,2,3,4,5,6,7,8, dan 9. Sistem ini menggunakan basis 10. Bentuk nilai ini dapat berupa integer desimal atau pecahan. Integer desimal, adalah nilai desimal yang bulat.
3. **Basis Non Sepuluh**
   Pada makalah ini akan dibahas empat jenis bilangan yang berbasis non sepuluh, yaitu bilangan berbasis dua, bilangan berbasis lima, bilangan berbasis dua belas, dan bilangan berbasis lima belas
4. **Teorema – 2**
   Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari satu (1) dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

5. **Teorema – 3**
Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 adalah suatu bilangan prima atau bilangan itu dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangaan prima.
6. **Teorema – 4**
Jika n suatu bilangan komposit maka n memiliki faktor k dengan $l \leq k \leq \sqrt{n}$.
7. **Teorema – 5**
Jika bialngan bulat positif n tidak memiliki faktor prima p dengan $1 < p \leq \sqrt{n}$ maka n suatu bilangan prima.
8. **Teorema – 6**
Jika p suatu bilangan prima dan $p \mid ab$ *maka* $p \mid a$ *atau* $p \mid b$
9. **Teorema – 7**
Pemfaktoran suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 atas faktor – faktor prima adalah tunggal, kecuali urutan dari faktor-faktornya.
10. **Teorema – 8 (Teorema Euclides)**
Banyaknya bilangan prima adalah tak berhingga.
11. **Teorema – 9**
Dalam suatu baris bilangan prima, jika p_n menyatakan bilangan prima ke-n maka : $P_n \leq 2^{n-1}$

E. Latihan

1. Ubahlah lambang bilangan dalam basis sepuluh ini ke dalam bentuk basis non sepuluh !
   a. $547 = \ldots\ldots_3$
   b. $2004 = \ldots\ldots_4$
   c. $972 = \ldots\ldots_5$
   d. $2002 = \ldots\ldots_8$
2. Hitunglah hasil operasi dalam basis 2 berikut :
3. Buktikan bahwa $8 \mid 712635_9$
4. Periksalah apakah bilangan 509 dan 4567 merupakan bilangan prima atau bukan!
5. Buktikanlah setiap pernyataan berikut ini :
   a. Bilangan prima yang dihasilkan dari $n^3 - 1$ hanyalah 7
   b. Bilangan prima yang berbentuk 3n + 1 juga berbentuk 6n + 1
6. Tentukan semua bilangan prima yang membagi 51 !
7. Buktikan bahwa jika $2^n - 1$ adalah bilangan prima, maka n merupakan suatu bilangan prima pula
8. Tunjukkan bahwa bilangan bulat n, n + 2, n + 4 tidak akan menghasilkan bilangan prima untuk n > 3

BAB VII
KEKONGRUENAN

A. Kekongruenan

Bahasan khusus Kongruen sangat berguna dalam teori bilangan, dikembangkan pada awal abad ke sembilan belas oleh Karl Friedrich Gauss, salah satu matematikawan paling terkenal dalam sejarah. Bahasa kongruensi memungkinkan untuk bekerja dengan banyak hubungan antara pembagian, sama seperti berkerja dengan kesamaan. Sebelum kongruensi dikenal, notasi yang digunakan untuk hubungan keterbagian terasa aneh dan sulit untuk dikerjakan. Dengan dikenalkannya notasi ini, dapat membantu mempercepat pengembangan teori bilangan (Irawan, dkk, 2014).

Definisi – 1

Misalkan m adalah bilangan bulat positif. Jika a dan b adalah bilangan bulat, dikatakan bahwa a adalah kongruen dengan b modulo m jika $m \mid (a - b)$.

Jika a kongruen b modulo m, ditulis $a \equiv b \pmod{m}$. Jika $m \nmid (a - b)$, ditulis $a \not\equiv b \pmod{m}$, dan dikatakan bahwa a dan b tidak kongruen modulo m. Bilangan bulat m disebut modulus kongruensi. Bentuk jamak modulus adalah moduli.

Contoh 1

$25 \equiv 1 \bmod 4$

Karena (a – b) terbagi oleh m, (25 – 1) = 24 terbagi oleh 4.

$30 \equiv 2 \bmod 7$

Karena (a – b) terbagi oleh m, (30 – 2) = 28 terbagi oleh 7.

$14 \not\equiv 1 \bmod 3$

Karena (a – b) tidak habis dibagi oleh m, (14 – 1) = 13 tidak terbagi oleh 3.

Teorema – 1

$a \equiv b \pmod{m}$bila dan hanya bila ada bilangan bulat k sehingga $a = mk + b$

Bukti:

$a \equiv b \pmod{m}$ akan ditunjukkan bahwa $a = mk + b$

Dari defenisi 1 diatas didapat bahwa :

$a \equiv b \pmod{m}$, bila dan hanya bila $m \mid (a-b)$.

Karena $m \mid (a-b)$, maka $m > 0$

karena $m \mid (a-b)$, maka ada bilangan bulat k, sehingga $(a - b) = mk$

Contoh 2

Jika $25 \equiv 4 \pmod{7}$ maka ada bilangan bulat k = 3 yaitu $25 - 4 = 7k$ maka $21 = 7.3$

Jika $69 \equiv 1 \pmod{4}$ maka ada bilangan bulat k= 17 yaitu $69 - 1 = 4k$ maka $68 = 4.17$

Jika $-53 \equiv 7 \pmod{10}$ maka ada bilangan bulat k = (-6) yaitu $-53 - 7 = 10k$ maka $-60 = 10.(-6)$

Jadi a ≡ b (mod m), bila dan hanya bila a – b = mk, untuk setiap bilangan bulat k. Karena a – b = mk sama artinya dengan a = mk + b, atau dengan kata lain: a ≡ b (mod m) bila dan hanya bila a = mk + b.

Contoh 3

25 ≡ 4 (mod 7), sama artinya dengan 25 = 7.3 + 4, dimana k = 3
20 ≡ 2 (mod 9), sama artinya dengan 20 = 9.2 + 2, dimana k = 2
69 ≡ 1 (mod 4), sama artinya dengan 69 = 4.17 + 1, dimana k = 17
69 ≡ 4 (mod 5), sama artinya dengan 69 = 5.13 + 4, dimana k = 13
-53 ≡ 7 (mod 10), sama artinya dengan -53 = 10.(-6) + 7, dimana k = (-6)

Teorema – 2

Setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan tepat satu diantara 0,1,2,3,...,(m-1)

Bukti

Kita telah mempelajari bahwa jika a dan m bilangan- bilangan bulat, dan m > 0, menurut algoritma pembagian, maka a dapat dinyatakan sebagai :

a = mq + r, dengan 0 ≤ r < m

Ini berarti bahwa a-r = mq, yaitu a ≡ r (mod m).
Karena 0 ≤ r < m, maka ada m buah pilihan untuk r, yaitu : 0,1,2,3,...,(m-1).
Jadi setiap bilangan bulat akan kongruen dengan m dengan tepat satu diantara 0,1,2,3,...,(m-1).

Contoh 4

27 ≡ r (mod 6), tentukan r, jika 0 ≤ r < 6.
Jawab
Karena 0 ≤ r < 6, maka pilihan untuk r tepat satu diantara 0,1,2,3,4,5,6. Yaitu 3.

Definisi – 2

Jika a ≡ r (mod m) dengan 0 ≤ r < m, maka r disebut residu terkecil dari a modulo m. Untuk kekongruenan residu terkecil ini, {0,1,2,3,...,(m-1)} disebut himpunan residu terkecil modulo m.

Contoh 5

Residu terkecil dari 71 modulo 2 adalah 1, sebab sisa dari 71:2 adalah 1.
Residu terkecil dari 71 modulo 3 adalah 2, sebab sisa dari 71:3 adalah 2.
Residu terkecil dari (-53) modulo 10 adalah 7, sebab sisa dari (-53):10 adalah 7 (ingat residu terkecil dari suatu bilangan adalah bilangan bulat positif).
Residu terkecil dari 34 modulo 5 adalah 4, sebab sisa dari 34:5 adalah 4.
Walaupun 34 ≡ 9 (mod 5), tetapi 9 bukan residu terkecil dari 34 (mod 5), sebab 9 bukan sisa dari 34:5.

Contoh 6

Himpunan residu terkecil dari modulo 5 adalah {0.1,2,3,4}.
Himpunan residu terkecil dari modulo 9 adalah {0.1,2,3,...,8}.
Himpunan residu terkecil dari modulo 16 adalah {0.1,2,3,...,17}.
Himpunan residu terkecil dari modulo 24 adalah {0.1,2,3,...,23}.

Teorema – 3
$a \equiv b \pmod{m}$ bila dan hanya bila a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi m.

Bukti :
Pembuktian teorema ini akan dibuktikan dari dua sisi

Pertama,
jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka akan ditunjukkan bahwa a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi m. Karena $a \equiv b \pmod{m}$, maka $a \equiv r \pmod{m}$ dan $b \equiv r \pmod{m}$, dengan r adalah residu terkecil modulo m atau $0 \le r < m$.
Selanjutnya,
$a \equiv r \pmod{m}$, berarti $a = mq + r$, dan $b \equiv r \pmod{m}$, berarti $b = mt + r$, untuk suatu bilangan bulat q dan t, sehingga dapat disimpulkan bahwa a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi m. (Terbukti!)

