MATEMATIKA DISKRIT DAN AYAT Al-QUR’AN

Dr. Rina Filia Sari, M.Si
Rima Aprilia, M.Si

MATEMATIKA DISKRIT DAN AYAT Al-QUR’AN

Dr. Rina Filia Sari, M.Si
Rima Aprilia, M.Si

Pusdikra Mitra Jaya

Jln. Williem Iskandar No – 2K/22 Medan
Tlpn. (061) 8008-8209 (0813-6106-0465)
Email: cvpusdikramitrajaya@gmail.com

Matematika Diskrit Dan Ayat Al Qur'an

Cet. 1. – Medan CV. Pusdikra Mitra Jaya, 2021
xii. 128 Hlm, 26 Cm.
Hak Cipta Pada, Penulis Dan Penerbit.
Januari 2021

Karya
Dr. Rina Filia Sari, M.Si
Rima Aprilia, M,Si

Desain Sampul:
Pusdikra Advertising

Tata letak
Oda Kinata Banurea

Diterbitkan Oleh:

CV. Pusdikra Mitra Jaya
Jln. Williem Iskandar No – 2K/22 Medan

Tlpn. (061) 8008 - 8209 (0813-6106-0465)

Email: cvpusdikramitrajaya@gmail.com

Anggota IKAPI (IKATAN PENERBIT BUKU INDONESIA)

IKAPI. No. 043/SUT/2020

Dicetak Oleh CV.Pusdikra Mitra Jaya. Medan
PMJ. NO. 20/ B.1/Pusdikra/ ISBN/ I/ 2021

Cetakan Pertama Januari 2021

ISBN: 978-623-6853-10-8

KATA PENGANTAR

Buku ajar ini mencoba membantu mahasiswa dalam memahami topik topik yang dibahas dalam mata kuliah matematika diskrit. Bahan kuliah yang disajikan dalam buku ini meliputi teori himpunan, logika, aljabar Boolean, kombinatorik, induksi matematika, dasar-dasar teori graph dan pohon. Materi kuliah yang disajikan pada buku ini diambil dari berbagai sumber yang masing-masing judulnya dicantumkan pada Daftar Pustaka.

Mata kuliah ini termasuk kedalam mata kuliah dasar yang diperlukan sebagai pengetahuan awal mata kuliah tingkat lanjut. Matematika Diskrit juga merupakan matakuliah dasar pada ilmu komputer, Teknik Informatika, Sistem Informasi dan Teknik Elektro. Pada buku ajar ini, selain konsep dasarnya, penulis menambahkan dengan konsep-konsep yang terdapat dalam Al-Qur’an.

Akhirnya penulis tak lupa mengucapkan banyak terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu penulis dalam menyusun buku ajar ini. Mengingat ketidaksempurnaan buku ajar ini, penulis juga akan berterima kasih atas berbagai masukan dan kritikan demi kesempurnaan buku ajar ini dimasa datang.

Medan, Nopember 2020

Rina Filia Sari

DAFTAR ISI

BAB I
TEORI HIMPUNAN

Konsep himpunan pertama kali dikemukakan oleh George Cantor (1845-1918). Tahun 1920 konsep himpunan digunakan secara luas dalam beberapa cabang matematika. Himpunan (*set*) dapat diartikan sebagai kumpulan objek-objek yang *berbeda* tapi memiliki paling sedikit satu kesamaan dan terdefinisi dengan jelas. Setiap benda atau objek yang berada dalam suatu himpunan disebut anggota, unsur atau elemen dari himpunan itu dan dinotasikan dengan $\in$.

Ayat Al Qur’an yang menggambarkan tentang himpunan dapat ditemukan pada surat Al-An’am ayat 128.

وَيَوْمَ يَحْشُرُهُمْ جَمِيعًا يَٰمَعْشَرَ ٱلْجِنِّ قَدِ ٱسْتَكْثَرْتُم مِّنَ ٱلْإِنسِ ۖ وَقَالَ أَوْلِيَآؤُهُم مِّنَ
ٱلْإِنسِ رَبَّنَا ٱسْتَمْتَعَ بَعْضُنَا بِبَعْضٍ وَبَلَغْنَآ أَجَلَنَا ٱلَّذِىٓ أَجَّلْتَ لَنَا ۚ قَالَ ٱلنَّارُ
مَثْوَىٰكُمْ خَٰلِدِينَ فِيهَآ إِلَّا مَا شَآءَ ٱللَّهُ ۗ إِنَّ رَبَّكَ حَكِيمٌ عَلِيمٌ

Artinya: “*dan (ingatlah) hari diwaktu Allah menghimpun mereka semuanya (dan Allah berfirman): “Hai golongan Jin, sesungguhnya kamu telah banyak menyesatkan manusia” lalu berkatalah kawan kawan mereka dari golongan manusia: “Ya Tuhan kami, sesungguhnya sebahagian daripada kami telah dapat kesenangan dari sebahagian (yang lain) dan kami telah sampai kepada waktu yang telah Engkau tentukan bagi kami”. Allah berfirman: “Neraka itulah tempat diam kamu, sedangkan kamu kekal di dalamnya, kecuali kalau Allah menghendaki (yang lain)”. Sesungguhnya Tuhanmu maha bijaksana lagi maha mengetahui.” (Q.S Al-An’am: 128).*

Pada ayat di atas ada 2 himpunan yaitu himpunan jin dan himpunan manusia. Dimana kedua makhluk tersebut anggotanya terdiri dari objek yang berbeda, baik himpunan jin (terdiri dari kumpulan jin yang berbeda) dan himpunan manusia (terdiri dari manusia-manusia yang berbeda).

Konsep himpunan yang lainnya juga bisa ditemukan pada surat Al-Fatir ayat 1 yang berbunyi:

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ جَاعِلِ ٱلْمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُو۟لِىٓ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَ ۚ يَزِيدُ فِى ٱلْخَلْقِ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ

***Artinya:** “Segala Puji bagi Allah, Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai pembawa pesan-pesan[-Nya], yang mempunyai sayap-sayap, dua, tiga, atau empat.”*

Dijelaskan bahwa yang dimaksudkan dengan malaikat adalah makhluk ciptaan Allah yang terbuat dari cahaya memiliki tugas untuk mengurusi bermacam-macam urusan dan selalu taat kepada Allah SWT serta tidak mempunyai hawa nafsu. Walaupun malaikat adalah makhluk gaib yang tidak dapat kita lihat dengan kasat mata namun keberadaan mereka benar-benar ada dan memiliki batasan dan pengertian yang jelas. Dalam surat tersebut dijelaskan ada tiga kelompok yaitu: *Pertama,* kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, *Kedua,* kelompok malaikat yang mempunyai tiga sayap, *Ketiga,* kelompok malaikat yang mempunyai empat sayap, Selanjutnya, sangat dimungkinkan lebih dari empat sayap, jika Allah SWT menghendaki.

Pada surat An-Nuur ayat 45, yang berbunyi:

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٍ مِّن مَّآءٍ ۖ فَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ بَطْنِهِۦ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ رِجْلَيْنِ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰٓ أَرْبَعٍ ۚ يَخْلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ

***Artinya:** “Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah* *menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segalasesuatu.”*

Dalam Surat An-Nuur ayat 45 dijelaskan bahwa terdapat sekelompok atau sekumpulan makhluk yang disebut hewan. Dalam kelompok hewan tersebut ada kelompok yang berjalan tanpa kaki, dengan dua kaki, empat, atau bahkan lebih sesuai dengan yang dikehendaki Allah. Menurut Surat An-Nuur ayat 45 diatas apabila dihubungkan dengan himpunan, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Himpunan hewan yang berjalan diatas perut. Anggotanya: ular, cacing, siput, dan lain-lain.
2. Himpunan hewan yang berjalan dengan dua kaki. Anggotanya: ayam, itik, angsa, burung, dan lain-lain.
3. Himpunan hewan yang berjalan dengan empat kaki. Anggotanya: kambing, sapi, kuda, kerbau, rusa, gajah, dan lain-lain.

Berdasarkan dua ayat tersebut diatas, terdapat kumpulan objek-objek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Dalam konsep matematika dinamakan dengan himpunan.

1.1. Cara Penyajian Himpunan

Himpunan dapat disajikan dalam beberapa cara yaitu dengan enumerasi, simbol baku, notasi pembentuk himpunan dan diagram Venn

1. Enumerasi (mendaftarkan keanggotaannya).

Pada enumerasi himpunan disajikan dengan cara menuliskan semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal dengan menggunakan huruf kapital atau menggunakan simbol lainnya.

Contoh.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$
- $F = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
- $K = \{ \{\} \}$

2. Simbol Baku

Penyajian himpunan dengan cara menggunakan simbol tertentu yang sudah disepakati. Beberapa himpunan yang khusus dituliskan dengan menggunakan simbol baku. Terdapat sejumlah simbol baku yang berbentuk huruf tebal yang biasa digunakan untuk mendefinisikan himpunan yang sering digunakan, antara lain:

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }
N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }
Z = himpunan bilangan bulat = { .., -2, -1, 0, 1, 2, ... }
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Terhadap suatu himpunan, suatu objek dapat menjadi anggota atau bukan anggota himpunan tersebut. Untuk menyatakan keanggotaan tersebut digunakan notasi berikut:

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$ $K = \{\{\}\}$ maka $3 \in A$, $5 \notin B$, $\{a, b, c\} \in R$, $c \notin R$, $\{\} \in K$, $\{\} \notin R$

4. Diagram Venn

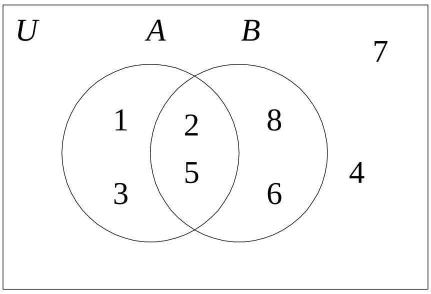
Diagram Venn menyajikan himpunan secara grafis. Anggota-anggota suatu himpunan berada di dalam lingkaran, sedangkan anggota yang lain di dalam lingkaran yang lain pula. Anggota *U* yang tidak termasuk dalam himpunan manapun digambarkan di luar lingkaran. Diagram Venn ini diperkenalkan oleh matematikawan Inggris, John Venn pada tahun 1881. Ketentuan dalam membuat diagram venn adalah sebagai berikut :

A. Himpunan semesta digambarkan dengan sebuah persegi panjang dan dipojok kiri atas diberi simbol *S* atau *U*.

B. Setiap anggota himpunan semesta disebutkan dengan sebuah noktah di dalam persegi panjang itu, dan nama anggota ditulis berdekatan dengan noktahnya,
C. Setiap himpunan yang termuat di dalam himpunan semesta ditunjukkan oleh kurva tertutup sederhana,
D. Dalam menggambar himpunan-himpunan yang mempunyai anggota sangat banyak, pada diagram venn tidak menggunakan noktah.

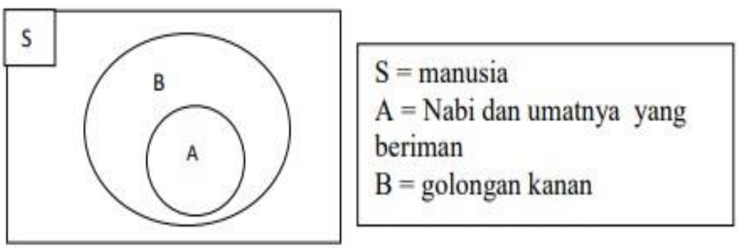
Contoh:

1. Misalkan $U = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 5, 6, 8\}$.



Gambar 1.1. Diagram Venn

1. Pada surat Al-An'am ayat 128 ada 2 himpunan yang bisa dijelaskan yaitu himpunan jin dan himpunan manusia. Dimana kedua makhluk tersebut anggotanya terdiri dari objek yang berbeda, baik himpunan jin (terdiri dari kumpulan jin-jin yang berbeda) dan himpunan manusia (terdiri dari manusia-manusia yang berbeda).



Gambar 1.2. Diagram Venn surat Al-An'am ayat 128

1.2. Kardinalitas Pada Himpunan

Kardinalitas adalah banyaknya anggota dari suatu himpunan. Untuk menyatakan kardinalitas dari suatu himpunan digunakan notasi $|A|$.

Contoh :

U = {1, 2, …, 7, 8}, maka $|U| = 8$

A = {1, 2, 3, 5}, maka $|A| = 4$

1.3. Himpunan Kosong (*null set*)

Himpunan kosong (*null set*) adalah himpunan dengan kardinal = 0. Himpunan kosong merupakan himpunan yang tidak memiliki satupun elemen. Dinotasikan sebagai berikut: $\varnothing$ atau $\{\}$

Kardinalitas juga dapat dinyatakan dengan n (P)

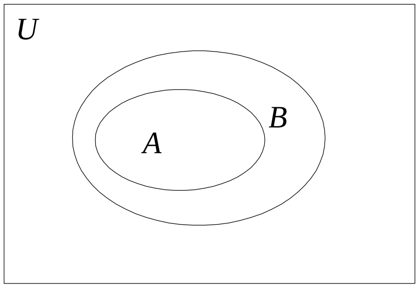
Contoh:

1. $E = \{x \mid x < x\}$, maka $n(E) = 0$
2. P = {orang Indonesia yang pernah ke bulan}, maka n (P) = 0
3. $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0\}$, $n(A)$ = 0

Himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing\}$, himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. $\{\varnothing\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

1.4. Himpunan Bagian (*Subset*)

Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A. Notasi: $A \subseteq B$. Dengan diagram Venn digambarkan sebagai berikut:

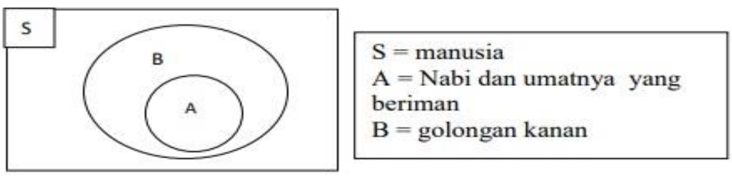


Gambar 1.3. Diagram Venn Himpunan Bagian

Contoh:

Surat Al-Waqiah ayat 7-10. Allah berfirman yang artinya: "dan kamu menjadi tiga golongan. Yaitu golongan kanan. Alangkah mulianya golongan kanan itu. Dan golongan kiri. Alangkah sengsaranya golongan kiri itu. Dan Orang-orang yang beriman paling dahulu."(Q.S Al-Waqiah:

"Dan kamu menjadi tiga golongan. Yaitu golongan kanan. Alangkah mulianya golongan kanan itu. Dan golongan kiri. Alangkah sengsaranya golongan kiri itu. Dan orang-orang yang beriman paling dahulu. (QS: Al-Waqi'ah ayat 7-10)



Gambar 1.4. Diagram Venn Surat Al-Waqiah ayat 7-10

Pada contoh diatas A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah superset dari A

***Teorema 1*. Untuk sembarang himpunan *A* berlaku hal-hal sebagai berikut:**

a. *A* adalah himpunan dari *A* itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

b. Himpunan kosong merupakan himpunan dari *A* ($\varnothing \subseteq A$).

c. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

$\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.

Contoh:

1. $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A.
   $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$, $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
   A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.
2. $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$
   $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

1.5. Himpunan yang Sama

$A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A. $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A.

Notasi: $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Ada dua hal yang perlu dicatat dalam memeriksa kesamaan dua buah himpunan:

a. Urutan elemen di dalam himpunan tidak penting.
b. Pengulangan elemen tidak mempengaruhi kesamaan dua buah himpunan.

Contoh:

(i) Jika $A = \{0, 1\}$ dan $B = \{x \mid x(x - 1) = 0\}$, maka $A = B$
(ii) Jika $A = \{3, 5, 8, 5\}$ dan $B = \{5, 3, 8\}$, maka $A = B$
(iii) Jika $A = \{3, 5, 8, 5\}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
(b) jika $A = B$, maka $B = A$
(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

1.6. Himpunan yang Ekivalen

Dua himpunan dikatakan jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama. Notasinya adalah:
$A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

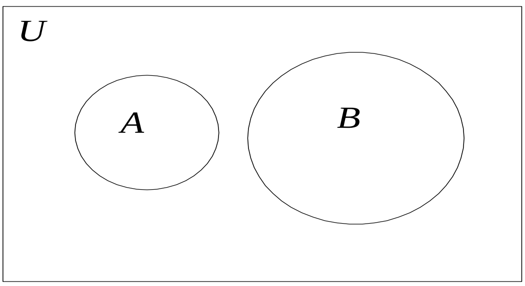
Contoh:

1. Misalkan $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$
2. Misalkan $P = \{ taurat, zabur, injil, al - qur'an \}$ dan $Q = \{Ibrahim, Musa, Isa, Muhammad\}$,
   maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

1.7. Himpunan Saling Lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama. Notasi: $|A| = |B|$

Diagram Venn:



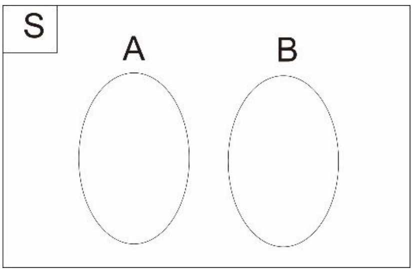
Gambar 1.5. Diagram Venn himpunan saling lepas

Contoh:

1. Jika $A = \{x \mid x \in P, x < 8\}$ dan $B = \{10, 20, 30, ...\}$, maka A // B.
2. Surat Al-An'am ayat 128

وَيَوْمَ يَحْشُرُهُمْ جَمِيعًا يَا مَعْشَرَ الْجِنِّ قَدِ اسْتَكْثَرْتُمْ مِنَ الْإِنْسِ وَقَالَ أَوْلِيَاؤُهُمْ مِنَ
الْإِنْسِ رَبَّنَا اسْتَمْتَعَ بَعْضُنَا بِبَعْضٍ وَبَلَغْنَا أَجَلَنَا الَّذِي أَجَّلْتَ لَنَا قَالَ النَّارُ
مَثْوَاكُمْ خَالِدِينَ فِيهَا إِلَّا مَا شَاءَ اللَّهُ إِنَّ رَبَّكَ حَكِيمٌ عَلِيمٌ

Artinya: Dan (ingatlah) *hari di waktu Allah menghimpun mereka semuanya,* (dan Allah berfirman), *"Hai golongan jin* (setan), *sesungguhnya kalian telah banyak* (menyesatkan) *manusia," lalu berkatalah kawan-kawan mereka dari golongan manusia, "Ya Tuhan kami, sesungguhnya sebagian dari kami telah mendapat kesenangan dari sebagian* (yang lain) *dan kami telah sampai kepada waktu yang telah Engkau tentukan bagi kami.” Allah berfirman, "Neraka itulah tempat diam kalian, sedangkan kalian kekal di dalamnya, kecuali kalau Allah menghendaki* (yang lain)," *Sesungguhnya Tuhanmu Mahabijaksana lagi Maha Mengetahui.*



Gambar 1.6. Diagram Venn Surat Al-An’am ayat 128

A = {Golongan manusia}

B = {Golongan jin}

Diagram Venn dari ayat diatas merupakan dua himpunan yang saling terpisah (saling lepas) karena tidak memiliki persamaan. Kedua himpunan tersebut masuk pada hal makhluk yang diciptakan Allah yaitu golongan manusia dan golongan jin (makhluk ghaib). Dari ayat tersebut pula dapat diketahui bahwa Allah menghimpun dua golongan yaitu golongan manusia dan golongan jin. Golongan manusia adalah makhluk ciptaan Allah yang diciptakan dari tanah liat dan nabi Adam adalah manusia pertama yang diciptakan oleh Allah. Pada dasarnya manusia dan jin hidup secara berdampingan tetapi tidak bisa bersatu dalam dimensi yang sama.

1.8. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

Notasi: $P(A)$ atau 2^A

Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh:

Jika $A = \{1, 2\}$, maka $P(A) = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

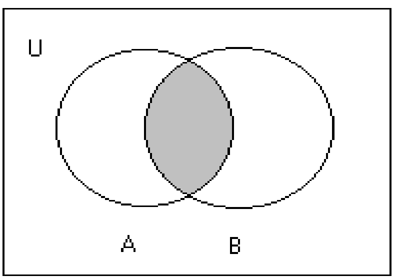
1.9. Operasi Terhadap Himpunan

Jika terdapat dua buah himpunan atau lebih, kita dapat melakukan operasi untuk menghasilkan himpunan lain. Ada beberapa jenis operasi yang lazim digunakan terhadap himpunan, antara lain:

a. Irisan *(intersection)*

Irisan dari himpuanan A dari himpunan B adalah sebuah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A dan himpunan B.

Notasi: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$



Gambar 1.7. Diagram Venn intersection

Cara untuk menentukan irisan dua himpunan adalah:

- Himpunan yang satu merupakan himpunan bagian yang lain

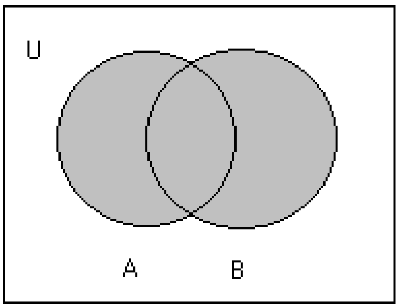
- Kedua himpunan sama
- Kedua himpunan tidak saling lepas (berpotongan)

Contoh 14.

- Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$
- Jika $A = \{3, 5, 9\}$ dan $B = \{-2, 6\}$, maka $A \cap B = \emptyset$. Artinya: $A \,//\, B$

b. Gabungan (*union*)

Hubungan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B



Gambar1.8 Diagram Venn union

Notasi: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Banyaknya anggota dari gabungan dua himpunan dirumuskan sebagai berikut:

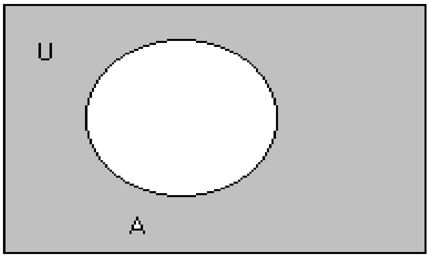
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Contoh 15.

- Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$
- $A \cup \emptyset = A$

c. Komplemen *(complement)*

Komplemen dari suatu himpunan A terhadap suatu himpunan semesta U adalah suatu himpunan yang elemennya, merupakan elemen U yang bukan elemen A.



Gambar 1.9. Diagram Venn Komplemen

Notasinya: $\overline{A}$ = {x | $x \in$ U, $x \notin A$} atau $A^C = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$

Contoh

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },
jika A = {1, 3, 7, 9}, maka $\overline{A}$ = {2, 4, 6, 8}
jika A = { x | $x/2 \in P$, $x < 9$ }, maka $\overline{A}$ = { 1, 3, 5, 7, 9 }

Contoh Misalkan.

A. = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B. = himpunan semua mobil impor
C. = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D. = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E. = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

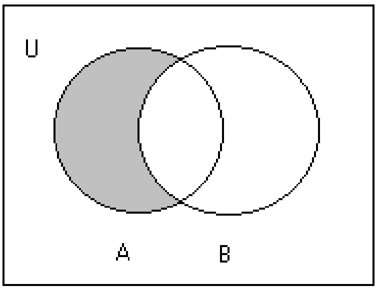
- "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$
- "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

- "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

d. Selisih (*difference*)

Selisih dari dua himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen dari A tetapi bukan elemen dari B. Selisih antara A dan B dapat juga katakan sebagai komplemen himpunan B relative terhadap himpunan A.

Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



Gambar 1.10. Diagram Venn selisih

Contoh.

- Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$
- $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

e. **Beda Setangkup *(Symmetric Difference)***

Beda setangkup dari himpunan *A* dan *B* adalah suatu himpunan yang elemennya ada pada himpunan A atau B, tetapi tidak pada keduanya.

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh.

1. Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$
2. Misalkan

U = himpunan mahasiswa
P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

"Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$
"Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$
"Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : U – ($P \cup Q$)

Teorema 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)
(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

f. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

Perkalian kartesian dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan yang dibentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B.

Dinotasikan $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \; dan \; b \in B\}$

Contoh.

- Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
- Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka $A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2. Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
3. Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong. Contoh: $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \neq C \times D$.

4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

   Contoh.

Misalkan

A = himpunan makanan

= { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman

= { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

$= 4 \cdot 3$

= 12 kombinasi dan minuman

yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

1.10. Hukum-Hukum Himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap U = A$	2. Hukum *null*/dominasi: – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = U$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$
5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = U$ – $\overline{U} = \varnothing$	

Tabel 1. Tabel Hukum-hukum Himpunan

1.11. Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: AS → kemudi mobil di kiri depan

Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

a. di Amerika Serikat, mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan, pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului, bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung
b. di Inggris, mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan, pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului, bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung.

Prinsip **dualitas**:

Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris.

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan *S* adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika *S** diperoleh dari *S* dengan mengganti $\cup \to \cap$, $\cap \to \cup$, $\varnothing \to$ U, U $\to \varnothing$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan *S** juga benar dan disebut dual dari kesamaan *S*.

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$
5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$

6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \varnothing$

Tabel 2. Tabel Hukum-hukum Himpunan

Contoh. Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ adalah $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$.

1.12. **Prinsip Inklusi-Eksklusi**

Untuk dua himpunan A dan B:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

Contoh. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15), yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$,

$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$,

$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Untuk tiga buah himpunan *A*, *B*, dan *C*, berlaku:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk himpunan A_1, A_2, …, A_r, berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

1.13. Partisi

Partisi dari sebuah himpunan *A* adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong A_1, A_2, … dari *A* sedemikian sehingga:

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$, dan $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$

Contoh: Misalkan *A* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, maka { {1}, {2, 3, 4}, {7, 8}, {5, 6} } adalah partisi *A*.

Himpunan ganda (*multiset*) adalah himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda), contohnya {1, 1, 1, 2, 2, 3}, {2, 2, 2}, {2, 3, 4}, {}. Multiplisitas dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: *M* = { 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 }, multiplisitas 0 adalah 4. Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap elemennya adalah 0 atau 1. Kardinalitas dari suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan elemen-elemen di dalam *multiset* semua berbeda. $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan *P* dan *Q*.

Contoh: *P* = { *a*, *a*, *a*, *c*, *d*, *d* } dan *Q* ={ *a*, *a*, *b*, *c*, *c* },

$P \cup Q$ = { *a*, *a*, *a*, *b*, *c*, *c*, *d*, *d* } dan $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan *P* dan *Q*.

