



PEMODELAN MATEMATIKA

Rima Aprilia, M.Si

Dr. Dedy Juliandri Panjaitan, S.Pd., M.Si.

PEMODELAN MATEMATIKA

Penulis:

Rima Aprilia, M.si.

Dr. Dedy Juliandri Panjaitan, S.Pd., M.Si.

Penerbit LPPM UMNAW

Jl. Garu II No. 2, Medan

081378112811

Email : penerbit.lppmum naw@gmail.com



PEMODELAN MATEMATIKA

Rima Aprilia, M.si.
Dr. Dedy Juliandri Panjaitan, S.Pd., M.Si.

Copyright@2022
Desain Sampul
Agus Al Rozi

Editor
Dr. Andy Sapta, S.Pd., M.Pd., M.Si.

Penata Letak
Dikki Miswanda

Hak cipta dilindungi oleh undang-undang
Ketentuan Pidana Pasal 112-119
Undang-Undang No. 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta.

Diterbitkan dan dicetak pertama kali oleh
Penerbit LPPM UMNAW
Jl. Garu II No. 2, Medan
081378112811
Email : penerbit.lppmumnaw@gmail.com

Anggota IKAPI
No.069/Anggota Luar Biasa/SUT/2022

ISBN: 978-623-943-109-9
(Vii + 112 hlm); 14,8 x 21 cm

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah segala puji hanya milik Allah Tuhan sekalian alam. Atas berkat rahmat dan karuniaNya, saya dapat menyelesaikan penulisan buku ini dengan judul “*PEMODELAN MATEMATIKA*”. Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada Muhammad SAW beserta kerabat, sahabat, para pengikutnya sampai akhir zaman, adalah sosok yang telah membawa manusia dan seisi alam dari kegelapan ke cahaya sehingga kita menjadi manusia beriman, berilmu, dan tetap beramal shaleh agar menjadi manusia yang berakhlak mulia.

Dalam kesempatan ini, penulis banyak menerima bantuan dari berbagai pihak dalam proses penyusunan buku ini. Maka penulis mengucapkan terimakasih yang sebanyak-banyaknya kepada seluruh pihak yang telah membantu yang tak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah Swt senantiasa membalas kebaikan atas apa yang telah diberikan kepada penulis.

Dalam penulisan buku ini, saya sangat menyadari bahwa masih banyak kekurangan yang perlu perbaikan di sana sini, sumbangan pemikiran yang membangun sangat penulis harapkan dari rekan-rekan sejawat maupun dari para pengguna buku ini. Akhir kata penulis ucapkan terima kasih.

Medan, November 2022

Rima Aprilia, M.Si

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR TABEL	v
DAFTAR GAMBAR	vi
BAB I : PENDAHULUAN.....	1
1.1 Pemodelan Matematika.....	1
1.2 Fenomena.....	2
BAB II PEMODELAN EKOLOGI DAN BIOLOGI	
SEL.....	5
2.1 Ekologi	5
a. Pengertian Ekologi	5
b. Prinsip-Prinsip Ekologi	6
c. Faktor Biotik.....	7
d. Faktor Abiotik	8
e. Tingkatan Organisasi Makhluk Hidup	10
f. Interaksi Antar Komponen Ekologi	12
2.2 Pemodelan Matematika	13
2.3 Epidemi.....	15
a. Pengertian Epidemi.....	15
b. Ilustrasi Epidemi (H5NI).....	15
2.4 Pandemi	22
a. Pengertian Pandemi	22
b. Ilustrasi Pandemi Covid-19	22
2.5 Biologi Sel	28
a. Sejarah Perkembangan Teori Sel.....	28

b. Virus	32
c. Siklus Replikasi	33
d. Efek pada Sel Inang.....	38
BAB III : MODEL EPIDEMIC SEIR	40
3.1 Model SEIR	40
3.2 Kondisi Epidemi	41
3.3 Model SEIR dengan Vital Respond	42
3.4 Persamaan Diferensial & Parameter.....	42
3.5 Kestimbangan Pertama (1-v, 0,0)	43
3.6 Titik Kestimbangan Kedua	44
3.7 Kestimbangan & Stabilitas	44
3.8 Bilangan Reproduksi Dasar	45
3.9 Laju Pertumbuhan untuk Pandemic.....	46
3.10 Aplikasi terhadap Penyakit.....	47
BAB IV : MODEL LOGISTIK.....	49
4.1 Model Malthus.....	49
4.2 Model Logistik	54
a. Pengertian Logistik.....	54
b. Manfaat dan Sasaran dari Logistik.....	55
4.3 Perbandingan Model Malthus & Logistik	58
4.4 Model Logistik & Pertumbuhan Populasi	62
a. Model Pertumbuhan Logistik	62
b. Model Pertumbuhan Populasi	68
c. Model Tundaan Waktu Diskrit.....	72
BAB V : MODEL <i>TRAFFIC FLOW</i>	77

5.1 Lalu Lintas.	77
5.2 Kecepatan	78
5.3 Kepadatan Lalu Lintas.....	79
5.4 Flow sama dengan Densitas x Kecepatan	82
5.5 Jumlah Konservasi Kendaraan	83
5.6 Hubungan Kepadatan dengan Kecepatan.....	84
5.7 Aliran Kemacetan (<i>Traffic Flow</i>).....	86
5.8 Model Kendaraan dlm <i>Steady State</i>	87
5.9 Tingkat Kepadatan Kemacetan.....	87
5.10 Interpretasi Kemacetan.....	89
5.11 Aliran Kemacetan Seragam.....	89
5.12 Kemacetan Tidak Seragam.....	91
BAB VI.....	95
PEMODELAN DI BIDANG EKONOMI.....	95
6.1 Teori Pertumbuhan Ekonomi	95
6.2 Teori Pertumbuhan Klasik & Neoklasik	96
a. Teori Pertumbuhan Ekonomi Klasik	96
b. Teori Pertumbuhan Ekonomi Neoklasik ..	97
6.3 Aplikasi Persamaan Diferensial	97
6.4 Aplikasi Per. Diferensial Linear Orde Satu...	99
6.5 Aplikasi Per. Diferensial Linear Orde Dua ...	103
DAFTAR PUSTAKA	108

DAFTAR TABEL

Tabel 1 Deskripsi Variabel Model SEIR	43
Tabel 2.1 Nilai Awal Model Matematika.....	47
Tabel Jumlah Penduduk Sumut.....	52
Tabel Prediksi dengan $P(0)$ dan k.....	53
Tabel Model Malthus jumlah Penduduk.....	60

DAFTAR GAMBAR

Tahapan Pemodelan Matematika	2
Gambar 2.a Hubungan antar manusia.....	13
Gambar 2.b Konsep Model.....	14
Gambar 2.c Diagram Transfer Model SEIR.....	16
Gambar 2.d Diagram Skematik Epidemi.....	17
Gambar 2.e Diagram Transfer Model Influenza...	19
Gambar 2.f Model Epidemi Covid-19.....	24
Gambar 2.g Gambar Diagram Transfer Covid.....	25
Gambar 2.h Model Virus Hepatitis C.....	32
Gambar 2.i Diagram Transmisi Model	39
Gambar 3.1 Diagram Transfer SEIR	40
Gambar 3.2 Diagram Alir Model SEIR.....	42
Gambar 3.3 Model Matematika	46
Gambar 5.6 Hub. Kepadatan & Kecepatan.....	85
Gambar 5.9 Kurva Kemacetan	88

BAB I PENDAHULUAN

A. Pemodelan Matematika

Salah satu teknik yang digunakan untuk menggambarkan suatu sistem yang kompleks ke dalam model matematika disebut pemodelan matematika. (Meksianis Z, 2022) Atau dapat dikatakan pemodelan matematika adalah suatu sistem persamaan yang digunakan untuk menggambarkan suatu permasalahan kompleks yang sedang diamati.

Model matematika mencakup variabel, parameter dan fungsi yang menyatakan relasi antara variabel dan parameter. Secara umum, model matematika tergolong ke dalam beberapa kategori yaitu model fenomena (*phenomenological model*) dan model mekanistik (*mechanistic model*).

Model fenomena (*phenomenological model*) adalah model yang menggambarkan suatu fenomena yang terjadi secara konsisten dengan teori namun tidak dirumuskan secara langsung dari teori tersebut. Contoh model fenomena yaitu model Richards sebagai berikut: [Meksianis Z, 2022]

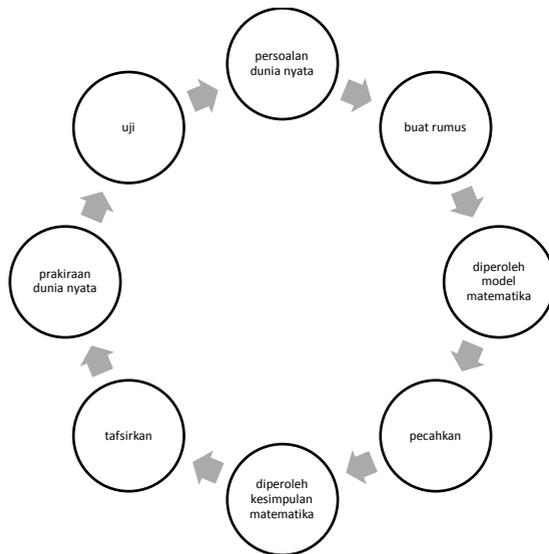
$$\frac{dC}{dt} = rc \left[1 - \left(\frac{C}{R} \right)^a \right] \quad (1.1)$$



Dimana r merupakan laju pertumbuhan dan a merupakan parameter yang mengukur deviasi dari dinamika model pertumbuhan logistik klasik.