Kedua,
jika a dan b memiliki sisa yang sama, maka akan ditunjukkan $a \equiv b \pmod{m}$.
Misalkan:
a memiliki sisa r jika dibagi m, berarti $a \equiv mq + r$, dan
b memiliki sisa r jika dibagi m, berarti $b \equiv mt + r$, untuk suatu bilangan bulat q dan t,
dari kedua persamaan ini diperoleh :
$(a-b) = (mq - mt) + (r-r)$
$(a-b) = m(q - t)$
Karena q dan t adalah suatu bilangan bulat, maka (q-t) adalah suatu bilangan bulat,
maka $m \mid (a - b)$ atau $a \equiv b \pmod{m}$. (Terbukti!)

Telah terbukti dari sisi kiri dan sisi kanan sehingga terbukti bahwa $a \equiv b \pmod{m}$ bila dan hanya bila a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi m.

Menurut teorema-teorema terdahulu, ungkapan-ungkapan berikut mempunyai arti yang sama, yaitu :
1. $n \equiv 7 \pmod{8}$
2. $n = 7 + 8k$
3. n dibagi 8 bersisa 7

Definisi – 3
Himpunan bilangan bulat $\{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m\}$ disebut sistim residu lengkap modulo m, bila setiap elemennya kongruen modulo m, dengan satu dan hanya satu dari $0,1,2,\ldots,(m-1)$.

Contoh 7
Himpunan {45,-9,12,-22,24} adalah sistim residu lengkap dari modulo 5, dapat diperiksa bahwa :
$45 \equiv 0 \pmod{5}$
$-9 \equiv 1 \pmod{5}$
$12 \equiv 2 \pmod{5}$
$23 \equiv 3 \pmod{5}$
$24 \equiv 4 \pmod{5}$

Contoh 8

Himpunan {0,1,2,3,4} merupakan sistim residu lengkap modulo 5, sekaligus sebagai himpunan residu terkecil modulo 5.

Himpunan {4,3,2,1,0} merupakan suatu sistim residu lengkap modulo 5.

Himpunan {5,11,6,1,8,15} bukan merupan sistim tersidu lengkap modulo 6, sebab $5 \equiv 11 \pmod 6$ yang dua-duanya berada dalam himpunan tersebut.

Kekongruenan modulo suatu bilangan bulat positif adalah relasi antara bilangan-bilangan bulat. Suatu relasi disebut relasi ekuivalensi jika relasi itu memiliki sifat reflektif, simetris, dan transitif.

Teorema – 4

Jika m, a, b, dan c adalah bilangan-bilangan bulat dengan m positif, maka :

1) $a \equiv a \pmod m$, sifat reflektif
2) Jika $a \equiv b \pmod m$, maka $b \equiv a \pmod m$, sifat simetris.
3) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $b \equiv c \pmod m$, maka $a \equiv c \pmod m$, sifat transitif.

Bukti :

1) Karena $a - a = 0.m$, maka $a \equiv a \pmod m$
2) Jika $a \equiv b \pmod m$, maka $a - b = k.m$
   sehingga $b - a = (-k).m$
   yang berarti bahwa $b \equiv a \pmod m$
3) $a \equiv b \pmod m$, berarti $a - b = p.m$
   $b \equiv c \pmod m$, berarti $b - c = q.m$
   untuk suatu bilangan bulat p dan q, jika kedua persamaan tersebut kita jumlahkan, maka diperoleh:
   $a - c = (p+q)\, m$
   karena p dan q adalah bilangan-bilangan bulat, maka (p + q) bilangan bulat, sehingga $a \equiv c \pmod m$.

Karena relasi "≡" (kekongruenan) pada himpunan bilangan bulat memenuhi ketiga sifat tersebut, yaitu reflekti, simetris, dan transitif, maka relasi "≡" (kekongruenan) pada himpunan bilangan bulat merupakan relasi ekuivalensi. (terbukti!).

Karena relasi kekongruenan pada bilangan bulat merupakan relasi ekuivalensi, maka akibatnya himpunan bilangan bulat pada kongruen modulo m ini terpartisi menjadi himpunan-himpunan bagian yang setiap himpunan bagian disebut kelas.

Contoh 9

Misal kita memperhatikan himpunan bilangan bulat dengan relasi kekongruenan modulo 5, maka dengan relasi ini himpunan bagian bilangan bulat terpatisi (terbagi menjadi himpunan-himpunan bagian yang saling asing, dan gabungannya sama dengan himpunan bilangan bulat) menjadi 5 kelas, yaitu :

$[0] = \{\ldots,-10,-5,0,5,10,\ldots\}$

$[1] = \{\ldots,-9,-4,1,6,11,\ldots.\}$

[2] = {...,-8,-3,2,7,12,....}
[3] = {...,-7,-2,3,8,13,....}
[4] = {...,-6,-1,4,9,14,....}

Keterangan :
Pemberian nama untuk suatu kelas menggunakan nama salah satu anggota kelas tersebut, yang dibubuhi tanda "garis diatasnya", atau dengan menggunakan tanda "kurung persegi", seperti contoh diatas.

Relasi kekongruenan mempunyai kemiripan sifat dengan persamaan, sebab relasi kekongruenan dapat dinyatakan sebagai persamaan, yaitu $a \equiv b \pmod{m}$ sama artinya dengan $a = b + km$, untuk suatu bilangan bulat k.

Teorema – 5
Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$, untuk setiap bilangan bulat c.

Bukti :
Jika $a \equiv b \pmod{m}$,
berarti $a - b = p.m$,
atau $a = pm + b$ untuk setiap bilangan bulat p,
Selanjutnya, jika masing-masing ruas ditambahkan dengan bilangan bulat c, maka diperoleh :

$$a + c = pm + b + c$$
$$(a + c) - (b + c) = p.m$$

Yang berarti bahwa:
$(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$
Terbukti bahwa untuk setiap bilangan bulat c, jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$

Contoh 10
Jika $15 \equiv 3 \pmod{4}$
maka :
$17 \equiv 5 \pmod{4}$,
sebab $15 + 2 = 17$, dan $3 + 2 = 5$
$21 \equiv 9 \pmod{4}$,
sebab $15 + 6 = 21$, dan $3 + 6 = 9$
$60 \equiv 48 \pmod{4}$,
sebab $15 + 45 = 60$, dan $3 + 45 = 48$
$116 \equiv 104 \pmod{4}$,
sebab $15 + 101 = 116$, dan $3 + 101 = 104$.

Teorema – 6
Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $ac \equiv bc \pmod{m}$, untuk setiap bilangan bulat c

Bukti:
Jika $a \equiv b \pmod{m}$, berarti $a - b = p.m$ untuk setiap bilangan bulat p. Selanjutnya, jika masing-masing ruas dikalikan dengan bilangan bulat c, maka diperoleh :

$c(a - b) = c.p.m$

atau,

$ac - bc = cp.m$

karena c dan p masing-masing adalah bilangan bulat, maka c.p juga merupakan suatu bilangan bulat, sehingga diperoleh bahwa : $ac \equiv bc \pmod m$

Terbukti bahwa untuk setiap bilangan bulat c, jika $a \equiv b \pmod m$, maka $a \equiv b \pmod m$, maka $ac \equiv bc \pmod m$

Contoh 11

Jika $10 \equiv 2 \pmod 4$

maka :

$50 \equiv 10 \pmod 4$,

Sebab 10.5 = 50, dan 2.5 = 10

$120 \equiv 24 \pmod 4$,

Sebab 10.12 =120, dam 2.12 = 24

Jika $21 \equiv 1 \pmod 5$

maka :

$63 \equiv 3 \pmod 5$,

Sebab 21.3 = 63, dan 1.3 = 3

$147 \equiv 7 \pmod 5$,

Sebab 21.7 =147, dam 1.7 = 7

Teorema – 7

Jika $a \equiv b \pmod m$, dan $c \equiv d \pmod m$, maka $(a + c) \equiv (b + d) \pmod m$.

Bukti :

Jika $a \equiv b \pmod m$, dan $c \equiv d \pmod m$

akan dibuktikan bahwa $(a + c) \equiv (b + d) \pmod m$.

Karena $a \equiv b \pmod m$, berarti $a = s.m + b$, untuk suatu bilangan bulat s.

Karena $c \equiv d \pmod m$, berarti $c = t.m + d$, untuk suatu bilangan bulat s.

Jika kedua persamaan tersebut dijumlahkan, maka diperoleh bahwa :

$$(a + c) = (sm + tm) + (b + d)$$
$$(a + c) = m(s + t) + (b + d)$$
$$(a + c) - (b + d) = m.(s + t)$$

Hal ini berarti bahwa :

$$(a + c) \equiv (b + d) \pmod m$$

Terbukti bahwa untuk setiap bilangan bulat c berlaku jika $a \equiv b \pmod m$, dan $c \equiv d \pmod m$

Contoh 12

Jika $20 \equiv 2 \pmod 6$, dan $25 \equiv 1 \pmod 6$,

maka $45 \equiv 3 \pmod 6$

sebab 20 + 25 = 45, dan 2 + 1 = 3.

Teorema – 8

Jika $a \equiv b \pmod m$, dan $c \equiv d \pmod m$, maka $ax + cy \equiv bx + dy \pmod m$, untuk setiap bilangan bulat x dan y.

Bukti :

$a \equiv b \pmod m$, berarti $a = m.s + b$,untuk suatu bilangan bulat s.

$c \equiv d \pmod m$, berarti $c = m.t + d$, untuk suatu bilagan bulat t.