Contoh:

$P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$

$P \cap Q = \{ a, a, c \}$

P – *Q* adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan: multiplisitas elemen tersebut pada *P* dikurangi multiplisitasnya pada *Q*, jika selisihnya positif 0, jika selisihnya nol atau negatif.

$P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P - Q = \{ a, e \}$.

P + *Q*, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada *P* dan *Q*.

$P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,

$P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

1.14. Pembuktian Pernyataan Himpunan

Pernyataan himpunan adalah argumen yang menggunakan notasi himpunan. Pernyataan dapat berupa:

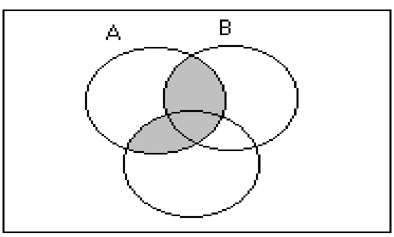
1. Kesamaan (*identity*)
   Contoh: Buktikan "$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$"
2. Implikasi

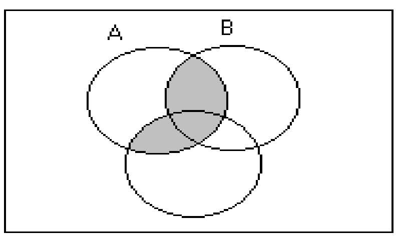
Contoh: Buktikan bahwa "Jika A ∩ B = ∅ dan A ⊆ (B ∪ C) maka selalu berlaku bahwa A ⊆ C".

1.14.1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh. Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan. Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$) dengan diagram Venn.

Bukti:





Gambar 1.11. Diagram Venn ***A* ∩ (*B* ∪ *C*) dan (*A* ∩ *B*) ∪ (*A* ∩ *C*)**

Kedua diagram Venn memberikan area arsiran yang sama.

Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Diagram Venn dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya. Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta. Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

1.14.2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Contoh. Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Bukti:

A	*B*	*C*	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.14.3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh. Misalkan *A* dan *B* himpunan. Buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Bukti:

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{\mathbf{B}})$ (Hukum distributif)

$= A \cap U$ (Hukum komplemen)
$= A$ Hukum identitas)

Contoh:

1. Misalkan *A* dan *B* himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

   Bukti:

   $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \overline{A})$ (Definisi operasi selisih)
   $= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$ (Hukum distributif)
   $= (A \cup B) \cap U$ (Hukum komplemen)
   $= A \cup B$ (Hukum identitas)

2. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan *A* dan *B*, bahwa

- $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan
- $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Bukti:

- $A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cap B)$ (H. distributif)
  $= U \cap (A \cap B)$ (H. komplemen)
  $= A \cup B$ (H. identitas)
- adalah dual dari (i)

$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ (H. distributif)
$= \varnothing \cup (A \cap B)$ (H. komplemen)
$= A \cap B$ (H. identitas)

1.14.4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Contoh: Misalkan *A* dan *B* himpunan. Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

***Bukti*:**

- Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$.
- Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$.
- Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$. ....(i)
- Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \varnothing$, maka $x \notin B$ ....(ii)

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$

BAB II
LOGIKA

Kejadian yang kita alami merupakan nilai yang sangat penting untuk diketahui dan dipahami. Hal tersebut mengandung nilai-nilai logika dalam matematika. Logika merupakan salah satu cara untuk mendapatkan pemikiran yang ilmiah, sistematis dan teratur sehingga dapat dipertanggungjawabkan secara ilmiah. Logika diperlukan dalam pengambilan suatu keputusan masalah yang sering dihadapi pada kehidupan sehari-hari. Untuk mengambil keputusan yang baik diperlukan kemampuan menalar (kemampuan menarik kondisi yang tepat dari bukti yang ada berdasarkan aturan tertentu). Dengan penalaran yang tepat dan dilanjutkan dengan logika maka dihasilkan kesimpulan yang baik.

Logika merupakan salah satu cabang filsafat yang mempelajari aturan cara menalar yang tepat. Belajar logika (simbolik) dapat meningkatkan kemampuan menalar karena dengan belajar logika:

a. Dapat mengenali dan menggunakan bentuk-bentuk umum tertentu dari cara penarikan kesimpulan yang absah, dan menghindari kesalahan-kesalahan yang bisa dijumpai.
b. Dapat memperpanjang rangkaian penalaran itu untuk menyelesaikan masalah yang lebih kompleks.

Logika didefinisikan sebagai ilmu untuk berpikir dan menalar dengan benar. Logika juga merupakan suatu ilmu tentang metode penalaran yang berhubungan dengan pembuktian atau validitas suatu argumen. Penarikan kesimpulan tentang validitas argumen dinamakan. Logika deduktif, di mana kebenaran kesimpulan harus mengikuti premis-premisnya. Untuk membuat bentuk logika maka argumen diubah menjadi proposisi kemudian diubah menjadi variabel proposisi dengan huruf tertentu. Untuk dapat menarik kesimpulan yang tepat diperlukan kemampuan menalar berdasarkan bukti-bukti yang ada, dan menurut aturan-aturan tertentu. Terdapat juga logika induktif yang artinya sama dengan logika deduktif, tetapi penarikan kesimpulan disertai dengan tampilnya beberapa kemungkinan yang menyertainya.

Salah satu konsep logika matematika dalam Al-Qur'an adalah surat An-Nisa ayat 173:

فَأَمَّا الَّذِينَ آمَنُوا وَعَمِلُوا الصَّالِحَاتِ فَيُوَفِّيهِمْ أُجُورَهُمْ وَيَزِيدُهُمْ
مِنْ فَضْلِهِ ۖ وَأَمَّا الَّذِينَ اسْتَنْكَفُوا وَاسْتَكْبَرُوا فَيُعَذِّبُهُمْ عَذَابًا
أَلِيمًا وَلَا يَجِدُونَ لَهُمْ مِنْ دُونِ اللَّهِ وَلِيًّا وَلَا نَصِيرًا

Artinya: *Adapun orang-orang yang beriman dan berbuat amal saleh, maka Allah akan menyempurnakan pahala mereka dan menambah untuk mereka sebagian dari karunia-Nya. Adapun orang-orang yang enggan dan menyombongkan diri, maka Allah akan menyiksa mereka dengan siksaan yang pedih, dan mereka tidak akan memperoleh bagi diri mereka, pelindung dan penolong selain dari pada Allah.*

Konsep matematika pada surat tersebut adalah:

- p = orang-orang beriman sera mengerjakan kebaikan
- q = Allah menyempurnakan pahala dan menambahsebagian karunia-Nya
- r = Orang-orang enggan menyembah Allah serta menyombongkan diris
- s = Allah memberikan azab yang pedih, tidak memberikan pelindung pertolongan

Tabel Kebenaran dari ayat diatas adalah:

p	***q***	***r***	***S***	$p \to q$	$r \to s$	$(p \to q)(r \to s)$
B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	S	B	S	S
B	B	S	B	B	B	B
B	B	S	S	B	B	B
B	S	B	B	S	B	S
B	S	B	S	S	S	S
B	S	S	B	S	B	S
B	S	S	S	S	B	S
S	B	B	B	B	B	B
S	B	B	S	B	S	S
S	B	S	B	B	B	B
S	B	S	S	B	B	B
S	S	B	B	B	B	B
S	S	B	S	B	S	S
S	S	S	B	B	B	B
S	S	S	S	B	B	B

Dilihat dari tabel kebenaran di atas bahwa $(p \to q)(r \to s)$ bernilai benar sesuai dengan surat Al-Baqarah ayat 103 dan 104 juga dijelaskan dengan menggunakan pembahasan menggunakan logika dengan teori implikasi dan konjungsi darimakna ayat tersebut yang artinya: "Tetapi katakanlah dan dengarkanlah, jika mereka kafir maka mereka akan mendapat azab dari Allah sangat pedih".

Dapat disimpulkan bahwa pada surat An-Nisa ayat 173 didapatkan penerapan logika matematika dengan menerapkan konjungsi, implikasi dan silogisme. Artinya: "jika orang-orang beriman berbuat kebajikan maka Allah akan menyempurnakan pahala dan menambah sebagian karunia-Nya, dan jika orang-orang enggan menyembah Allah, menyombongkan diri, maka allah memberikan azab yang pedih dan tidak memberikan pelindung pertolongan.

2.1. Sejarah singkat dan perkembangan Logika

Logika (*logic*) berasal dari bahasa Yunani "logos" berarti "kata", "ucapan", "alasan". Logika juga diartikan ilmu yang berhubungan dengan prinsip-prinsip validitas penalaran dan argumen. Aristoteles (348-322 SM) adalah seorang filsuf yang mengembangkan logika pada zaman Yunani Kuno, dikenal dengan sebutan logika tradisional.

Terdapat 5 aliran besar dalam logika, yaitu:

1. Aliran Logika Tradisional (Logika Klasik)
   Ditafsirkan sebagai suatu kumpulan aturan praktis yang menjadi petunjuk pemikiran. Muncul sekitar 300 tahun sebelum Masehi
2. Aliran Logika Metafisis. Logika dianggap seperti metafisika. Tugas pokok logika adalah menafsirkan pikiran sebagai suatu tahap dari struktur kenyataan. Sebab itu mengetahui kenyataan, orang harus belajar logika lebih dahulu.
3. Aliran Logika Epistemologis
   Dipelopori oleh Francis Herbert Bradley (1846 – 1924) dan Bernard Bosanquet (1848-1923), menurutnya untuk mencapi kebenaran, logika harus dihubungkan dengan seluruh pengetahuan lainnya.
4. Aliran Logika Instrumentalis (Aliran Logika Pragmatis). Dipelopori oleh John Dewey (1859 – 1952). Logika dianggap sebagai alat (*instrument*) untuk memecahkan masalah.
5. Aliran Logika Simbolis
   Dipelopori oleh Leibniz, Boole dan De Morgan. Aliran ini menekankan penggunaan bahasa simbol untuk mempelajari secara terinci, bagaimana akal harus bekerja. Metode-metode dalam mengembangkan matematika banyak digunakan oleh aliran ini, sehingga aliran ini berkembang sangat teknis dan ilmiah serta bercorak matematika, yang kemudian disebut Logika Matematika (*Matematical Logic*). G.W Leibniz (1646-1716) dianggap sebagai matematikawan pertama yang mempelajari Logika Simbolik.

Abad sembilan belas, George Boole (1815-1864) mengembangkan Logika simbolik. Bukunya berjudul *Low of Though* mengembangkan logika sebagai sistem matematika yang abstrak. Berkembang sampai dengan abad XX. Merupakan logika formal yang hanya menelaah bentuk dari yang dibicarakan. Terdapat dua pendapat tentang Logika Simbolik yang menerangkan keseluruhan maknanya.

1. Logika Simbolik adalah ilmu tentang penyimpulan yang sah, khususnya yang dikembangkan dengan penggunaan metode matematika dan dengan bantuan simbol-simbol khusus sehingga memungkinkan seseorang menghindarkan makna ganda dari bahasa sehari-hari (Frederick B. Fitch dalam bukunya "*Symbolic Logic*").
2. Pemakaian simbol matematika untuk mewakili bahasa. Simbol-simbol itu diolah sesuai dengan aturan-aturan matematika untuk menetapkan apakah suatu pernyataan bernilai benar atau salah.

Studi tentang logika berkembang terus dan sekarang menjadi ilmu pengetahuan yang luas dan yang cenderung mempunyai sifat teknis dan ilmiah. Aljabar Boole, salah satu topik yang merupakan perluasan logika (dan teori himpunan), sekarang ini digunakan secara luas dalam, mendesain komputer. Penggunaan simbol-simbol Boole dapat mengurangi banyak kesalahan dalam penalaran. Ketidakjelasan berbahasa dapat dihindari dengan menggunakan simbol, karena setelah diterjemahkan ke dalam notasi simbolik, penyelesaian menjadi bersifat mekanis. Tokoh-tokoh terkenal lainnya yang menjadi pendukung perkembangan logika simbolik adalah De Morgan, Leonard Euler (1707 - 1783), John Venn (1834 - 1923), Alfred North Whitehead dan Bertrand Russell (1872 – 1970).

2.2. Pernyataan

Kalimat adalah kumpulan kata yang disusun menurut aturan tata bahasa. Kata adalah rangkaian huruf yang mengandung arti. Kalimat berarti rangkaian kata-kata yang disusun menurut aturan tata bahasa dan mengandung arti. Dalam logika matematika hanya dibicarakan kalimat-kalimat berarti yang menerangkan (kalimat deklaratif atau *indicative sentence*).

Contoh:

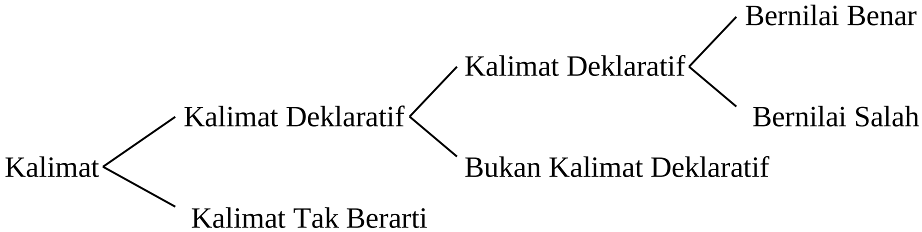
1. 4 kurang dari 5
2. Indonesia terdiri dari 33 propinsi
3. 2 adalah bilangan prima yang genap
4. Dan tidak dibicarakan kalimat-kalimat seperti:
5. Berapa umurmu? (kalimat tanya)
6. Bersihkan tempat tidurmu! (kalimat perintah)

Dari contoh-contoh di atas, terlihat bahwa kalimat-kalimat 1dan 2 bernilai benar, sedang kalimat 3 bernilai salah. Kalimat 4 dan 5 tidak dapat ditentukan nilai benar atau salahnya. Nilai benar artinya ada kesesuaian antara yang dinyatakan oleh kalimat itu dengan keadaan sesungguhnya, yaitu benar dalam arti matematis.

2.2.1. Pernyataan

Definisi: ***Suatu pernyataan (statement) adalah suatu kalimat deklaratif yang bernilai benar saja, atau salah saja, tetapi tidak sekaligus benar atau salah.***

Benar atau salahnya sebuah pernyataan disebut nilai kebenaran dari suatu pernyataan itu. Menurut jenisnya suatu kalimat secara sederhana dapat dibagi sebagai berikut:



Gambar 2.1. Bagan Kalimat

Pernyataan yang diungkapkan oleh suatu kalimat disebut proposisi. Sehingga dapat disimpulkan bahwa suatu proposisi adalah pernyataan, sebaliknya suatu pernyataan belum tentu merupakan proposisi. Jokowi adalah presiden kita dengan Jokowi *is our president* adalah dua kalimat yang berbeda, tetapi mempunyai arti yang sama. Sehingga dikatakan bahwa kedua kalimat itu merupakan proposisi yang sama. Nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk ditentukan oleh nilai kebenaran dari setiap pernyataan sederhana yang dikandungnya dan cara menghubungkan pernyataan-pernyataan sederhana, dan bukan oleh keterkaitan isi pernyataan-pernyataan sederhana tersebut. Suatu pernyataan umum disimbolkan dengan huruf abjad kecil, misalnya *p, q, r,* … dan seterusnya, sedangkan nilai benar disimbolkan dengan "B" atau "1 (satu)" dan nilai salah disimbolkan dengan "S" atau "0 (nol)".

Contoh : p : Ada 12 bulan dalam setahun (B)
q : $4+5=8$ (S)

2.2.2. Variabel dan Konstanta

Definisi : ***Variabel adalah simbol yang menunjukkan suatu anggota yang belum spesifik dalam semesta pembicaraan.***
Definisi : ***Konstanta adalah simbol yang menunjukkan anggota tertentu (yang sudah spesifik) dalam semesta pembicaraan.***

Perhatikan kalimat berikut ini:

a. manusia makan nasi
b. $4+x=7$
c. $p<5$

Ada yang mengatakan bahwa kalimat a benar, tetapi ada juga yang mengatakan bahwa kalimat itu salah, tergantung pada kesesuaian kalimat itu dengan keadaan sesungguhnya. Kalimat seperti ini disebut kalimat faktual.

Jika kata "manusia" dalam kalimat a diganti dengan "Yohana", maka kalimat menjadi "Yohana makan nasi". Kalimat ini jelas bernilai salah saja atau bernilai benar saja, tergantung realitasnya. Kalimat ini disebut pernyataan faktual. Jika "*x*" pada b diganti "3" maka kalimat itu menjadi "$4+3=7$". Kalimat (pernyataan) ini jelas bernilai benar saja. Jika "*p*" pada c diganti "0, 1, 2, 3, 4", maka pernyataan "$p < 5$" menjadi bernilai benar, tetapi kalimat (pernyataan) itu menjadi bernilai salah apabila "*p*" pada e diganti "5, 6, 7, …" dalam semesta pembicaraan himpunan bilangan cacah. "Manusia", "*x*", "*p*" pada kalimat-kalimat diatas disebut variabel. Sedangkan pengganti-pengganti seperti "Yohana", "3", dan "0, 1, 2, 3, 4" disebut konstanta.

2.2.3. Kalimat Terbuka

Kalimat-kalimat seperti a sampai dengan c di atas disebut kalimat terbuka. Jika variabel dalam kalimat terbuka sudah diganti dengan konstanta yang sesuai, maka kalimat yang terjadi disebut kalimat tertutup.

Definisi: ***Kalimat terbuka adalah kalimat yang mengandung variabel, dan jika variabel tersebut diganti konstanta dari semesta yang sesuai maka kalimat itu akan menjadi kalimat yang bernilai benar saja atau bernilai salah saja (pernyataan).***

Kalimat terbuka seperti *c*, disebut kalimat matematika (ada yang menyebut kalimat bilangan). Kalimat matematika yang masih mengandung variabel dan menggunakan tanda "=" seperti kalimat *c* disebut persamaan. Sedang kalimat matematika yang tidak mengandung variabel dan menggunakan tanda "<", ">" atau "≠" disebut ketidaksamaan. Pernyataan yang menjelaskan istilah-istilah di atas disebut kalimat definisi. Pada kalimat definisi tidak boleh terdapat kata-kata yang belum jelas artinya, apalagi kata yang sedang di definisikan.

2.3. Kata Hubung Kalimat

Pernyataan majemuk terdiri dari satu atau lebih pernyataan sederhana yang dihubungkan dengan kata hubung kalimat (*connective*) tertentu. Dalam bahasa Indonesia sering digunakan kata-kata “tidak”, “dan”, “atau”, “jika . . maka…”, “jika dan hanya jika”. Kata-kata itu disebut kata hubung kalimat, ada lima macam kata hubung kalimat dalam matematika yaitu negasi, konjungsi, disjungsi, kondisional, dan bikondisional.

Negasi tidak menghubungkan dua buah pernyataan sederhana, tetapi tetap dianggap sebagai kata hubung kalimat, yaitu menegasikan pernyataan sederhana (ada yang menganggap bahwa negasi suatu pernyataan sederhana bukan pernyataan majemuk).

2.3.1. Negasi (Ingkaran, atau Penyangkalan)

Pernyataan: “Sekarang hari hujan” maka ingkaran pernyataan itu adalah “Sekarang hari tidak hujan”. Jika pernyataan semula bernilai benar maka ingkaran pernyataan itu bernilai salah. Penambahan “tidak” ke dalam kalimat semula tidaklah cukup.

Definisi: ***Ingkaran suatu pernyataan adalah pernyataan yang bernilai benar, jika pernyataan semula salah, dan sebaliknya. Ingkaran pernyataan p ditulis*** $\sim p$.

Contoh:

1. Jika *p* : Medan ibu kota Sumatera Utara (B)
   Maka ~*p*: Tidak benar bahwa Medan ibu kota Sumatera Utara (S)
   Atau ~*p*: Medan bukan ibu kota Sumatera Utara (S)
2. Jika *r*: $3+2>6$ (S)
   maka ~*r*: tidak benar bahwa $3+2>6$ (B)
   atau ~*r*: $3+2\leq 6$ (B)

Membentuk ingkaran suatu pernyataan dapat dilakukan dengan cara menambahkan kata-kata tidak benar bahwa didepan pernyataan aslinya, atau jika mungkin dengan menambah bukan atau tidak di dalam pernyataan itu, tetapi untuk pernyataan-pernyataan tertentu tidak demikian halnya. Berdasarkan definisi diatas dapat dibuat:

P	*~p*
B	S
S	B

Tabel 2.1. Tabel Negasi

2.3.2 Konjungsi (dan)

Kalimat; "Aku suka sayur dan buah", maka kalimat itu berarti: "Aku suka sayur" dan "Aku suka buah". Jika pernyataan semula bernilai benar maka sub pertanyaan 1 atau 2. Benar. Jika sub pertanyaan 1 atau 2 maka pernyataan semula bernilai salah, demikian pula jika kedua sub pertanyaan itu salah.

Dua buah pernyataan yang dihubungkan dengan "dan" merupakan pernyataan majemuk yang disebut konjungsi dari pernyataan – pernyataan semula. Penghubung "dan" diberi simbol "$\wedge$". Konjungsi dari dua pernyataan p dan q ditulis $p \wedge q$, dan dibaca p dan q. masing-masing p dan q disebut komponen (sub pernyataan). Pernyataan $p \wedge q$ juga disebut sebagai pernyataan konjungtif.

Contoh :

1. Jika r : Brian anak pandai, dan
   s : Brian anak cekatan.
   Maka $r \wedge s$: Brian anak pandai dan cekatan.
   Pernyataan $r \wedge s$ bernilai benar jika Brian benar-benar anak pandai dan benar-benar anak cekatan.
2. Jika a : Bunga mawar baunya harum (B), dan
   b: Bunga matahari berwarna biru (S)
   Maka $a \wedge b$: Bunga mawar baunya harum dan bunga matahari berwarna biru (S).
3. Jika p : $2 + 3 < 6$ (B), dan
   q : Sang Saka bendera RI (B)
   Maka $p \wedge q$: $2 + 3 < 6$ dan Sang Saka bendera RI (B)

Definisi: ***Suatu konjungsi dari dua pernyataan bernilai benar hanya dalam keadaan kedua komponennya bernilai benar***.

Berdasarkan definisi di atas, dapat disusun tabel kebenaran sebagai berikut :

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Tabel 2.2. Tabel Konjungsi

2.3.3. Disjungsi (atau)

Pernyataan : "Tobing seorang mahasiswa yang cemerlang atau seorang atlit berbakat".

Pernyataan itu dapat diartikan :

1. Tobing seorang mahasiswa yang cemerlang, atau seorang atlit yang berbakat, tetapi tidak kedua-duanya, atau.
2. Tobing seorang mahasiswa yang cemerlang, atau seorang atlit yang berbakat, mungkin kedua-duanya.

Kalimat pertama adalah contoh disjungsi eksklusif dan kalimat kedua adalah contoh disjungsi inklusif. Jika pernyataan semua benar, maka keduanya dari tafsiran 1 atau 2 adalah benar (untuk disjungsi inklusif), mungkin benar salah satu (untuk disjungsi ekslusif),dan sebaliknya. Lebih dari itu, jika pernyataan semula salah, maka kedua tafsiran itu tentu salah (untuk disjungsi inklusif dan ekslusif). Berdasarkan pengertian diatas, dua buah pernyataan yang dihubungkan dengan : "atau" merupakan disjungsi dari kedua pernyataan semula.

Dibedakan antara:

1. Disjungsi inklusif yang diberi simbol "$\wedge$" dan
2. Disjungsi ekslusif yang diberi simbol "$\vee$".

Disjungsi inklusif dari dua pernyataan *p* dan *q* ditulis $p \wedge q$, dan disjungsi ekslusif dari dua pernyataan *p* dan *q* ditulis $p \vee q$, dan dibaca: *p* atau *q*. pernyataan $p \vee q$ juga disebut sebagai pernyataan disjungtif.

Contoh :

1. Jika *p* : Aku tinggal di Medan
   q : Aku belajar Bahasa Inggris sejak SD

   Maka $p \vee q$: Aku tinggal di Medan atau belajar Bahasa Inggris sejak SD. Pernyataan $p \vee q$ bernilai benar jika Aku benar-benar tinggal di Medan atau benar-benar belajar Bahasa Inggris sejak SD
2. Jika *r* : Al Qur'an adalah kitab suci umat Islam, dan
   S : Al Qur'an adalah kitab suci umat Kristen

   Maka $r \vee s$: Al Qur'an adalah kitab suci umat Islam atau Kristen.

Pernyataan $r \vee s$ bernilai benar jika Al Qur'an adalah benar benar kitab suci dari umat Islam atau Kristen, dan tidak dikedua karena mustahil bahwa Al Qur'an menjadi kitab suci kedua duanya.

Definisi: ***suatu disjungsi inklusif bernilai benar apabila paling sedikit satu komponennya sebagai benar***.

Sebarang dua pernyataan dapat digabungkan dengan kata "atau". Tabel kebenaran untuk disjungsi inklusif sebagai berikut:

p	*q*	*p* v *q*
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Tabel 2.3. Tabel disjungsi inklusif

Definisi: ***Suatu disjungsi ekslusif bernilai benar apabila hanya salah satu komponennya bernilai benar***.

Tabel kebenaran sebagai berikut:

p	q	$p \vee q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Tabel 2.4. Tabel Disjungsi Eksklusif

2.3.4. Kondisional (Implikasi atau pernyataan Bersyarat)

Pernyataan berikut ini: “jika matahari bersinar maka udara terasa hangat”, berarti, bila kita tahu bahwa matahari bersinar, kita juga tahu bahwa udara terasa hangat. Karena itu akan sama artinya jika kalimat di atas kita tulis sebagai:

- “Bila matahari bersinar, udara terasa hangat”
- “Sepanjang waktu matahari bersinar, udara terasa hangat”
- “Matahari bersinar berimplikasi udara terasa hangat”
- “Matahari bersinar hanya jika udara terasa hangat”.

Berdasarkan pernyataan diatas, maka untuk menunjukan bahwa udara tersebut hangat adalah cukup dengan menunjukkan bahwa matahari bersinar atau matahari bersinar merupakan syarat hangat. Karena udara dapat menjadi hangat hanya bila matahari bersinar.