Sedangkan model mekanistik dirumuskan sesuai dengan mekanisme permasalahan yang terjadi. Model ini sering dirumuskan sebagai persamaan atau sistem persamaan diferensial.

Tahapan Pemodelan Matematika



B. Fenomena

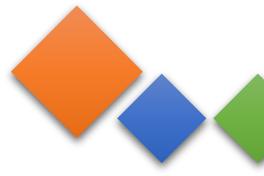
Seiring dengan semakin berkembangnya pembangunan yang semakin pesat dan bertambahnya jumlah penduduk yang terus meningkat, maka akan semakin meningkat pula kebutuhan sarana transportasi. Berbagai faktor kehidupan manusia sangat tergantung



kepada ketersediaan sarana transportasi dimulai dari faktor ekonomi dan pertahanan negara. maka sangat perlu di kembangkan berbagai sarana dan prasarana transportasi untuk menanggulangi peningkatan penggunaan kendaraan yang dapat memicu kemacetan arus lalu lintas.

Suatu arus lalu lintas dapat dikatakan lancar apabila arus lalu lintas dapat melewati jalan tanpa adanya hambatan. masalah lalu lintas yang terjadi di jalan raya disebabkan beberapa faktor yang mempengaruhi efisiensi dan keamanan perjalanan di jalan raya. Adapun faktor yang mempengaruhi adalah faktor fisik jalan, faktor kendaraan, faktor manusia dan faktor lain yang dapat mempengaruhi jalanan.

Dalam buku ini nantinya akan membahas beberapa hal terkait dengan arus lalu lintas (*traffic flow*) antara lain kecepatan dalam traffic flow, kepadatan lalu lintas, flow sama dengan densitas dikalikan dengan kecepatan, jumlah konservasi kendaraan, hubungan kepadatan dan kecepatan, aliran kemacetan (*Traffic Flow*), model kendaraan dalam kondisi *Steady State*, tingkat kepadatan



kemacetan, interpretasi kemacetan, aliran kemacetan seragam dan kemacetan tidak seragam.

Selain tentang model *traffic flow*, buku ini juga akan membahas mengenai pemodelan matematika lainnya seperti pemodelan matematika dalam ekologi dan biologi sel, model epidemic SEIR, model logistik, dan pemodelan di bidang pertumbuhan ekonomi.



BAB II

PEMODELAN EKOLOGI DAN BIOLOGI SEL

2.1. Ekologi

A. Pengertian Ekologi

Menurut N.H.T. Siahaan dalam buku Hukum Lingkungan dan Ekologi Pembangunan (2004), ekologi merupakan cabang ilmu pengetahuan yang mencari tahu hubungan organisme atau makhluk hidup dengan lingkungan sekitarnya. Adapun ruang lingkup ekologi meliputi individu atau organisme, populasi, komunitas, ekosistem dan biosfer.

1. Organisme adalah suatu benda hidup atau makhluk hidup.
2. Populasi adalah kumpulan organisme yang sejenis dan hidup di suatu daerah tertentu.
3. Komunitas adalah kumpulan populasi dari berbagai jenis organisme yang berkumpul di suatu daerah tertentu.
4. Ekosistem adalah hubungan timbal balik antara makhluk hidup dengan lingkungan sekitarnya



(baik makhluk hidup ataupun yang tidak hidup), sehingga membentuk sistem ekologi.

Biosfer adalah lapisan bumi di mana ekosistem berada. Kira-kira letak biosfer mencakup 900 meter di atas permukaan bumi, beberapa meter di bawah permukaan tanah dan beberapa ribu meter di bawah permukaan laut.

Ruang lingkup biologi dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Makromolekul --> protoplasma --> sel --> jaringan --> organ tubuh --> sistem organ --> organisme --> populasi --> komunitas --> ekosistem --> biosfer.
--

B. Prinsip-prinsip Ekologi

- a. Mengedepankan prinsip 5 R dalam bertani: Reuse, Reduce, Recycle, Replace, Replant (menggunakan sumberdaya terbarukan dan pemberdayaan sumberdaya local).
- b. Melandasi aktifitas pembangunan secara homeostasis antar komponen lingkungan, hubungan abiotik-biotik-sosial (ecological relationship).
- c. Penegakkan esensi diversifikasi, pemberdayaan masyarakat (jaminan kearifan lokal) dan optimalisasi manfaat jangka panjang (kualitas sumberdaya fisik, hayati tangga dan manusia)
- d. Mengutamakan pemanfaatan sumberdaya yang berdampak pada lingkungan sehat (seluruh sumberdaya) (Trisno, 2020)



C. Faktor Biotik

Faktor biotik merupakan makhluk hidup itu sendiri. Lingkungan biotik suatu makhluk hidup merupakan seluruh makhluk hidup yang ada dalam ekosistem tersebut baik yang berasal dari spesies yang sama maupun berbeda. Komponen-komponen biotik terdiri dari berbagai jenis mikroorganisme, jamur, ganggang, lumut, paku, tumbuhan tingkat tinggi invertebrata, vertebrata dan manusia.

Peran komponen biotik biasa dibagi menjadi tiga kategori utama, yaitu:

1. Produsen bertindak sebagai autotrof. Dimana produsen mampu mengubah energi menjadi senyawa anorganik menjadi senyawa organik dengan cara fotosintesis.
2. Konsumen bertindak sebagai heterotrof. Organisme konsumen adalah organisme yang tidak mampu membuat makanannya sendiri. Dalam memenuhi kebutuhannya, organisme ini bergantung pada organisme lain.



-
3. Detritivor adalah organisme yang mengurai sisa-sisa makanan atau zat organik kompleks zat organik yang lebih sederhana (detritus), yaitu berupa pemakan bangkai.
 4. Dekomposer adalah organisme yang dapat membusukkan dan mengurai zat organik sederhana menjadi zat anorganik penyusunnya.

D. Faktor Abiotik

Faktor abiotik merupakan komponen lingkungan yang meliputi sumber daya tidak hidup berupa kondisi fisik dan kimia dalam ekosistem. Melalui faktor biotik, faktor abiotik dapat membentuk habitat makhluk hidup. Berikut faktor abiotik meliputi suhu, cahaya, air, kelembaban, udara, garam mineral, dan tanah.

a. Suhu

Suhu merupakan derajat energi panas. Suhu sangat diperlukan oleh makhluk hidup dalam melakukan reaksi kimia dalam tubuh, dimana pada setiap reaksi dibutuhkan enzim yang kinerjanya dipengaruhi oleh suhu.

b. Cahaya



Cahaya merupakan salah satu energi yang bersumber dari matahari. Cahaya matahari terdiri atas beberapa jenis panjang gelombang. Tumbuhan membutuhkan panjang gelombang tertentu untuk melakukan fotosintesis.

c. Air

Air adalah komponen kimia yang tersusun atas molekul H_2O yang sangat dibutuhkan oleh makhluk hidup. Selain sebagai habitat, air pun berfungsi sebagai penyusun tubuh makhluk hidup dan reaksi dalam tubuh.

d. Kelembaban

Kelembaban merupakan kandungan uap air yang berada di tanah dan udara. Kelembaban diperlukan makhluk hidup untuk menjaga kondisi tubuh agar tidak cepat kering. Kebutuhan kelembaban udara setiap organisme berbeda satu sama lain.

e. Udara

Udara meliputi nitrogen, oksigen, karbon dioksida, dan sebagainya. Oksigen dibutuhkan makhluk hidup untuk bernafas, sedangkan karbon dioksida



dibutuhkan tumbuhan untuk melakukan fotosintesis.

f. Tanah

Tanah terbentuk dari hasil pelapukan batuan yang disebabkan oleh faktor iklim maupun biologis. Di dalam tanah, terdapat sejumlah garam mineral yang sangat dibutuhkan oleh makhluk hidup untuk bertahan hidup.

g. Garam mineral

Garam mineral yang terdapat di alam adalah fosfat, sulfur, kalsium, dan natrium. Garam-garam mineral tersebut mampu mengubah tingkat keasaman dan salinitas lingkungan sehingga mampu mengubah kondisi makhluk hidup.