Jika kedua ruas persamaan pertama dikalikan dengan x, dan kedua ruas persamaan kedua dikalikan dengan y, maka diperoleh :

$$ax = msx + bx$$
$$cy = mty + dy$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan ini, maka diperoleh bahwa :

$$ax + cy = (msx + mty) + (bx + dy)$$
$$ax + cy = m(sx + ty) + (bx + dy)$$
$$(ax + cy) - (bx + dy) = m(sx + ty)$$

persamaan terakhir ini berarti bahwa :

$m \mid (ax + cy) - (bx + dy)$

sehingga :

$(ax + cy) \equiv (bx + dy) \pmod m$.

Terbukti bahwa untuk setiap bilangan bulat x dan y berlaku jika $a \equiv b \pmod m$, dan $c \equiv d \pmod m$, maka $ax + cy \equiv bx + dy \pmod m$

Contoh 13

Jika $21 \equiv 1 \pmod 4$, dan $16 \equiv 2 \pmod 7$

maka

$$(21.3 + 16.4) \equiv (1.3 + 2.4) \pmod 7$$
$$(63 + 63) \equiv (3 + 8) \pmod 7$$
$$126 \equiv 11 \pmod 7$$

Sifat Kanselasi (Penghapusan)

Pada persamaan / kesamaan bilangan bulat berlaku sifat kaselasi (penghapusan), yaitu : Misalkan a,b,dan c bilangan bulat, jika $ab = ac$, dengan $a \neq 0$, maka $b = c$. Misal : jika $3.x = 3.6$, maka $x = 6$.

Apakakah pada kekongruenan berlaku sifat yang mirip dengan sifat kaselasi (penghapusan) tersebut ?

Misalkan :

Jika $ab \equiv ac \pmod m$, dengan $a \neq 0$

apakah $b \equiv c \pmod m$?

ambil sebuah contoh :

$24 \equiv 12 \pmod 4$

$3.8 \equiv 3.4 \pmod 4$

$8 \equiv 4 \pmod 4$

bagaimana dengan contoh berikut :

$24 \equiv 12 \pmod 4$

$2.12 \equiv 2.6 \pmod 4$

Apakah $12 \equiv 6 \pmod 4$?

Jelas tidak, karena 4 tidak membagi $(12 - 6)$

Dari kedua contoh diatas, dapat disimpulkan bahwa walaupun sifat kaselasi (penghapusan) tidak berlaku sepenuhnya pada relasi kekongruenan, tetapi akan berlaku jika memenuhi syarat seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema – 9
Jika $ac \equiv bc \pmod{m}$, dengan $(c,m) = 1$ maka $a \equiv b \pmod{m}$.

Bukti :
Jika $ac \equiv bc \pmod{m}$, dengan $(c,m) = 1$, akan dibuktikan bahwa $a \equiv b \pmod{m}$.
Jika $ac \equiv bc \pmod{m}$, berarti $m \mid (ac - bc)$, atau $m \mid c(a - b)$.
Karena $m \mid c\,(a - b)$, dengan $(c,m) = 1$, maka $m \mid (a - b)$
Hal ini berarti bahwa $a \equiv b \pmod{m}$.

Contoh 14
1) Jika $28 \equiv 4 \pmod{1}$
$28.1 \equiv 4.1 \pmod{1}$
maka $28 \equiv 4 \pmod{1}$

2) Jika $24 \equiv 12 \pmod{4}$
$8.3 \equiv 4.3 \pmod{4}$
maka $8 \equiv 4 \pmod{4}$

Contoh 15
Tentukan bilangan-bilangan bulat y yang memenuhi perkongruenan $3y \equiv 1 \pmod{7}$?
Jawab :
Karena $1 \equiv 15 \pmod{7}$, maka kita dapat mengganti 1 pada pengkongruenan tersebut dengan 15, sehigga diperoleh :
$3y \equiv 15 \pmod{7}$
Selanjutnya karena $(3,7) = 1$, maka kita dapat membagi 3 pada ruas-ruas perkongruenan tersebut, Sehingga diperoleh :
$y \equiv 5 \pmod{7}$
berarti:
$y \equiv 5 + 7k$ untuk setiap bilangan bulat k,
atau dapat dikatakan bahwa himpunan penyelesaian dari pengkongruenan tersebut adalah $\{5 + 7k \mid k$ bilangan bulat $k\}$.

Kita dapat menghapus (melenyapkan) suatu faktor dari suatu kekongruenan, jika faktor tersebut dan bilangan modulonya saling prima, sebaliknya jika faktor dan bilangan modulonya tidak saling prima, maka kita harus mengganti bilangan modulonya seperti tampak dalam teorema berikut :

Teorema – 10
Jika $ac \equiv bc \pmod{m}$ dengan $(c,m) = d$,maka $a \equiv b \pmod{m/d}$.

Bukti :
$ac \equiv bc \pmod{m}$ berarti $m \mid (ac - bc)$
$m \mid c(a - b)$
maka $m/d \mid c/d\,(a-b)$.

Karena d FPB dari c dan m, maka m/d dan c/d adalah bilangan-bilangan bulat.
Karena (c,m) = d
maka (c/d , m/d) = 1.
Karena (c/d , m/d) = 1, dan m/d | c/d (a-b),
maka :

m/d | (a-b)

berarti a ≡ b (mod m/d)

Contoh 16

Tentukan x yang memenuhi 2x ≡ 4 (mod 6)
Jawab
2x ≡ 2.2 (mod 6)
karena (2,6) = 2
maka :

x ≡ 2 (mod 3)
atau,
x = 3k + 2, untuk setiap bilangan bulat k.

Jadi nilai-nilai x adalah {3k + 2}, atau dapat dikatakan bahwa himpunan penyelesaian dari pengkongruenan itu adalah {3k + 2 | k bilangan bulat}.

B. Aplikasi Kekongruenan

Pada subbab sebelumnya telah dipaparkan pengertian kekongruenan dan beserta dengan sifat-sifatnya. Pada subbab ini akan membahas penggunaan kekongruenan itu.

Kekongruenan bilangan modulo 9 dapat digunakan untuk memeriksa kebenaran perkalian dan penjumlahan bilangan-bilangan bulat. Diketahui bahwa:

$10 - 1 = 9 = 9K_1$ Sehingga 10 ≡ 1 (mod 9)
$100 - 1 = 99 = 9K_2$ Sehingga 100 ≡ 1 (mod 9)
$1000 - 1 = 999 = 9K_3$ Sehingga 1000 ≡ 1 (mod 9)
$10000 - 1 = 9999 = 9K_4$ Sehingga 10000 ≡= 1 (mod 9)
$100000 - 1 = 99999 = 9K_5$ Sehingga 100000 ≡ 1 (mod 9)
$1000000 - 1 = 999999 = 9K_6$ Sehingga 1000000 ≡ 1 (mod 9)
$10000000 - 1 = 9999999 = 9K_7$ Sehingga 10000000 ≡ 1 (mod 9)
$100000000 - 1 = 99999999 = 9K_8$ Sehingga 100000000 ≡ 1 (mod 9)
Dst..

Selanjutnya, akan ditunjukkkan bahwa setiap bilangan bulat kongruen dengan jumlah angka-angkanya.

Contoh 17

7234 ≡ 7000 + 200 + 30 + 4 (mod 9)
≡ 7 (1000) + 2 (100) + 3 (10) + 4 (mod 9)
≡ 7 (1) + 2 (1) + 3 (1) + 4 (mod 9)
≡ 7 + 2 + 3 + 4 (mod 9)
7234 ≡ 16 (mod 9)

Selanjutnya dengan cara yang sama :
16 $\equiv$ 10 + 6 (mod 9)
$\equiv$ 1 + 6 (mod 9)
$\equiv$ 7 (mod 9)
Sehingga dapat disimpulkan bahwa 7234 $\equiv$ 7 (mod 9)

Teorema – 11
$10^n \equiv 1 \pmod 9$ untuk n = 0,1,2,3 …

Bukti:
$10^n - 1 = 99\ldots9$ dengan jumlah angka 9 sebanyak n
Artinya $10^n - 1$ habis dibagi 9
Yang dapat dituliskan dengan $10^n \equiv 1 \pmod 9$

Teorema – 12
Setiap bilangan bulat kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya.

Bukti:
Ambil sembarang bilangan bulat n yang angka-angkanya secara berturut-turut adalah

$n = d_k\, d_{k-1}\, d_{k-2} \ldots d_2\;\; d_1\;\; d_0$

atau

$n = d_k\, 10^k + d_{k-1}\, 10^{k-1} + d_{k-2}\, 10^{k-2} + \ldots + d_2\, 10^2 + \;\; d_1\, 10 + d_0$

dengan $0 \le \;d_i\; \le 9$ untuk i = 0, 1,..., k dan $d_k \;\neq 0$

Menurut teorema $10^n = 1 \pmod 9$ untuk n = 0, 1, 2, 3,... sehingga

$n = \;d_k\,(1) + d_{k-1}\,(1) + d_{k-2}\,(1) + \ldots + \;\; d_2\,(1) + d_1\,(1) + d_0 \pmod 9$

$n = d_k + d_{k-1} + d_{k-2} + \ldots + d_2 + \;d_1 + d_0 \pmod 9$

Jadi bilangan bulat n kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya

Misal a + b = c, maka tentu a + b = c (mod 9).
Jika a = m (mod 9), b = n (mod 9) dan c = p (mod 9)
maka dari a + b = c (mod 9) dapat disimpulkan bahwa
m + n = p (mod 9).