Perhatikan pula contoh berikut ini: “jika ABCD belah ketupat maka diagonalnya saling berpotongan ditengah-tengah”. Untuk menunjukkan bahwa diagonal segi empat ABCD saling berpotongan ditengah-tengah adalah cukup dengan menunjukkan bahwa ABCD belah ketupat, atau ABCD belah ketupat merupakan syarat cukup bagi diagonalnya untuk saling berpotongan ditengah-tengah. Dan untuk menunjukkan bahwa ABCD belah ketupat perlu ditunjukkan bahwa diagonalnya saling berpotongan ditengah-tengah, atau diagonal-diagonal empat ABCD saling berpotongan ditengah-tengah merupakan syarat perlu (tetapi belum cukup) untuk menunjukkan belah ketupat ABCD. Karena diagonal-diagonal suatu jajaran genjang juga saling berpotongan ditengah-tengah, dan jajar genjang belum tentu merupakan belah ketupat.

Demikian pula syarat cukup tidak harus menjadi syarat perlu karena jika diagonal segi empat ABCD saling berpotongan ditengah belum tentu segi empat ABCD belah ketupat.

Banyak pernyataan, terutama dalam matematika, yang berbentuk "jika p maka q". pernyataan demikian disebut implikasi atau pernyataan bersyarat (kondisional) dan ditulis sebagi $p \rightarrow q$. pernyataan $p \rightarrow q$ juga disebut sebagai pernyataan implikatif atau pernyataan kondisional. Pernyataan $p \rightarrow q$ dapat dibaca jika p maka q, b berimplikasi, p hanya jika q, *dan* q jika p. Dalam implikasi $p \rightarrow q$, p disebut hipotesa (anteseden) dan q disebut konklusi (konsekuen).

Misalkan pernyataan q sebagai suatu peristiwa, maka kita melihat bahwa "jika p maka q" dapat di artikan sebagai "Bilamana p terjadi maka q juga terjadi" atau dapat juga, diartikan sebagai "tidak mungkin peristiwa p terjadi, tetapi peristiwa q tidak terjadi".

Definisi: ***implikasi p→ q bernilai benar jika anteseden salah atau konsekuen benar***.

Pengertian implikasi disini hanya ditentukan oleh nilai kebenaran dari anteseden dan konsekuennya saja, dan bukan oleh ada atau tidak adanya hubungan isi antara anteseden dan konsekuen. Implikasi ini disebut implikasi material. Sedang implikasi yang dijumpai dalam percakapan sehari-hari disebut implikasi biasa (*ordinary implication*).

Contoh:

1. Jika p : burung mempunyai sayap (B), dan
   q : $2 + 3 = 5$ (B)

maka $p \rightarrow q$: jika burung mempunyai sayap maka $2 + 3 = 5$ (B)

2. Jika r : x bilangan cacah (B), dan
   S : x bilangan bulat positif (S)

maka $p \rightarrow q$: jika x bilangan cacah maka x bilangan bulat positif (S).

Tabel kebenaran untuk implikasi sebagai berikut:

p	q	$p \to q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Tabel 2.5. Tabel implikasi

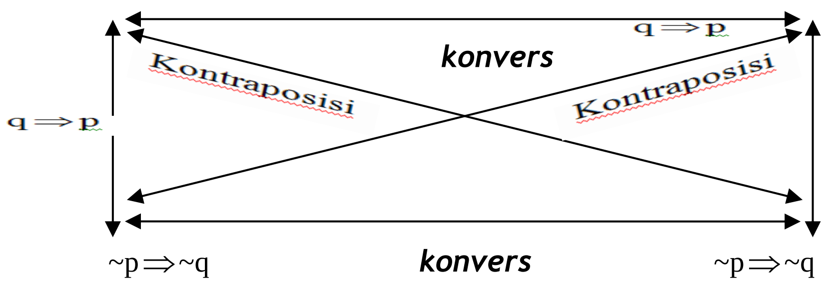
2.3.5 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Andaikan pernyataan "jika hari hujan, saya memakai jas hujan" bernilai benar, maka itu tidak berarti bahwa pernyataan "saya memakai jas hujan berarti hari hujan" juga bernilai benar,

Demikian pula pernyataan "jika hari tidak hujan, saya tidak memakai jas hujan" belum tentu bernilai benar. Sedangkan pernyataan "jika saya tidak memakai jas hujan, hari tidak hujan" akan bernilai benar.

Definisi: ***konvers dari implikasi*** $p \to q$ ***adalah*** $q \to p$***, Invers dari implikasi*** $p \to q$ ***adalah*** $\sim p \to \sim q$***, Kontraposisi dari implikasi*** $p \to q$ ***adalah*** $\sim q \to \sim p$

Hubungan antara implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi dapat ditunjukan dengan skema berikut ini :



Gambar 2.2. Skema hubungan implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi

2.3.6. Bikondisional (Biimplikasi Atau Pernyataan Bersyarat Ganda)

Kalimat: "jika segitiga ABC sama kaki maka kedua sudut alasnya sama besar". jelas biimplikasi ini bernilai benar dan kalimat: "jika kedua sudut alas segi tiga ABC sama besar maka segi tiga itu sama kaki". Jelas bahwa biimplikasi ini juga benar. Sehingga segi tiga ABC sama kaki merupakan syarat perlu dan cukup bagi kedua alasnya sama besar, juga kedua sudut alas sama besar merupakan syarat perlu dan cukup untuk segi tiga ABC sama kaki, sehingga dapat dikatakan "segi tiga ABC sama kaki merupakan syarat perlu dan cukup untuk kedua sudut alasnya sama besar".

Perhatikan kalimat: "saya memakai jaket jika dan hanya jika saya merasa dingin". Pengertian kita adalah "jika saya memakai jaket maka saya merasa dingin" dan juga "jika saya merasa dingin maka saya memakai jaket". Terlihat bahwa jika saya memakai jaket merupakan syarat perlu dan cukup bagi saya merasa dingin, dan saya merasa dingin merupakan syarat perlu dan cukup bagi saya memakai jaket. Terlihat bahwa kedua pristiwa itu terjadi serentak.

Dalam matematika juga banyak didapati pernyataan yang berbentuk "*p* bila dan hanya bila *q*" atau "*p* jika dan hanya jika *q*". pernyataan demikian disebut bikondisional atau biimplikasi atau pernyataan bersyarat ganda dan ditulis sebagai $p \leftrightarrow q$, serta *p* jika dan hanya jika *q* (disingkat dengan *p jhj q* atau *p bhb q*). pernyataan $p \leftrightarrow q$ juga disebut sebagai pernyataan biimplikatif.

Pernyataan "*p* jika dan hanya jika *q*" berarti "jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*", sehingga juga berarti "*p* adalah syarat dan cukup bagi *q*" dan sebaliknya.

Defenisi: ***Pernyataan bikondisional bernilai benar hanya jika komponen-komponennya bernilai sama.***

Contoh :

1. Jika *p* : 2 Bilangan genap (B)
   q : 3 bilangan ganjil (B)
   maka $p \leftrightarrow q$: 2 bilangan genap jhj 3 bilangan ganjil (B)
2. Jika *r* : $2 + 2 \neq 5$ (B)
   s : $4 + 4 < 8$ (S)
   maka $r \leftrightarrow s$: $2 + 2 \neq 5$ jhj $4 + 4 < 8$ (S)
3. Jika *a* : Surabaya ada di jawa barat (S)
   B : $23 = 6$ (S)

maka $a \leftrightarrow b$: Surabaya ada di jawa barat jhj $23 = 6$ (B).

Berdasarkan definisi diatas dapat disusun tabel kebenaran untuk biimplikasi sebagai berikut :

P	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Tabel 2. 6. Tabel Biimplikasi

Apakah pernyataan berikut ini merupakan pernyataan bikondisional atau bukan?

a. Setiap segi tiga sama sisi merupakan segitiga sama kaki
b. Sudut-sudut segitiga sama sisi sama besarnya
c. Sepasang sisi yang berhadapan pada sebuah jajaran genjang sama panjangnya.
d. Sebuah segi tiga sama kaki mempunyai dua sisi yang sama panjang (Keempat kalimat diatas berkenaan dengan bangun-bangun geometri).
e. Seorang haji beragama islam

2.3.7. Kesepakatan Penggunaan Kata Hubung Kalimat

Dalam penggunaan bahasa sehari-hari sering dijumpai pernyataan yang menggunakan banyak kata hubung kalimat, seperti berikut ini:

"Saya akan berjalan kaki atau saya akan naik sepeda maka saya akan tidak terlambat mengikuti kuliah".

Membaca kalimat diatas, ada yang menafsirkan: "Jika saya berjalan kaki atau naik sepeda, saya akan tidak terlambat mengikuti kuliah". Ada juga yang menafsirkan sebagai: "Saya berjalan kaki atau, jika saya naik sepeda maka saya akan tidak terlambat mengikuti kuliah".

Untuk dapat mengerti pernyataan komposit diatas dengan benar (seperti apa yang dinyatakan) diperlukan kejelasan berbahasa dengan menggunakan tanda baca-tanda baca yang diperlukan, misalnya: koma, dengan demikian kita dapat menterjemahkan pernyataan diatas kepernyataan simbolik dengan benar.

Demikian pula halnya dengan pernyataan simbolik yang kita gunakan. Pernyataan ini harus jelas sehingga tidak menimbulkan salah tafsir. Logika menggunakan tanda kurung untuk menunjukkan urutan pengerjaan. Tetapi untuk pernyataan yang banyak menggunakan kata hubung kalimat, penggunaan tanda pengerjaan (urutan kuat ikat) seperti dibawah ini :

1. Negasi $\sim$
2. Konjungsi $\wedge$, disjungsi $\vee$
3. Kondisional $\rightarrow$
4. Bikondisional $\boxed{\leftrightarrow}$

Contoh :

1. $\sim p \vee q$ berarti $(\sim p) \vee q$ merupakan kalimat dijungtif.
2. $p \wedge q \rightarrow$ r berati $(p \wedge q) \rightarrow r$ merupakan kalimat kondisional.
3. $p \boxed{\leftrightarrow} q \rightarrow r$ berarti $p \boxed{\leftrightarrow} (q \rightarrow r)$ merupakan kalimat bikondisional.

Beberapa kalimat dapat digabungkan menjadi satu kalimat dengan menggunakan penghubung. Di dalam logika dikenal 5 buah penghubung, yaitu :

Simbol	Arti	Bentuk
$\sim$	tidak / not / negasi	tidak ...
$\wedge$	dan / and / konjungsi	.... dan ....
$\vee$	atau / or / disjungsi	..... atau ....
$\rightarrow$	Implikasi	Jika ... maka ...
$\leftrightarrow$	Biimplikasi	... jika dan hanya jika...

Tabel 2.7. Tabel Penghubung (simbol, arti dan bentuk)

Untuk menghindari kesalahan maka digunakan tabel kebenaran. Jika terdapat *n* variabel, maka tabel kebenaran akan memuat 2" baris.

p	Q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B

Tabel 2.8. Tabel Kebenaran (truth tabel)

Hukum Ekivalensi Logika (buktikan dengan tabel kebenaran):

1	Hukum Komutatif	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
2	Hukum Asosiatif	$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
3	Hukum Identitas	$q \wedge T \leftrightarrow p$ $\quad$ $p \vee F \leftrightarrow p$
4	Hukum Ikatan	$p \vee T \leftrightarrow T$ $\quad$ $p \wedge F \leftrightarrow F$
5	Hukum Negasi	$p \vee \sim p \leftrightarrow T$ $\quad$ $p \wedge \sim p \leftrightarrow F$
6	Hukum Negasi Ganda	$\sim(\sim p) \leftrightarrow p$
7	Hukum Idempoten	$p \wedge p \leftrightarrow p$ $\quad$ $p \vee p \leftrightarrow p$
8	Hukum De Morgan	$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
9	Hukum Absorbsi	$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ $\quad$ $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$
10	Negasi T dan F	$\sim T \leftrightarrow F$ $\quad$ $\sim F \leftrightarrow T$

Tabel 2.9. Tabel Hukum Ekivalensi Logika

Contoh : Sederhanakanlah bentuk $\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

Penyelesaian : $\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) = (\sim(\sim p) \wedge (\sim q)) \wedge (p \vee q)$

$= (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$

$= p \vee (\sim q \wedge q)$

$= p \vee F$

2.4. Tautologi, ekivalen dan kuantor

2.4.1. Tautologi

Perhatikan bahwa beberapa pernyataan selalu bernilai benar. Contoh pernyataan: “Yunus masih mahasiswa atau

Yunus bukan mahasiswa" akan selalu bernilai benar tidak bergantung pada Yunus benar-benar masih mahasiswa atau bukan lagi mahasiswa. Jika *p*: Yunus masih mahasiswa, dan $\sim p$: Yunus bukan mahasiswa, maka pernyataan diatas berbentuk $p \sim p$. (coba periksa nilai kebenarannya dengan menggunakan tabel kebenaran). Setiap pernyataan yang bernilai benar, untuk setiap nilai kebenaran komponen-komponennya, disebut tautologi.

Contoh: Tunjukkan bahwa kalimat-kalimat dibawah ini adalah tautologi dengan menggunakan tabel kebenaran $p \wedge q \rightarrow q$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow q$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

Tabel 2.10. Tabel Kebenaran $p \wedge q \rightarrow q$

Definisi: ***"Suatu ekspresi logika yang selalu bernilai benar di dalam tabel kebenarannya, tanpa memperdulikan nilai kebenaran dari proposisi yang berada di dalamnya".***

2.4.2. Ekivalensi

Perhatikan kalimat: "Guru pahlawan bangsa" dan "tidak benar bahwa guru bukan pahlawan bangsa". Kedua kalimat ini akan mempunyai nilai kebenaran yang sama, tidak perduli bagaimana nilai kebenaran dari pernyataan semula. (Coba periksa dengan menggunakan tabel kebenaran).

Definisi: ***Dua buah pernyataan dikatakan ekivalen (berkivalensi logis) jika kedua pernyataan itu mempunyai nilai kebenaran yang sama.***

Pernyataan *p* ekivalen dengan pernyataan *q* dapat ditulis sebagai $p \equiv q$. berdasarkan defenisi diatas, sifat-sifat pernyataan-pernyataan yang ekivalen (berekivalensi logis) adalah:

1. $p \equiv p$
2. *jika* $p \equiv q$ *maka* $q \equiv p$
3. *jika* $p \equiv q$ *dan* $q \equiv r$ *maka* $p \equiv r$

Sifat pertama berarti bahwa setiap pernyataan selalu mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan dirinya sendiri. Sifat kedua berarti bahwa jika suatu pernyataan mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan suatu pernyataan yang lain, maka tentu berlaku sebaliknya. Sedangkan sifat ketiga berarti bahwa jika pernyataan pertama mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan ketiga maka nilai kebenaran pernyataan pertama adalah sama dengan nilai kebenaran pernyataan ketiga.

Jika pernyataan tertentu *p* ekivalen dengan pernyataan *q*, maka pernyataan *p* dan *q* dapat saling ditukar dalam pembuktian. Dapat dilihat pada pernyataan "segi tiga sama sisi" yang ekivalen dengan "segitiga yang sudutnya sama besar". Dalam pembuktian pada geometri sering kali kita menggunakan kedua pernyataan itu dengan maksud yang sama.

2.4.3. Kuantor

1. Fungsi Pernyataan

Definisi: ***Suatu fungsi pernyataan adalah salah satu kalimat terbuka di dalam semesta pembicaraan (semesta pembicaraan diberikan secara eksplisit atau implisit).***

Fungsi pernyataan merupakan suatu kalimat terbuka yang ditulis sebagai *p* (*x*) yang bersifat bahwa *p* (*a*) bernilai benar atau salah (tidak keduanya) untuk setiap *a* (*a* adalah anggota dari semesta pembicaraan). Ingat bahwa *p (a)* suatu pernyataan.

Contoh :

1. $p(x) = 1 + x < 5$

P (x) akan merupakan fungsi pernyataan pada $A = himpunan\,bilangan\,asli$. Tetapi *p(x)* bukan merupakan fungsi pernyataan pada $K = himpunan\,bilangan\,kompleks$.

a. Jika *p(x) = 1 + x < 5* didefinisikan pada $A = himpunan\,bilangan\,asli$, maka *p(x)* bernilai benar untuk *x* = *5,6,7….*
b. Jika *q(x) = x + 3 < 1* didefinisikan pada $A = himpunan\,bilangan\,asli$, tidak ada *x* yang menyebabkan *p(x)* bernilai benar.
c. Jika *r(x) = x + 3 > 1* didefinisikan pada $A = himpunan\,bilangan\,asli$, maka *r(x)* bernilai benar untuk *x* = *1,2,3….*

Dari contoh diatas terlihat bahwa pernyataan *p(x)* yang didefinisikan pada suatu himpunan tertentu akan bernilai benar untuk semua anggota semesta pembicaraan, beberapa anggota semesta pembicaraan, atau tidak ada anggota semesta pembicaraan yang memenuhi.

2. Kuantor Umum (Kuantor Universal)

Simbol ∀ yang dibaca "untuk semua" atau "untuk setiap" disebut kuantor umum. Jika *p(x)* adalah fungsi proposisi pada suatu himpunan *A* (himpunan *A* adalah semesta pembicaraannya) maka $(\forall x \in A)\ p(x)$ atau $\forall x,\ p(x)$ atau $\forall x\ p(x)$ adalah suatu pernyataan yang dapat dibaca sebagai "Untuk setiap *x* elemen A, *p(x)* merupakan pernyataan "Untuk semua *x*, berlaku *p(x)*"

Contoh :

1. *p* (*x*) tidak kekal
   p (manusia) = Manusia tidak kekal
   maka $\forall x,\ p(x) = \forall x \in \{\text{manusia}\},\ p(x)$ = semua manusia tidak kekal (Benar)
   Jika *p*(*x*) merupakan kalimat terbuka (tidak mempunyai nilai kebenaran). Tetapi $\forall x\ p(x)$ merupakan pernyataan

(mempunyai nilai benar atau salah tetapi tidak kedua-duanya}.

2. $\forall x$ *r*(*x*) = $\forall x$ (*x*+ *3* > *1*) pada $A = \{himpunan\, bilangan\, asli\}$ bernilai benar
3. $\forall x$ *q*(*x*) = $\forall x$ (*x*+ *3* < *1*) pada $A = \{himpunan\, bilangan\, asli\}$ bernilai salah

3. **Kuantor Khusus (Kuantor Eksistensial)**

Simbol $\exists$ dibaca "Ada" atau "untuk beberapa" atau "untuk paling sedikit satu" disebut kuantor k husus. Jika *p*(*x*) adalah fungsi pernyataan pada himpunan tertentu A (himpunan A adalah semesta pembicaraan) maka ($\exists x \in A$) *p*(*x*) atau $\exists x!$ *p*(*x*) atau $\exists x$ *p*(*x*) adalah suatu pernyataan yang dibaca "Ada *x* elemen *A*, sedemikian hingga *p(x)* merupakan pernyataan" atau "untuk beberapa *x*, *p*(*x*)". ada yang menggunakan simbol $\exists!$ Untuk menyatakan "Ada hanya satu".

Contoh :

1. $p(x) = x$ adalah wanita
   p(*perwira ABRI*) = Perwira ABRI adalah wanita
   $\exists x$ *p*(*x*) = $\exists x!$ = $\exists x \in$ *{perwira ABRI}*, *p*(*x*) = ada perwira ABRI adalah wanita (Benar)
2. $\exists x$ *p*(*x*) = $\exists x$ (*x* + *1* < *5*) pada $A = \{bilangan\, asli\}$ maka pernyataan itu bernilai salah.
3. $\exists x$ *r*(*x*) = $\exists x$ (*3* + *x* > *1*) pada $A = \{bilangan\, asli\}$ maka pernyataan itu bernilai salah.

4. Negasi Suatu Pernyataan yang Mengandung Kuantor

Negasi dari "Semua manusia tidak kekal" adalah "Tidak benar bahwa semua manusia tidak kekal" atau "Beberapa manusia kekal". Jika *p*(*x*) adalah manusia tidak kekal atau *x* tidak kekal, maka "Semua manusia adalah tidak kekal" atau "Beberapa manusia kekal". atau $\forall x$ *p*(*x*) bernilai benar, dan

"Beberapa manusia kekal" atau $\exists x \sim p(x)$ bernilai salah. Pernyataan di atas dapat dituliskan dengan simbol :

$$\sim [\forall x\ p(x)] \equiv \exists x \sim p(x)$$

Jadi negasi dari suatu pernyataan yang mengandung kuantor universal adalah ekivalen dengan pernyataan yang mengandung kuantor eksistensial (fungsi pernyataan yang dinegasikan) dan sebaliknya :

$$\sim [\exists x\ p(x)] \equiv \forall x \sim p(x)$$

5. Fungsi Pernyataan yang Mengandung Lebih dari Satu Variabel

Didefinisikan himpunan $A_1, A_2, ..., A_n$ suatu fungsi pernyataan yang mengandung variabel pada himpunan $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ merupakan kalimat terbuka $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ yang mempunyai sifat $p(a_1, a_2, ..., a_n)$ bernilai benar atau salah (tidak keduanya) untuk $(a_1, a_2, ..., a_n)$ anggota semesta $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Contoh:

1. Diketahui *P* = {*Pria*}, *W* = {*Wanita*}, "*x* menikah dengan *y*" ≡ *M*(*x,y*) adalah fungsi pernyataan pada $P \times W$.
2. Diketahui *A* = {bilangan asli}. "2*x* - *y* - 5*z* < *10*" ≡ *K* (*x,y,z*) adalah fungsi pernyataan pada $A \times A \times A$.

Suatu fungsi pernyataan yang bagian depannya dibubuhi dengan kuantor untuk setiap variabelnya, seperti berikut ini :

$$\forall x \exists y\ p(x, y)\ atau\ \exists x \exists y \forall z\ p(x, y, z)$$

Merupakan suatu pernyataan dan mempunyai nilai kebenaran.

Contoh :

$P = \{Nyoman, Agus, Darman\}$ dan

$W = \{Rita, Farida\}$,serta $p(x, y) = x\ adalah\ kakak\ y.$

Maka $\forall x \in P, \exists y \in W, p(x,y)$ dibaca "Untuk setiap *x* di *P* ada *y* di *W* sedemikian hingga *x* adalah kakak *y*" berarti bahwa setiap anggota *P* adalah kakak dari Rita atau Farida. Jika pernyataan ini ditulis sebagai $\exists y \in x \in P\ p(x,y)$ dibaca "Ada *y* di *W* untuk setiap *x* di P sedemikian hingga *x* adalah kakak *y*" berarti bahwa ada paling sedikit satu) wanita di *W* mempunyai kakak semua anggota *P*.

Negasi dari pernyataan yang mengandung kuantor dapat di tentukan sebagai contoh berikut ini.

$$\begin{aligned} \sim [\exists x\{\forall y p(x,y)\}] &\equiv \forall x \sim [\forall y p(x,y)] \\ &\equiv \forall x \exists y \sim p(x,y) \end{aligned}$$

Contoh :

$P = \{Nyoman, Agus, Darman\}$ dan $W = \{Rita, Farida\}$ serta *p(x, y)* = *x* adalah kakak *y*.

Tuliskan negasi dari pernyatan: $\forall x \in P, \exists y \in W, p(x, y)$

Jawab:

$$\begin{aligned} &\sim [\forall x \in P\{\exists y \in W\ p(x,y)\}] && \equiv \exists x \in P \\ &\sim [\exists y \in W, p(x,y)] && \equiv \exists x \in P, \forall y \in W, \sim p(x,y) \end{aligned}$$

Jika kita baca pernyataan semula adalah "Setiap anggota *P* adalah kakak dari paling sedikit satu anggota *W*". Negasi dari pernyataan itu adalah "Tidak benar bahwa setiap anggota *P* adalah kakak dari paling sedikit satu anggota *W*" yang ekivalen dengan "Ada anggota *p* yang bukan kakak dari semu anggota *W*". Coba bandingkan pernyataan verbal ini dengan bentuk simboliknya!.

2.5. Validitas pembuktian

2.5.1. Premis dan Argumen

Logika berhubungan dengan penalaran yang dinyatakan dengan pernyataan verbal. Satu diskusi atau pembuktian yang bersifat matematik atau tidak, terdiri atas pernyataan-pernyataan yang saling berelasi. Dimulai dengan pernyataan-

pernyataan tertentu yang diterima kebenarannya dan kemudian berargumentasi untuk sampai pada kesimpulan yang ingin dibuktikan. Pernyataan-pernyataan yang digunakan untuk menarik suatu kesimpulan disebut premis, sehingga suatu premis dapat berupa aksioma, hipotesa, definisi atau pernyataan yang sudah dibuktikan sebelumnya. Sedang yang dimaksud dengan argumen adalah kumpulan kalimat yang terdiri atas satu atau lebih premis yang mengandung bukti-bukti (*evidence*) dan satu kesimpulan. Kesimpulan ini selayaknya (*supposed to*) diturunkan dari premis-premis.

Untuk memeriksa apakah suatu argumen merupakan kalimat yang valid, dapat dilakukan langkah-langkah berikut, yaitu sebagai berikut:

1. Tentukan hipotesa dan kesimpulan kalimat.
2. Buatlah tabel yang menunjukkan nilai kebenaran untuk semua hipotesa dan kesimpulan.
3. Carilah baris kritis, yaitu baris yang semua hipotesa bernilai benar.
4. Dalam baris kritis tersebut, jika semua nilai kesimpulan benar, maka argumen itu valid. Jika di antara baris kritis itu ada baris dengan nilai kesimpulan yang salah, maka argumen tersebut valid.

2.5.2. Validitas Pembuktian (I)

Kesimpulan selayaknya diturunkan dari premis-premis, dalam argumentasi yang valid, kesimpulan akan bernilai benar jika setiap premis yang digunakan bernilai benar. Jadi validitas argumen tergantung pada bentuk argumen itu dan dengan bantuan tabel kebenaran.

Bentuk kebenaran yang digeluti oleh para matematikawan adalah kebenaran relatif. Benar atau salahnya suatu kesimpulan hanya dalam hubungan dengan sistem aksiomatik tertentu. Kesimpulan itu benar jika mengikuti hukum-hukum logika yang valid dari aksioma-aksioma sistem itu, dan negasinya adalah salah.

Untuk menentukan validitas suatu argumen dengan praktis banyak bertumpu pada tabel kebenaran dasar dan bentuk kondisional. Bentuk argumen yang paling sederhana dan klasik adalah Modus ponens dan Modus tollens. Implikasi "jika *p* maka *q*" dianggap bernilai benar. Bila antesenden *(p)* benar agar implikasi $p \rightarrow q$ benar, maka *q* juga benar. Inferensi seperti ini disebut modus ponens.