E. Tingkatan Organisasi Makhluk Hidup

Pada dasarnya di Indonesia terdapat empat kelompok ekosistem utama, yaitu (a) ekosistem bahari, (b) ekosistem darat alami, (c) ekosistem suksesi, dan (d) ekosistem buatan.



-
- a. Kelompok Ekosistem Bahari Ekosistem bahari dapat dikelompokkan lagi ke dalam ekosistem yang lebih kecil lagi, yaitu: ekosistem laut dalam, pantai pasir dangkal, terumbu karang, pantai batu, dan pantai lumpur.
 - b. Kelompok Ekosistem Darat Alami Pada ekosistem darat alami di Indonesia terdapat tiga bentuk vegetasi utama, yaitu (1) vegetasi pamah (lowland vegetation), (2) vegetasi pegunungan dan (3) vegetasi monsun.
 - c. Kelompok Ekosistem Suksesi Ekosistem suksesi adalah ekosistem yang berkembang setelah terjadi perusakan terhadap ekosistem alami yang terjadi karena peristiwa alami maupun karena kegiatan manusia atau bila ekosistem buatan tidak dirawat lagi dan dibiarkan berkembang sendiri menurut kondisi alam setempat. Ekosistem ini dapat dibedakan menjadi dua kelompok, yaitu (1) ekosistem suksesi primer dan (2) ekosistem suksesi sekunder.
 - d. Kelompok Ekosistem Buatan Di samping ekosistem alam ada ekosistem buatan manusia,



seperti danau, hutan tanaman, dan agroekosistem (sawah tadah hujan, sawah irigasi, sawah surjan, sawah rawa, sawah pasang surut, kebun pekarangan, kolam, dan lain-lain).

F. Interaksi Antar Komponen Ekologi

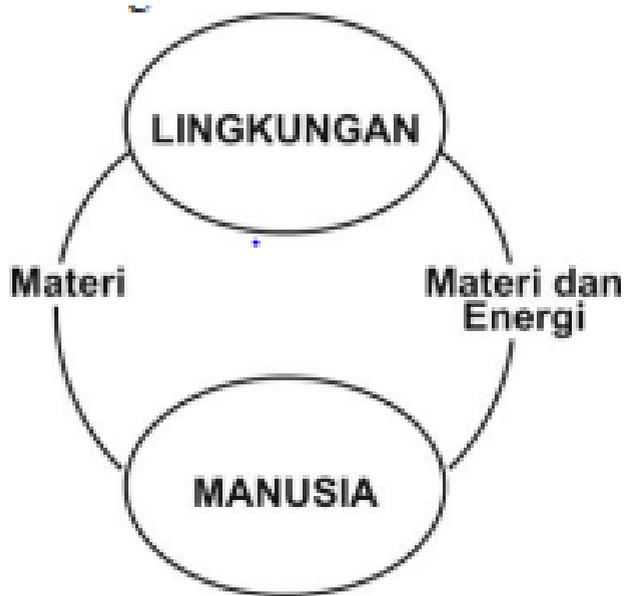
Bila kita memasuki suatu ekosistem, baik ekosistem daratan maupun perairan, akan dijumpai adanya dua macam organisme hidup yang merupakan komponen biotik ekosistem. Kedua macam komponen biotik tersebut adalah :

- a. autotrofik, autotrofik, terdiri atas organisme yang mampu menghasilkan (energi) makanan dari bahan-bahan anorganik dengan proses fotosintesis ataupun kemosintesis. Organisme ini tergolong mampu memenuhi kebutuhan dirinya sendiri. Organisme ini sering disebut produsendan.
- b. heterotrofik, heterotrofik, terdiri atas organisme yang menggunakan, mengubah atau memecah bahan organik kompleks yang telah ada yang dihasilkan oleh komponen autotrofik



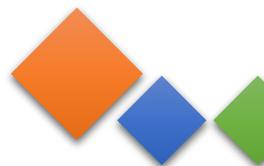
2.2. Pemodelan Matematika

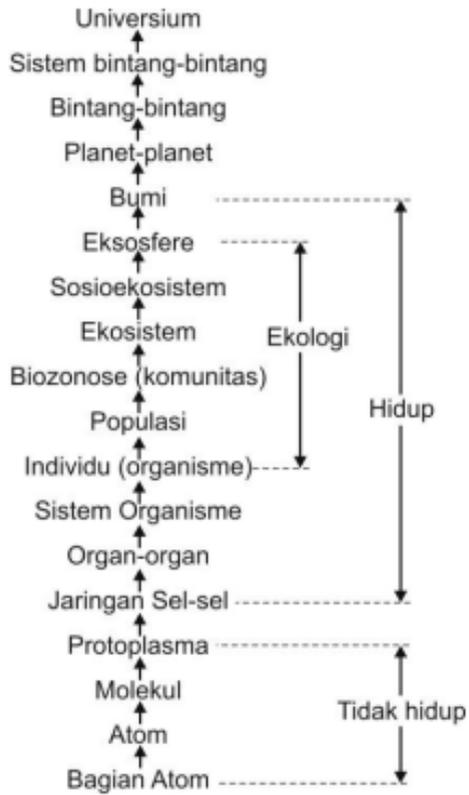
Pemodelan matematika dalam ekologi menggambarkan tentang system graf dalam matematika diskrit.



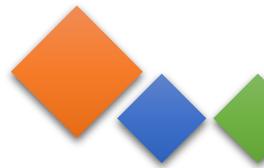
Gambar 2.a

Hubungan antara manusia dan lingkungan dengan aliran materi, energi, dan informasi





Gambar 2.b
Konsep Model tentang batas-batas kesatuan lingkungan yang terdapat di alam



2.3. Epidemi

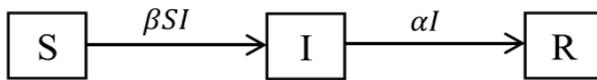
A. Pengertian Epidemi

Epidemi merupakan suatu jenis penyakit menular yang berjangkit dengan cepat pada daerah yang luas dan menimbulkan banyak korban. Peningkatan angka penyakit di atas normal yang biasanya terjadi secara tiba-tiba pada populasi suatu di area geografis tertentu. Contoh penyakit yang pernah menjadi epidemi adalah virus Ebola di Republik Demokratik Kongo (DRC) pada 2019, Avian Influenza/flu burung (H5N1) di Indonesia pada 2012, dan SARS di 2003.

B. Ilustrasi Epidemi Influenza (H5NI)

Dalam (Matematika et al., 2018) model kompartemen dasar untuk menggambarkan transmisi penyakit menular dikandung dalam tiga makalah oleh W.O. Kermack dan A.G. McKendrick pada tahun 1927, 1932 dan 1933. Pada model kompartemen yang dipelajari oleh Kermack dan Mckendrick pada tahun 1927, populasi dibagi menjadi tiga kompartemen: kompartemen yang rentan (Susceptible), diberi label S, di mana semua individu rentan terhadap penyakit; kompartemen yang terinfeksi (Infective), diberi label I, di mana semua individu terinfeksi oleh penyakit dan menular; dan kompartemen yang dibuang atau sembuh (Recovery), diberi label R, di mana semua individu dikeluarkan atau sembuh dari infeksi.





Gambar 2.C Diagram Transfer Untuk Model SIR

Dalam (Matematika et al., 2018) menyatakan bahwa kasus khusus model yang diajukan oleh Kermack dan McKendrick padatahun 1927, yang merupakan titik awal studi model epidemic dengan diagram transfer seperti pada gambar diatas:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I$$

Keterangan:

S : Banyak manusia yang rentan terinfeksi/satuan waktu

I : Banyak manusia terinfeksi/satuan waktu

R : Banyak manusia yang telah sembuh/satuan waktu

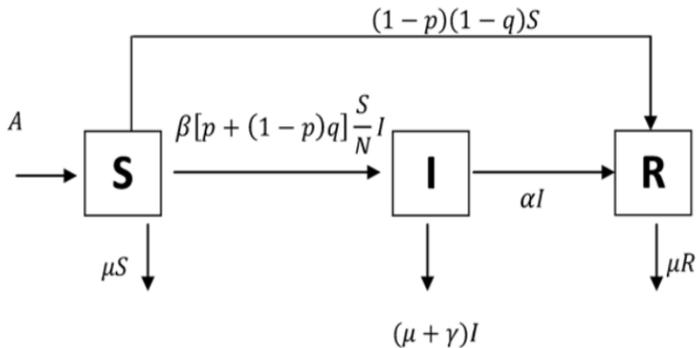
β : Laju kontak manusia rentan dengan manusia terinfeksi penyakit/satuan waktu

α : Laju konstan proses penyembuhan/satuan waktu

Diagram transfer yang disajikan pada gambar sebelumnya bergantung pada asumsi berikut: Populasi individu rata-rata membuat kontak (β) yang cukup untuk



menularkan infeksi dengan N lainnya per satuan waktu, di mana N mewakili jumlah populasi (kejadian massal).