Prinsip tersebut dapat digunakan untuk memeriksa kebenaran suatu penjumlahan maupun pengurangan bilangan-bilangan bulat yang biasa disebut dengan *koreksi Sembilan.*

Contoh 18
Periksa apakah penjumlahan berikut ini sesuai dengan prinsip diatas.
248 + 324 + 627 = 1244
Jawab
248 $\equiv$ 2 + 4 + 8 (mod 9)
$\equiv$ 14 (mod 9)
$\equiv$ 1 + 4 (mod 9)
$\equiv$ 5 (mod 9)

$$
\begin{aligned}
324 &\equiv 3 + 2 + 4 \pmod 9\\
&\equiv 9 \pmod 9\\
&\equiv 0 \pmod 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
627 &\equiv 6 + 2 + 7 \pmod 9\\
&\equiv 15 \pmod 9\\
&\equiv 1 + 5 \pmod 9\\
&\equiv 6 \pmod 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Jadi, } 248 + 324 + 627 &\equiv 5 + 0 + 6 \pmod 9\\
&\equiv 11 \pmod 9\\
&\equiv 2 \pmod 9 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Sedangkan } 1244 &\equiv 1 + 2 + 4 + 4 \pmod 9\\
&\equiv 11 \pmod 9\\
&\equiv 2 \pmod 9 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}
\end{aligned}
$$

Dari kekongruenan (i) dan (ii) berarti : 248 + 324 + 627 = 1244 (benar)

Prinsip tersebut juga dapat dikembangkan untuk operasi perkalian atau pembagian, sehingga menjadi : Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$ maka $ac \equiv bd \pmod m$.

Contoh 19

Periksa apakah perkalian berikut ini sesuai dengan prinsip diatas.

82 x 427 = 35014

Jawab

$$
\begin{aligned}
82 &\equiv 8 + 2 \pmod 9\\
&\equiv 10 \pmod 9\\
&\equiv 1 + 0 \pmod 9\\
&\equiv 1 \pmod 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
427 &\equiv 4 + 2 + 7 \pmod 9\\
&\equiv 13 \pmod 9\\
&\equiv 1 + 3 \pmod 9\\
&\equiv 4 \pmod 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Sehingga } 82 \times 427 &= 1 \times 4 \pmod 9\\
&= 4 \pmod 9 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
35014 &\equiv 3 + 5 + 0 + 1 + 4 \pmod 9\\
&\equiv 13 \pmod 9\\
&\equiv 1 + 3 \pmod 9\\
&\equiv 4 \pmod 9 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)
\end{aligned}
$$

Dari (1) dan (2) diperoleh kesimpulan bahwa 82 x 427 = 35014 benar sesuai dengan prinsip perkalian modulo 9.

Kekongruenan modulo 9 juga dapat digunakan untuk memeriksa suatu bilangan bulat apakah terbagi habis oleh 9. Suatu bilangan terbagi oleh 9 hanya apabila sisa pembagiannya adalah nol.

$n \equiv a \pmod 9$ jika dan hanya jika n dan a masing-masing mempunyai sisa yang sama jika dibagi 9. Jadi, jika $n \equiv a \pmod 9$ maka n terbagi oleh 9, jika dan hanya jika terbagi oleh 9. Padahal n kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya.

Sehingga dapat disimpulkan, *suatu bilangan terbagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah angka-angkanya terbagi oleh 9.*

Contoh 20

$$\begin{aligned} 7686 &\equiv 7 + 6 + 8 + 6 \\ &\equiv 27 \pmod 9 \\ &\equiv 2 + 7 \pmod 9 \\ &\equiv 9 \pmod 9 \end{aligned}$$

Karena $9 \mid 9$ maka $9 \mid 7587$

$$\begin{aligned} 36623 &\equiv 3 + 6 + 6 + 2 + 3 \pmod 9 \\ &\equiv 20 \pmod 9 \\ &\equiv 2 + 0 \pmod 9 \\ &\equiv 2 \pmod 9 \end{aligned}$$

Karena $9 \nmid 2$ maka $9 \nmid 36623$

Sama halnya dengan keterbagian oleh 9. Karena 3 merupakan faktor dari 9 atau $3 \mid 9$ maka 3 juga memiliki sifat yang sama dengan 9. Sehingga, *suatu bilangan habis dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah angka-angkanya habis dibagi oleh 3.*

Contoh 21

Selidiki apakah $3 \mid 12456$ dan $3 \mid 42541$?

$$\begin{aligned} 12456 &\equiv 1 + 2 + 4 + 5 + 6 \pmod 3 \\ &\equiv 18 \pmod 3 \\ &\equiv 1 + 8 \pmod 3 \\ &\equiv 9 \pmod 3 \end{aligned}$$

Karena $3 \mid 9$ maka $3 \mid 12456$

$$\begin{aligned} 42541 &\equiv 4 + 2 + 5 + 4 + 1 \pmod 3 \\ &\equiv 16 \pmod 3 \\ &\equiv 1 + 6 \pmod 3 \\ &\equiv 7 \pmod 3 \end{aligned}$$

Karena $3 \nmid 7$ maka $3 \nmid 42541$

Selanjutnya untuk menguji suatu bilangan habis dibagi oleh bilangan genap 2, 4, dan 8 dapat dilakukan dengan cara menjabarkan setiap suku-suku pada bilangan tersebut terlebih dahulu agar dapat menentukan ciri-ciri dari bilangan yang habis dibagi.

Misal ambil sembarang bilangan bulat n, sehingga n dapat dinyatakan dengan:

n = $d_k\ d_{k-1}\ d_{k-2}...\ d_2\ \ d_1\ \ d_0$

atau

n = $d_k\ 10^k + d_{k-1}\ 10^{k-1} + d_{k-2}\ 10^{k-2} + \ldots + d_2\ 10^2 + \ \ d_1\ 10 + d_0$

dengan $0 \leq\ d_i\ \leq 9$ untuk i = 0, 1,..., k dan $d_k\ \neq 0$

Karena 2 membagi habis bilangan kelipatan 10, maka setiap suku pada ruas kanan pada persamaan pasti terbagi oleh 2 kecuali d_0. Sehingga untuk memeriksa apakah bilangan n terbagi oleh 2, angka d_0 juga harus terbagi oleh 2. d_0 adalah angka terakhir pada bilangan n. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

Suatu bilangan bulat n terbagi oleh 2 jika dan hanya jika angka terakhir (satuan) pada bilangan n habis dibagi oleh 2.

Contoh 22

Selidiki apakah 345678 terbagi oleh 2 ?

Untuk menjawabnya kita cukup menunjukkan angka terakhir pada bilangan tersebut terbagi oleh 2.

Karena 2 | 8 maka 2 | 345678

Yang artinya 345678 terbagi oleh 2

Untuk memeriksa apakah suatu bilangan bulat habis dibagi oleh 4 dapat diuji pula dengan langkah yang sama. Misal ambil sembarang bilangan bulat n, sehingga n dapat dinyatakan dengan:

n = $d_k\ d_{k-1}\ d_{k-2}...\ d_2\ \ d_1\ \ d_0$

atau

n = $d_k\ 10^k + d_{k-1}\ 10^{k-1} + d_{k-2}\ 10^{k-2} + \ldots + d_2\ 10^2 + \ \ d_1\ 10 + d_0$

dengan $0 \leq\ d_i\ \leq 9$ untuk i = 0, 1,..., k dan $d_k\ \neq 0$

Karena 4 membagi habis bilangan 100 atau 10^2, maka setiap suku pada ruas kanan pada persamaan pasti terbagi oleh 4 kecuali $d_1 10 + d_0$. Sehingga untuk memeriksa apakah bilangan n terbagi oleh 4, angka $d_1 10 + d_0$ juga harus terbagi oleh 4. $d_1 10 + d_0$ adalah dua angka terakhir pada bilangan n. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

Suatu bilangan bulat n terbagi oleh 4 jika dan hanya jika dua angka terakhir (puluhan) pada bilangan n habis dibagi oleh 4.

Contoh 23

Selidiki apakah 72851336 terbagi oleh 4 ?

Untuk menjawabnya kita cukup menunjukkan dua angka terakhir pada bilangan tersebut terbagi oleh 4.

Karena 4 | 36 maka 4 | 72851336

Yang artinya 72851336 terbagi oleh 4

Untuk memeriksa apakah suatu bilangan bulat habis dibagi oleh 8 juga dapat diuji dengan langkah yang sama. Misal ambil sembarang bilangan bulat n, sehingga n dapat dinyatakan dengan:

n = $d_k\ d_{k-1}\ d_{k-2}...\ d_2\ \ d_1\ \ d_0$

atau

n = $d_k\ 10^k + d_{k-1}\ 10^{k-1} + \ldots + d_3\ 10^3 + d_2\ 10^2 + \ d_1\ 10 + d_0$
dengan $0 \leq \ d_i \ \leq 9$ untuk i = 0, 1,..., k dan $d_k \ \neq 0$

Karena 8 membagi habis bilangan 1000 atau 10^3, maka setiap suku pada ruas kanan pada persamaan pasti terbagi oleh 8 kecuali $d_1 10 + d_0$. Sehingga untuk memeriksa apakah bilangan n terbagi oleh 8, angka $d_2 10^2 + d_1 10 + d_0$ juga harus terbagi oleh 8. Dimana $d_2 10^2 + d_1 10 + d_0$ adalah tiga angka terakhir pada bilangan n. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

Suatu bilangan bulat n terbagi oleh 8 jika dan hanya jika tiga angka terakhir (ratusan) pada bilangan n habis dibagi oleh 8.