Premis 1 : $p \Rightarrow q$
Premis 2 : p
Konklusi : q

Cara membacanya : Apabila diketahui jika *p* maka *q* benar, dan *p* benar, disimpulakan *q* benar. (Notasi : Ada yang menggunakan tanda $\therefore$ untuk menyatakan kesimpulan, seperti $p \rightarrow q$, $p \therefore q$).

Contoh:

1. Premis 1: Jika saya belajar, maka saya lulus ujian (benar)
   Premis 2 : Saya belajar (benar)
   Kesimpulan: Saya lulus ujian (benar)

Baris pertama dari tabel kebenaran kondisional (implikasi) menunjukkan validitas dari bentuk argument modus ponen.

Modus ponen hampir sama dengan modus ponens, kecuali hipotesa kedua dan kesimpulan merupakan kontraposisi hipotesa pertama modus ponens.

Premis 1 : $p \rightarrow q$
Premis 2 : $\sim q$
Konklusi : $\sim p$

1. Premis 1 : Jika hari ini hujan maka saya memakai jas hujan (benar)
   Premis 2 : Saya tidak memakai jas hujan (benar)
   Kesimpulan: Hari ini tidak hujan (benar)

Perhatikan bahwa jika *p* terjadi maka *q* terjadi, sehingga jika *q* tidak terjadi maka *p* tidak terjadi.

Silogisme hipotesis bersifat transitif secara implikasi. Jika $p \rightarrow q$ benar, dan $q \rightarrow r$ benar, maka

$p \rightarrow r$ benar.

Premis 1 : $p \rightarrow q$
Premis 2 : $q \rightarrow r$
Kesimpulan : $p \rightarrow r$

2. Premis 1 : Jika kamu benar, saya bersalah (Benar)
Premis 2 : Jika saya bersalah, saya minta maaf (Benar)
Kesimpulan: Jika kamu benar, saya minta maaf (Benar)

Silogisme Disjungtif

Premis 1 : $p \vee q$
Premis 2 : $\sim q$
Kesimpulan : p

Jika ada kemungkinan bahwa kedua pernyataan *p* dan *q* dapat sekaligus bernilai benar, maka argumen di bawah ini tidak valid.

Premis 1 : $p \vee q$
Premis 2 : q
Kesimpulan : $\sim p$

Tetapi jika ada kemungkinan kedua pernyataan *p* dan *q* tidak sekaligus bernilai benar (disjungsi eksklusif), maka silogisme disjungtif di atas adalah valid.

Contoh:

1. Premis 1 : Pengalaman hari ini berbahaya atau membosankan (B)
   Premis 2 : Pengalaman ini tidak berbahaya (B)
   Konklusi : Pengalaman ini membosankan (B)
2. Premis 1 : Air ini panas atau dingin (B)
   Premis 2 : Air ini panas (B)
   Konklusi : Air ini tidak dingin (B)
3. Premis 1 : Obyeknya berwarna merah atau sepatu
   Premis 2 : Obyek ini berwarna merah
   Konklusi : Obyek bukan sepatu (tidak valid)

Dua proposisi yang digabung menjadi satu proposisi atau pernyataan majemuk oleh kata "dan" ($\wedge$) disebut konjungsi kedua proposisi tersebut.

Premis 1 : p
Premis 2 : q
Kesimpulan : $p \wedge q$
Artinya : p benar, q benar. Maka $p \wedge q$ benar.

Tambahan (Addition)
Premis 1 : p
Kesimpulan : $p \vee q$

Artinya : p benar, maka $p \vee q$ benar (tidak peduli nilai benar atau nilai salah yang dimiliki q). Dua bentuk argumen valid yang lain adalah dilema konstruktif dan dilema destruktif.

Dilema Konstruktif
Premis 1 : $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
Premis 2 : $p \vee r$
Kesimpulan : $q \vee s$

Dilema konsrtuktif ini merupakan kombinasi dua argumen modus ponen (periksa argument modus ponen).

Contoh dilema konstruktif:

Premis 1 : Jika hari ini hujan, aku akan tinggal di rumah; tetapi jika pacar datang, aku pergi berbelanja
Premis 2: Hari ini hujan atau pacar datang.
Kesimpulan : Aku akan tinggal di rumah atau pergi berbelanja.

Dilema Destruktif
Premis 1 : $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
Premis 2 : $\sim q \vee \sim s$
Kesimpulan : $\sim p \vee \sim r$

Dilema destruktif ini merupakan kombinasi dari dua argumen modus tolens (perhatikan argument modus tolen).

Contoh dilema destruktif:

Premis 1 : Jika aku memberikan pengakuan, aku akan digantung; dan jika aku tutup mulut, aku akan di tembak mati.
Premis 2 : Aku tidak akan ditembak mati atau digantung.

Kesimpulan : Aku tidak akan memberikan pengakuan, atau tidak tutup mulut.

2.5.3. **Validitas Pembuktian (II)**

Pembuktian argumen yang lebih kompleks dengan menggunakan bentuk-bentuk argumen valid diatas.

Contoh :

Diberikan argumen : $(p \wedge q) \rightarrow [p \rightarrow (s \wedge t)]$

$(p \wedge q) \wedge r$

$s \vee t$

Apakah argumen di atas valid?

Jawab:

Berikut ini adalah langkah-langkah pembuktian yang dilakukan:

$(p \wedge q) \rightarrow [p \rightarrow (s \wedge t)]$	Premis
$(p \wedge q) \wedge r$	Premis
$p \wedge q$	penyederhanaan
$p \rightarrow (s \wedge t)$	Modus Ponen
p	penyederhanaan
$s \wedge t$	Modus Ponen
s	penyederhanaan
$\therefore s \vee t$	tambahan

Jadi argument tersebut di atas adalah valid.

Jika pengetahuan logika diperlukan atau pengetahuan aljabar diperlukan, maka semua orang akan belajar matematika. Pengetahuan logika diperlukan dalam pengetahuan geometri. Karena itu semua mahasiswa akan belajar matematika. Validkah argumentasi di atas?

Jawab:

Kita akan menerjemahkan argumen-argumen di atas ke bentuk simbol-simbol.

Misal: 1 = pengetahuan logika diperlukan
a = pengetahuan al-jabar diperlukan
m = semua orang akan belajar matematika

g = pengetahuan geometri diperlukan

Maka:

$(1 \vee a) \rightarrow m$	Premis
$1 \wedge g$	Premis
1	penyederhanaan
$1 \vee a$	tambahan
$\therefore m$	Modus Ponen

Jadi, argumen di atas adalah valid.

Demikianlah, kita dapat membuktikan argumen-argumen yang tampaknya berbelit-belit dengan menggunakan argumentasi valid yang telah kita miliki. Perhatikan baik-baik cara menerjemahkan argumentasi itu menjadi simbol-simbol.

2.5.4. **Pembuktian Tidak Langsung**

Suatu argumen adalah valid secara logis jika premis-premisnya bernilai benar dan kesimpulannya juga bernilai benar. Berdasarkan pemikiran ini, jika premis-premis dalam suatu argumen yang valid membawa ke kesimpulan yang bernilai salah, maka paling sedikit ada satu premis yang bernilai salah.

Cara pembuktian ini di sebut pembuktian tidak langsung atau pembuktian dengan kontradiksi atau *reducito ad absurdum*.

Contoh:

Premis 1 : Semua manusia tidak hidup kekal (Benar)
Premis 2 : Chairil Anwar adalah manusia (Benar)

Buktikan bahwa "Chairil Anwar tidak hidup kekal" (Premis 3) dengan melakukan pembuktian tidak langsung.

Bukti:

Kita misalkan bahwa: Chairil Anwar hidup kekal (Premis 4) (dan kita anggap bernilai benar).

Maka berarti: Ada manusia hidup kekal (Premis 5)

Tetapi premis 5 ini merupakan negasi dari premis1 yang sudah kita terima kebenarannya. Oleh karena itu premis 5 ini pasti bernilai salah. Karena premis 5 bernilai salah maka premis 4 juga bernilai salah. Sebab itu premis 3 bernilai benar.

Jadi terbukti bahwa "Chairil Anwar tidak hidup kekal".

Ringkasannya, kita dapat membuktikan bahwa suatu pernyataan bernilai benar, dengan menunjukkan bahwa negasi dari pernyataan itu salah. Ini dilakukan dengan menurunkan konklusi yang salah dari argumen yang terdiri dari negasi pernyataan itu dan pernyataan atau pernyataan-pernyataan lain yang diterima kebenarannya.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	B	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Tabel 2.11. Tabel kebenaran Konvers, Invers dan Kontraposisi

Pada tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran kolom $p \to q$ selalu sama dengan nilai kebenaran $\sim q \to \sim p$ (kontraposisi), tetapi tidak selalu sama dengan kolom. $q \to p$ (konvers) maupun kolom $\sim p \to \sim q$ (invers). Sehingga dapat disimpulkan bahwa $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ adalah tautologi.

B	B	B	B	B
B	S	S	B	S
S	B	B	S	B
S	S	B	S	S

Tabel 2.12. Tabel kebenaran modus ponen

Baris pertama disebut baris kritis. Konklusi (q) bernilai T sehingga argumennya valid.

2.6. Kalimat Berkuantor

Perhatikan kalimat berikut :

a. Medan adalah ibukota Sumatera Utara

b. x adalah binatang berkaki empat, x = {kuda, burung, ular, singa}

Jika diperhatikan pada kedua kalimat diatas, kalimat (a) adalah sebuah kalimat pernyataan dengan nilai kebenaran T. Kalimat (b) belum dapat ditentukan nilai kebenarannya sebelum variabel x –nya, diganti dengan salah satu himpunan dari x, karena itu kalimat (b) disebut kalimat terbuka. Jika x diganti dengan "Kuda" atau "Singa", maka kalimat terbuka (b) menjadi benar. Tetapi jika diganti dengan "Burung" atau "Ular", maka kalimatnya menjadi salah.

Apa yang terjadi jika terhadap suatu kalimat terbuka ditambahkan kata-kata seperti: "untuk semua atau setiap x, Beberapa atau terdapat x.

Untuk kalimat (b) maka kalimatnya menjadi:

1. Untuk semua atau setiap x, x adalah binatang berkaki empat.
2. Terdapat binatang x, dimana x adalah binatang berkaki empat.

Kata-kata semua, setiap, beberapa, terdapat, ada seperti di atas disebut dengan kalimat berkuantor (*Quantifier*). Kuantor tersebut menunjukkan atau berkait dengan banyaknya pengganti peubah x sehingga didapatkan suatu pernyataan berkuantor yang bernilai benar saja atau salah saja.

2.6.1. Predikat dan Kalimat Berkuantor

Misalkan $P(x)$ merupakan sebuah pernyataan yang mengandung variabel x dan D adalah sebuah himpunan. Kita sebut P sebuah fungsi proposisi (dalam D) jika untuk setiap x di D, $P(x)$ adalah proposisi. D disebut daerah asal pembicaraan (*domain of discourse*) dari P.

Contoh:

Berikut ini beberapa contoh fungsi proposisi:

1. $n^2 + 2n$ adalah bilangan ganjil, dengan daerah asal himpunan bilangan bulat.

2. $x^2 - x - 6 = 0$, dengan daerah asal himpunan bilangan real.
3. Seorang pemain bisbol memukul bola melampaui 300 pada tahun 1974, dengan daerah asal himpunan pemain bisbol.

Sebuah predikat seringkali menyatakan sebuah hubungan relasional antara: konstanta, variabel dan fungsi. Simbol-simbol yang digunakan dalam logika predikat:

1. Simbol konstanta : *a, b, c, d*.
2. Simbol variabel : *x, y, z, w*.
3. Simbol fungsi : *f, g, h*.
4. Simbol predikat : *P, Q, R, S*.

Predikat $P(x)$ menyatakan hubungan relasional antara fungsi $f(x)$ dan konstanta 5. Predikat $Q(x; y)$ menyatakan hubungan relasional antara fungsi $f(x; y)$ dengan fungsi $g(x; y)$. Contoh ketiga memuat penghubung bersyarat "jika ... maka ... " dengan premis predikat $R(x)$ dan konklusi predikat $S(x)$. Dalam tatabahasa, predikat menunjuk pada bagian kalimat yang memberi informasi tentang subjek.

Contoh:

"............terbang ke bulan"
"............lebih tebal dari kamus"

Kalimat tersebut adalah kalimat tak lengkap karena tidak memiliki subjek. Pada ilmu kalimat yang memerlukan subjek disebut predikat. Misal: *p* = "terbang ke bulan" dan *q* = "lebih tebal dari kamus", maka kalimat tersebut menjadi "Buku ini lebih tebal dari kamus". Maka, *p* maupun *q* adalah predikat. Untuk menyatakan perlunya subsitusi subjek (yang diketahui), maka ditulis $p(x)$ dan $q(y)$.

Salah satu cara mengubah predikat menjadi suatu kalimat adalah dengan mensubsitusi semua variabelnya dengan nilai-nilai tertentu. Misalkan $p(x)$: "x habis dibagi 5" dan x disubtitusi dengan 35, maka $p(x)$ menjadi kalimat benar karena 35 habis dibagi 5. Cara lain adalah dengan menambahkan kuantor pada kalimat. Kuantor adalah kata-

kata seperti "beberapa", "semua", dan lain-lain yang menunjukkan beberapa banyak elemen yang dibutuhkan agar predikat menjadi benar.

Ada 2 macam kuantor yang menyatakan jumlah objek yang terlibat yaitu kuantor universal (simbol $\forall$) dan kuantor eksistensial (simbol $\exists$). Kuantor universal menunjukkan bahwa setiap objek dalam semestanya mempunyai sifat kalimat yang menyatakannya. Misalnya: *p*(*x*): "*x* dapat mati". Karena semua manusia dapat mati, maka hal tersebut dinyatakan dengan $(\forall x)$, *x* $\in$manusia, $x \in p(x)$.Apabila semestanya sudah jelas, maka dapat dihilangkan. Jadi, jika semesta pembicaraannya himpunan manusia di bumi, maka dituliskan $(\forall x)p(x)$ yang bernilai benar jika dan hanya jika *p*(*x*) benar untuk semua *x* dalam semesta *D* dan bernilai salah apabila ada $x \in D$ yang menyebabkan *p*(*x*) salah. Harga *x* tersebut dinamakan contoh penyangkal (*Counter Example*).

Langkah untuk melakukan pengkuantoran universal :

Perhatikan pernyataan berikut ini :

"Semua mahasiswa harus rajin belajar"

Untuk melakukan pengkuantoran universal pada pernyataan tersebut, maka dilakukan langkah-langkah seperti berikut :

1. Carilah lingkup (*scope*) dari kuantor universalnya, yaitu
   "Jika *x* adalah mahasiswa, maka *x* harus rajin belajar".
   Selanjutnya akan ditulis :
   mahasiswa(*x*) $\Rightarrow$ harus rajin belajar(*x*)
2. Berilah kuantor universal di depannya
   ($\forall$ *x*)(mahasiswa(*x*) $\Rightarrow$ harus rajin belajar(*x*)
3. Ubahlah menjadi suatu fungsi
   (A*x*)(M(*x*) $\Rightarrow$ B(*x*)

2.6.2. Ingkaran Kalimat Berkuantor

Secara umum, ingkaran kalimat: "semua *x* bersifat *p*(*x*)" dan ingkaran kalimat "ada *x* yang bersifat *q*(*x*)" adalah "semua *x* tidak bersifat *q*(*x*)”. Secara formal, ingkaran kalimat berkuantor adalah sebagai berikut :

$$\sim((\exists x \in D)p(x)) \qquad \equiv (\exists x \in D) \sim p(x)$$
$$\sim((\exists x \in D)q(x)) \qquad \equiv (\exists x \in D) \sim q(x)$$

Contoh :
Tulislah ingkaran kalimat berikut :
Terdapat bilangan bulat *x* sedemikian sehingga $x^2=9$
Penyelesaian :

Kalimat mula-mula : $(\exists x \in bulat)x^2 = 9$

Ingkaran : $(\exists x \in bulat)x^2 \neq 9$

Atau : kuadrat semua bilangan tidak sama dengan 9

2.6.3. Kalimat Berkuantor Ganda

Contoh : Nyatakan kalimat di bawah ini dengan menggunakan kuantor !

a. Ada Da’i yang disukai oleh semua orang
b. Untuk setiap bilangan positif, terdapat bilangan positif lain yang lebih kecil darinya.
c. Terdapat bilangan positif *x* sedemikian sehingga untuk semua bilangan positif *y*, berlaku *y* < *x*

Penyelesaian :

a. Misalkan semesta himpunan adalah semua orang dan *p*(*x*,*y*) = menyukai *x*. Maka kalimat dapat dituliskan sebagai berikut $(\exists x)(\forall y)p(x,y)$.
b. Kalimat mula-mula dinyatakan sebagai: “Untuk setiap bilangan positif *x*, terdapat bilangan positif *y* sedemikian sehingga *y* < *x*.

   Dalam simbol logika dituliskan: ($\forall$ bilangan positif *x*) ($\exists$ bilangan positif *y*) *y* < *x*.

   Jika semestanya bilangan riil, kalimat tersebut menyatakan bahwa tidak ada bilangan riil positif yang terkecil.

c. Seperti pada soal (b), dalam simbol logika, kalimat mula-mula dapat dinyatakan sebagai ($\exists$ bilangan positif *x*) ($\forall$ bilangan positif *y*) *y* < *x*.

Ada 8 cara berbeda dalam menggunakan bilangan kuantor $\forall$ dan $\exists$ dalam 2 variabel *x* dan *y*, masing-masing adalah $(\forall x)(\forall y)$, $(\forall y)(\forall x)$, $(\exists x)$, $(\exists y)$, $(\exists y)(\exists x)$, $(\forall x)(\exists y)$, $(\exists y)(\forall x)$, $(\forall y)(\exists x)$, dan $(\exists x)(\forall y)$. Jika semua kuantornya sama, maka urutan penulisan kuantor-kuantor itu bias dibalik. Akan tetapi, jika kuantornya berbeda, urutan penulisannya tidak selalu dapat dibalik.

Contoh :

Misalkan $p(x,y)$:" *y adalah ibu dari x*"

Nyatakan arti simbol logika di bawah ini dalam bahasa sehari-hari dan tentukan nilai kebenarannya.

a. $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$
b. $(\exists y)(\forall x)p(x,y)$

Penyelesaian :

a. Untuk setiap orang *x*, terdapatlah seorang *y* sedemikian sehingga *y* adalah ibu dari *x*. dengan kata lain : setiap orang mempunyai ibu.
b. Terdapatlah seorang *y* sehingga untuk semua orang *x*, *y* adalah ibu dari *x*. dengan kata lain : Ada seseorang yang merupakan ibu dari semua orang di dunia ini.

Dapat dilihat bahwa dua pernyataan tersebut memiliki arti berbeda. Nilai kebenaran (a) adalah benar, sedangkan (b) salah.

Hubungan antara penempatan kuantor ganda adalah sebagai berikut:

$$(\forall x)(\forall y)p(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)p(x,y)$$
$$(\exists x)(\exists y)p(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)p(x,y)$$
$$(\exists x)(\forall y)p(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$$

Ingkaran kalimat berkuantor ganda dilakukan dengan cara yang sama seperti pada ingkaran kalimat ingkaran kalimat berkuantor tunggal.

$\neg\{(\exists x)\ (\exists y)\ p(x,y)\}\ \boxed{\leftrightarrow}\ (\exists y)\ (\exists x)\ \neg\ p(x,y)$

$\neg\ (\exists x)\ (\forall y)\ p(x,y)\quad \boxed{\leftrightarrow}\ (\forall y)\ (\exists x)\ \neg\, p(x,y)$

Contoh :

Apakah ingkaran kalimat ($\forall$ bilangan bulat *n*) ($\exists$ bilangan bulat *k*) $n = 2k$ atau: semua bilangan bulat adalah bilangan genap.

Penyelesain :

Ingkaran : ($\exists$ bilangan bulat *n*) ($\forall$ bilangan bulat *k*) $n \neq 2k$

Atau : Ada bilangan bulat yang tidak sama dengan 2 kali bilangan bulat lain (Ada bilangan bulat yang tidak genap)

2.6.4. Kuantor Pernyataan

Misalkan *p*(*x*) adalah pernyataan yang menyangkut variabel *x* dan D adalah sebuah himpunan, maka *p* adalah fungsi proposisi jika untuk setiap $x \in D$, berlaku *p*(*x*) adalah sebuah proposisi.

Contoh :

Misalkan *p*(*x*) adalah pernyataan dengan *x* adalah sebuah bilangan genap bulat.
Misalkan D = himpunan bilangan bulat positif
Misalkan fungsi proposisi *p*(*x*) dapat ditulis:

Jika *x* = 1 maka proposisinya
1 adalah bilangan bulat genap (*f*)
Jika *x* = 2 maka proposisinya
2 adalah bilangan genap bulat (*t*) dan seterusnya.

Jadi, dapat kita lihat ada sejumlah (kuantitas) proposisi yang benar. Untuk menyatakan kuantitas suatu objek dalam proposisi tersebut digunakan notasi-notasi yang disebut kuantor.

2.6.5. Pembuktian Validitas Argument Berkuantor

Untuk menyusun bukti langsung validitas sebuah argumen yang mengandung kuantor dan fungsi proposisi, kita memerlukan aturan tambahan baru. Ada empat aturan tambahan, yaitu:

1. Universal Instantion (UI)
   $(\forall x)M(x),\ \forall M(a),$ (a adalah lambang individual)
2. Universal Generalization (UG)
   $M(a), \forall(\forall x)M(x)$
3. Existential Generalization (EG)
   $M(a), \exists(\exists x)M(x)$
4. Existential Instantiation (EI)
   $(\exists x)M(x),\ \exists M(y)$ (y adalah konstanta individual selain '*a*' yang
   tidak pernah muncul dalam pembuktian)

   Contoh :
   Semua kucing adalah hewan menyusui.
   Cipo adalah seekor kucing.
   Jadi, Cipo adalah hewan menyusui.
   Pembuktian dapat dilakukan dengan langkah berikut:
   1 . $(x)(K(x) \to H(x))\mathrm{Pr}$
   2. $K(p)\mathrm{Pr}/\sim H(p)$
   3. $K(p) \to H(p).1, \cup I$

BAB III
ALJABAR BOOLEAN

Himpunan dan pernyataan memiliki sifat yang serupa yaitu memenuhi hukum-hukum yang identik. Hukum tersebut adalah hukum-hukum yang digunakan untuk mendefinisikan sebuah struktur matematika yang abstrak yang disebut dengan aljabar Boole. Aljabar Boole memiliki 2 fungsi berbeda yang saling berhubungan. Merupakan suatu jenis simbol yang ditemukan oleh George Boole untuk memanipulasi nilai-nilai kebenaran logika secara aljabar.

3.1. Definisi Aljabar Boolean

Aljabar boole merupakan aljabar yang terdiri atas suatu himpunan dengan dua operator biner yang didefinisikan pada himpunan tersebut yaitu:

$+$ (penambahan) ekivalen dengan $\vee$ (OR)
$\bullet$ (perkalian) ekivalen dengan $\wedge$ (AND)

Pada Aljabar boole juga berlaku hukum logika dimana $\wedge$ (AND) berubah menjadi * atau $\bullet$, $\vee$ (OR) berubah menjadi + serta ~ (Negasi) menjadi kolplemen.

Misalkan B adalah himpunan yang didefinisikan pada dua operator biner, + dan ·, dan sebuah operator uner, '. misalkan 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari B maka, {B,+, . ,',0,1} disebut aljabar Boolean.

3.2. Aljabar Boole sebagai suatu struktur Aljabar

Secara umum didefinisikan sebagai suatu himpunan dengan operasi $"\wedge","\vee", dan "\neg"$ serta elemen 0 dan 1. Dituliskan sebagai $\{B\wedge,\vee,\sim,0,1\}$ yang memenuhi sifat berikut:

Hukum Komutatif	a. $x\vee y=y\vee x$ b. $x\wedge y=y\wedge x$
Hukum Asosiatif	a. $(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)$ b. $(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$
Hukum Distributif	a. $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ b. $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$
Hukum Identitas	a. $x\vee 0=x$ b. $x\wedge 1=x$
Hukum Negasi(komplemen)	a. $x\vee x^1=1$ b. $x\wedge x^1=0$

Tabel 3.1. Tabel Sifat aljabar Boole

Untuk menyerupai operasi aritmatika, simbol $"\vee"$ dapat dituliskan "+" dan $"\wedge"$ dituliskan " * ". Dikenal prinsip dualitas. Jika simbol $"\vee"$ dan $"\wedge"$ dapat diganti dengan 0 dan 1, maka berlaku sebagai suatu aljabar Boole.

Teorema 2.1

Diketahui aljabar Boole $(B,\wedge,\vee,\neg,0,1)$ ***dan*** $x,y,x^1,y^1\in B$. ***Maka berlaku hukum-hukum berikut.***

1.Hukum Idempoten	a. $x\vee x=x$ b. $x\wedge x=x$
2.Hukum Ikatan	a. $x\vee 1=1$ b. $x\wedge 0=0$
3.Hukum Absorbsi	a. $(x\wedge y)\vee x=x$ b. $(x\vee y)\wedge x=x$
4.Hukum De Morgan	a. $(x\wedge y)^1=x^1\vee y^1$ b. $(x\vee y)^1=x^1\wedge y^1$

Teorema 2.2

Dalam suatu alljabar Boole $(B,\wedge,\vee,\sim,0,1)$***, elemen 0 dan 1 adalah tunggal.***

Teorema 2.3

Untuk setiap elemen x** $(B,\wedge,\vee,\sim,0,1)$ **terdapat satu x[1] yang memenuhi hukum negasi.

Contoh: Misalkan $B=\{0,1\}$ dan misalkan dua operasi + dan $*$ didefinisikan pada B sebagai berikut:

+	1	0
0	1	1
1	1	0

*	1	0
1	1	0
0	0	0

Maka B adalah sebuah aljabar Boole yang didefinisikan sebagai $(B,+,*)$

3.3. Fungsi Boolean

Misal B = $(\boldsymbol{B},\wedge,\vee,\sim,\mathbf{0},\mathbf{1})$ adalah aljabar Boole. Suatu fungsi aljabar Boole *n* variabel adalah fungsi $f: B^n \to B$. Fungsi Boolean disebut sederhana jika $B=\{0,1\}$. Sehingga $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Input dari fungsi adalah $\{0,1\}^n$ dan output dari fungsi adalah {0,1}. Operasi not, or dan and dalam logika dapat dipandang sebagai fungsi Boolean dari $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$

Fungsi Not : $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ didefinisikan sebagai :

$$Not(x)=\begin{cases}0, \; jikax=1\\ 1, \; jikax=0\end{cases}$$ fungsi ini biasanya ditulis $\sim x$.