**Gambar 2.d Diagram Skematik Penyebaran Populasi
Epidemi Influenza**

Berdasarkan asumsi dan fakta yang ada yang terbentuk dari diagram diatas dapat ditunjukkan dengan model matematika berikut:

$$\frac{dS}{dt} = A - \beta[p + (1 - p)q] \frac{S}{N} I - (1 - p)(1 - q)S - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta[p + (1 - p)q] \frac{S}{N} I - (\mu + \gamma)I - \alpha I \quad (1)$$

$$\frac{dR}{dt} = (1 - p)(1 - q)S + \alpha I - \mu R$$

$$N = S + I + R$$

Dari $N = S + I + R$ maka didapat $S = N - I - R$ maka system (1) dapat dituliskan dengan persamaan sebagai berikut:



$$\frac{dN}{dt} = A - \mu N - \gamma I$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \left[[p + (1 - p)q] \frac{(N-I-R)}{N} I - (\mu + \gamma)I - \alpha I \right]$$

(2)

$$\frac{dR}{dt} = (1 - p)(1 - q)(N - I - R) + \alpha I - \mu R$$

Titik kesetimbangan R_0 dapat diperoleh dengan menjadikan persamaan pada system (2) samadengan nol. Pada saat $I = 0$ akan diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $P_0 = (N, I, R)$ sedangkan untuk $I \neq 0$ maka diperoleh titik kesetimbangan epidemi. Maka dapat kita Analisa terkait eksistensi dan kestabilan dari titik kesetimbangan system (2) yaitu sebagai berikut:

$$P_0 = (N, I, R) = \left(\frac{A}{\mu}, 0, \frac{(1-p)(1-q)A}{\mu[(1-p)(1-q+\mu)]} \right)$$

Maka akan diberikan:

$$R_0 = \frac{\beta\mu[p+(1-p)q]}{[(1-p)(1-q)+\mu](\alpha+\mu+\gamma)}$$

Maka dapat kita simpulkan nilai R_0 tersebut adalah:

1. Jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit P_0 stabil asimtotis local.
2. Jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit P_0 tidak stabil.



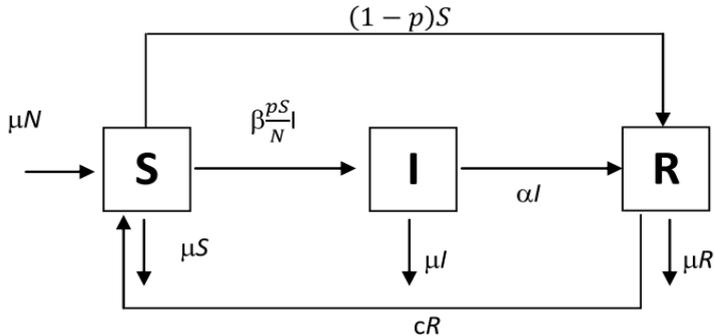
Selanjutnya untuk menentukan kesetimbangan bebas penyakit maka akan diberikan nilai $I = 0$ yang akan disubstitusikan pada system sebelumnya, sehingga diperoleh:

$$N = \frac{A}{\mu}, I = 0, \text{ dan } R = \frac{(1-p)(1-q)A}{\mu[(1-p)(1-q)+\mu]}$$

Sehingga pada saat $I = 0$ akan diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

$$P_0 = (N, I, R) = \left(\frac{A}{\mu}, 0, \frac{(1-p)(1-q)A}{\mu[(1-p)(1-q)+\mu]} \right)$$

Dari asumsi tersebut juga dapat dibuat diagram transfer model influenza dengan strategi vaksinasi:



Gambar 2.e Diagram Transfer Model Influenza Strategi Vaksinasi

Persamaan diferensial dari model matematika tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:



$$\frac{dS}{dt} = \mu N + cR - \mu S - \beta \frac{pS}{N} I - (1 - p)S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{pS}{N} I - (\mu + \alpha)I \quad (1)$$

$$\frac{dR}{dt} = (1 - p)S + \alpha I - (\mu + c)R$$

$$S + I + R = N$$

Analisis Model Matematika

Dari system (1) dapat diperoleh bahwa $\frac{dN}{dt} = 0$.

Maka $N(t) = k > 0$ dengan k merupakan bilangan bulat.

Selanjutnya kita modifikasi system (1) dibagi dengan N , sehingga diperoleh system (2) sebagai berikut:

$$\frac{d\left(\frac{S}{N}\right)}{dt} = \mu + c \frac{R}{N} - \mu \frac{S}{N} - \beta p \frac{S}{N} \frac{I}{N} - (1 - p) \frac{S}{N}$$

$$\frac{d\left(\frac{I}{N}\right)}{dt} = \beta p \frac{S}{N} \frac{I}{N} - (\mu + \alpha) \frac{I}{N} \quad (2)$$

$$\frac{d\left(\frac{R}{N}\right)}{dt} = (1 - p) \frac{S}{N} + \alpha \frac{I}{N} - (\mu + c) \frac{R}{N}$$

$$\frac{S}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = 1$$

Dapat kita defenisikan $s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$, $r = \frac{R}{N}$. Sehingga kita peroleh system baru yaitu sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dt} = \mu + cr - \mu s - \beta psi - (1 - p)s$$



$$\frac{di}{dt} = \beta psi - (\mu + \alpha)i \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = (1 - p)s + \alpha i - (\mu + c)r$$

$$s + i + r = 1$$

Dapat kita simpulkan bahwa system (3) ekuivalen dengan system (1) sehingga diperoleh hasil analisis sebagai berikut:

Diberikan $R_0 = \frac{\beta p(\mu+c)}{(\mu+\alpha)[\mu+c+(1-p)]}$, maka diperoleh:

1. Jika $R_0 \leq 1$ maka system (3) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $Q_0 = (s, i, r) = (\frac{\mu+c}{\mu+c+(1-p)}, 0, \frac{1-p}{\mu+c+(1-p)})$.
2. Jika $R_0 > 1$ maka system (3) hanya akan memiliki dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penaki P_0 dan titik ekuilibrium tidak bebas penyakit

$$Q_1 = (s, i, r) =$$

$$\left(\frac{\mu+\alpha}{\beta p}, \frac{\beta p(\mu+c) - (\mu+\alpha)[\mu+c+(1-p)]}{\beta p(\mu+\alpha+c)}, \frac{1-p((\mu+\alpha)+\alpha[\beta p - (\mu+\alpha)])}{\beta p(\mu+\alpha+c)} \right)$$

Simulasi model matematika diberikan untuk memberikan gambaran geometris terkait dengan hasil Analisa yang akan dilakukan.



2.4. Pandemi

A. Pengertian Pandemi

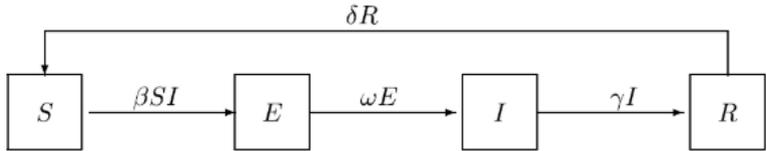
Coronavirus merupakan jenis baru pada manusia yang ditemukan sejak kejadian luar biasa yang pertama kali muncul di Wuhan Cina, pada Desember 2019. Orang yang bermigrasi dapat menjadi agen pembawa virus sehingga dapat menyebarkan penyakit ke wilayah baru, atau mereka dapat menjadi *asymptomatic* atau OTG (Orang Tanpa Gejala) yang dapat membawa virus ke wilayah baru dan *mild* (orang dengan gejala ringan), namun pada sebagian kecil kasus penderita akan mengalami gejala *severe* (orang dengan gejala berat) serta *critical* (orang dengan gejala kritis), biasanya populasi ini terjadi pada orang-orang yang berumur diatas 60 tahun dan menjadi populasi yang paling rentan daripada yang lainnya, mereka yang mengalami kondisi *severe* dan *critical* juga biasanya mengalami komplikasi penyakit bawaan yang diperparah oleh paparan COVID-19 (WHO, 2020).