Contoh 24

Selidiki apakah 350768912 terbagi oleh 8 ?
Untuk menjawabnya kita cukup menunjukkan tiga angka terakhir pada bilangan tersebut terbagi oleh 8.
Karena 8 | 912 maka 8 | 350768912
Yang artinya 350768912 terbagi oleh 8

Untuk menunjukkan suatu bilangan bulat habis dibagi 6, kita ketahui bahwa 6 memiliki faktor 2 dan 3 yang artinya 2 | 6 dan 3 | 6. Jika dimisalkan bilangan bulat tersebut adalah n. Dari 2 | n dan 3 | n serta FPB (2,3) adalah 1. Maka diperoleh 2 x 3 | n atau 6 | n. Sehingga dapat disimpulkan bahwa : *suatu bilangan bulat terbagi oleh 6 jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut dapat terbagi oleh 2 dan 3.*

Contoh 25

Selidiki apakah 345672 terbagi oleh 6 ?
Untuk menjawabnya kita harus dapat menunjukkan bahwa bilangan tersebut terbagi oleh 2 dan terbagi pula oleh 3.

Dari 345672, karena angka terakhir adalah angka 2, maka pasti terbagi oleh 2.
Yaitu menurut sifatnya 2 | 2 maka 2 | 345672

Dari 345772 $\equiv 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 2 \pmod 3$
$\equiv 27 \pmod 3$
$\equiv 2 + 7 \pmod 3$
$\equiv 9 \pmod 3$
Diperoleh 3 | 9 artinya 3 | 345672

Sehingga dapat disimpulkan 2 | 345672 dan 3 | 345672 maka 6 | 345672

Untuk menunjukkan suatu bilangan bulat terbagi oleh 5 dan 10 adalah hal umum yang mudah untuk diketahui. Jika secara matematis persamaan dari suatu bilangan bulat n dituliskan dengan:

n = $d_k\ d_{k-1}\ d_{k-2} \ldots\ d_2\ \ d_1\ \ d_0$
atau
n = $d_k\ 10^k + d_{k-1}\ 10^{k-1} + \ldots + d_3\ 10^3 + d_2\ 10^2 + \ d_1\ 10 + d_0$
dengan $0 \leq \ d_i \ \leq 9$ untuk i = 0, 1,..., k dan $d_k \ \neq 0$

Karena 5 membagi habis bilangan 10, 10^2, 10^3, dst. maka setiap suku pada ruas kanan pada persamaan pasti terbagi oleh 5 kecuali d_0. Sehingga untuk memeriksa apakah bilangan n terbagi oleh 5, maka angka d_0 hanya terdapat dua kemungkinan yaitu 0 dan 5. Dimana d_0 adalah angka terakhir pada bilangan n. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

Suatu bilangan bulat n terbagi oleh 5 jika dan hanya jika angka terakhir (satuan) pada bilangan n adalah 0 dan 5.

Begitu pula berlaku untuk bilangan bulat yang terbagi oleh 10, maka setiap suku pada ruas kanan pada persamaan pasti terbagi oleh 10 kecuali d_0. Sehingga untuk memeriksa apakah bilangan n terbagi oleh 10, maka angka d_0 haruslah berupa angka 0. Dimana d_0 adalah angka terakhir pada bilangan n. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

Suatu bilangan bulat n terbagi oleh 10 jika dan hanya jika angka terakhir (satuan) pada bilangan n adalah 0.

Contoh 26

Selidiki apakah 918273645 terbagi oleh 5 dan 1234567890 terbagi oleh 10 ?

Jawab

Dari 918273645 angka terakhir pada bilangan ini adalah 5, sesuai dengan sifatnya maka $5 \mid 5$ artinya $5 \mid 918273645$

Dari 1234567890, untuk memeriksa apakah bilangan ini terbagi oleh 10 cukup dengan melihat angka terakhir pada bilangan ini yaitu haruslah 0.

Angka terakhir pada bilangan 1234567890 adalah 0. Maka sesuai dengan sifatnya $10 \mid 1234567890$

Untuk menentukan apakah suatu bilangan habis dibagi oleh bilangan tertentu lainnya diluar yang telah dijabarkan di atas. maka terlebih dahulu harus di ketahui ciri-ciri dari bilangan pembagi. Dari ciri-ciri bilangan pembagi, kemudian dituliskan menjadi suatu persamaan maka dapat ditentukan ciri-ciri dari suatu bilangan yang habis dibagi oleh bilangan tertentu tersebut.

Contoh 27

1). 180829 terbagi oleh 11

Karena $(9 + 8 + 8) - (2 + 0 + 1) = 22$ terbagi oleh 11

2). 29183 terbagi oleh 11

Karena $(3 + 1 + 2) - (8 + 9) = -11$ terbagi oleh 11.

3). Tentukan sisa, jika 20^{50} dibagi 7 ?

$20 \equiv -1 \pmod 7$

$20^{50} \equiv (-1)^{50} \pmod 7$

$20^{50} \equiv 1 \pmod 7$

Jadi, $20^{50} : 7$ bersisa 1.

4) Jika hari ini hari Selasa, maka 100 hari lagi jatuh pada hari apa?

Jawab

Diketahui bahwa pola hari akan berulang secara berurutan setelah hari ke tujuh, sehingga diketahui bahwa permasalahan ini merupakan masalah modulo 7. $100 \equiv 2 \pmod 7$ sehingga 2 hari setelah hari Selasa adalah hari Kamis.

C. Rangkuman

Dari paparan materi yang telah disajikan pada BAB VII, dirangkum garis besar materi yang dibahas adalah kekongruenan dan aplikasi kekongruenan pada bilangan bulat. Dari konsep kekongruenan, dapat diturunkan sifat-sifat suatu bilangan yang habis terbagi. Setiap subbab dalam BAB ini berisikan definisi, teorema serta contoh soal aplikasi kekongruenan pada bilangan bulat.

1. **Definisi – 1**
   Misalkan m adalah bilangan bulat positif. Jika a dan b adalah bilangan bulat, dikatakan bahwa a adalah kongruen dengan b modulo m jika $m \mid (a - b)$
2. **Teorema – 1**
   $a \equiv b \pmod m$ bila dan hanya bila ada bilangan bulat k sehingga $a = mk + b$
3. **Teorema – 2**
   Setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan tepat satu diantara 0,1,2,3,...,(m-1)
4. **Definisi – 2**
   Jika $a \equiv r \pmod m$ dengan $0 \leq r < m$, maka r disebut residu terkecil dari a modulo m. Untuk kekongruenan residu terkecil ini, {0,1,2,3,...,(m-1)} disebut himpunan residu terkecil modulo m
5. **Teorema – 3**
   $a \equiv b \pmod m$ bila dan hanya bila a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi m
6. **Definisi – 3**
   Himpunan bilangan bulat $\{r_1, r_2, r_3,..., r_m\}$ disebut sistim residu lengkap modulo m, bila setiap elemennya kongruen modulo m, dengan satu dan hanya satu dari 0,1,2,...,(m-1)
7. **Teorema – 4**
   Jika m, a, b, dan c adalah bilangan-bilangan bulat dengan m positif, maka :
   1) $\mathbf{a \equiv a \pmod m}$, sifat reflektif
   2) Jika $\mathbf{a \equiv b \pmod m}$, maka $\mathbf{b \equiv a \pmod m}$, sifat simetris.
   3) Jika $\mathbf{a \equiv b \pmod m}$ dan $\mathbf{b \equiv c \pmod m}$, maka $\mathbf{a \equiv c \pmod m}$, sifat transitif
8. **Teorema – 5**
   Jika $a \equiv b \pmod m$, maka $(a + c) \equiv (b + c) \pmod m$, untuk setiap bilangan bulat c
9. **Teorema – 6**
   Jika $a \equiv b \pmod m$, maka $ac \equiv bc \pmod m$, untuk setiap bilangan bulat c
10. **Teorema – 7**
    Jika $a \equiv b \pmod m$, dan $c \equiv d \pmod m$, maka $(a + c) \equiv (b + d) \pmod m$.
11. **Teorema – 8**
    Jika $a \equiv b \pmod m$, dan $c \equiv d \pmod m$, maka $ax + cy \equiv bx + dy \pmod m$, untuk setiap bilangan bulat x dan y
12. **Teorema – 9**
    Jika $ac \equiv bc \pmod m$, dengan $(c,m) = 1$ maka $a \equiv b \pmod m$
13. **Teorema – 10**
    Jika $ac \equiv bc \pmod m$ dengan $(c,m) = d$, maka $a \equiv b \pmod{m/d}$
14. **Teorema – 11**
    15. $10^n \equiv 1 \pmod 9$ untuk n = 0,1,2,3 …
16. **Teorema – 12**
    Setiap bilangan bulat kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya.