Fungsi And : $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, didefinisikan sebagai:

$$And(x,y)=\begin{cases}1, \; jikax=y=1\\ 0, \text{untuk x dan y yang lainnya}\end{cases}$$

Fungsi Or : $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, didefinisikan sebagai:

$$Or(x,y)=\begin{cases}0, \; jikax=y=1\\ 1, \text{untuk x dan y yang lain.}\end{cases}$$

Contoh:

Nyatakan penghubung XOR (eksklusif OR) dalam fungsi $(0,1)^2 \to \{0,1\}$

Penyelesaian:

Penghubung XOR (simbol $\oplus$) mirip dengan penghubung "atau" $(\vee)$. Jika kedua kalimat penyusunnya benar, maka hasilnya salah. Nilai kebenarannya dapat dilihat sebagai berikut:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

Tabel 3.2 Tabel Nilai kebenaran penghubung Or dan XOR

Jika T dinyatakan dengan 1 dan F dinyatakan dengan 0, maka sebagai fungsi kuadrat $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$XOR(p,q) = \begin{cases} 0, \text{ jika } \mathrm{p} = \mathrm{q} \\ 1, \text{ jika } \mathrm{p} \neq q \end{cases}$$

Contoh: $\{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$ yang didefinisikan dengan aturan: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, + x_3) \mathrm{mod}\, 2$. Nyatakan f dengan menggunakan tabel masukan/keluaran.

Penyelesaian:

Masukan			*Keluaran*
x	*x*$_2$	*x*	*(x+x$_2$,+x$_3$) mod 2*
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Tabel 3.3. Tabel Masukan/keluaran f(x_1, x_2, x_3) = (x+x_2,+x_3) mod 2

3.4. Ekspresi Boolean

Ekspresi Boolean dalam n variabel x_1, x_2,...,x_n didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

1. 0 dan 1 adalah ekspresi Boolean.
2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ masing-masing adalah ekspresi Boolean.
3. jika E_1 dan E_2 adalah ekspresi Boolean, maka $E_1 \wedge E_2, E_1 \vee E_2, E_1^{1}$ adalah ekspresi Boole juga.

Contoh:

Telitilah apakah kedua ekspresi Boole dibawah ini adalah ekivalen:

$E_1 : xy \vee xyz \vee z$

$E_2 : xy \vee z$

Penyelesaian:

$xy \vee xyz \vee z = xy(1 \vee z) \vee z$	Hukum Distributuf
$= xy.1 \vee z$	Hukum Ikatan
$= xy \vee z$	Hukum Identitas

Karena E_2 bisa didapat dari E_1 maka dapat disimpulkan bahwa $E_1 = E_2$.

x	*y*	*z*	*xy*	*Xyz*	E_1 : *xyv xyz v z*	$E_2 : xy \vee z$
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

Tabel 3.4. Tabel masukan dan keluaran

3.5. Prinsip Dualitas

Pada aljabar boole *B* merupakan suatu aturan dualitas yang mengbah operasi + menjadi $*$ dan sebaliknya serta menukai elemen identitas 0 dengan 1 dan sebaliknya dari sutu pernyataan awal.

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap \mathrm{U} = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$
3. Hukum komplemen : $A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten : $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$
5. Hukum penyerapan : $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif : $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$	Dualnya: $\overline{\mathrm{U}} = \varnothing$

3.6. Bentuk Normal Disjungtif (*Disjuctive Normal Form* = *DNF*)

Ekspresi Boole yang hanya terdiri dari satu variabel (atau komplemennya) disebut literal. Setengah dari nilai fungsi akan bernilai 0.

Contoh:

Buatlah tabel masukan/keluaran fungsi literal *f*: $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, yang didefinisikan sebagai $f(x, y) = y^1$

Penyelesaian:

x	*y*	*y*^{1}
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Tabel 3.5. Tabel masukan/keluaran fungsi literal f(x,y) = y^1

Dapat dilihat bahwa setengah dari nilai fungsi adalah 1 dan lainnya 0. Ekspresi Boole *n* variabel $x_1, x_2,...,x_n$ yang merupakan gabungan beberapa literal yang dihubungkan dengan "$\wedge$" disebut minterm berbentuk: x_1^{a1}, x_2^{a2}, ..., x_n^{an} dengan a = 0 atau a = 1.

Contoh:

Tentukan apakah ekspresi-ekspresi di bawah ini merupakan minterm dalam variabel *x*,*y*,dan *z*.

a. xy^1z^1
b. xz^1
c. xyx^1z

penyelesaian:

a. Merupakan minterm dalam *x*,*y* dan *z* karena memuat literal *x*,*y* dan *z*.
b. Bukan minterm dalam *x*,*y* dan *z* karena tidak memuat literal *y*. Perhatikan bahwa xz^1 merupakan minterm dalam 2 variabel *x* dan *z*
c. Bukan minterm karena *x* muncul dalam 2 literal.

Setiap minterm mempunyai tepat satu keluaran (output) yang bernilai 1 dari keseluruhan kombinasi masukan (input) yang mungkin. Akibatnya setiap ekspresi Boole dalam *n* variabel tersebut (kecuali 0) dapat dinyatakan sebagai gabungan beberapa minterm yang berbeda. Gabungan minterm yang ekuivalen dengan suatu ekspresi Boole *E* dinamakan bentuk mormal Disjungtif (DNF+Disjungtif Normal Form) kadang disebut juga dengan kanonik minterm untuk E.

Contoh:

Buatlah tabel untuk ekspresi Boole *E* dalam 3 variabel *x*, *y*, *z*. $E = x^1yz^1 \vee xy^1z^1 \vee xy^1z \vee xyz^1$

Penyelesaian:

X	*y*	*Z*	x^1yz^1	xy^1z^1	xy^1z	xyz^1	*E*
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0

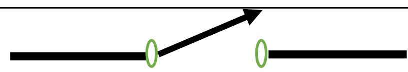
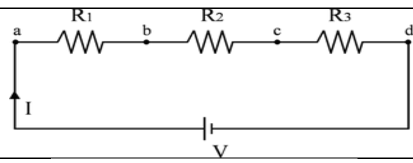
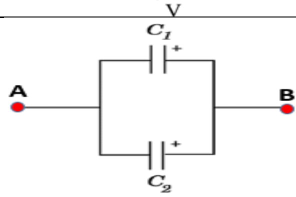
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Tabel 3.6. Tabel kebenaran untuk ekspresi Boole

$$E = x^1yz^1 \vee xy^1z^1 \vee xy^1z \vee xyz^1$$

3.7. Rangkaian Logika

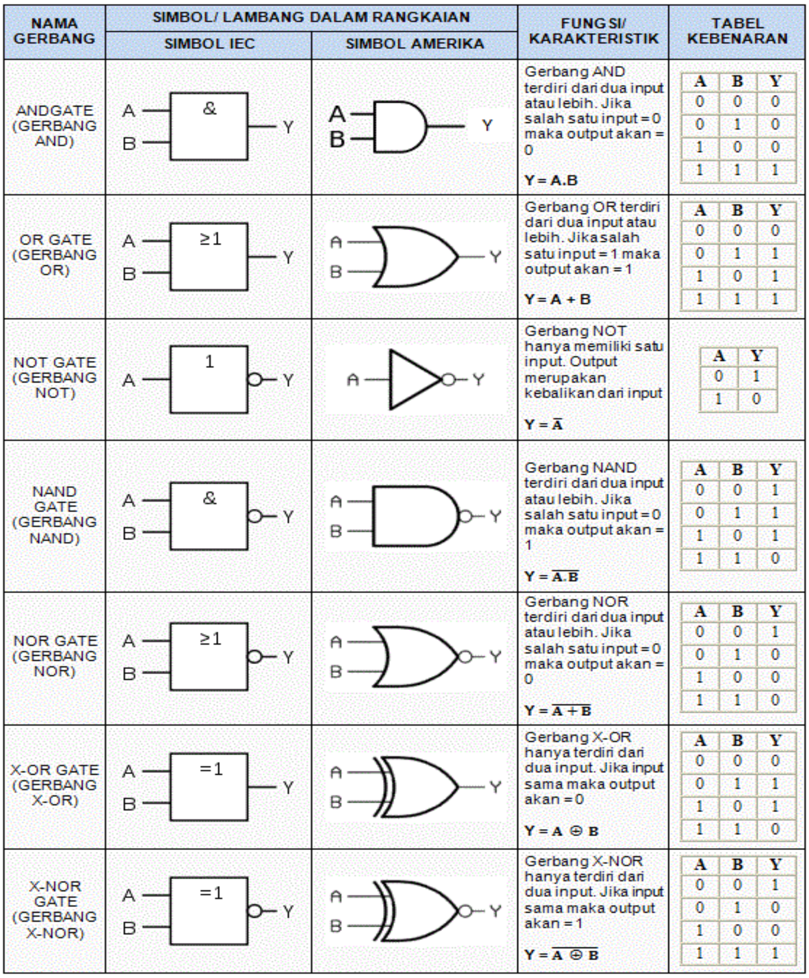
Aljabar Boole juga dapat diaplikasikan pada rangkaian listrik. Analogi antara struktur aljabar dengan rangkaian listrik dapat dilihat sebagai berikut:

Jenis	**Gambar**	**Simbol**
Saklar Terbuka		0
Saklar Tertutup		1
Rangkaian Seri		$p \wedge q$
Rangkaian Paralel		$p \vee q$

Tabel 3.7. Tabel Analogi antara struktur aljabar dengan rangkaian listrik

Kombinasi signal berbentuk bit diteruskan ke komponen lain dengan rangkaian. Rangkaian dianggap sebagai kotak hitam (*black box*) yang berisikan implementasi rangkaian secara rinci. Isi kotak tersebut sering diabaikan dan perhatian lebih ditujukan pada relasi yang ada antara signal masukan (*input*) atau keluaran (*output*).

Rangkaian yang rumit dapat disusun dari unit-unit kecil yang disebut gerbang (*gates*). Suatu gerbang tertentu bersesuaian dengan suatu fungsi Boole sederhana. Jenis-jenis gerbang logikaadalah sebagai berikut:



NAMA GERBANG	SIMBOL/ LAMBANG DALAM RANGKAIAN		FUNGSI/ KARAKTERISTIK	TABEL KEBENARAN
	SIMBOL IEC	SIMBOL AMERIKA		
ANDGATE (GERBANG AND)	A, B, &, Y	A, B, Y	Gerbang AND terdiri dari dua input atau lebih. Jika salah satu input = 0 maka output akan = 0 Y = A.B	A B Y 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
OR GATE (GERBANG OR)	A, B, ≥1, Y	A, B, Y	Gerbang OR terdiri dari dua input atau lebih. Jika salah satu input = 1 maka output akan = 1 Y = A + B	A B Y 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
NOT GATE (GERBANG NOT)	A, 1, Y	A, Y	Gerbang NOT hanya memiliki satu input. Output merupakan kebalikan dari input Y = $\overline{A}$	A Y 0 1 1 0
NAND GATE (GERBANG NAND)	A, B, &, Y	A, B, Y	Gerbang NAND terdiri dari dua input atau lebih. Jika salah satu input = 0 maka output akan = 1 Y = $\overline{A.B}$	A B Y 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NOR GATE (GERBANG NOR)	A, B, ≥1, Y	A, B, Y	Gerbang NOR terdiri dari dua input atau lebih. Jika salah satu input = 0 maka output akan = 0 Y = $\overline{A+B}$	A B Y 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
X-OR GATE (GERBANG X-OR)	A, B, =1, Y	A, B, Y	Gerbang X-OR hanya terdiri dari dua input. Jika input sama maka output akan = 0 Y = A ⊕ B	A B Y 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
X-NOR GATE (GERBANG X-NOR)	A, B, =1, Y	A, B, Y	Gerbang X-NOR hanya terdiri dari dua input. Jika input sama maka output akan = 1 Y = $\overline{A \oplus B}$	A B Y 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

Tabel 3.8. Tabel gates

3.8. Sirkuit Logika

Tabel kebenaran pada gerbang AND, OR, dan NOT identik dengan pernyataan-pernyataan $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg p$. Perbedaan hanya terdapat pada simbol 1 dan 0 sebagai pengganti (bagian yang identik) dengan B (T) dan S (F) pada pernyataan sehingga mereka membentuk sebuah aljabar Boole.

*Teorema 2.4: **"Sirkuit logika membentuk sebuah aljabar Boole"***

Sirkuit AND-OR memiliki beberapa input dengan komplemennya diberikan pada setiap gerbang AND. Output dari setiap gerbang AND diberikan dalam sebuah gerbang OR tunggal yang merupakan output untuk sirkuit. Gambar diatas merupakan jenis sirkuit AND-OR dengan 3 input yaitu *x,y,z*.

Pada sirkuit logika diatas, gerbang AND yang pertama diberi label *x, y, z* dan output $x \bullet y \bullet z$, gerbang AND kedua dengan input $x \bullet y \bullet z$ dan gerbang AND yang ketiga dengan input *x'* dan *y*, dan outputnya adalah $x' \bullet y$.

Contoh:

Jika A = 11001100110, B = 1110000111 dan C = 1010010110, maka tentukanlah:

a. $A + B + C$

b. $A \bullet B \bullet C$

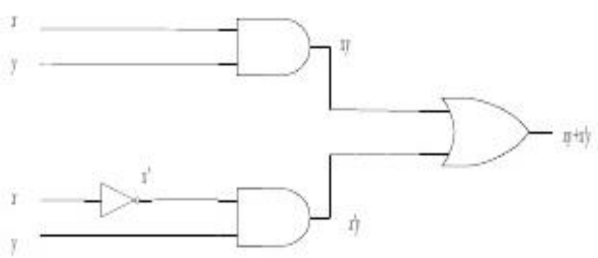
Penyelesaian:

a. 0 dari A muncul dalam penjumlahan, perwakilan gerbang OR, hanya jika semua inputnya 0, sehingga didapat A+B+C = 1110110111
b. 1 dari A muncul dalam perkalian, perwakilan dari gerbang AND, hanya jika semua inputnya 1. Sehingga $A \bullet B \bullet C$ = 10000000110

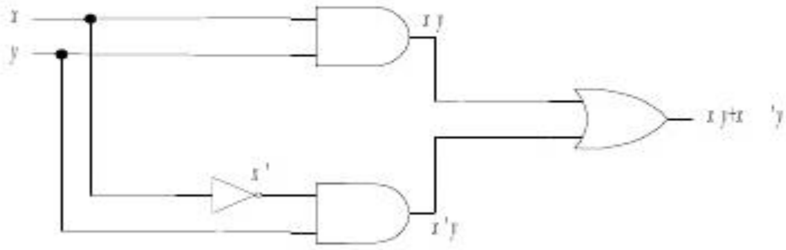
Contoh:

Nyatakan fungsi *f(x,y,z)* = *xy*+*x'y* kedalam rangkaian logika

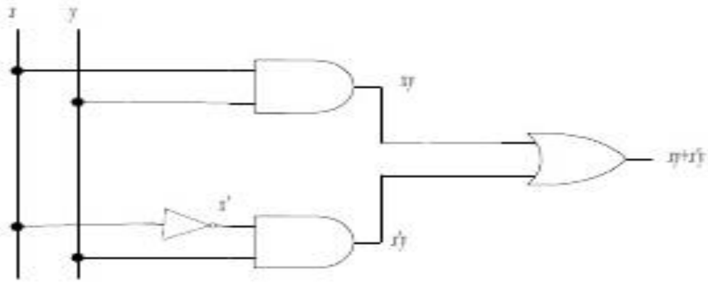
Cara 1.



Cara 2.



Cara 3



3.9. Aljabar Boolean Dua Nilai

Aljabar Boolean yang terkenal dan memiliki terapan yang luas adalah aljabar Boolean dua-nilai (*two-valued Boolean Algebra*). Aljabar Boolean dua-nilai didefinisikan pada sebuah himpunan B dengan dua buah elemen 0 dan 1 (sering dinamakan bit/singkatan dari binery digit), yaitu B = {0,1}, operator biner, + dan . , operator uner, '. kaidah untuk operator biner dan operator uner ditunjukkan tabel 3.9, 3.10 dan 3.11 bawah ini:

a	b	a.b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 3.9

a	B	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabel 3.10

a	a'
0	1
1	0

Tabel 3.11

1. Identitas : jelas berlaku karena dari tabel dapat kita lihat bahwa:
   (i) 0+1 = 1+0 = 1
   (ii) 1.0= 0.1 = 0

Yang memenuhi elemen identitas 0 dan 1 seperti yang didefinisikan pada fostulat huntington.

2. Komutatif: jelas berlaku dengan melihat semetri tabel operator biner.
3. Distributuf:

i. *a.(b+c)* = *(a.b)+(a.c)* dapat ditunjukkan benar dari tabel operator biner diatas dengan membentuk tabel kebenaran untuk semua nilai yang mungkin dari *a,b*,dan *c* (tabel 25). Oleh karena nilai-nilai pada kolom *a.(b+c)* sama dengan nilai-nilai pada kolom *(a.b)+(a.c)*, maka kesamaan *a.(b+c)* = *(a.b)+(a.c)* adalah benar.

ii. Hukum distributif *a+(b.c) = (a+b) .(a+c)* dapat ditunjukkan benar dengan membuat tabel kebenaran dengan cara yang sama seperti (i).

A	*B*	*c*	*b+c*	*a.(b+c*	*a.b*	*a.c*	*(a.b)+(a.c)*
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Tabel 3.12*. Tabel kebenaran *a+(b.c) = (a+b) .(a+c)

1. Komplemen: jelas berlaku karena tabel 25 memperlihatkan bahwa:
   i. a+a’ = 1, karena 0+0’ = 0+1 = 1 dan 1+1’ = 1+0 = 1
   ii. a.a = 0, karena 0.0’ = 0.1 = 0 dan 1.1’ = 1.0 = 0

3.10. Penjumlahan dan Perkalian Dua Fungsi

Misalkan *x* dan *y* adalah dua buah fungsi Boolean dengan *n* peubah, maka penjumlahan x +y didefinisikan sebagai:

$$(x+y)(x_1+x_2+\ldots+x_n)=x(x_1+x_2+\ldots+x_n)+y(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$

Sedangkan perkalian x.y didefinisikan sebagai:

$$(x \bullet y)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = x(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \bullet y(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

Contoh:

Misalkan $f(x,y) = xy' + y + x' + y'$ dan

$g(x,y) = x' + y'$ maka

$h(x,y) = f + g$

$= xy' + y + x' + y$

yang bila disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} h(x,y) &= xy' + x' + (y + y') \\ &= xy' + x' + 1 \\ &= xy' + x' \end{aligned}$$

3.11. Fungsi Komplemen

Untuk menentukan komplemen dar suatu persamaan boolen, maka dapat digunakan prinsip dualitas dan hukum De Morgan.

1. Cara pertama: menggunakan hukum De Morgan

   Misalkan $f(x,y,z) = x(y'z' + yz)$, maka

$$\begin{aligned} f'(x,y,z) &= (x(y'z' + yz))' \\ &= x' + (y'z' + yz)' \\ &= x' + (y'z')'(yz)' \\ &= x' + (y + z)(y' + z') \end{aligned}$$

2. Cara kedua: menggunakan prinsip dualitas

   Tentukan dual dari ekspresi Boolean yang merepresentasikan *f*, lalu komplemenkan setiap literal di dalam dual tersebut.

Misalkan $f(x,y,z) = x(y'z' + yz)$ maka dial dari f adalah $x + (y' + z')(y + z)$

Komplemenkan tiap literalnya: $x' + (y + z)(y' + z')$ sehingga:

$f'(x,y,z) = x' + (y + z)(y' + z')$

3.12. Bentuk Baku

Dua bentuk kanomik adalah bentuk dasar yang diperoleh dengan membaca fungsi dari tabel kebenaran. Bentuk ini umumnya sangat jarang muncul, karena setiap suku (term) di dalam bentuk kanonik harus mengandung literal lengkap, baik dalam bentuk normal (*x*) atau dalam bentuk komplemennya(*x'*).

Cara lain untuk mengekspresikan fungsi Boolean adalah bentuk baku (standart). Pada bentuk ini, suku-sku yang membentuk fungsi dapat mengandung satu, dua, atau sejumlah literal. Dua tipe bentuk baku adalah bentuk baku SOP dan bentuk baku POS.

Contohnya:

$f(x,y,z) = y'+xy+x'yz$ (bentuk baku SOP)

$f(x,y,z) = x(y'+z)(x'+y+z')$ (bentuk baku POS)

perbedaan antara bentuk anomik dan bentuk baku adalah, pada bentuk kanomik, setiap term harus mengandung literal lengkap, sedangkan pada bentuk baku setiap term tidak harus mengandung literal lengkap.

3.13. Bentuk Kanonik

Beberapa fungsi Boolean mungkin memiliki ekspresi aljabar yang berbeda tetapi sebenarnya mempunyai nilai fungsi yang sama. Sebagai contoh: $f(x,y) =(xy)'$ dan $h(x,y)=x'+y'$, adalah dua buah fungsi yang sama (bisa dibuktikan dengan hukum De Morgan).

Ada dua macam bentuk kanomik:

1. Penjumlahan dari hasil kali (*sum-of-product* atau SOP)
2. Perkalian dari hasil jumlah (*product-of-sum* atau POS)

3.1.4. Konversi antar Bentuk kanonik

Fungsi Boolean dalam bentuk kanonik SOP dapat ditransformasi kebentuk kanonik POS, demikian pula sebaliknya. Misalkan f adalah fungsi Boolean dalam bentuk SOP dengan tiga peubah:

$f(x, y, z) = \sum(1,4,5,6,7)$ dan *f'* adalah fungsi komplemen dari *f*,

$$f'(x, y, z) = \sum(0,2,3)$$
$$= m_0 + m_3 + m_3$$

Dengan menggunakan hukum De morgan, kita dapat memperoleh fungsi *f* dalam bentuk POS:

$$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= \left(f'(x, y, z)\right)' \\ &= (m_0 + m_2 + m_3)' \\ &= m_0' \cdot m_2' \cdot m_3' \\ &= (x'y'z')'(x'yz')'(x'yz)' \\ &= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z') \\ &= M_0 M_2 M_3 \\ &= \prod(0,2,3) \end{aligned}$$

Jadi $f(x, y, z) = \sum(1,4,5,6,7)$
$= \prod(0,2,3)$

Kesimpulan: $m_j' = M_j$

3.15. Penyederhanaan Fungsi Boolean

Fungsi Boolean seringkali mengandung operasi-operasi yang tidak perlu, literal atau suku-suku yang berlebihan. Oleh karena itu, kita dapat menyederhanakan fungsi Boolean lebih lanjut. Menyederhanakan fungsi Boolean artinya mencari bentuk fungsi lain yang ekivalen tetapi dengan jumlah literal atau operasi yang lebih sedikit. Penyederhanaan fungsi Boolean disebut juga minimisasi fungsi.

Contohnya, $f(x, y) = x'y + xy' + y'$ dapat disederhanakan menjadi $f(x, y) = x' + y'$ f (x,y) = x'+ y'.

Dipandang dari segi aplikasi aljabar Boolean, fungsi Boolean yang lebih sederhana berarti rangkaian logikanya juga lebih sederhana (menggunakan jumlah gerbang logika lebih sedikit).

Ada 3 metode yang dapat digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boolean:

1. Secara aljabar, menggunakan hukum-hukum aljabar Boolean.
2. Metode peta Karnaugh
3. Metode Quine-McClusky (metode tabulasi)

3.15.1. Penyederhanaan Fungsi Boolean Secara Aljabar

Jumlah literal didalamsuatu fungsi Boolean dapat diminimumkan dengan melakukan manipulasi aljabar. Metode yang tersedia adalah prosedur ang memanfaatkan postulat, hukum-hukum dasar, dan metode manipulasi lain yang sudah dikenal.

3.15.2. **Metode Peta Karnaugh**

Metode ini digunakan untuk menentukan prime implikan dan minimal dfn untuk pernyataan Boole yang mengandung paling banyak 6 variabel. Pada peta Karnaugh, perkalian dasar dengan variabel yang sama dinyatakan dengan bujur sangkar. Perkalian dasar P_1 dan P_2 adalah *adjacent*, jika P_1 dan P_2 berbeda tepat satu literal dimana *variabel* komplemen pada salah satu perkalian dasar dan yang bukan komplemen pada perkalian dasar sisanya. Jadi jumlahan dari 2 perkalian *adjacent* akan merupakan perkalian dasar dimana terdapat *variabel* yang berbeda. Pada peta Karnaugh, kita menggunakan istilah bujur sangkar dan perkalian dasar.

Contoh:

$$\begin{aligned} xyz' + xyz' &= xz'\left(y + y'\right) \\ &= xz'(1) \\ &= xz' \\ x \cdot yzt + x'yz't &= x'yt(z + z') \\ &= x'yt(1) \\ &= x'yt \end{aligned}$$

Perlu dicatat bahwa $x'yzt$ dan $xyz't$ tidak *adjacent*. Jika xyz' dan $xyzt$ tidak muncul pada peta Karnaugh, karena terdapat variabel yang berbeda. Pada peta Karnaugh digunakan istilah bujur sangkar dan perkalin dasar.

Contoh:

$E_1 = xy + xy'$ $\qquad E_2 = xy + xy + xy$ $\qquad E_3 = xy + xy$

3.15.3. Metode Quine-McCluskey

Metode Quine-McCluskey merupakan metode penyederhanaan fungsi Boolean berbasis komputer. Metode ini memiliki dua kelebihan yaitu fungsi untuk menghasilkan fungsi minimal yang kurang bergantung pada penulisan pola dan skema yang layak untuk menangani besar jumlah variable. Metode tabulasi ini menggunakan tahap-tahap penyederhanaan yang jelas dan baku sehingga menghasilkan fungsi Boolean yang paling sederhana. Penyederhanaan fungsi Boolean dilakukan karena fungsi Boolean sering mengandung operasi-operasi yang tidak perlu, suku-suku atau literal yang berlebih, oleh karena itu kita dapat menyederhanakan fungsi Boolean lebih lanjut, dengan melakukan penyederhanaan fungsi Boolean berarti kita telah melakukan penghematan dalam pembuatan rangkaian digital. Metode Quine McCluskey adalah metode yang digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boolean yang memiliki variable yang besar. Jika jumlah peubah yang terlibat pada suatu fungsi Boolean lebih dari 6 buah maka penggunaan peta Karnaugh menjad semakin rumit, sebab ukuran peta bertambah besar. Selain itu, metode peta Karnaugh lebih sulit diprogram dengan komputer.