B. Ilustrasi Pandemi Covid-19

Dalam (Habibi, 2018) menyatakan bahwa dalam penelitian yang dilakukan oleh (Ghaffarzadegan & Rahmandad, 2020) yang berjudul *Simulation-based Estimation of the Spread of COVID-19 in Iran* membahas mengenai estimasi penyebaran COVID-19 dengan mengembangkan model dinamis epidemi berdasarkan kerangka yang dibangun dengan metode SEIR (Susceptible, Exposed, Infected, dan Recovered) dengan melihat perubahan tingkat kontak rata-rata per orang

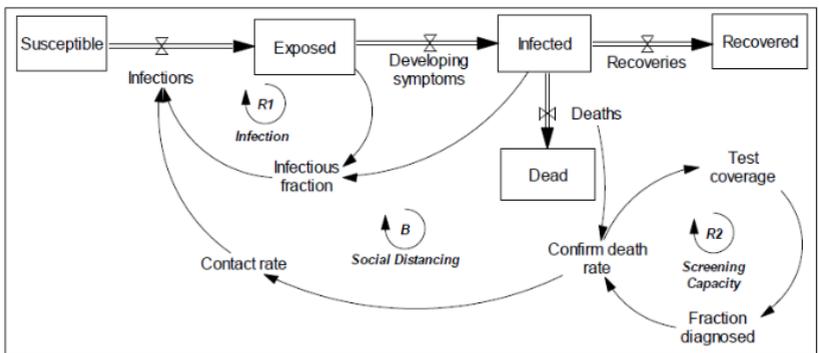


seiring lebih banyaknya kematian yang dilaporkan di Iran. Berikut model SEIR yang diterapkan:

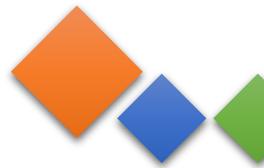


Sumber: Zhien Ma & Jia Li. *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics*. 2009.

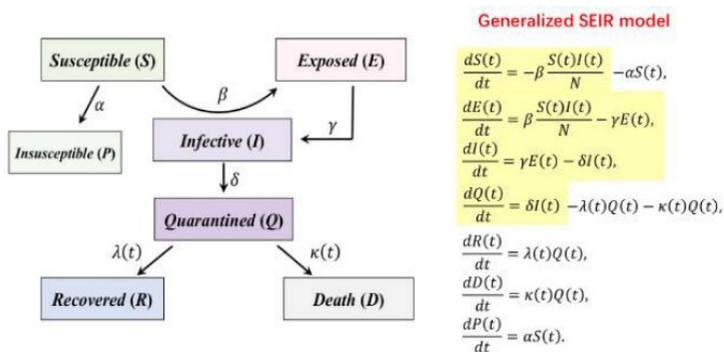
Kemudian kita dapat melihat beberapa perbedaan kasus yang dilaporkan dan kasus nyata dengan memasukkan formulasi dan bagaimana kompartemen tersebut akan berubah menjadi respons terhadap perkembangan epidemi. Berikut merupakan gambaran representasi dari model yang dibangun pada penelitian Ghaffarzagadan & Rahmandad, 2020) yang berjudul *Simulation-based Estimation of the Spread of COVID-19 in Iran*.



Sumber: Ghaffarzagadan & Rahmandad. *Simulation-based Estimation of the Spread of COVID-19 in Iran*. 2020.



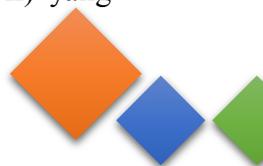
Dalam model ini akan dimasukkan dampak intrinsik dari kasus terpapar dan infeksi yang tersembunyi pada seluruh prosedur epidemi yang sulit untuk dianalisis dengan statistik tradisional. Kompartemen baru yaitu karantina (Q), bersama dengan kompartemen pemulihan (R), menggantikan kompartemen R asli dalam model SEIR klasik. Dalam (Manaqib et al., 2021) Individu rentan dapat menjadi individu laten akibat kontak dengan individu terinfeksi dengan laju sebesar β . Gambaran pengembangan model SEIR yang dirancang beserta formulasi yang digunakan dapat dilihat sebagai berikut:



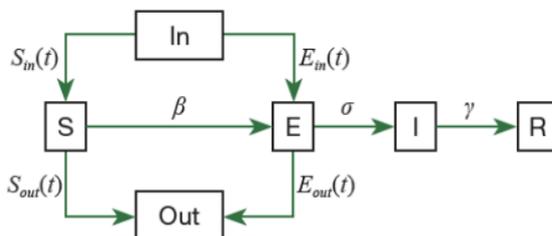
Sumber: Peng et al. Epidemic analysis of COVID-19 in China by dynamical modeling. 2020.

Gambar 2.f Model Epidemi Covid-19 Dengan Penambahan Kompartemen Karantina (Q)

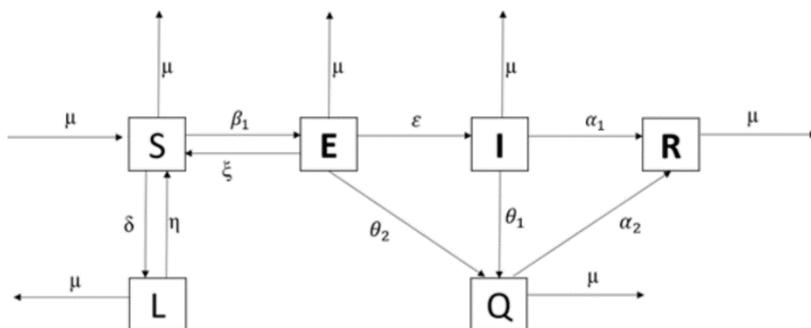
Untuk menentukan inetgrasi data migrasi populasi yang terjadi dan untuk data epidemiologi COVID-19 terbaru ke dalam model Susceptible, Exposed, Infectious, Removed (SEIR) yang selanjutnya untuk mendapatkan kurva epidemi, maka akan digunakan pendekatan kecerdasan buatan atau artificial intelligence (AI) yang



telah diujicoba berdasarkan data SARS 2003, berikut hasil model SEIR yang telah dimodifikasi:



Sumber: Yang et al. Modified SEIR and AI prediction of the epidemics trend of COVID-19 in China under public health interventions. 2020.



Gambar 2.g Gambar Diagram transfer penyebaran virus Covid-19 dengan pengaruh *Lockdown* dan karantina

Dari diagram diatas dapat dibentuk model matematika dengan persamaan diferensial biasa nonlinier sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu + \xi E + \delta L - \beta_1 SI - \eta S - \mu S$$



$$\frac{dL}{dt} = \eta S - (\mu + \delta)L$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 SI - (\mu + \varepsilon + \theta_2 + \xi)E$$

(1)

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\mu + \alpha_1 + \theta_1)I$$

$$\frac{dQ}{dt} = \theta_1 I + \theta_2 E - (\mu + \alpha_2)Q$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha_1 I + \alpha_2 Q - \mu R$$

Dengan $N = S + L + E + I + Q + R$, dapat ditunjukkan bahwa $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dL}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dQ}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$, maka $N(t) = k$, untuk k bilangan real positif, maka $N(t)$ konstan.

Dari system (1) kita dapat membentuk model *non-dimensional*, yaitu dengan cara mengubah satuan dari individual pada setiap kompartemen menjadi proporsi berikut:

$$s = \frac{S}{N}, l = \frac{L}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, q = \frac{Q}{N}, r = \frac{R}{N}$$

(2)

Dari penjabaran diatas kita peroleh:

$$s + l + e + i + q + r = \frac{S}{N} + \frac{L}{N} + \frac{E}{N} + \frac{I}{N} + \frac{Q}{N} + \frac{R}{N} = 1$$



Pada system (1) kita dapat membentuk model *non-dimensional* berikut:

$$\frac{ds}{dt} = \mu + \xi e + \delta l - \beta_1 si - \eta s - \mu s$$

$$\frac{dl}{dt} = \eta s - (\mu + \delta)l$$

$$\frac{de}{dt} = \beta_1 si - (\mu + \varepsilon + \theta_2 + \xi)e$$

(3)

$$\frac{di}{dt} = \varepsilon e - (\mu + \alpha_1 + \theta_1)i$$

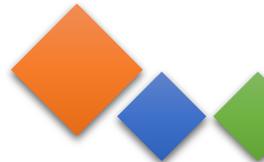
$$\frac{dq}{dt} = \theta_1 i + \theta_2 e - (\mu + \alpha_2)q$$

$$\frac{dr}{dt} = \alpha_1 i + \alpha_2 q - \mu r$$

Variable s, l, e, i, q, r berturut-turut adalah proporsi individu rentan, *lockdown*, laten, terinfeksi, karantina, dan sembuh, sehingga dapat dibentuk himpunan invariant positif.

$$r = \{(s, l, i, e, q, r) \geq 0 | s + l + e + i + q + r = 1\}$$

sebagai domain dari system (3). Dapat terlihat bahwa variable r hanya akan muncul pada kompartemen r dan tidak muncul pada kompartemen lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa individu pada kompartemen r tidak mempengaruhi perubahan individu pada kompartemen yang lain, maka kompartemen r untuk sementara dapat



diabaikan dari system. Sehingga system (3) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dt} = \mu + \xi e + \delta l - \beta_1 si - \eta s - \mu s$$

$$\frac{dl}{dt} = \eta s - (\mu + \delta)l$$

$$\frac{de}{dt} = \beta_1 si - (\mu + \varepsilon + \theta_2 + \xi)e$$

(4)

$$\frac{di}{dt} = \varepsilon e - (\mu + \alpha_1 + \theta_1)i$$

$$\frac{dq}{dt} = \theta_1 i + \theta_2 e - (\mu + \alpha_2)q$$

2.5. Biologi Sel

A. Sejarah Perkembangan Teori Sel

Mikroskop merupakan salah satu alat pembesar yang menjadi terbentuknya sejarah sel. Pada abad ke 16 mikroskop ditemukan dengan memiliki dua lensa. Kemudian mikroskop dikembangkan lagi oleh beberapa negara yaitu Italia, Belanda dan Inggris. Pada abad ke 17 mikroskop mempunyai kemampuan dalam perbesaran 30 kali.