17. **Ciri-Ciri bilangan habis dibagi**
    - Suatu bilangan terbagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah angka-angkanya terbagi oleh 9
    - Suatu bilangan baihis dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah angka-angkanya habis dibagi oleh 3
    - Suatu bilangan bulat n terbagi oleh 2 jika dan hanya jika angka terakhir (satuan) pada bilangan n habis dibagi oleh 2
    - Suatu bilangan bulat n terbagi oleh 4 jika dan hanya jika dua angka terakhir (puluhan) pada bilangan n habis dibagi oleh 4
    - Suatu bilangan bulat n terbagi oleh 8 jika dan hanya jika tiga angka terakhir (ratusan) pada bilangan n habis dibagi oleh 8
    - Suatu bilangan bulat terbagi oleh 6 jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut dapat terbagi oleh 2 dan 3
    - Suatu bilangan bulat n terbagi oleh 5 jika dan hanya jika angka terakhir (satuan) pada bilangan n adalah 0 dan 5
    - Suatu bilangan bulat n terbagi oleh 10 jika dan hanya jika angka terakhir (satuan) pada bilangan n adalah 0

D. Latihan

1. Buktikan bahwa a ≡ b (mod m) jika dan hanya jika ac ≡ bc (mod mc), jika c merupakan suatu bilangan bulat c.
2. Jika diketahui a ≡ b (mod m) dan c ≡ d (mod m), maka buktikan pernyataan berikut:
    a. ac ≡ bd (mod m)
    b. Untuk setiap n bilangan bulat positif berlaku $a^n \equiv b^n$ (mod m)
3. Jika a ≡ b (mod m) dan n|m, buktikan bahwa a ≡ b (mod n)
4. Misalkan satu tahun 360 hari. Jika sekarang adalah hari Kamis, maka seribu hari lagi jatuh pada hari apa?
5. Tanpa melakukan pembagian, periksa apakah bilangan berikut ini terbagi oleh 9 !
    a. 176521221
    b. 149235678
6. Buktikanlah pernyataan berikut:
    a. Jika n ganjil, maka $10^{3n} \equiv -1 \pmod{1001}$
    b. Jika n genap, maka $10^{3n} \equiv 1 \pmod{1001}$
7. Hitunglah sisa dari pembagian 27^{77} dibagi 7 !

BAB VIII
TEOREMA FERMAT DAN WILSON

Dalam Bab ini membahas tentang teorema Fermat dan Wilson. Dua teorema ini merupakan aplikasi dari relasi kekongruenan dalam lingkup bilangan bulat.

A. Teorema Fermat

Teorema Fermat adalah salah satu teorema paling terkenal di dunia matematika dan dicetuskan oleh Pierre de Fermat pada abad ke – 17. Pierre De Fermat, seorang pengacara yang juga matematikawan amatir abad ke – 7, sering menulis komentar – komentar dipinggiran bukunya. Dan yang paling terkenal sepanjang sejarah adah Teorema Terkahir Fermat (Fermat Last Theorem). Dinamakan teorema terakhir bukan karena terakhir kali dipublikasikan, namun yang terakhir kali dibuktikan. Teorema ini tidak berhasil dibuktikan oleh semua matematikawan – matematikawan dunia selama 357 tahun lebih.

Biasanya pemfaktoran n melalui coba coba, yaitu faktor prima yang tidak melebihi diasumsikan n bulat ganjil. Metoda Fermat didasarkan pada ide penemuan bilangan bulat x dan y
sehingga $n = x^2 - y^2$
$n = (x + y)(x - y)$
Maka $(x + y)$ dan $(x - y)$ adalah faktor dari n

Teorema – 1
Jika (a,m)=1 maka residu terkecil suatu modulo m dituliskan dalam barisan: a, 2a, 3a,..., (m-1)a adalah suatu permutasi dari 1,2,3,...,(m-1)

Bukti:
Perhatikan barisan bilangan: a, 2a, 3a, ..., (m-1)a …………....(*)
Bilangan pada barisan (*) tidak ada satu pun yang kongruen modulo m dengan $m \neq 0$.
Selanjutnya, kita harus membuktikan bahwa bilangan dalam barisan (*) masing-masing kongruen modulo m dengan tepat satu dari 1,2,3,..., (m-1).
Andaikan ada dua suku dari barisan (*) yang kongruen modulo m
Misal: $ra \equiv sa \pmod m$
Karena (a,m) = 1, maka kita dapat menggunakan sifat kanselasi a dari kekongruenan itu, sehingga diperoleh

$$r \equiv s \pmod m$$

Tetapi, karena ra dan sa adalah suku-suku dari barisan (*), maka r dan s adalah sisaan terkecil modulo m, Sehingga r = s
Hal ini kontradiksi dengan pengandaian, sehingga pengandaian tersebut tidak benar. Jadi, tidak ada dua bilangan dari barisan (*) yang kongruen modulo m. Ini berarti bahwa bilangan dalam barisan (*) masing-masing kongruen modulo m dengan tepat satu dari 1, 2, 3,.., (m-1).

Teorema – 2 (Teorema Kecil Fermat)
Jika p suatu bilangan prima dan (a,p) =1 untuk suatu bilangan bulat a, maka $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Teorema ini dapat dinyatakan dengan cara lain, "jika p adalah bilangan prima dan a prima relatif dengan p maka $a^{p-1} - 1$ dapat dibagi oleh p".

Bukti:
Ambil sembarang bilangan prima p dan bilangan bulat a sedemikian (a,p) =1.
Menurut teorema sisaan terkecil mod p dari a, 2a, 3a, ..., (p-1)a adalah suatu permutasi dari 1, 2, 3, ...,(p-1) sehingga hasil kalinya akan kongruen mod p juga, yaitu a.2a.3a....(p-1)a (mod p).
Dengan demikian,

$$a^{p-1} \equiv (p-1) \pmod p$$

$$a^{p-1}(p-1) \equiv (p-1) \pmod p.$$

Karena p dan (p-1) saling prima, maka kita dapat menggunkan sifat kanselasi (p-1) dari kekongruenan terakhir ini, sehingga diperoleh:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

dimana $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ bermakna sama dengan $(a^{p-1} - 1)$ terbagi oleh p.

Teorema – 3
Jika p suatu bilangan prima, maka $a^p \equiv a(\mathrm{mod}\ p)$ untuk setip bilangan bulat a.

Bukti:
Ambil sembarang bilangan prima p dan sembarang bilangan bulat a, maka (a,p)=1 atau (a,p) = p.
Jika (a,p) = 1, menurut teorema diperoleh bahwa:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Selanjutnya, jika kedua ruas dikalikan a, maka diperoleh

$$a^p \equiv a \pmod p$$

Jika (a,p) = p maka a = p , sehingga
$a \equiv 0 \pmod p$ dan $a^p \equiv 0 \pmod p$
Jadi, $a^p \equiv a \pmod p$ benar.

Teorema – 4
Misalkan p dan q adalah dua bilangan prima yang tidak sama. Jika $a^p \equiv a(\mathrm{mod}\ q)$ dan $a^q \equiv a(\mathrm{mod}\ p)$, maka $a^{pq} \equiv a(\mathrm{mod}\ pq)$.

Bukti:
Menurut teorema, $(a^p)^q \equiv a^q(\mathrm{mod}\ p)$ sebab p suatu bilangan prima.
Selanjutnya, karena diketahui $a^q \equiv a(\mathrm{mod}\ p)$ maka kekongruenan tersebut menjadi
$(a^q)^p \equiv a \pmod p$ ini berarti bahwap = $(a^{pq} - a)$
Menurut teorema 3 lagi, $(a^p)^q \equiv a^q(\mathrm{mod}\ q)$ sebab q suatu bilangan prima. Selanjutnya karena diketahui bahwa $a^p \equiv a(\mathrm{mod}\ q)$ maka kekongruenan tersebut menjadi:

$$a^{pq} \equiv a(\mathrm{mod}\ q)$$

ini berarti q = $(a^{pq} - a)$
Menurut teorema terdahulu, jika p $\equiv (a^{pq} - a)$ dan q $\equiv (a^{pq} - a)$ serta (p,q) = 1 maka pq = $(a^{pq} - a)$, akibatnya a^{pq} a(mod pq).

Teorema 4 menunjukkan bahwa kebalikan pernyataan teori Fermat (teori 2) tidak benar yakni, jika hubungan $a^{n-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$ untuk suatu bilangan bulat a, maka n tidak perlu suatu bilangan prima.

Contoh

1) Jika p = 5 dan a = 2 berarti (2,5) = 1

   Maka $a^{p-1} - 1 = 2^{5-1} - 1$
   $= 2^4 - 1$
   $= 16 - 1$
   $= 15$ dapat dibagi oleh p = 5

   Dapat ditulis $16 \equiv 1 \pmod 5$.

2) Ambil a = 8 dan p = 3, (a,p) = 1 atau p – a.

   Dengan demikian, diperoleh $a^{p-1} = 8^{3-1} = 8^2 = 64$

   Tetapi, $64 \equiv 1 \pmod 3$ (sesuai dengan teorema 2).

   Menurut teorema 3, $8^3 = 512$ dan $512 \equiv 8 \pmod 3$.

3) Menurut teorema Fermat, $5^{10} = 1 \pmod{11}$, yaitu dari hasil $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

   Untuk a = 5 dan p = 1, (a,p) = 1.

   Selanjutnya, $5^{38} = 5^{(10)(3)+8} = (5^{10})^3(5^2)^4$,

   Sehingga $5^{38} \equiv (1)^3(3)^4 \pmod{11}$
   $\equiv 81 \pmod{11}$
   $\equiv 4 \pmod{11}$

   Jadi, 5^{38} dibagi 11 bersisa 4.

4) Apakah 117 suatu bilangan prima atau komposit?