Langkah-langkah metode Quine-McCluskey untuk menyederhanakan ekspresi Boolean dalam adalah sebagai berikut :

1. Nyatakan tiap minterm dalam n peubah menjadi string bit yang panjangnya n, peubah komplemen → 0, peubah bukan komplemen → 1

2. Kelompokkan minterm berdasarkan jumlah 1 yang dimilikinya
3. Kombinasikan minterm dalam n peubah dengan kelompok lain yang jumlah 1 nya berbeda satu sehingga diperoleh bentuk prima yang terdiri dari n-1 peubah. Mintern yang dikombinasikan diberi tanda √
4. Kombinasikan minterm dalam n-1 peubah dengan kelompok lain yang jumlah 1 nya berbeda 1, sehingga diperoleh bentuk prima yang terdiri dari n-2 peubah
5. Teruskan langkah 4 sampai diperoleh bentuk prima yang sesederhana mungkin
6. Ambil semua bentuk prima yang tidak bertanda √. Buat tabel baru yang memperlihatkan minterm dari ekspresi Boolean semula yang dicakup oleh bentuk prima tersebut (tandai dengan x). Setiap minterm harus dicakup oleh paling sedikit satu buah bentuk prima
7. Pilih bentuk prima yang memiliki jumlah literal paling sedikit namun mencakup sebanyak mungkin minterm dari ekspresi Boolean semua.

Langkah 7 terdiri dari langkah-langkah sebagai berikut:

a. Tandai kolom-kolom yang mempunyai satu buah tanda x dengan tanda * lalu beri tanda √ di sebelah kiri bentuk prima yang berasosiasi dengan tanda * tersebut. Bentuk prima ini telah dipilih untuk fungsi Boolean sederhana
b. Untuk setiap bentuk prima yang telah ditandai dengan √, beri tanda minterm yang dicakup oleh bentuk prima tersebut dengan tanda √
c. Periksa apakah masih ada minterm yang belum dicakup oleh bentuk prima terpilih, jika ada peilih dari bentuk prima yang tersisa yang mencakup sebanyak mungkin minterm tersebut. Beri tanda √ bentuk prima yang dipilih itu serta minterm yang dicakupnya
d. Ulangi langkah c sampai seluruh minterm sudah dicakup oleh semua bentuk prima

Contoh :

Panjangnya n, peubah komplemen → 0, peubah bukan komplemen → 1

Kelompokkan minterm berdasarkan jumlah 1 y Sederhanakan fungsi Boolean f(v,w,x,y,z) = Σ(0,1,2,8,10,11,14,15)

Nyatakan tiap minterm dalam n peubah menjadi string bit yang ang dimilikinya

	(a)
Term	Wxyz
0	0000 √
1	0001 √
2	0010 √
8	1000 √
10	1010 √
11	1011 √
14	1110 √
15	1111 √

Kombinasikan minterm dalam n peubah dengan kelompok lain yang jumlah 1 nya berbeda satu sehingga diperoleh bentuk prima yang terdiri dari n-1 peubah.

Mintern yang dikombinasikan diberi tanda √

	(b)
Term	wxyz
0,1	000-
0,2	00-1 √
0,8	-000 √
2,10	-010 √
8,10	10-0 √
10,11	101- √
10,14	1-10 √
10,15	1-11 √
14,15	111- √

Kombinasikan minterm dalam n-1 peubah dengan kelompok lain yang jumlah 1 nya berbeda 1, sehingga diperoleh bentuk prima yang terdiri dari n-2 peubah

	(c)
Term	wxyz
0,2,8,,10	-0-0
0,8,2,10	-0-0
10,11,14,15	1-1-
10,14,11,15	1-1-

	(a)		(b)		(c)
Term	Wxyz	Term	Wxyz	Term	wxyz
0	0000 √	0,1	000-	0,2,8,,10	-0-0
1	0001 √	0,2	00-1 √	0,8,2,10	-0-0
2	0010 √	0,8	-000 √	10,11,14,15	1-1-
8	1000 √	2,10	-010 √	10,14,11,15	1-1-
10	1010 √	8,10	10-0 √		
11	1011 √	10,11	101- √		
14	1110 √	10,14	1-10 √		
15	1111 √	14,15	111- √		

Bentuk Prima	Minterm							
	0	1	2	8	10	11	14	15
√ 0,1	x							
√ 0,2,8	x							
√ 10,11,14,15								
	√							

Bentuk Prima	Minterm							
	0	1	2	8	10	11	14	15
√ 0,1	X	x						
√ 0,2,8	X		x	x	x			
√ 10,11,14,15					x	x	X	x
		*	*	*		*	*	*
	√	√	√	√	√	√	√	√

Bentuk Prima yang terpilih adalah:
0,1
0,2,8,10
10,11,14,15

Maka $f(w,x,y,z) = w'x'y+x'z'+wy$

Yang bersesuaian dengan:

$w'x'y$

$x'z'$

wy

BAB IV
KOMBINATORIK

Pada bab ini akan dibahas tentang dasar – dasar perhitungan (*counting*) dan teknik-tekniknya serta aplikasinya dalam ilmu komputer. Kombinatorik adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek. Solusi yang ingin kita peroleh dengan kombinatorik ini adalah jumlah cara pengaturan objek-objek tertentu didalam himpunannya.

4.1. Dasar-Dasar Perhitungan

Operasi dasar yang digunakan sebagai teknik menghitung dalam kombinatorik adalah perkalian dan penjumlahan.

1. Perkalian (*rule of product)*

   Misal percobaan pertama memiliki m hasil yang mungkin, percobaan kedua memiliki n hasil yang mungkin. Jika percobaan 1 <u>dan</u> percobaan 2 dilakukan maka ada sejumlah $m.n$ kemungkinan jawaban (percobaan dilakukan secara simultan atau serempak. Untuk menghitung banyaknya cara yang dapat dilakukan dengan aturan perkalian adalah sebagai berikut :

   Langkah ke 1 dapat dilakukan dengan n_1 cara
   Langkah ke 2 dapat dilakukan dengan n_2 cara
   …….
   Langkah ke k dapat dilakukan dengan n_k cara
   Maka semua pekerjaan dapat dilakukan dalam $(n_1)(n_2)\ldots(n_k)$ cara.

Contoh :

Jika dua dadu yang berbeda dilontarkan, ada berapa banyak kemungkinan angka yang muncul? Bagaimana jika 5 buah dadu? Bagaimana jika *n* buah dadu?

Penyelesaian :

Sebuah dadu mempunyai 6 kemungkinan munculnya angka-angka sehingga kalau 2 buah dadu berbeda akan mempunyai 6 x 6 = 6^2 = 36 kemungkinan. Jika 5 dadu, maka kemungkinannya adalah 6^5 cara. Jika ada *n* dadu maka ada 6^2 kemungkinan.

2. Penjumlahan (*rule of sum*)

Bila percobaan 1 memiliki m hasil yang mungkin, percobaan 2 memiliki *n* hasil yang mungkin. Jika percobaan 1 atau percobaan 2 dilakukan terdapat (m+n) kemungkinan jawaban yang mungkin terjadi. (percobaan tidak dilakukan secara simultan atau serempak). Untuk menyatakan jumlah elemen dalam himpunan A, maka digunakan simbol $|A|$.

Misalkan A adalah gabungan dari himpunan-himpunan bagian tidak kosong yang saling asing $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Maka $|A| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n|$.

Contoh :

Misalkan 2 buah dadu yang berbeda warnanya (merah dan putih), dilontarkan. Ada berapa macam cara untuk mendapatkan jumlah angka 4 atau 8?

Penyelesaian :

Cara mendapatkan jumlah angka = 4 adalah sebagai berikut :

Dadu Merah	Dadu Putih
1	3
2	2
3	1

Jadi ada 3 cara .

Untuk mendapatkan jumlah angka 8 adalah :

Dadu merah	Dadu putih
2 3	6 5
4	4
5	3
6	2

Didapat 5 cara

Karena hasilnya tidak ada yang sama, maka secara keseluruhan banyaknya cara untuk mendapatkanjumlah angka 4 atau 8 adalah 3 + 5 = 8 cara...

4.2. Penghitungan Tak Langsung

Penghitungan tak langsung adalah menghitung komplemennya.

Contoh:

Suatu kartu bridge lengkap diambil satu persatu dengan pengembalian. Berapa banyak cara yang mungkin untuk mengambil 10 kartu sedemikian sehingga kartu ke- 10 adalah perulangan dari kartu yang telah diambil sebelumnya?

Penyelesaian:

Ambil kartu ke- 10 (ada 52 cara)

Kartu pertama hingga ke- 9 harus berbeda dengan ke- 10 sehingga terdapat (52 – 1) 9 = 51 9 cara untuk mendapatkan ke 9 kartu pertama. Untuk kartu ke 10 terdapat (51 9) (52) cara sedemikian sehingga kartu ke 10 berbeda dengan 9 kartu lainnya. Jika terdapat syarat apapun untuk mengambil ke – 10 kartu, maka akan didapat 5210 cara.

4.3. Korespodensi Satu-Satu

Adalah dengan mengganti masalah yang sedang diselesaikan dengan masalah lain yang diketahui memiliki objek yang sama.

Contoh:

Pertandingan sepak bola dengan sistem gugur diikuti 101 regu. Dalam sistem tersebut, regu yang kalah akan langsung gugur

dan regu yang menang akan maju kebabak berikutnya. Jika jumlah regu dalam suatu babak tertentu ganjil maka ada satu regu yang mendapatkan *bye* (menang tanpa bertanding). Berapa banyak pertandingan yang harus dilakukan untuk mendapatkan satu regu yang menjadi juara?
Penyelesaian

Dengan cara langsung

Babak pertama diikuti 101 regu sehingga dilakukan 50 kali pertandingan (satu menang *bye*), pemenang masuk babak II, diikuti oleh 51 regu sehingga terjadi 25 kali pertandingan (1 regu menang *bye*). Babak III diikuti 26 regu, jumlah pertandingan 13, babak ke IV diikuti 13 regu, 6 kali pertandingan (satu menang *bye*), babak ke V diikuti 7 regu 3 kali pertandingan (satu menang *bye*), babak ke VI diikuti 4 regu, 2 kali pertandingan. Babak ke VII diikuti 2 regu dengan satu kali pertemuan untuk mendapatkan regu yang menjadi juara. Jadi total pertandingan adalah: 50 + 25 + 13 + 6 + 3 + 2 + 1= 100 kali.

Dengan korespodensi satu-satu

Dapat dilihat, jimlah pertandingan yang harus dilakukan selalu sama dengan jumlah regu yang kalah. Karena menggunakan sistem gugur maka berarti (100-1)=100 regu yang kalah. Maka jumlah pertandingan yang harus dilakukan adalah 100 kali.

4.4. Kombinasi Dan Permutasi

4.4.1 Faktorial

Misalkan bilangan bulat positif. Besaran n factorial ($n!$) didefenisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat antara 1 sampai n (0! Didefinisikan = 1). Secara matematis dapat di tuliskan sebagai :

$$n! = n\,(n-1)\,!$$

Contoh :

1. Tulislah 6 faktorial pertama !

0! = 1
1! = 1
2! = 1 . 2 = 2
3! = 1 . 2 . 3 = 6
4! = 1. 2 . 3 . 4 = 24
5! = 1 . 2 . 3 . 4. 5 = 120
6! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720

2. Hitunglah $\frac{1}{2!4!} + \frac{1}{3!3!}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!4!} + \frac{1}{3!3!} &= \frac{1}{2!4!}\frac{3}{3} + \frac{1}{3!3!}\frac{4}{4} \\ &= \frac{3}{3!4} + \frac{4}{3!4} \\ &= \frac{7}{3!4!} \\ &= \frac{7}{144}\end{aligned}$$

4.4.2 Kombinasi

Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Kombinasi adalah pengelompokan atau pemilihan dari semua atau sebagian elemen dari suatu himpunan tanpa memperhatikan susunan pemilihannya Jika pada permutasi kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

Misalkan himpunan *S* memiliki n elemen, maka banyaknya himpunan bagian *S* yang terdiri dari r $(r \leq n)$ disebut kombinasi *n* objek yang diambil sebanyak *r* objek sekaligus. Simbolnya adalah $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ atau $C(n,r)$ atau ${}_nC_r$.

Banyaknya kombinasi yang dimaksud dinyatakan dengan persamaan:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Contoh :

Jika *n* dan *r* adalah bilangan- bilangan bulat positif dan $(r \leq n)$, buktikan bahwa $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix} = \frac{n!}{(n-r)!(n(n-r))!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$$

4.4.3 Permutasi

Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi aturan perkalian. Permutasi adalah susunan berurutan dari semua atau sebagian elemen dari suatu himpunan dengan kata lain permutasi merupakan jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek. Misalkan jumlah objek adalah *n*, maka urutan pertama dipilih dari *n* objek, urutan kedua dipilih dari $n-1$ objek, urutan ketiga dipilih dari $n-2$ objek, begitu seterusnya, dan urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa. Menurut kaidah perkalian, permutasi dari *n* objek adalah

$$n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) = n!$$

Permutasi *r* dari *n* objek adalah jumlah kemungkinan urutan *r* buah objek yang dipilih dari *n* buah objek, dengan

$r \leq n$ yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada objek yang sama.

Jumlah susunan berbeda dari pemilihan *r* objek yang diambil dari *n* objek disebut permutasi-*r*, dilambangkan dengan $P(n,r)$, yaitu:

$$\begin{aligned} P(n,r) &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Pada permutasi, perulangan tidak diperbolehkan, bila $r = n$ dapat dihitung dengan persamaan

$$\begin{aligned} P(n,r) &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= n! \end{aligned}$$

4.5. Kombinasi Dan Permutasi Dengan Cara Berulang

Pada pembahasan sebelumnya dibahas tentang objek yang berbeda. Pada pembahasan ini, akan dibahas objek yang sama (tidak harus persis sama) tetapi sulit dibedakan satu dengan yang lainnya.

Contoh:

Berapa macam cara yang didapatkan dilakukan dengan penyusunan yang berbeda pada huruf-huruf *a,a,b,c*?

Penyelesaian:

Langkah-langkah yang harus dilakukan:

1. Memilih posisi untuk meletakkan 2 buah huruf *a*. Karena tidak dapat dibedakan satu dengan yang lainnya jadi urutan tidak menjadi perhatian. Maka banyak kemungkinan adalah $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
2. Memilih posisi untuk meletakkan satu buah huruf *b*. Maka banyaknya kemungkinan adalah $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. memilih posisi untuk meletakkan satu buah huruf *c*. Maka banyaknya kemungkinan adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

sehingga didapat bahwa keseluruhan proses, memiliki kemungkinan sebanyak:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{1!1!}\frac{1!}{1!0!} \\ &= \frac{4!}{2!1!1!} \\ &= 12\, cara \end{aligned}$$

Banyaknya permutasi berbeda yang mungkin dari n objek dapat dihitung dengan:

$$\begin{bmatrix} n \\ n_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-n_1-n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} n-n_1-n_2 \ldots n_k-1 \\ n_k \end{bmatrix} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots}n_k!$$

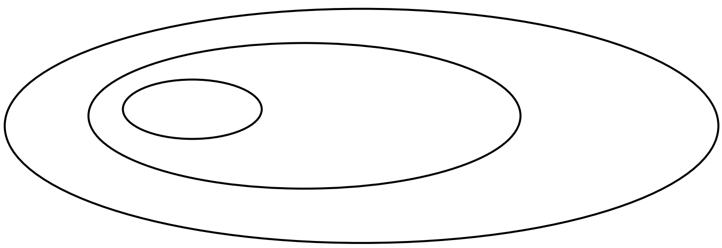
4.6. Koefisien Binomial

Kombinasi dan permutasi juga dapat digunakan untuk menjelaskan koefisien binomial dan lain-lain.

Identitas-identitas dalam kombinasi dan permutasi

a. Sifat Simetri : $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix}$

b. identitas Newton $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-k \\ n-k \end{bmatrix}$ untuk bilangan bulat $n \geq r \geq k \geq 0$



Gambar Identitas

c. Himpunan mula-mula terdiri dari *n* objek diambil *r* objek diantaranya. Dari *r* selanjutnya diambil lagi k objek.

d. $P(n,r) = nP(n-1, r-1)$

4.7. Segitiga Pascal

Merupakan salah satu persamaan yang sangat penting dalam kombinatorika. Memberikan jalan untuk menghitung kombinasi suatu suku berdasarkan kombinasi suku-suku yang lebih rendah. Jika harga $\binom{n}{r}$ diketahui untuk semua *r*, maka harga $\binom{n+1}{r}$ dapat dihitung untuk semua $(0 < r \leq n)$. Secara formal dapat dinyatakan dengan:

$$\binom{n+1}{r} = \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} + \binom{n}{r}$$

Beberapa sifat yang terdapat dalam segitiga pascal :

1. Kondisi terbatas
   Nilai segitiga pascal di ujung kiri dan kanan selalu 1, karena pada ujung ke *n* nilai di ujung kiri adalah $\binom{n}{0}$ dan di ujung kanan adalah $\binom{n}{n}$ yang keduanya berharga 1.

2. Kondisi sekunder
   Nilai segitiga pascal pada baris ke *n* di kolom kedua sebelum berakhir selalu = *n*. Karena pada baris ke n nilai kolom kedua adalah $\binom{n}{1}$ dan nilai kolom ke dua sebelum terakhir adalah $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}$, yang keduanya berharga *n*.
3. Simetri
   Pada baris ke *n*, nilai yang ada pada kolom ke *k* selalu sama dengan nilai yang ada pada kolom ke (n-k). Karena, $\binom{n}{k} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$
4. Jumlah diagonal
   $$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$$
5. Penjumlahan baris
   Pada baris ke *n*, jumlah koefisien segitiga pascal = 2^n
   $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{r} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$
6. Kuadrat penjumlahan baris
   $$\binom{n}{0}2 + \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2}2 + \ldots + \binom{n}{r}2 + \ldots + \binom{n}{n}2 = \binom{2n}{n}$$
7. Jumlah kolom

Untuk setiap bilangan bulat positif *n* dan *r* dengan *n* ≥ *r* berlakulah :

$$\binom{n}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

4.8. Teorema Binomial Dan Multinomial

Penjumlahan dua buah suku seperti *x*+*y* dalam aljabar di sebut dengan binomial. Merupaka rumus penjabaran $(x+y)^n$, *n* adalah bilangan bulat tak negatif.

1. Teorema Binomial

   Misalkan *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan riil dan *n* adalah bilangan bulat tak negatif. Maka :

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\ &= \binom{n}{o}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n\end{aligned}$$

Contoh :

Uraikan ekspresi di bawah ini dengan menggunakan teorema binomial

$$\begin{aligned}(2x-5y)^3 &= \binom{3}{0}(2x)^3 + \binom{3}{1}(2x)^2(5y) + \binom{3}{2}(2x)(5y)^2 + \binom{3}{3}(5y)^3 \\ &= (1.2^3)x^3 + (3.2^2.5)x^2y + (3.2.5^2)xy^2 + 5^3y^3 \\ &= 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3\end{aligned}$$

2. Toerema multinomial

Merupakan jumlahan *t* suku berbeda, yaitu $x^1, x^2, \ldots, x^t$. Misalkan $x^1, x^2, \ldots, x^t$ adalah bilangan-bilangan riil dan *n* adalah bilangan bulat positif. Maka:

$$\left(x^1, x^2, \ldots, x^t\right)^n = \sum_s \frac{n!}{q_1!q_2!\ldots q_3!} x_1^{q_1}x_2^{q_2}\ldots x_t^{q_t}$$

Penjumlahan dilakukan untuk semua $q_1, q_2, \ldots, q_t$ dengan $q_1 + q + \ldots + q_t = n$ banyaknya suku pada $\left(x^1, x^2, \ldots, x^t\right)^n$ adalah $\binom{n+t-1}{n}$

4.9. Prinsip Inklusi Dan Eksklusi

Suatu cara yang sering dipakai untuk menghitung jumlah anggota-anggota himpunan yang tidak saling asing adalah metode sieve (aturan inklusi-eksklusi).

Misalkan A_i adalah himpunan-himpunan (*i*=1,2,3,..,*n*) dan $[A_i]$ adalah jumlah anggota himpunan A_i. Sehingga :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n| = \sum_{ij} |A_{i\cap} A_j| + \sum_{ijk} |A_i \cap A_j \cap \ldots A_k| + \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{ij} |A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_n|$$

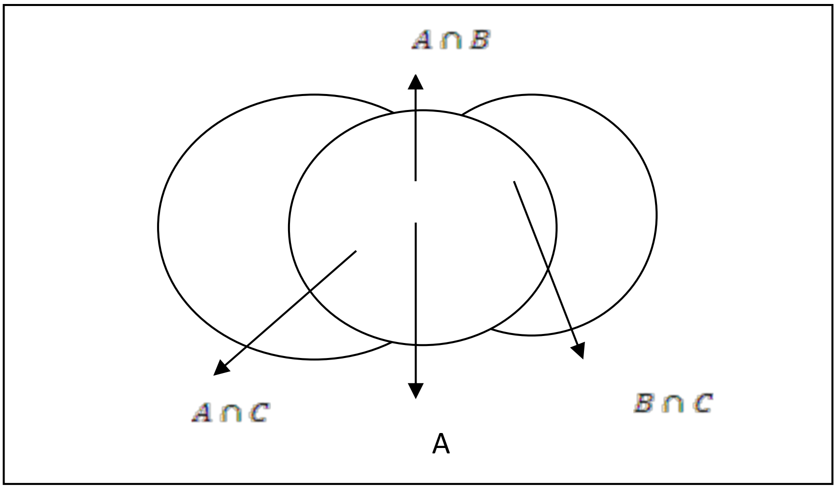
Dimana ***i,j,k***, ... merupakan keseluruhan kombinasi interseksi himpunan yang mungkin di buat. Untuk *n*=2 (himpunan A dan B)

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Diagram Vennnya adalah:

Untuk *n*=3 (himpunan ***A,B,C***) dimana:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B - |A \cap C|| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Gambar Diagram Venn untuk n=3



BAB V
INDUKSI MATEMATIKA

Induksi matematika merupakan cara standar dalam membuktikan bahwa sebuah pernyataan tertentu berlaku untuk setiap bilangan asli. Merupakan metode pembuktian matematis yang biasanya digunakan untuk menetapkan bahwa pernyataan yang benar dari semua bilangan asli (non-negatif bilangan bulat).

Pembuktian dengan cara ini terdiri dari dua langkah, yaitu:

1. Menunjukkan bahwa pernyataan itu berlaku untuk bilangan 1.
2. Menunjukkan bahwa jika pernyataan itu berlaku untuk bilangan *n*. Maka pernyataan itu juga berlaku untuk bilangan *n* + 1.

Misalkan akan dibuktikan suatu pernyataan bahwa jumlah *n* bilangan asli pertama, yaitu 1 + 2 +….+ *n*, adalah sama dengan $\frac{n(n+1)}{2}$. Untuk membuktikan bahwa pernyataan itu berlaku untuk membuktikan bahwa pernyataan itu berlaku untuk setiap bilangan asli, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk *n* = 1. Jelas sekali bahwa jumlah 1 bilangan asli pertama

adalah $\frac{n(n+1)}{2}$ = 1. Jadi pernyataan tersebut adalah benar untuk n = 1.

2. Menunjukkan bahwa jika pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, maka pernyataan tersebut juga benar untuk $n = k+1$. Hal ini bias dilakukan dengan cara:
   - Mengasumsikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk n = k, yaitu:

   $1+2+\ldots\ldots.+k = \frac{k(k+1)}{2}$

   - Menambahkan k+1 pada kedua ruas, yaitu:

   $1+2+\ldots\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

   - Dengan menggunakan manipulasi aljabar, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2k(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+1)+1}{2}
\end{aligned}
$$

   - sehingga: $1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+1)}{2}$

   - Maka dapat disimpulkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = k+1$.

3. Dengan induksi matematika dapat disimpulkan bahwa pernyataan tersebut berlaku untuk setiap bilangan asli n.

   Secara formal induksi matematika ini bias didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1
Misalkan untuk setiap bilangan asli n kita mempunyai pernyataan P(n) yang bias benar atau salah. Misalkan
1. ***P (1) benar.***
2. ***Jika P(n) benar, maka P(n+1) benar.***

Sehingga P(n) benar untuk setiap bilangan asli n.
Langkah 1 disebut dengan Langkah Dasar, sedangkan Langkah 2 disebut dengan Langkah induktif.
Jika pada Langkah Induktif yang diasumsikan adalah pernyataan P(i) benar untuk setiap bilangan i ≤ n, maka perumusan induksi matematika seperti ini disebut Bentuk Kuat Induksi Matematika.

Contoh:
1. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ untuk setiap $n = 1,2,...$

   Penyelesaian:
   1. Akan ditunjukkan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ benar untuk *n* = 1. Jelas sekali bahwa $1! = 1 \geq 1$
   2. Asumsikan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ adalah benar untuk n = k. akan ditujukan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ juga benar untuk *n* = *k* + 1, yaitu $(k+1) \geq 2^{(k+1)-1}$

   $$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1)(k!)\\ &\geq (k+1)(2^{k-1})\\ &\geq 2.2^{k-1}\\ &= 2^{1+(k-1)}\\ &= 2^{(k+1)-1}\end{aligned}$$

   Terbukti bahwa $(k+1) \geq 2^{(k+1)-1}$. Karena langkah dasar dan langkah induktif terbukti, maka dapat disimpulkan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ untuk setiap *n* = 1, 2, …….

2. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $5^n - 1$ dapat dibagi 4 untuk setiap *n* = 1, 2, ………

1. Akan ditujukan bahwa $5^n - 1$ habis dibagi 4 untuk *n* = 1. Jelas sekali bahwa 5^1 - 1 = 5 - 1 = 4 habis dibagi 4.
2. Asumsikan bahwa $5^n - 1$ habis dibagi 4 untuk *n* = *k*, yaitu $5^n - 1$ habis dibagi 4. Akan ditunjukkan bahwa $5^n - 1$ juga habis dibagi 4 untuk *n* = *k* + 1, yaitu $5^{k+1} - 1$ habis dibagi 4.