Robert Hooke adalah salah satu ilmuwan yang berasal dari inggris telah merancang mikroskop majemuk dengan sumber pencahayaan sendiri, degan demikian



membuat mikroskop lebuah mudah untuk digunakan. Hooke mulai mengamati benda-benda yang mengirisnya tipis-tipis. Dari hal yang dilakukannya telah didapat bahwa penangkapan dari benda yang mengirisnya tipis-tipis itu memiliki struktus yang menarik untuk diteliti. Contohnya ketika Hooke mengiris tipis sebuah gabus yang jika diletakkan di bawah mikroskop terlihat gabus tersebut memiliki pori-pori yang membentuk sarang lebah, dan memiliki ketidakberaturan pori-pori.

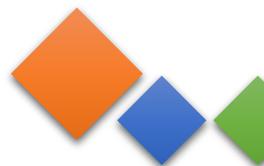
Hooke berhasil melakukan penelitian dan memberikan kesimpulan bahwa pori-pori yang tampak irisan gabus itu adalah merupakan cells yang memiliki kemiripan dengan sel atau bilik. Sebenarnya, yang terlihat oleh Hooke merupakan dinding sel yang memiliki ruang hampa atau kosong yang meliputi dari sel-sel yang sudah mati pada gabus yang berasal dari sebuah pohon Ek yang merupakan salah satu bahan yang dapat membuat gabus tersebut. Kemudian Hooke kembali mengamati pada tumbuh-tumbuhan yang mempunyai karakteristik sel yang berupa cairan.

Sebaliknya, seorang ilmuwan Anthony Van Leeuwenhoek yang berprofesi sebagai pedagang kain,



telah menciptakan mikroskop sendiri yang memiliki hanya satu mata lensa saja yang berfungsi untuk mengamati beberapa ha;. Sehingga membawa Leewwenhoek pada sebuah pengamatan bakteri, sel darah merah, protozoa dan spermatozoid. Maka pada tahun 1673 Leewuwehhoek menjelaskan tentang pengamatan terhadap air liur yang diletakkannya di bawah mikroskop sehingga dari pengamatannya itu menjelaskan bahwa terdapat hewan kecil yang disebut dengan dirjen. Hasil penelitian tersebut kemudian Ia kirimkan yang berupa surat kepada Royal Society adalah sebuah komunitas ilmiah di Inggris. Dengan demikian oleh Royal Society diterjemahkan ke dalam Bahasa Inggris yang berarti animalcule atau bisa disebut dengan bakteri oleh ilmuwan modern.

Pada tahun 16-75-1679, seorang ilmuwan bernama Macerllo Malphigi yang berkebangsaan Itali memaparkan mengenai unit-unit penyusunan tumbuhan yang diberi nama Urticle isitilah ini memiliki arti kantong kecil. Malphigi berpendapat bahwa ada cairan dan dinding-dinding pada setiap rongga yang memperlihatkan kekokohnya.



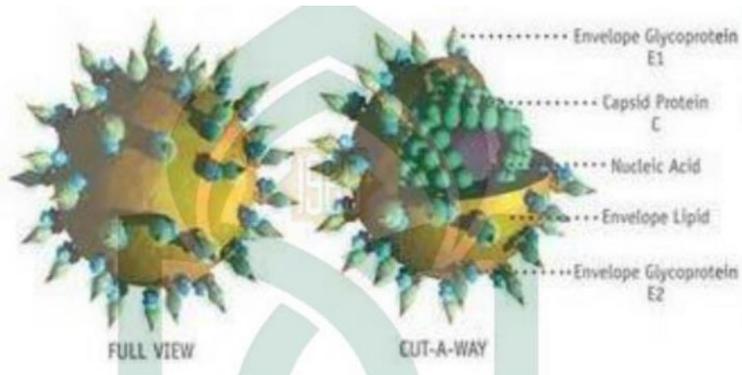
Pada tahun 1682 dalam sebuah tulisan Nehemiah Grew seorang ilmuwan berasal dari Inggris juga sedang melakukan penelitian yang sama mengenai sel tumbuhan, dalam penelitian tersebut Grew menemukan istilah baru yang disebut Kloroplas.

Sebuah ilmu yang mempelajari tentang hidup dan kehidupan organisme dari masa ke masa dalam hal fungsi, struktur, pertumbuhan dan perkembangannya disebut Biologi. Sel dan beberapa sel membentuk semua makhluk hidup. Sehingga sebuah cabang ilmu biologi yang memiliki perkembangan teknik baru disebut Sitologi. Terbentuk pada tahun 1875 sampai 1895 telah ditemukan sebuah fenomena selular landasan yaitu berupa mitosis, meiosis dan fertilisasi serta berbagai teori organel penting lainnya seperti mitokondria, kloroplas dan Badan Golgi.

Menurut Sutima (2017) Salah satu ilmu yang mempelajari tentang fungsi dan struktur sel yang merupakan unit-unit dasar kehidupan disebut Biologi Sel. Dalam biologi sel memiliki prinsip-prinsip yang dapat digunakan dan diterapkan untuk kepentingan manusia dalam bentuk bioteknologi. Dengan demikian bioteknologi terbagi atas cabang bioteknologi konvensional dan modern. Dalam hal tersebut banyak mempengaruhi berbagai kajian ilmu lainnya seperti pada cabang ilmu anatomi, fisiologi, mikrobiologi dan patologi.

B. Virus

Sebuah infeksi yang dapat menular pada makhluk hidup disebut dengan Virus. Di dunia ini ada begitu banyak jenis virus salah satunya adalah virus hepatitis C. Aqsa (2017) menyatakan bahwa hepatitis merupakan sebuah istilah infeksi pada hepar yang disebabkan oleh virus, bakteri jamur ataupun parasit. Virus Hepatitis C (HVC) adalah virus yang memiliki keturunan RNA (Asam Ribonukleat). RNA (Asam Ribonukleat) merupakan rangkaian nukleotida yang terikat seperti rantai. Seperti pada gambar berikut yang merupakan model virus Hepatitis C pada manusia.



Gambar 2.h. Model Virus Hepatitis C pada manusia

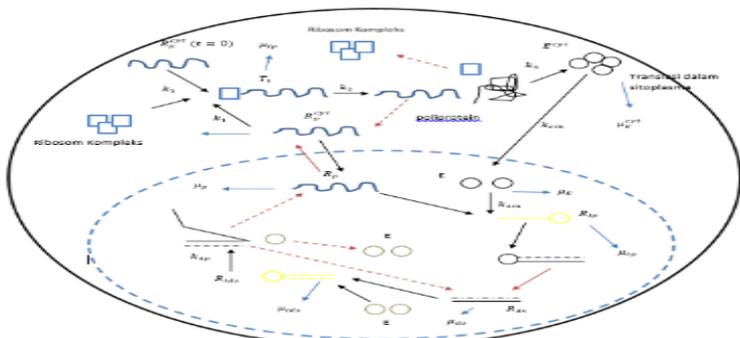
Sekitar 80% penderita Virus Hepatitis C mengalami infeksi yang bertahun-tahun sehingga dapat menimbulkan hepatitis kronik, sirosis dan kanker pada hati hingga kematian. Diperlukannya perjalanan panjang hingga belasan tahun dalam proses perkembangan virus



Dalam (Aqsa, 2017) proses replikasi virus Hepatitis meliputi tahapan-tahapan sebagai berikut :

1. Tahap 1 : Pengenalan virus. Penggabungan virus lalu masuk ke dalam sel
2. Tahap 2 : Pengidentifikasian plasma pembawa sifat virus dan replikasi Genom.
3. Tahap 3 : Pemasangan fomasukapsid virus

Replikasi pada virus baru akan terjadi ketika setelah virus mengalami infeksi pada sel inang yang kemudian sel inang akan dikendalikan oleh virus untuk melakukan transkripsi dan/atau menginformasikan translasi genetic untuk keberlangsungan hidup virus. Di dalam tubuh, virus Hepatitis C masuk ke dalam sel yang kemudian sel tersebut terinfeksi. Selanjutnya virus akan masuk ke dalam sitoplasma lalu bertranslasi. Dengan demikian virus baru akan bereplikasi masuk ke dalam VMS (*vesicular membran structure*). Model replikasi Virus Hepatitis C dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 4.3 Skema Model Replikasi Virus Hepatitis C dalam Sel



Keterangan:

1. Oval biru menggambarkan VMS, ditunjukkan dengan dua VMS.
2. Kotak biru menggambarkan ribosom 3
3. Garis hitam menggambarkan plus strand RNA.
4. Garis titik-titik hitam menggambarkan minus strand RNA
5. Oval hitam menggambarkan polymerase menengah plus strand kompleks RNA dan replikasi menengah kompleks dsRNA
6. Warna kuning menggambarkan polymerase menengah plus strand kompleks RNA dan replikasi menengah kompleks dsRNA
7. Panah hitam menggambarkan nilai kinetik k_1 – $k_5, k_{pin}, k_{pout}, k_c, k_{Ein}$
8. Panah hijau menggambarkan penurunan replikasi menengah kompleks plus strand RNA, replikasi menengah dsRNA, plus strand RNA di dalam sitoplasma dan di dalam VMS, translasi kompleks, dan dsRNA



-
9. Pana merah menjelaskan pemisahan antara replikasi menengah kompleks dengan translasi kompleks

Dengan menggunakan variabel-variabel pada pemodelan matematika terhadap replikasi RNA virus Hepatitis C sebagai berikut :

1. $R_p(t)$: jumlah plus strand RNA terhadap waktu
2. $R_{ds}(t)$: jumlah dsRNA terhadap waktu
3. $E(t)$: jumlah polimerasi kompleks virus Hepatitis C terhadap waktu
4. $R_{Ip}(t)$: jumlah replikasi menengah kompleks plus strand RNA terhadap waktu
5. $R_{Ids}(t)$: jumlah replikasi menengah kompleks dsRNA terhadap waktu

Berikut merupakan parameter-parameter yang dapat digunakan dalam model matematika replikasi virus Hepatitis C, yaitu :

1. R_p^{cyt} : RNA virus Hepatitis C dalam sitoplasma dengan molekul strand positif
2. E^{cyt} : penghubung yang diperlukan untuk mensintesis RNA dengan menggunakan enzim NS5B dan protein pada virus.



3. k_3 : kelajuan R_{Ip}
4. k_5 : kelajuan R_{Ids}
5. k_{4m} : sintesis R_{ds}
6. k_{4p} : sintesis R_p
7. k_{pin} : translasi R_p^{cyt} ke dalam VMS dari sitoplasma
8. k_{out} : translasi R_p keluar dari VMS ke dalam sitoplasma
9. k_{Ein} : translasi E^{cyt} masuk ke VMS
10. μ_p : penurunan R_p
11. μ_{ds} : penurunan R_{ds}
12. μ_E : penurunan E
13. μ_p : penurunan R_p
14. μ_{Ip} : penurunan R_{Ip}
15. μ_{Ids} : penurunan R_{Ids}

Sehingga mengalami pengaruh dalam perubahan jumlah R_p di dalam VMS merupakan gabungan antara R_p molekul N5SB jika dijumlahkan dengan sintesis plus strand yang baru terlahir serta dijumlahkan dengan plus strand RNA yang keluar masuk VMS, sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{dR_p}{dt} = -k_3R_pE + k_{4m}R_{Ids} + k_{pin}R_p^{cyt} - (k_{pout} + \mu_p)R_p \dots (1)$$

Selanjutnya terjadi penurunan dsRNA yang digambarkan sebagai $\mu_{ds}R_{ds}$ dimana μ_{ds} degradasi R_{Ip}



dan μ_{ds} = double strand dsRNA. Sehingga dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\frac{dR_{ds}}{dt} = -k_4 R_{ip} + k_{4m} R_{ids} - k_5 R_{ds} E - \mu_{ds} + \mu_p R_{ds} \dots (2)$$

$$\frac{dE}{dt} = k_{Ein} E^{cyt} + k_{4m} R_{ip} + k_4 R_{ids} - k_3 R_p E - k_5 R_{ds} - \mu_e E \dots (3)$$

$$\frac{dR_{ip}}{dt} = k_3 R_p E - k_{4m} R_{ip} - \mu_{ip} R_{ip} \dots (4)$$

$$\frac{dR_{ids}}{dt} = k_5 R_{ds} E - k_{4p} R_{ids} - \mu_{ids} R_{ids} \dots (5)$$

Maka terbentuklah lima model matematika untuk replikasi virus Hepatitis C.

D. Efek pada Sel Inang

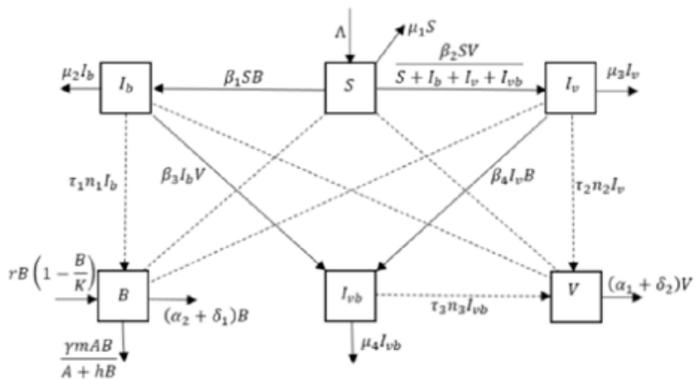
Pada model matematika ko-infeksi virus influenza A dan pneumokokus psel inang dibagi menjadi dua populasi, yaitu :

1. Populasi sel inang, populasi sel inang terbagi menjadi 4 populasi yaitu : (1) populasi sel inang yang rentan dinotasikan dengan S, (2) populasi sel inang yang terinfeksi pneumokokus dinotasikan dengan *Ib*, (3) populasi sel inang yang terinfeksi virus influenza A



dinotasikan dengan I_v , dan (4) populasi sel inang yang terinfeksi virus influenza A dan pneumokokus (ko-infeksi) dinotasikan dengan I_{vb} .

2. Populasi pathogen, terbagi menjadi dua populasi yaitu : (1) populasi bakteri yang dinotasikan dengan B dan (2) populasi virus influenza A yang dinotasikan dengan V .



Gambar 2.i Diagram Transmisi Model

Gambar di atas merupakan bentuk dari diagram transmisi yang menjelaskan asumsi dan definisi dari parameter serta variabel pada penyebaran ko-infeksi virus influenza A dan pneumokokus pada sel inang.



BAB III

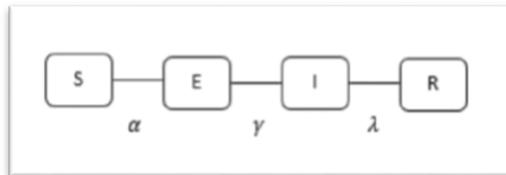
MODEL EPIDEMIC SEIR

3.1. Model SEIR (Penentuan Persamaan Diferensial)

Model SEIR adalah salah satu model matematika epidemiologi yang membagi populasi menjadi empat subpopulasi, yaitu sub populasi individu berpotensi (Susceptible), sub populasi individu terdeteksi penyakit tetapi belum terinfeksi (Exposed), subpopulasi individu terinfeksi (Infected), dan subpopulasi individu sembuh dari penyakit (Recovered) (Ansar, 2018).

Dimana hubungan keempat subpopulasi ini adalah $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$ (total populasi)

Dapat juga disajikan ke dalam gambar 3.1



Gambar 3.1 Diagram Transfer SEIR

α merupakan laju transmisi penyakit dari individu yang *susceptable* kepada individu yang rentan (*exposed*). Untuk



parameter γ merupakan laju perpindahan dari keadaan *Exposed* menjadi *Infected*. Sedangkan λ mendeskripsikan transmisi antara *Infected* dan *Recoverd* (Side & Rangkuti, 2015).

3.2. Kondisi Epidemik

Epidemik adalah istilah yang digunakan untuk mengetahui peningkatan jumlah kasus penyakit yang datang secara tiba-tiba pada suatu populasi di area tertentu. Salah satu Epidemik yang terjadi baru-baru ini in adalah *Corona Virus Disease* (Covid 19) yang sudah ditetapkan oleh Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) sebagai pandemic global.

Penyebaran virus Corona merupakan virus yang dapat ditularkan melalui droplet yang keluar dari hidung ataupun mulut yang jatuh ke permukaan benda dan tersentuh oleh orang lain. Penyebaran virus ini sangat terjadi sangat cepat. Apalagi terdapat orang terinfeksi tanpa gejala (OTG) dan tidak mengetahuinya sehingga tanpa sadar dapat menularkan kepada orang lain.

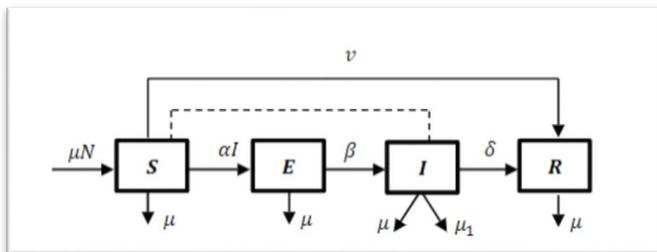


3.3. Model SEIR dengan Vital Respond dan Vaksinasi

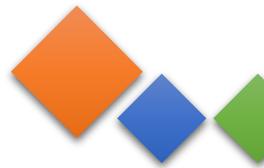
Virus pada Covid-19 memiliki periode laten, yaitu sekitar 5 -6 hari dengan range antara 1-14 hari. Oleh karena itu, penyebaran Covid-19 dapat dikaji dengan menggunakan model SEIR. Untuk penanganan penyebaran Covid-19 maka diperlukan vaksinasi, sehingga dalam pemodelan perlu memperhatikan faktor vaksinasi tersebut.