   Misalkan kita mengambil bilangan bulat a = 2 (boleh a bilangan lain). Kita akan memeriksa kebenaran $2^{117} = 2^{7(16)+5} \times 2^5$, dan $2^7 = 128 \equiv 11 \pmod{117}$,

   Sehingga $2^{117} \equiv (11^6 \times 2^5) \pmod{117}$
   $\equiv 121^8 \times 2^5 \pmod{117}$
   $\equiv 4^8 \times 2^5 \pmod{117}$
   $\equiv 2^{21} \pmod{117}$
   $\equiv (2^7)^3 \pmod{117}$
   $\equiv 11^3 \pmod{117}$
   $\equiv 121 \times 11 \pmod{117}$
   $\equiv 4 \times 11 \pmod{117}$
   $\equiv 44 \pmod{117}$

   Jadi, diperoleh $2^{117} \equiv 44 \pmod{117}$, dan ini berarti $2^{117} \equiv 2 \pmod{117}$. Dengan demikian, 117 bukan bilangan prima tetapi bilangan komposit. Kenyataan memang 117 = 13 x 9.

5) Tunjukkanlah bahwa $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$.

   Perhatikan bahwa 341 = 31 x 11 dan $2^{10} = 1024 = 31 \times 33 + 1$.

   Dengan demikian, $2^{10} \equiv 1 \pmod{31}$

   Selanjutnya, $2^{11} = 2 \times 2^{10} \equiv 2 \pmod{31}$ dan $2^{10} = 1024 = 31 \times 3 \times 11 + 1$,

   Sehingga $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

   Jika kedua ruas dipangkatkan dengan 3 maka $2^{30} \equiv 1 \pmod{11}$
   $2^{31} \equiv 2 \pmod{11}$

   Menurut teorema 4, $2^{11} \equiv 2 \pmod{31}$ dan $2^{31} \equiv 2 \pmod{11}$.

   Karena 11 dan 31 bilangan prima maka $(2^{11})^{31} \equiv 2 \pmod{11 \times 31}$

   Sehingga $2^{341} \equiv 2 \pmod{341}$. Jika kedua ruas dibagi 2,
   diperoleh $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$.

6) Berapa sisa jika 20^{50} dibagi 7?
Diketahui $20 \equiv -1 \pmod 7$,
sehingga $20^{50} \equiv (-1)^{50} \pmod 7$ atau
$20^{50} \equiv 1 \pmod 7$.
Jadi, 20^{50} dibagi 7 bersisa 1.

7) Berapa sisa jika 3^{19} dibagi 14?
$3^{19} \equiv \pmod{14}$
$3^{3 \times 6 + 1} \equiv \pmod{14}$
$(3^3)^6.3^1 \equiv \pmod{14}$
$((27)^6 \times 3) \equiv \pmod{14}$
$(2 \times 14 - 1)^6 \times 3^1 \equiv \pmod{14}$
$(-1)^6 \times 3^1 \equiv \pmod{14}$
$3 \equiv \pmod{14}$
Jadi, $3^{19} \equiv 3 \pmod{14}$
Sehingga sisa pembagian 3^{19} oleh 14 adalah 3.

8) Berapa sisa jika 3^{1990} dibagi 41?
$3^{1990} \equiv \pmod{41}$
$3^{4 \times 497 + 2} \equiv \pmod{41}$
$((3^4)^{497} \times 3^2) \equiv \pmod{41}$
$((81)^{497} \times 3^2) \equiv \pmod{41}$
$((2 \times 41 - 1)^{497} \times 3^2) \equiv \pmod{41}$
$((-1)^{497} \times 9) \equiv \pmod{41}$
$(-9) \equiv \pmod{41}$
$(41-9) \equiv \pmod{41}$
Jadi, $3^{1990} \equiv 32 \pmod{41}$
Jadi, sisa pembagian 3^{1990} jika dibagi 41 adalah 32.

B. Teorema Wilson

Sama halnya dengan teorema Fermat, Teorema Wilson juga masih seputar pembahasan bilangan prima. Dalam buku yang dipublikasikan tahun 1770, seorang matematikawan Inggris Edward Waring menyatakan bahwa muridnya menemukan bahwa (p-1)!+1 habis dibagi oleh p berapapun p yang merupakan bilangan prima. Namun, tidak ada dari keduanya yang mampu membuktikannya. Tahun 1771, Joseph Lagrange membuktikan teorema ini, yang selanjutnya dikenal sebagai teorema Wilson. Teorema Wilson adalah salah satu teorema yang menggambarkan sifat dari bilangan prima. Menurut teorema wilson, p adalah bilangan prima jika p membagi (p-1)!+1. Begitu pula sebaliknya suatu bilangan p yang membagi (p-1)!+1maka bilangan tersebut adalah prima.

Teorema – 5
Jika suatu bilangan prima, maka perkongruenan $x^2 \equiv 1 \pmod p$ mempunyai tepat dua solusi , yaitu 1 dan p -1.

Bukti :

Misalkan r adalah suatu solusi dari perkongruenan $x^2 \equiv 1 \pmod p$

maka $r^2 - 1 \equiv 1 \pmod p$

$(r+1)(r-1) \equiv 1 \pmod p$

Perkongruenan terakhir ini berarti

P | (r+1), Karena suatu bilangan prima ,maka p |(r+1) atau p |(r-1)

yaitu $r+1 = 0 \pmod p$ atau $r-1=0 \pmod p$

- $r = -1 \pmod p$ atau $r = 1 \pmod p$
- $r = (p-1) \pmod p$ atau $r = 1 \pmod p$

Karena r suatu solusi dari perkongruenan $x^2 = 1 \pmod p$, maka r adalah residu terkecil mod p. Jadi 1 dan p – 1 adalah solusi dari $x^2 = 1 \pmod p$.

Teorema – 6

Misalkan p suatu bilangan prima selain 2 dan a' adalah solusi dari $ax \equiv 1 \pmod p$ dengan a = 1,2,3,......,p-1 (yaitu $a\,a' \equiv 1 \pmod p$, dengan $0<a'<p$), maka :

- Jika $a \not\equiv b \pmod p$ maka $a' \not\equiv b' \pmod p$.
- Jika a = 1 atau a = p – 1 maka $a' \equiv a \pmod p$

Bukti :

a = 1,2,3.....,p-1 ,maka (a,p) = 1, sehingga $ax \equiv 1 \pmod p$ mempunyai tepat satu solusi, hal ini berarti a' ada sedemikian hingga $a\,a' \equiv 1 \pmod p$.

Bagian (1)

Dibuktikan kontraposisisnya , yaitu $a' \equiv b' \pmod p$,maka $a \equiv b \pmod p$.

Misalkan $a' \equiv b' \pmod p$, maka

$aa' = ab'' \equiv 1 \pmod p$. Ingat bahwa a' dan b' adalah solusi.

$aa'b \equiv ab'b \pmod p$ dengan b = 1,2,3,....,(p-1).

$a \equiv b \pmod p$ sebab $bb' \equiv 1 \pmod p$.

Jadi (1) telah terbukti.

Bagian (2) dibulatkan sebagai berikut:

Jika a = 1 yaitu $x \equiv 1 \pmod p$,maka solusinya a'=1, sehingga $a' \equiv a \pmod p$.

Jika a = p-1 yaitu $(p-1)x \equiv 1 \pmod p$

$-x \equiv 1 \pmod p$

$x \equiv -1 \pmod p$

$x \equiv p-1 \pmod p$

Jadi a' = p-1, sehingga $a' \equiv a \pmod p$

Teorema – 7 (Teorema Wilson)

Jika p suatu bilangan prima, maka $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Bukti:

Menurut teorema kita dapat memasangkan a dan a' dari 2,3,4,…, (p-2) demikian sehingga $a.a' \equiv 1 \pmod p$. dan terdapat ½ (p-3) pasangan bilangan-bilangan tersebut yang kongruen mod p dengan 1. Jika ruas-ruas kiri dari ½ (p-3) kekongruenan mod p tersebut dikalikan, maka hasilkalinya akan kongruen mod p dengan 1 pula, yaitu:

$$2.3.4.5\ldots(p-2) \equiv 1 \pmod p$$

$$1.2.3.4\ldots(p-2)(p-1) \equiv (p-1) \pmod p$$

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

Sebagai contoh diambil p=13, maka kita dapat memasangkan a dan a' dari 2.3.4,…,11, sehingga terdapat 5 pasang yang hasilkalinya kongruen mod 13 dengan 1, yaitu:

$$2.7 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$3.9 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$4.10 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$5.8 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$6.11 \equiv 1 \pmod{13}$$

Hasil kali ruas-ruas dari 5 kekongruenan ini adalah (2.7) (3.9) (4.10) (5.8) (6.11) = 1 (mod 13)

$1.2.3.4.5….11.12 \equiv 12 \pmod{13}$

$12! \equiv -1 \pmod{13}$

Konvers dari Teorema Wilson juga benar, yaitu apabila (p-1)! = -1 (mod p), maka p suatu bilangan prima.

Hal ini dibuktikan sebagai berikut:

Andaikan p bukan bilangan prima, maka p = a. b dengan a, b bilangan-bilangan bulat positif dan a $\neq$ b atau a $\neq$ p, sehingga a | p dan a $\leq$ p -1. Karena a (p – 1)! $\equiv$ -1 (mod p), maka p | (p -1)! + 1.
Dan karena a | p, maka a | (p – 1)! + 1.
Karena a $\leq$ p -1, maka a merupakan salah satu faktor dari (p-1)!, sehingga a | (p – 1)!

Mengingat a |(p -1)! + 1 dan a |(p -1)!, maka a |1. Diperoleh suatu kontradiksi, karena a $\neq$ 1, sehingga pengandaian tersebut tidak benar. Jadi p adalah suatu bilangan prima.

Jika Teorema Wilson dan konversnya dituliskan bersama-sama, kita memperoleh bahwa:
Syarat perlu dan cukup agar p suatu bilangan prima adalah (p -1)! $\equiv$ -1 (mod p).