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5.5^{k+1} \\ &= (1+4).5^k - 1 \\ &= 5^k + 4.5^k - 1 \\ &= \left(5^k - 1\right) + 4.5^k \end{aligned}$$

3. Berdasarkan asumsi, $5^k - 1$ habis dibagi 4. Sedangkan 4.5^k juga habis dibagi 4. Dengan demikian $5^{k+1} - 1$habis dibagi 4. Karena langkah dasar dan langkah induktif terbukti, maka dapat disimpulkan bahwa $5^{k+1} - 1$ dapat dibagi 4 untuk setiap *n* = 1, 2, ….

3. Buktikan bahwa : $1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$, untuk setiap *n* bilangan integer positif

Jawab :

Basis : Untuk *n* = 1 akan diperoleh : $1 = 1 \rightarrow \frac{1}{2}1.(1+1)$

Induksi : misalkan untuk *n* = *k* asumsikan $1+2+3+...+k = \frac{1}{2}k\theta$.

Akan dibuktikan :untuk *n* = *k*+1 berlaku

$$1+2+3+...+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)\theta(k+1)$$

Jawab :

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+(k+1) &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}(1+2+3+\ldots+k+(k+1) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}(k+1)\frac{1}{2}(k+2) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}(k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right] \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}(k+1)\frac{1}{2}(k+2) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\,\frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}
$$

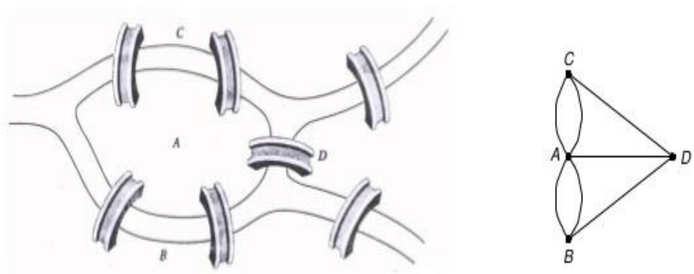
Kesimpulan : $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ untuk setiap bilangan bulat positif *n*.

BAB VI
DASAR-DASAR TEORI GRAPH

Teori Graph awalnya digunakan untuk menyelesaikan masalah jembatan di kota Königsberg (sebelah timur Prussia, saat ini kita kenal dengan Jerman), sekarang bernama kota Kaliningrad. Pada kasus ini terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Masalah jembatan Königsberg ini adalah "apakah mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali lagi ke tempat semula?" Sebagian penduduk kota sepakat bahwa memang tidak mungkin melalui setiap jembatan itu hanya sekali dan kembali lagi ke tempat asal mula keberangkatan, tetapi mereka tidak dapat menjelaskan mengapa demikian jawabannya, kecuali dengan cara coba-coba.

Tahun 1736, seorang matematikawan Swiss, L. Euler, adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu dengan pembuktian yang sederhana. Euler memodelkan masalah ini ke dalam graph. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakannya sebagai titik (*verteks*) dan jembatan yang menghubungkan daratan disebut garis (*edge*). Setiap titik diberi label huruf A, B, C, dan D. Graf yang dibuat oleh Euler diperlihatkan pada Gambar 6.1. Jawaban yang dikemukakan oleh Euler adalah "orang tidak mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat asal keberangkatan jika derajat setiap simpul tidak seluruhnya genap. Yang dimaksud dengan derajat adalah banyaknya garis yang bersisian dengan noktah. Sebagai contoh, simpul C memiliki derajat 3 karena ada tiga buah garis yang bersisian dengannya, simpul B dan D juga berderajat dua, sedangkan simpul A berderajat 5. Karena tidak semua simpul berderajat genap, maka tidak mungkin dilakukan perjalananan berupa sirkuit (yang dinamakan dengan sirkuit Euler) pada graf tersebut. Kelak kita akan membahas lebih mendalam mengenai derajat dan sirkuit pada upabab selanjutnya.

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.



Gambar 6.1 Masalah Jembatan Königsberg

Dalam Al-qur’an teori graf di singgung dalam suatu konsep, dimana ada titik-titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi. Dikatakan dalam Alquran surat Saba’ ayat 18 dan surat Ar-Ra’d ayat 21.

“Dan Kami jadikan antara mereka dan antara negeri-negeri yang Kami limpahkan berkat kepadanya, beberapa negeri yang nampak dan Kami tetapkan padanya perjalanan (dekat). Berjalanlah di dalamnya pada malam dan siang hari dengan aman. (QS. Saba’:18)4

قُرًى” penggalan ayat tersebut berarti beberapa negeri. Dalam penggalan ayat ini berkaitan dengan graf dengan adanya kata “beberapa negeri” yang dapat diartikan terdapat beberapa negeri yang saling menghubungkan antara satu dengan yang lainnya. Misalnya adanya perjalanan antar negeri atau adanya hubungan perdagangan antar negeri. Ayat di atas menguraikan anugerah-Nya menyangkut kemudahan hubungan antara satu lokasi dengan lokasi yang lain dan menunjukkan lancarnya transportasi. Ayat-ayat di atas juga menyatakan Kami jadikan antara keduanya beberapa negeri yang nampak lagi berdekatan dan Kami tetapkan padanya yakni antara negeri-negeri itu jarak-jarak perjalanan yang dekat sehingga memudahkan mereka singgah dimana dan kapan saja, tanpa kesepian atau cemas tentang adanya rintangan dan bahaya.5 Pada penggalan QS. Saba' ayat 18 menjelaskan bahwa jarak antara negeri berbeda-beda ada yang berdekatan dan ada pula yang ditetapkan jarak-jarak perjalanan (berjauhan). Sehingga dapat dipahami bahwa jarak diantara negeri tersebut berbeda-beda. Pada matematika diskrit jarak antara beberapa kota dapat digambarkan sebagai sebuah graf.6.1. Surat Ar-Rad Ayat 21:

"Dan orang-orang yang menghubungkan apa-apa yang Allah perintahkan supaya dihubungkan, dan mereka takut kepada Tuhannya dan takut kepada hisab yang buruk". (QS. Ar Rad:21)7.

Penggalan ayat yang berarti menghubungkan. Dalam penggalan ayat ini berkaitan tentang graph dimana adanya kata "menghubungkan" yang berarti ada elemen yang saling terhubung. Misalnya sebuah jembatan yang menghubungkan antara dua kota. Di dalam Ayat alquran tersebut, terlihat jelas bahwa alquran telah menjelaskan tentang graph jauh sebelum. Dalam alquran elemen-elemen pada graph yaitu verteks (titik) dan edges (sisi) meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin. Dalam ayat tersebut jelas dikatakan bahwa Allah perintahkan manusia supaya menghubungkan apa yang dihubungkan, dalam konsep graf, titik-titik yang dihubungkan oleh sisi melambangkan hubungan erat silaturahmi yang ada pada kehidupan manusia, sehingga graph memberikan bentuk kecil suatu kondisi dalam kehidupan manusia.

6.1. Definisi Graph

Definisi 6.1. Graph G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (vertices atau node) = { v1 , v2 , ... , vn } dan E = himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul ={e1 , e2 , ... , en } atau dapat ditulis singkat notasi G = (V, E).

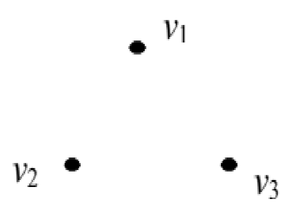
Definisi diatas menyatakan bahwa suatu grap boleh saja tidak memiliki edge (edge (E) nya adalah himpunan kosong) tetapi tetap harus memiliki verteks (verteks (V) tidak boleh himpunan kosong). Dikenal adanya graph trivial (graph yang hanya memiliki satu verteks tetapi tidak memiliki edge).

6.2. Jenis-Jenis Graph

Berdasarkan definisi dari graph, himpunan sisi (*E*) bisa saja berupa himpunan kosong. Jika graph tersebut tidak memiliki himpunan sisi yang merupakan himpunan kosong maka graph tersebut dinamakan dengan **graph kosong** (*null graph* atau *empty graph*).

Contoh :

Graph kosong yang memiliki 3 simpul (Graph *N*3)

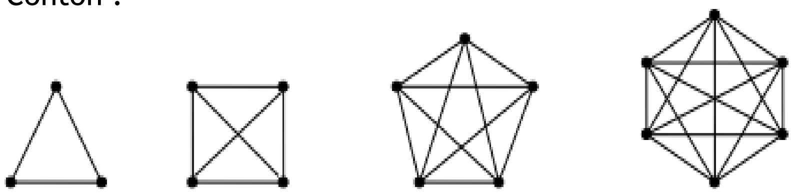


Gambar 6.2. Graph Kosong

Graph sederhana yang setiap simpulnya terhubung (oleh satu sisi) ke semua simpul lainnya disebut dengan **graph**

lengkap (complete Graph). Dengan kata lain, setiap simpulnya bertetangga. Graph lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan Kn. Jumlah sisi pada sebuah graph lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah n(n – 1)/2 sisi.

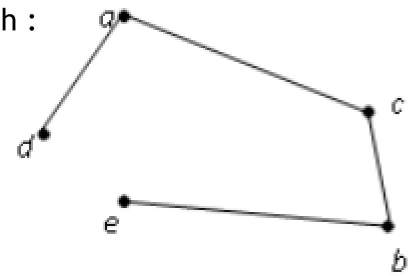
Contoh :



Gambar 6.3. Graph Lengkap Kn, 3 ≤ n ≤ 6

Suatu graph sederhana dikatakan sebagai G**raph bipartisi** jika himpunan simpul pada graph tersebut dapat dipisah menjadi dua himpunan tak kosong yang disjoint, misalkan V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul pada V_1 dan sebuah simpul pada V_2. Dengan demikian, pada graph bipartisi tidak ada sisi yang menghubungkan dua simpul pada V_1 atau V_2. Graph bipartisi tersebut dinotasikan oleh G (V_1, V_2).

Contoh :



Gambar 6.4. Graph Bipartisi

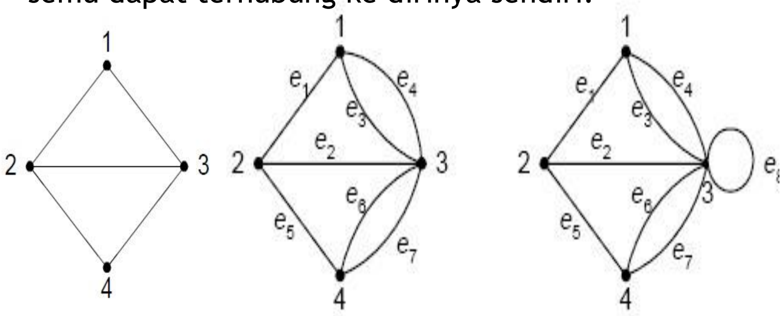
Graph diatas dapat direpresentasikan menjadi graph bipartisi G (V_1, V_2), dimana V_1= {a, b} dan V_2 = {c, d, e}

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graph sederhana (simple graph). Graph yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graph sederhana. G1 pada Gambar 6.5 (a) adalah contoh graf sederhana yang merepresentasikan

jaringan komputer. Simpul menyatakan komputer, sedangkan sisi menyatakan saluran telepon untuk berkomunikasi. Saluran telepon dapat beroperasi pada dua arah.

2. Graph tak-sederhana (unsimple-graph). Graph yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graph tak-sederhana (unsimple graph). Ada dua macam graph tak-sederhana, yaitu graf ganda (multigraph) dan graph semu (pseudograph). Graph ganda adalah graph yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda yang menghubungkan sepasang simpul bisa lebih dari dua buah. G2 pada Gambar 6.5 (b) adalah graph-ganda. Sisi ganda pada G2 dapat diandaikan sebagai saluran telepon tambahan apabila beban komunikasi data antar komputer sangat padat. Graph semu adalah graph yang mengandung gelang. G3 adalah graph semu (termasuk bila memiliki sisi ganda sekalipun). Sisi gelang pada G3 dapat dianggap sebagai saluran telelpon tambahan yang menghubungkan komputer dengan dirinya sendiri (mungkin untuk tujuan diagnostik). Graph semu lebih umum dari pada graph ganda, karena sisi pada graph semu dapat terhubung ke dirinya sendiri.

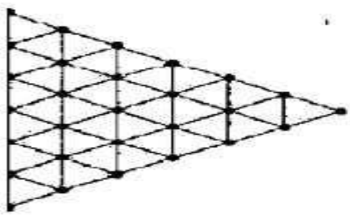


Gambar 6.5 (a) Graph Sederhana Gambar 6.5 (b)Graph Tak Sederhana

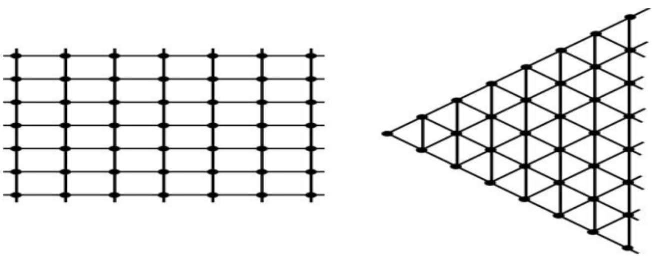
Jumlah simpul pada graph kita sebut sebagai kardinalitas graph, dan dinyatakan dengan $n = |V|$, dan jumlah sisi kita nyatakan dengan $m = |E|$. Pada contoh di atas, G1 mempunyai n = 4, dan m = 4, sedangkan G2 mempunyai n = 3 dan m = 4.

Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graph, maka secara umum graph dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graph berhingga (limited graph)
   Grap berhingga adalah graph yang jumlah simpulnya, n, berhingga. Dua buah graph pada Gambar 6.6 adalah contoh graph yang berhingga.
2. Graf tak-berhingga (unlimited graph) Graf yang jumlah simpulnya, n, tidak berhingga banyaknya disebut graf tak-berhingga. Dua buah graf pada Gambar 6.7 adalah contoh graf yang tidak berhingga.



Gambar 6.6 Graph Berhingga

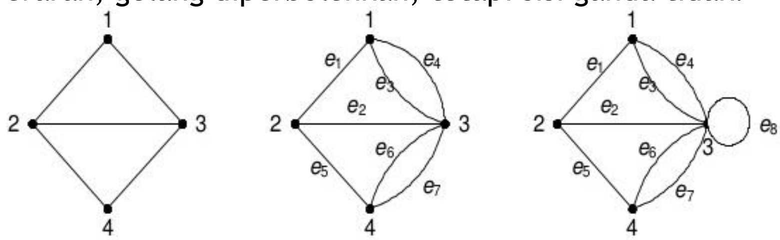


Gambar 6.7 Graph tak Berhingga

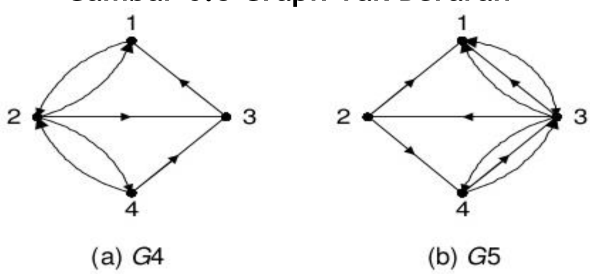
Berdasarkan arah pada sisi, maka graph terbagi atas:

1. Graph tak-berarah (undirected graph)
   Graph yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graph tak-berarah. Pada graph ini, urutan pasangan verteks yang dihubungkan oleh edge tidak diperhatikan, dimana (vj, vk) = (vk, vj) adalah edge yang sama. Tiga buah graph pada Gambar 6.8 adalah graph tak-berarah.
2. Graph berarah (directed graph atau digraph)

Graph yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graph berarah. Kita lebih suka menyebut sisi berarah dengan sebutan busur (arc). Pada graph berarah, (vj, vk) dan (vk, vj) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain (vj, vk) ≠ (vk, vj). Untuk busur (vj, vk), simpul vj dinamakan simpul asal (initial vertex) dan simpul vk dinamakan simpul terminal (terminal vertex). G4 pada Gambar 6.9 (a) adalah contoh graph berarah. Pada G4 diandaikan saluran telepon tidak dapat beroperasi pada dua arah. Saluran hanya beroperasi pada arah yang ditunjukkan oleh anak panah. Jadi, sebagai contoh, saluran telepon (1, 2) tidak sama dengan saluran telepon (2, 1). berarah sering dipakai untuk menggambarkan aliran proses, peta lalu lintas suatu kota (jalan searah atau dua arah), dan sebagainya. Pada graph berarah, gelang diperbolehkan, tetapi sisi ganda tidak.



Gambar 6.8 Graph Tak Berarah



Gambar 6.9 (a) Graph berarah **Gambar 6.9 (b) Graph Berarah Ganda**

6.3. Terminologi Dasar

a. Dua buah verteks pada graph tak berarah G dikatakan bertetangga (berajasen) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah edge. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah edge pada graph G.

b. Untuk sembarang edge e = (u, v), edge e dikatakan bersisian (berinsiden) dengan verteks u dan v.
c. Verteks terpencil (isolated vertex) ialah verteks yang tidak mempunyai edge yang bersisian dengannya. Atau, dapat juga dinyatakan bahwa verteks terpencil adalah verteks yang tidak satupun bertetangga dengan verteks lainnya.

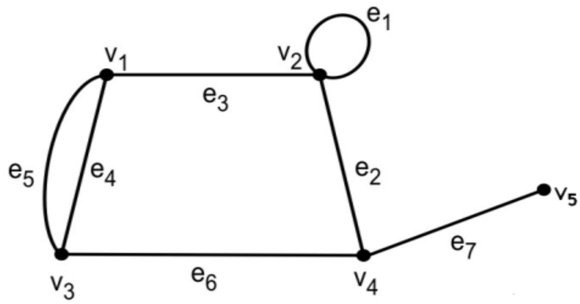
6.4. Representasi Graph

Graph dapat direpresentasikan dengan beberapa cara, yaitu:

1. Himpunan pasangan berurutan
2. Diagram
3. Matriks adjasensi
4. Matriks insidensi
5. Daftar ketetanggaan.

6.5. Insident, Adjacent dan Degree

Jika sebuah verteks v1 merupakan titik ujung dari suatu edge ej, maka v1 dan ej disebut saling berinsiden atau verteks v1 insiden dengan edge ej. Sebagai contoh, pada Gambar 6.10 di bawah ini. Edges e4, e5 dan e3 adalah edges yang insiden dengan v1. Edges e1, e2dan e3 insiden dengan v2. Edges e4, e5 dan e5 insiden dengan v3. Edges e2, e7 dan e6 insiden dengan v4. Jika dua verteks insiden dengan satu edge yang sama maka kedua verteks tersebut kitakatakan adjacent. Contoh: v1 dan v2 sama sama insiden dengan e3. Maka dikatakan v1 dan v2 saling adjacen.



Gambar 6.10. Graph Dengan 5 Verteks dan 7 Edges

Banyaknya edges yang insiden dngan suatu verteks disebut degree (derajat). Untuk loop (verteks dihubungkan ke dirinya sendiri oleh suatu edge) maka degree nya dihitung dua kali. Dinotasikan dengan d(vi). Contoh pada gambar diatas d (v1) = d (v4) = 3, d (v2) = 4, dan d (v5) = 1. Derajat suatu verteks sering juga disebut valensi dari titik tersebut. Graph G dengan e edges dan n verteks v1, v2, ..., vn dimana setiap edge menyumbangkan dua derajat, maka jumlah derajat dari semua verteks dalam G sama dengan dua kali jumlah edge dalam G.

Dapat dirumuskan:

$$\sum d(vi) = 2e \qquad \text{.....................................(1)}$$

Pada gambar di atas

$$d(v1) + d(v2) + d(v3) + d(v4) + d(v5) = 2e$$

$$3 + 4 + 3 + 3 + 1 = 2(7)$$

$$14 = 14$$

Berdasarkan persamaan 1 maka didapatkan:

Teorema:

Banyaknya verteks berderajat ganjil dalam sebuah graph selalu genap

Bukti:

Jika verteks berderajat ganjil dan genap kita pandang secara terpisah, maka jumlah ruas kiri persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai jumlah dari dua bilangan. Pertama diperoleh dari verteks berderajat ganjil, dan kedua dari vertrks berderajat genap

$$\sum_{i=1}^{n} d(vi) = \sum d(vo) + \sum d(ve) \qquad \text{..........................(2)}$$

Dimana:

$\sum d(vo)$ = jumlah derajat ganjil

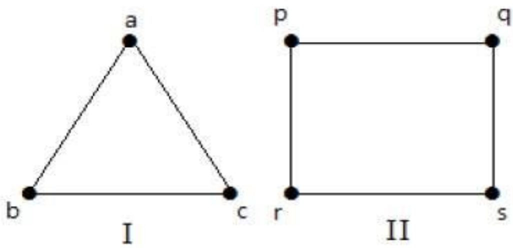
$\sum d(ve)$ = jumlah derajat genap

Karena ruas kiri pada persamaan kedua adalah genap dan suku pertama ruas kanan adalah genap maka dipastikan suku kedua ruas kanan adalah juga genap.

$\sum d(ve)$ = bilangan genap ....(3)

Karena dalam persamaan 3 tiap $d(ve)$ adalah bilangan ganjil, maka jumlah seluruhnya pastilah genap. (terbukti)

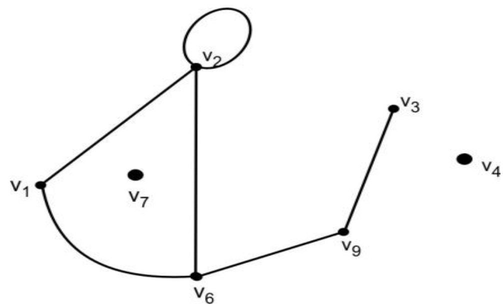
Jika terdapat sebuah graph dimana semua verteksnya berderajat sama maka graph tersebut dinamakan graph regular.



Gambar 6.11. Graph Reguler

6.6. Isolated Verteks dan Verteks Ujung

Sebuah verteks yang tidak bersisian dengan suatu edge manapun disebut sebagai isolated verteks (verteks terasing). Verteks ini memiliki degree sama dengan nol. Verteks yang memiliki derajat satu disebutsebagai verteks ujung. Bisa dilihat pada graph berikut:

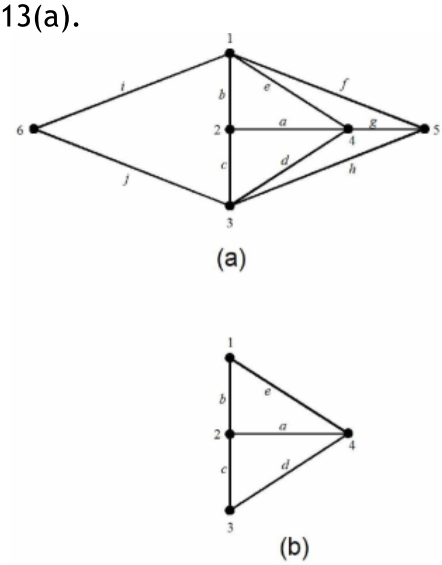


Gambar 6.12. Graph yang memuat isolated vertex, edge seri dan titik anting

V4 dan v7 disebut sebagai isolated verteks atau verteks terasing.

6.6.1. Subgraph

Sebuah subgraph dari graph G = (V(G), E(G)) adalah sebuah graph H = (V(H), E(H)) sedemikian hingga $V(H) \in V(G)$ dan $E(H) \in E(G)$. Atau dengan kata lain sebuah graph G disebut subgraph dari graph G jika semua simpul dan semua sisi dalam G ada dalam g dan setiap sisi dari g mempunyai simpul akhir yang sama dengan G. Sebagai contoh graph dalam gambar 6.13(b) adalah salah satu subgraph dari graph-graph dalam gambar 6.13(a).



Gambar 6.13. (a) Graph, (b) Subgraph

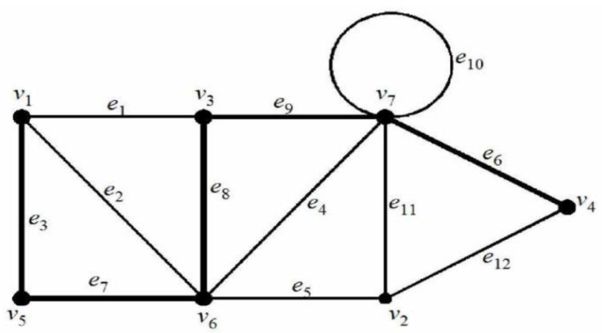
Konsep dasar subgraph mempunyai kesamaan dengan himpunan dari teori himpunan. Sebuah subgraph dapat menjadi bagian dari yang lain. Lambang dari $g \in G$ dimaksudkan dalam arti g adalah sebuah subgraph dari G. Dengan penjelasan diatas maka dapat dibuat hal-hal sebagai berikut :

1. Setiap graph adalah subgraph dari dirinya sendiri.
2. Sebuah subgraph dari sebuah subgraph G adalah juga subgraph dari G.
3. Sebuah simpul tunggal dalam sebuah simpul G adalah sebuah subgraph dari G.
4. Sebuah sisi yang tunggal bersam dengan simpul akhirnya adalah sebuah subgraph dari G.

6.6.2. Walk, Path, Sirkit/Cycle

Sebuah *walk* didefinisikan sebagai barisan alternatif berhingga dari simpul-simpul dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan simpul sedemikian hingga tiap-tiap sisi yang bersisian (*edge incident*) dengan simpul yang terdahulu dan dengan simpul yang berikutnya. Simpul yang merupakan simpul awal dan simpul akhir disebut dengan terminal simpul. Pada Gambar 6.14 dapat diplih sebuah *walk* yaitu v_1, e_3, v_5, e_7, v_6, e_8, v_3, e_9, v_7, e_6, dan v_4.

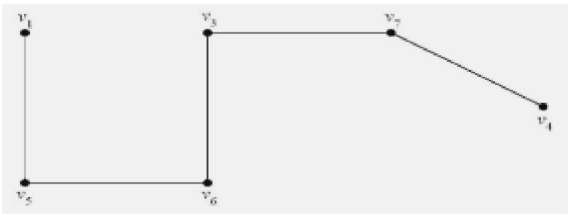
Dapat juga sebuah walk dimulai dan diakhiri oleh simpul yang sama, *walk* yang demikian disebut dengan *close walk*. Sebaliknya sebuah *walk* yang tidak *close* disebut *open walk*



Gambar 6.14. Graph dengan walk yang bergaris tebal

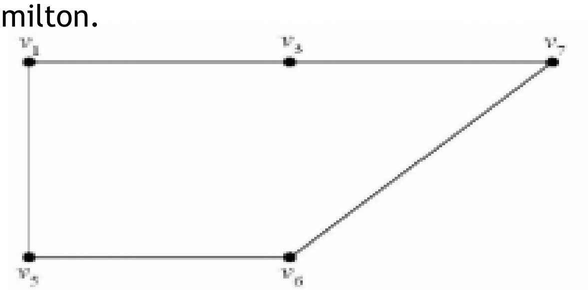
Sebuah *open walk* yang didalamnya tidak ada simpul yang muncul lebih dari sekali disebut dengan sebuah *path* (*path* sederhana atau *path* dasar).

Pada Gambar 6.14 graph dengan walk dapat diambil sebuah *path* yaitu v_1, v_5, v_6, v_3, v_7, v_4 sebagai contoh. Tetapi v_1, v_5, v_6, v_7, v_3, v_1 bukan merupakan *path* tetapi sudah merupakan *cycle*. Jumlah sisi-sisi dalam sebuah path disebut dengan *length* dari p*ath*.



Gambar 6.15. *Path*

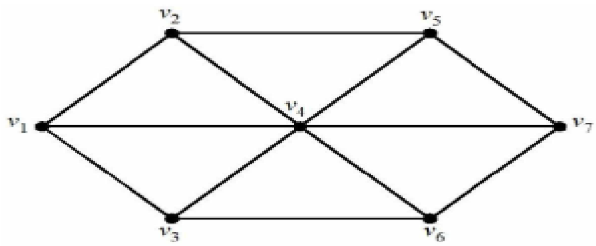
Sebuah *path t*ertutup yang mana dimulai dari simpul awal sampai ke simpul tujuan dan kembali lagi ke simpul awal dikatakan sebagai sirkuit/cycle. Banyaknya sisi dalam suatu *cycly* disebut panjang *cycly*. *Cycle* dengan panjang k disebut cycle-k, disimbolkan dengan C_k. Sebuah *cycle* di graph G yang memuat semua sisi G disebut *Cycle Euler*, dan graph yang memuat *cycle euler* disebut graph euler. Kemudian sebuah *cycle* di graph G yang memuat semua titik pada G disebut *Cycle Hamilton*, dan graph yang memuat *cycle hamilton* disebut graph hamilton.



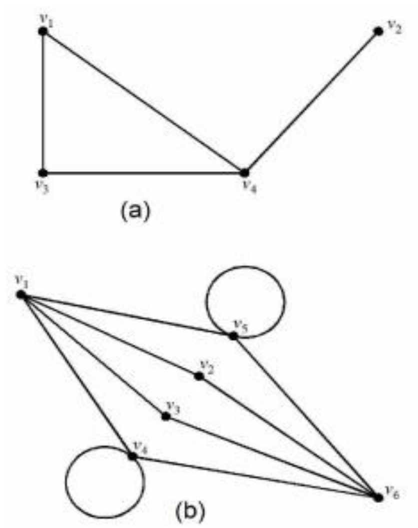
Gambar 6.16. Sirkuit

6.6.3. Graph Terhubung dan Komponen Graph

Sebuah graph dikatakan terhubung (*connected*) jika ada sedikitnya satu *path* antara setiap pasangan simpul dalam graph. Sebaliknya graph adalah tidak terhubung (*disconnected*) jika tidak ada *path* antara setiap pasangan simpul dalam graph. Sebagai contoh masing-masing untuk *connected graph* dan *disconnected graph* dapat dilihat pada Gambar di bawah



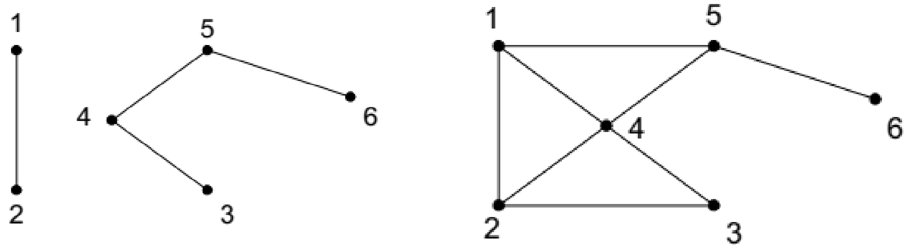
Gambar 6.17. Graph yang berisi *connected graph*



Gambar 6.18 (a), (b). *Disconnected graph*

Sebuah komponen graph G adalah sebuah bagian graph t erhubung maksimal (titik dan sisi) dari G. Graph H dikatakan b agian graph terhubung maksimal dari graph G jika tidak ada g raph bagian lain dari G yang terhubung dan memuat H. Jadi s

etiap graph terhubung memiliki tepat satu komponen sedangk an graph tak terhubung memiliki paling sedikit dua komponen
Contoh :

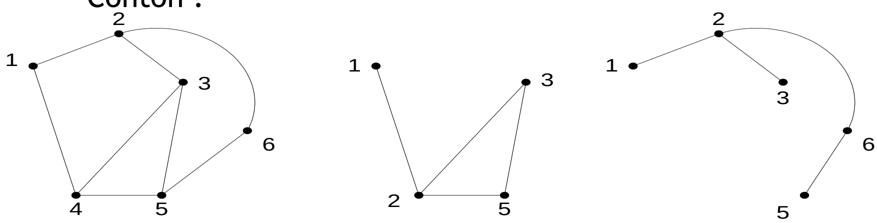


Gambar 6.19 (a). Graph dua komponen; Gambar 6.19 (b). Graph satu komponen

6.6.4. Komplemen Graph

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graph. $G1 = (V_1, E_1)$ adalah subgraph dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. **Komplemen** dari subagraph G_1 terhadap graph G adalah graph $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

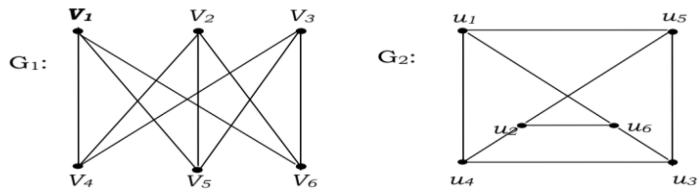
Contoh :



(a). Graph G (b). Subgraph G (c). Komplemen subgraph
Gambar 6.20 (a), (b), (c) Contoh Komplemen Graph

6.6.5. Isomorfisme pada Graph

Dua graf $(V(G_1), E(G_1))$ dan $(V(G_2), E(G_2))$. Suatu pemetaan satu-satu dari $V(G_1)$ ke dalam $V(G_2)$ dikatakan *isomorphisme* dari $(V(G_1), E(G_1))$ kedalam $(V(G_2), E(G_2))$, jika untuk masing-masing pasangan (vi, vj) $V(G1)$, (vi, vj) $E(G1)$, maka Dua graf G1 dan G2 dikatakan *isomorphik*, jika ada *isomorphisme* antara G1 dan G2. Contoh graf *isomorphik* diberikan pada Gambar 6.21 (a) dan (b)



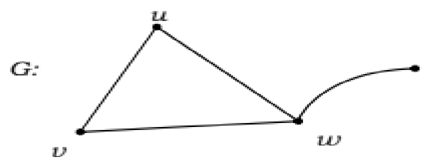
Gambar 6.21 (a), (b). Contoh Graph Isomorphik

Dari Gambar 6.21, G1 dan G2 dikatakan *isomorphik* karena terdapat pemetaan satusatu antara titik-titik graph G_1 dan titik-titik graph G_2, sehingga setiap dua titik yang bertetangga di G_2 prapeta kedua titik tersebut juga bertetangga. Misalkan diberikan dua graf $G1 = (V(G_1), E(G_1))$ dan $G2 = (V(G_2), E(G_2))$. dengan $V(G_1) = \{v1, v2, ..., v6\}$ dan $V(G2) = \{u1, u2, ..., u6\}$. Definisikan pemetaan θ sebagai berikut: $\theta(v_1) = u_1, \theta(v_2) = u_2$, $\theta(v_3) = u_3$, $\theta(v_4) = u_4, \theta(v_5) = u_5$, dan $\theta(v_6) = u_6$. Dapat diperiksa bahwa $\theta(v_1) = u_1$: $\theta(v_4) = u_4$ dan bertetangga, juga v_1 dan v_4 bertetangga; $\theta(v_1) = u_1$ dan $\theta(v_5) = u_5$ bertetangga, juga v_1 dan v_5 bertetangga; $\theta(v_1) = u_1$ dan $\theta(v_6) = u_6$ bertetangga, juga v_1 dan v_6 bertetangga. Demikian pula dengan $\theta(v_2) = u_2$ bertetangga dengan $\theta(v_4) = u_4$, $\theta(v_5) = u_5$, dan $\theta(v_6) = u_6$. Dapat diperiksa bahwa v_2 juga bertetangga dengan v_4, v_5, dan v_6. Hal yang sama terjadi pada titik v_3, Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa setiap pasangan $vi, vj \in V(G_1)$, dengan $(vi, vj) \in E(G1)$ mengakibatkan $(\theta\ (v_i)\ \theta\ (v_j)) \in E(G_2)$. Jadi terdapat isomorfisma antar $G1$ dan $G2$. Dengan kata lain $G1$ *isomorphik* dengan $G2$.

6.6.6. Derajat Titik Graph

Derajat suatu titik vi dalam graf G, dilambangkan "$d(vi)$", adalah banyaknya sisi $x \in E(G)$ yang terkait dengan titik vi.

Contoh. Graf G berikut memiliki $d(u) = 2$, $d(w) = 3$, $d(z) = 1$



Gambar 2.22. Contoh Derajat Titik Graph

Titik suatu graf yang berderajat nol disebut titik terasing dan graf yang hanya terdiri dari satu titik-titik terasing disebut graf trivial. Sedang titik yang derajatnya satu disebut titik terminal atau titik ujung.

Teorema *Untuk sembarang graf G, banyaknya titik yang berderajat ganjil, selalu genap.*

Bukti : Misalkan *Vgenap* dan *Vganjil* masing – masing adalah himpunan himpunan simpul yang berderajat genap dan berderajat ganjil pada *G(V,E)*. Maka persamaan dapat ditulis sebagi berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{Vgenap} d(v_j) + \sum_{Vganjil} d(v_k)$$

Karena $d(v_j)$ untuk setiap $v_j \in V_{\text{genap}}$, maka suku pertama dari ruas kanan persamaan harus bernilai genap. Ruas kiri persamaan juga harus bernilai genap. Nilai genap pada ruas kiri hanya benar bila suku kedua dari ruas kanan juga harus genap. Karena $d(v_k)$ untuk setiap $v_k \in V_{\text{ganjil}}$ maka banyak titik v_k di dalam harus genap agar jumlah derajatnya bernilai genap. Jadi banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap.

BAB VII
POHON

7.1. Pengertian Pohon

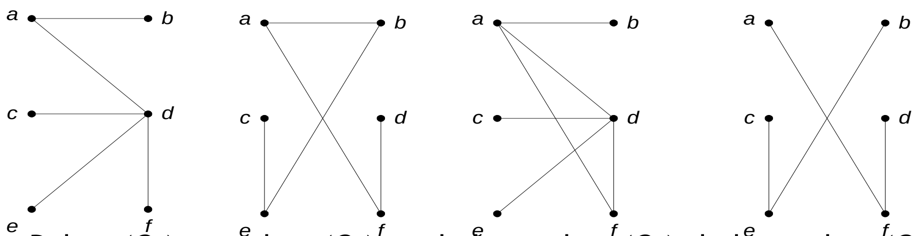
Pohon (Tree) adalah graph terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Karena merupakan graph terhubung maka pada pohon selalu terdapat path atau jalur yang menghubungkan kedua simpul di dalam pohon.

Pohon (*tree*) merupakan salah satu bentuk khusus dari struktur suatu graph. Misalkan A merupakan sebuah himpunan berhingga simpul (*vertex*) pada suatu graph G yang terhubung. Untuk setiap pasangan simpul di A dapat ditentukan suatu lintasan yang menghubungkan pasangan simpul tersebut. Untuk itu perlu diingat kembali bahwa:

- Suatu Graph G disebut terhubung apabila untuk setiap dua simpul dari graph G selalu terdapat jalur yang menghubungkan kedua simpul tersebut.
- Sirkuit atau cycle adalah suatu lintasan tertutup dengan derajat setiap simpul dua.

Suatu graph terhubung yang setiap pasangan simpulnya hanya dapat dihubungkan oleh suatu lintasan tertentu, maka graph tersebut dinamakan pohon (*tree*). Dengan kata lain, pohon (*tree*) merupakan graph tak-berarah yang terhubung dan tidak memiliki sirkuit.

Contoh:



Pohon (G_1)   pohon (G_2)   bukan pohon (G_3)   bukan pohon (G_4)

Gambar 7.1. Contoh Pohon dan Bukan Pohon

Karena defenisi pohon mengacu dari teori graph, maka sebuah pohon dapat mempunyai hanya sebuah simpul tanpa sebuah sisipun. Dengan kata lain, jika G=(V, E) adalah pohon, maka V tidak boleh berupa himpunan kosong, namun E boleh kosong. Pada sebagian literatur, pohon yang dimaksudkan oleh Defenisi pohon di atas sering juga disebut **pohon bebas** (*free tree)* untuk membedakannya dengan **pohon berakar** *(rooted tree)*. Pohon berakar akan dibahas lebih lanjut pada materi berikutnya.

Pohon juga seringkali didefinisikan sebagai graph tak-berarah dengan sifat bahwa hanya terdapat sebuah lintasan unik antara setiap pasangan simpul. Tinjau kembali graph G_1 di atas. Setiap simpul di G_1 terhubung dengan lintasan tunggal. Sebagai contoh, dari b ke f hanya ada satu lintasan, yaitu b, a, d, f. demikian juga untuk setiap pasangan simpul manapun di G_1

Teorema 2.1 *Jika T pohon, maka untuk setiap dua titik u dan v yang berbeda di T terdapat tepat satu lintasan (path) yang menghubungkan kedua titik tersebut.*

Bukti

Misalkan ada lintasan (*path*) berbeda yang menghubungkan titik u dan titik v di T, katakanlah e1 dan e2, dengan e1≠e2. Maka e1 dan e2 akan menghubungkan titik u dan titik v, sehingga ada dua lintasan yang terhubung pada kedua titik tersebut dan membentuk sikel. Berdasarkan definisi, T tidak memiliki sikel. Dengan demikian, haruslah e1=e2. Hal ini bertentangan dengan pemisalan bahwa e1≠e2. Jadi, terbukti bahwa setiap dua titik yang berbeda di T memiliki tepat satu lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Teorema 2.2 *Banyaknya titik dari sebuah pohon T sama dengan banyaknya sisi ditambah satu atau ditulis: Jika T pohon, maka |V (T)| = |E (T)| +1.*

Bukti

Kita buktikan teorema di atas dengan induksi pada |V(T)|. Jika pohon T mempunyai satu titik, jelas banyak sisi T adalah nol. Jadi teorema benar untuk pohon T dengan satu titik. Asumsikan bahwa pernyataan dalam teorema benar untuk pohon dengan k titik, artinya jika pohon T mempunyai paling banyak k titik, maka |V(T)| = |E(T)| + 1. Akan ditunjukkan bahwa jika pohon T mempunyai k + 1 titik maka |V(T)| = |E(T)| + 1. Misalkan T adalah pohon dengan k + 1 titik dan *l* adalah sebuah sisi T. Maka T – *l* memiliki tepat dua komponen T_1 dan T_2, dan masing-masing komponen adalah pohon dengan titik kurang dari k + 1. Sehingga menurut asumsi, |V(Ti)| = |E(Ti)| + 1 ; *i* = 1,2.

Selanjutnya |E(T)| = |E(T1)| + |E(T2)| + 1, sehingga

$$
\begin{aligned}
|V(T)| &= |V(T1)| + |V(T2)| \\
&= |E(T1)| + 1 + |E(T2)| + 1 \\
&= (|E(T1)| + |E(T2)| + 1) + 1 \\
&= |E\ (T)| + 1
\end{aligned}
$$

Dengan demikian teorema terbukti.

Teorema 2.3

a. Bila suatu sisi dihapus dari pohon (dan titiknya tetap), maka diperoleh graph yang tidak terhubung, dan karenanya graph itu bukan pohon.

b. Bila sebuah sisi ditambahkan pada pohon (tanpa menambah titik baru), diperoleh graph yang memiliki sikel, dan karena itu graph tersebut bukan pohon.

Bukti

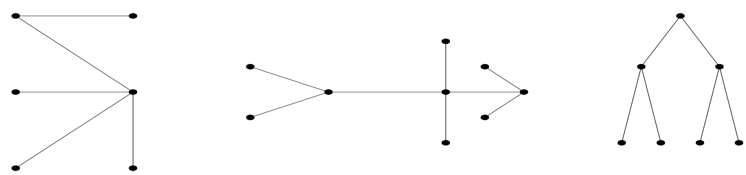
Jika sebuah sisi ditambahkan atau dihapuskan dari pohon, graph baru yang diperoleh tidak lagi merupakan pohon, berdasarkan teorema 2. Karena penghapusan sebuah sisi menjadikan graph itu tidak terhubung, dan penambahan sisi membentuk sikel, maka teorema terbukti.

Hutan (*forest*) merupakan kumpulan pohon yang saling lepas. Dengan kata lain, hutan merupakan graph tidak terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Setiap komponen di dalam graph terhubung tersebut adalah pohon. Dengan kata lain kita dapat katakana (*forest*) adalah

– kumpulan pohon yang saling lepas, atau

– graph tidak terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Setiap komponen di dalam graph terhubung tersebut adalah pohon.

Pada gambar berikut adalah hutan yang terdiri dari 3 buah pohon



Gambar 7.2. Contoh Hutan Yang Terdiri Dari 3 Buah Pohon

Sifat-sifat Pohon Misalkan G = (V, E) adalah graph tak-berarah sederhana dan jumlah simpulnya n. Maka, semua pernyataan di bawah ini adalah ekivalen:

1. *G* adalah pohon.
2. Setiap pasang simpul di dalam *G* terhubung dengan lintasan tunggal.
3. *G* terhubung dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.

4. *G* tidak mengandung sirkuit dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
5. *G* tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graph akan membuat hanya satu sirkuit.

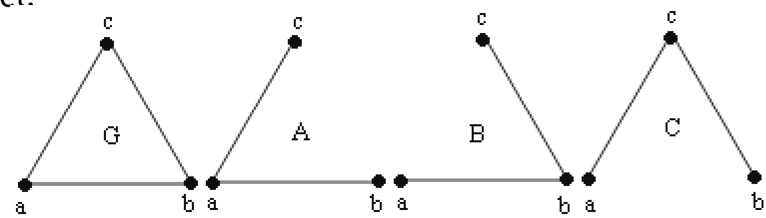
G terhubung dan semua sisinya adalah jembatan. (jembatan adalah sisi yang bila dihapus menyebabkan graph terpecah menjadi dua komponen).

7.2. Pohon Rentang (Spanning Trees)

Definisi Misalkan G adalah sebuah graph. Sebuah pohon di G yang memuat semua titik G disebut *pohon rentang (spanning tree*) dari G.

Contoh :

Misalkan kita mempunyai graph G seperti pada gambar 7.3 di bawah ini. Terdapat 3 pohon rentang dari graph G, yaitu graph A, B, dan C. Tampak jelas bahwa graph A, B, dan C masing-masing memuat semua simpul dari graph G serta mengandung sisi-sisi dari G demikian sehingga tidak terbentuk sikel.



Gambar 7.3. Contoh Graph G

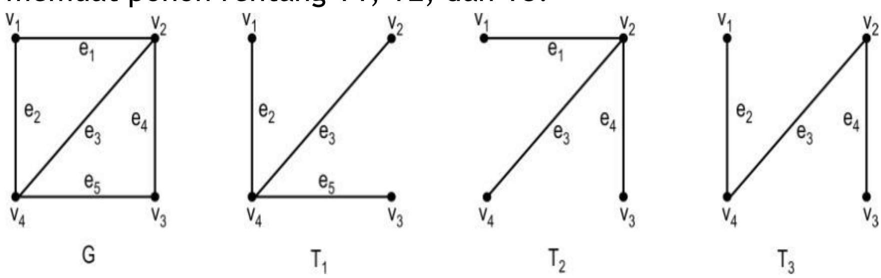
***Teorema 2.4** Graph G terhubung jika dan hanya jika G memuat pohon rentang.*

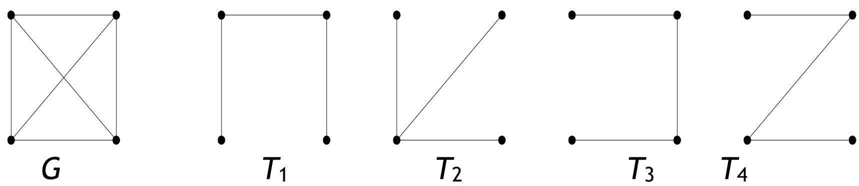
Bukti

Jika graph G memuat pohon rentang, jelas G terhubung. Kita buktikan konvers pernyataan ini dengan induksi pada $|E(G)|$. Jika G terhubung dan $|E(G)| = 0$, maka $G = K1$, sehingga jelas G memuat pohon rentang.

Asumsikan: setiap graph terhubung dengan k + 1 sisi, maka G memuat pohon rentang. Pandang sebuah graph terhubung G dengan k + 1 sisi. Jika G tidak memuat sikel, maka G sebuah pohon rentang. Jika G memuat sikel, dan misalkan e adalah sebuah sisi dari sikel di G, maka graph G1 = G - e terhubung dengan k sisi. Sehingga berdasarkan asumsi, G1 memuat pohon rentang. Sebut T, pohon rentang di G1. Jelas, T adalah juga pohon rentang dari G. Teorema terbukti.

Sebuah graph terhubung mungkin memuat lebih dari satu pohon rentang, seperti terlihat pada Gambar. Graph G memuat pohon rentang T1, T2, dan T3.





Jadi, pohon merentang:

- Pohon merentang dari graf terhubung adalah subgraf merentang yang berupa pohon.
- Pohon merentang diperoleh dengan memutus sirkuit di dalam graf.
- Setiap graf terhubung mempunyai paling sedikit satu buah pohon merentang.
- Graf tak-terhubung dengan *k* komponen mempunyai *k* buah hutan merentang yang disebut hutan merentang (*spanning forest*).

Pohon Rentang Minimum

- Graf terhubung-berbobot mungkin mempunyai lebih dari 1 pohon merentang
- Pohon rentang yang berbobot minimum – dinamakan **pohon merentang minimum** (*minimum spanning tree*)

Dalam kehidupan nyata, salah satu contoh aplikasi s*panning tree* adalah menentukan rangkaian jalan dengan jarak total seminimum mungkin yang menghubungkan semua kota sehingga setiap kota tetap terhubung satu sama lain.

Dalam menentukan suatu *minimum spanning tree* dari suatu graf terhubung, kita dapat menentukannya dengan mengunakan dua cara yaitu algoritma Prim dan algoritma Kruskal.

7.3. Algoritma Graph Pohon

Misalkan T adalah pohon merentang yang sisi-sisinya diambil dari graf G. Algoritma Prim membentuk pohon merentang minimum langkah per langkah. Pada setiap langkah kita mengambil sisi e dari graf G yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul-simpul di dalam T tetapi e tidak membentuk sirkuit di dalam T.

Algoritma Prim :

Langkah 1: ambil sisi dari graf G yang berbobot minimum, masukkan ke dalam T.

Langkah 2: pilih sisi (u, v) yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul di T, tetapi (u, v) tidak membentuk sirkuit di T. Masukkan (u, v) ke dalam T.

Langkah 3: ulangi langkah 2 sebanyak n – 2 kali.

Jumlah langkah seluruhnya di dalam algoritma Prim adalah

a. 1 + (n – 2) = n – 1
b. yaitu sebanyak jumlah sisi di dalam pohon rentang dengan n buah simpul.

Algoritma Kruskal

(Langkah 0: sisi-sisi dari graf sudah diurut menaik berdasarkan bobotnya – dari bobot kecil ke bobot besar).

Langkah 1 : T masih kosong

Langkah 2 : pilih sisi (u, v) dengan bobot minimum yang tidak membentuk sirkuit di T. Tambahkan (u, v) ke dalam T.

Langkah 3 : ulangi langkah 2 sebanyak n – 1 kali

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, M.Pd, *“Matematika Dalam Al-Qur’an”*, UIN Maliki Press, Malang, 2014

Deo Narsingh, “*Graph Theory With Applications to Engineering and Computer Science*”, Prentice-Hall, New Delhi, India, 1989

Departemen Agama RI,”Al-Qur'anku, Lautan Lestari, Jakarta,2013

Jong Jek Siang, “*Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*”, Andi Yogyakarta, 2002

Liu, C. L., *"Elements of Discrete Mathematics"*, New York : McGraw Hill, 1986.

Rinaldi Munir, “*Matematika Diskrit*”, Informatika, Bandung,2003.

Rossen, Kenneth H., *"Discrete Mathematics and It's Applications"*, Edisi Ke-3, New York : McGraw Hill, 1995.

Suryadi H. S., *"Pengantar Struktur Diskrit"*, Jakarta : Universitas Gunadarma, 1994.

Wibisono Samuel, “*Matematika Diskrit*”, Graha Ilmu, Yogyakarta, 2004.

Yunus, M, “*Logika Suatu Pengantar*”, Graha Ilmu, Yogyakarta, 2007

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Dr. Rina Filia Sari, M.Si, biasa dipanggil Rina. Lahir di Bukittinggi 1 Maret 1977. Anak Pertama dari 4 bersaudara dari pasangan Bapak Masri dan Ibunda Fildaiti. Penulis saatini bekerjasebagai dosen di UIN Sumatera Utara Medan.

Pada tahun 1995 – 2000 kuliah di FMIPA USU Medan. Tahun 2007 melanjutkan studi di Sekolah Pascasarjana Universitas Sumatera Utara Medan pada jurusan matematika dan selesai pada tahun 2009. Tahun 2011 melanjutkan studi S3 di Sekolah Pascasarjana Universitas Sumatera Utara Medan pada jurusan matematika dan selesai pada tahun 2016.

Pada Tahun 2010-2012 menjadi ketua Laboratorium Program Studi Pendidikan Matematika Faukltas Tarbiyah IAIN Sumatera Utara. Tahun 2015-2016 menjabat sebagai Ketua Program Studi Matematika di Fakultas SAins dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan. Tahun 2016-2020 menjadi Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kelembagaan di Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan.

Aktif dalam oganisasi profesi, penullis juga merupakan Sekretaris Umum IndoMS wilayah SUMUT-NAD periode 2018-2020. Wakil Sekretaris I IndoMS wilayah SUMUT-NAD periode 2018-2020