Berikut ini sebuah contoh penggunaan Teorema Wilson untuk menyelesaikan perkongruenan kuadrat seperti dalam teorema berikut ini.

Teorema 8

Jika p suatu bilangan prima ganjil maka perkongruenan $x^2 + 1 \equiv 0$ (mod p) mempunyai solusi bila dan hanya bila p $\equiv$ 1 (mod 4)

Bukti:

Misalkan a adalah suatu solusi dari $x^2 + 1 \equiv 0$ (mod p) maka $a^x \equiv -1$ (mod p) dan (a,p) = 1. Karena (a,p) = 1, menurut Teorema Fermat maka

$$a^{p-1} \equiv 1(\text{mod p})$$
$$(a^2)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1(\text{mod p})$$
$$(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1(\text{mod p})$$
$$(-1)^{\frac{p\ 1}{2}} \equiv 1(\text{mod p})$$

Bilangan prima berbentuk 4k+3 tampak tidak memenuhi, sebab akan di dapat $(-1)^{2k+1} \equiv 1$ (mod p)

$-1 \equiv 1$ (mod p), yaitu p|2 yang jelas salah

Jadi bilangan prima p berbentuk 4k+1, yaitu $p \equiv 1$ (mod 4)

Untuk sebaliknya dibuktikan sebagai berikut:

Perhatikan bahwa $p - 1 \equiv -1$ (mod p),

$p - 2 \equiv -2$ (mod p)

$\frac{p+1}{2} \equiv \frac{p-1}{2}$ (mod p) dan

(p-1)! ≡ 1.2.3… $\frac{p-1}{2} . \frac{p+1}{2}$ …….(p-2) . (p-1)

maka

(P-1)! ≡ 1.2.3… $\frac{p-1}{2} . \frac{-p+1}{2}$ …(-2)(-1)(mod p)

(mod p), sebab p = 4k +1, untuk suatu bilangan bulat positif k

sehingga $(-1)^{\frac{(p-1)}{2}} = 1$

Mengingat Teorema Wilson bahwa (p-1)! = -1 (mod p) maka

Hal ini berarti memenuhi perkongruenan $x^2 + 1 = 0$ (mod p). Jadi perkongruenan itu mempunyai solusi.

Contoh

1) Berapakah hasil dari 70! Dibagi 71

   Penyelesaian :

   Dik : p = 71 (prima) $70! = (71 - 1)! \equiv 70 \ mod \ 71$

   $\equiv -1 \ mod \ 71$

2) Tentukan sisa pembagian 14!.12!.10! dibagi 13 !

   Penyelesaian :

   $14! .12! .10! = 14.13.12! .12! .10! \equiv 14.13. (-1). (-1). 10! \ (mod \ 13)$

   $\equiv 0$ (mod 13)

3) Selesaikan perkongruenan x + 10 (mod 13).

   Penyelesaian :

   Karena 13 adalah bilangan prima berbentuk 4k – 1 maka perkongruenan tersebut mempunyai solusi, yaitu : $\left(\frac{13-1}{2}\right)! = 6! = 720 \equiv 5(mod \ 13)$

4) Tentukanlah sisa dari 15!: 17

   Penyelesaian :

   Menurut teorema Wilson $(P-1)! \equiv -1(mod \ p)$

   Karena 17 suatu bilangan prima maka

   $(16)! \equiv -1(mod \ 17)$

   $(15)! \times 16 \equiv 16(mod \ 17)$

   $(15)! \equiv 1(mod \ 17)$

   $16 \equiv 1(mod \ 17)$

   Hal ini berarti 15! $dibagi$ 17 bersisa 1

5) Jika p suatu bilangan prima buktikanlah bahwa

   (i) $p \mid a^p + (p-1)! \, a$

(ii) $p \mid (p-1)! \times a^p + a$

Penyelesaian :

(i) Dengan menggunakan teorema Wilson

$$(p-1)! \equiv -1(mod\ p)$$

$$(p-1)!\, a \equiv -a(mod\ p)$$

Menurut Teorema Fermat $a^p \equiv a(mod\ p)$ maka

$$(p-1)!\, a \equiv -a^p(mod\ p)$$

$$(p-1)!\, a^p + a \equiv 0(mod\ p) \rightarrow p \mid a^p + (p-1)! \times a$$

(ii) Karena $(p-1)!\, a + a^p \equiv 0(mod\ p)$ dan $a^p \equiv a(mod\ p)$

Maka $a^p \equiv a(mod\ p)\ maka\ (p-1)!\, a \equiv -a(mod\ p)$

$(p-1)!\, a^p + a \equiv 0(mod\ p) \rightarrow p|(p-1)! \times a^p + a$

6) Buktikanlah bahwa $2(p-3)! + 1 - 0(,od\ p)$, jika p suatu bilangan prima yang lebih dari 5, gunakan hasil ini untuk menentuksn sisa dari $2(26)!$ Dibagi 29.

Penyelesaian :

Karena p bilangan prima, maka $(p-1)! = -1(mod\ p)$ maka

$(p-2)!\, 9p-1) \equiv (p-1)(mod\ p)$

$(p-2)! \equiv 1(mod\ p)$

$(p-3)!\, 9p-2) \equiv 1(mod\ p)$

$(p-3)!\,(-2) \equiv 1(mod\ p)$

$2 \times (p-3)! \equiv -1(mod\ p)$

$2 \times (p-3)! + 1 \equiv 0(mod\ p)$

Bila menggunakan $2(p-3)! = -1(mod\ p)$ maka $2(26)! \equiv 28\ (mod\ 29)$

Dengan demikian $2(26)!$ Dibagi 29 akan bersisa 28.

C. Rangkuman

Dari paparan materi yang telah disajikan pada BAB VII, dirangkum garis besar materi yang dibahas adalah kekongruenan dan aplikasi kekongruenan pada bilangan bulat. Dari konsep kekongruenan, dapat diturunkan sifat-sifat suatu bilangan yang habis terbagi. Setiap subbab dalam BAB ini berisikan definisi, teorema serta contoh soal aplikasi kekongruenan pada bilangan bulat.

1. **Teorema – 1**

   Jika (a,m)=1 maka residu terkecil suatu modulo m dituliskan dalam barisan: a, 2a, 3a,..., (m-1)a adalah suatu permutasi dari 1,2,3,...,(m-1)
2. **Teorema – 2 (Teorema Kecil Fermat)**

   Jika p suatu bilangan prima dan (a,p) =1 untuk suatu bilangan bulat a, maka $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).
3. **Teorema – 3**

   Jika p suatu bilangan prima, maka $a^p \equiv a$(mod p) untuk setip bilangan bulat a.
4. **Teorema – 4**

   Misalkan p dan q adalah dua bilangan prima yang tidak sama. Jika $a^p \equiv a$(mod q) dan $a^q \equiv a$(mod p), maka $a^{pq} \equiv a$(mod pq)

5. **Teorema – 5**
   Jika suatu bilangan prima, maka perkongruenan $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ mempunyai tepat dua solusi , yaitu 1 dan p -1
6. **Teorema – 6**
   Misalkan p suatu bilangan prima selain 2 dan a' adalah solusi dari $ax \equiv 1 \pmod{p}$ dengan a = 1,2,3,......,p-1 (yaitu $a\,a' \equiv 1 \pmod{p}$, dengan $0<a'<p$), maka :
   - Jika $a \not\equiv b \pmod{p}$ maka $a' \not\equiv b' \pmod{p}$.
   - Jika a = 1 atau a = p – 1 maka $a' \equiv a \pmod{p}$
7. **Teorema – 7 (Teorema Wilson)**
   Jika p suatu bilangan prima, maka $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
8. **Teorema – 8**
   Jika p suatu bilangan prima ganjil maka perkongruenan $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ mempunyai solusi bila dan hanya bila $p \equiv 1 \pmod{4}$

D. Latihan

1. Tentukan dua angka terakhir dari 7^{355} !
2. Jika gcd (p,35) = 1
   Tunjukkan bahwa $p^{12} \equiv 1 \pmod{35}$
3. Berapakah sisa dari pembagian :
   314^{159} dibagi 7
4. Buktikanlah untuk setiap bilangan bulat p berlaku $p^{21} \equiv p \pmod{15}$
5. Tentukanlah sisa dari pembagian :
   15! Dibagi 17
6. Jika p adalah suatu bilangan prima, buktikan bahwa $p \mid m^p + (p-1)!\,m$
7. Jika p suatu bilangan prima ganjil, gunakan Teorema Fermat untuk membuktikan bahwa : $1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$

DAFTAR PUSTAKA

Gallian, J. A. (2010). Contemporary Abstract Algebra. In *Contemporary Abstract Algebra*. United States: Brooks/Cole Cengage Learning.

Handayani, R., & Yulina. (2020). *Teori Bilangan* (1st ed.). Kotabumi: Universitas Muhammadiyah Kotabumi.

Irawan, dkk, W. H. (2014). *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN Maliki Press.

Jabar, A. (2013). *Teori Bilangan*. Banjarmasin: STKIP PGRI Banjarmasin.

Jupri, A. (2020). *Dasar-Dasar Teori Bilangan*. Bandung: Yrama Widya.

Kusaeri. (2017). *Historiografi Matematika* (1st ed.). Yogyakarta: Matematika.

Stein, W. (2009). Elementary number theory: primes, congruences, and secrets: a computational approach. In *Springer* (Vol. 47). New York: Springer. https://doi.org/10.5860/choice.47-0925