3.4. Persamaan Diferensial dan Parameter dalam Model

Adapun Model SEIR untuk penyebaran Covid-19 dengan parameter vaksinasi terdiri dari empat kompartemen, yaitu subpopulasi Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I) dan Recovered (R), sebagaimana digambarkan melalui diagram alir pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Diagram Alir Model SEIR untuk Penyebaran Covid-19



Model SEIR pada gambar 3.2. dapat dinyatakan dalam system persamaan diferensial non linier sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \left(\frac{\alpha I}{N} + \mu + v \right) S \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\alpha I S}{N} - (\beta + \mu) E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta E - (\mu_1 + \delta + \mu) I \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + v S - \mu R \quad (4)$$

Dengan deskripsi variable dan parameternya pada Tabel 1

Tabel 1. Deskripsi variabel dan parameter model SEIR untuk penyebaran Covid-19	
Variabel/ Parameter	Keterangan
t	: Waktu.
$S(t)$: Subpopulasi rentan terhadap penyakit pada waktu t .
$E(t)$: Subpopulasi terpapar terhadap penyakit pada waktu t .
$I(t)$: Subpopulasi terinfeksi terhadap penyakit pada waktu t .
$R(t)$: Subpopulasi sembuh atau yang telah divaksinasi terhadap penyakit pada waktu t .
$N(t)$: Populasi, yaitu $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$.
μ	: Laju kelahiran/kematian.
α	: Laju kontak individu <i>Susceptible</i> dengan individu <i>Infected</i> .
β	: Laju aktivasi virus.
μ_1	: Laju kematian akibat terinfeksi Covid-19.
δ	: Laju kesembuhan individu yang terinfeksi Covid-19.
v	: Laju pemberian vaksin.

3.5. Kestimbangan pertama (1-v, 0,0)

Dari Model SEIR didapat bilangan reproduksi dasar untuk penyebaran Covid 19 dengan parameter vaksinasi yaitu



$$R_0 = \frac{\alpha\beta\mu}{(\beta + \mu)(\mu + \nu)(\mu_1 + \delta + \mu)}$$

3.6. Titik Keseimbangan Kedua

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dimana variabel terikatnya adalah x_1, x_2, \dots, x_n dan variabel bebasnya adalah t , sehingga $x_1 = x_1$

$$(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \text{ dengan } (t) \frac{dx_n}{dt}$$

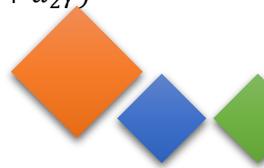
3.7. Keseimbangan dan Stabilitas

$$I = \frac{\gamma E}{\omega} \rightarrow E^* = \frac{\omega}{\mu} \left(\frac{A - \mu N}{\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma} \right)$$

$$I = \frac{\omega I}{\gamma} \rightarrow I^* = \frac{\gamma}{\mu} \left(\frac{A - \mu N}{\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma} \right)$$

$$R^* = k \frac{\gamma}{\mu} \left(\frac{A - \mu N}{\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma} \right)$$

$$S^* = \frac{A(\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma)}{A - \mu N(\beta_1 \omega + \beta_2 \gamma + \beta_3 k \gamma) + \mu(\alpha_1 \omega + \alpha_2 \gamma)}$$



Berdasarkan langkah-langkah di atas didapat titik setimbang endemic

$$E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$$

Sedangkan titik setimbang bebas penyakit

$$E_0 = (0, 0, 0, \frac{A}{\mu})$$

3.8. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar atau yang dinotasikan dengan R_0 digunakan untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit. R_0 adalah jumlah rata-rata individu infeksi sekunder yang terjadi akibat tertular individu infeksi primer yang masuk sepenuhnya ke dalam

Misalkan $x = \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ menyatakan subpopulasi terinfeksi dari Persamaan (9)-(12). Selanjutnya diperoleh,

$$\frac{dx}{dt} = F - V = \begin{pmatrix} \alpha i s \\ \beta e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\beta + \mu) e \\ (\mu_1 + \delta + \mu) i \end{pmatrix}.$$

Jacobian dari matriks di atas direpresentasikan oleh

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & \alpha s \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } DV = \begin{pmatrix} (\beta + \mu) & 0 \\ 0 & (\mu_1 + \delta + \mu) \end{pmatrix}.$$

Kemudian, titik ekuilibrium E_0 disubstitusi sehingga diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha \mu}{\mu + v} \\ \beta & 0 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} (\beta + \mu) & 0 \\ 0 & (\mu_1 + \delta + \mu) \end{pmatrix}$$

Matriks *Next Generation* diperoleh sebagai berikut:

$$G = FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha \mu}{(\mu + v)(\mu_1 + \delta + \mu)} \\ \frac{\beta}{(\beta + \mu)} & 0 \end{pmatrix}.$$

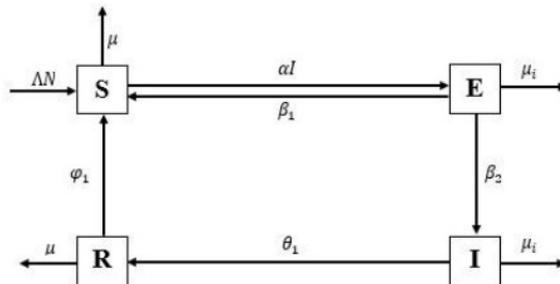


subpopulasi rentan. R_0 bisa dicari dengan menggunakan metode Next Generation Matrix.

Dari hasil yang di atas terlihat R_0 merupakan nilai eigen dominan dari matriks G , maka diperoleh bilangan reproduksi dasar dari model SEIR untuk penyebaran Covid-19 dengan parameter vaksinasi adalah

$$R_0 = \frac{A(\beta_1\omega + \beta_2\gamma + \beta_3k\gamma)}{\delta\omega\mu}$$

3.9. Laju Pertumbuhan untuk Pandemic



Laju penyebaran Covid 19 dapat digambarkan pada diagram gambar 3 di bawah ini :

Gambar 3.3 Model Matematika Penyebaran Covid-19

Berikut parameter yang digunakan pada pada sistem persamaan diferensial yang biasa bergantung waktu pada model matematika penyebaran COVID-19:

Λ : Laju kelahiran alami

μ : Laju kematian alami



μ_i : Laju kematian yang disebabkan oleh virus COVID-19

α : Laju perubahan individu rentan menjadi individu terpapar

β_1 : Laju perubahan individu terpapar kembali menjadi individu rentan

β_2 : Laju perubahan individu terpapar menjadi individu terinfeksi

θ_1 : Laju perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh karena treatment yang berhasil

ϕ_1 : Tingkat perubahan dari individu sembuh menjadi individu rentan karena penurunan imunitas

3.10. Aplikasi Terhadap Penyakit

Digunakan untuk mencari populasi yang terkena virus Covid 19.

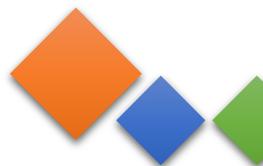
Contoh :

Tabel 2.1 Nilai Awal Model Matematika COVID-19 (Bulan Desember 2020-Agustus 2021)

Variabel	Definisi	Nilai Awal
N	Banyaknya penduduk di Indonesia	270,20 juta
S	Banyaknya individu rentan terhadap waktu	267968836
E	Banyaknya individu terpapar terhadap waktu	132723
I	Banyaknya individu terinfeksi terhadap waktu	228835
R	Banyaknya individu sembuh terhadap waktu	1869606



Variabel	Definisi	Nilai	Satuan
Λ	Laju kelahiran alami	$6,25 \times 10^{-3}$	perhari
μ	Laju kematian alami	0,00712	perhari
α	Laju perubahan individu rentan menjadi individu terpapar	$3,586 \times 10^{-5}$	Perorang / hari
θ_1	Laju perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh karena adanya <i>treatment</i> yang sukses	0,086	Perhari
μ_i	Laju kematian pada populasi yang disebabkan oleh COVID-19	0,087	Perhari
β_1	Laju perubahan individu terpapar kembali menjadi individu rentan	7012	Perhari
β_2	Tingkat perubahan individu terpapar menjadi individu terinfeksi	0,4	perhari
φ_1	Laju perubahan individu sembuh kembali menjadi individu rentan karena adanya penurunan imunitas	0,9629	Perhari



BAB IV MODEL LOGISTIK

4.1. Model Malthus

Model Malthus (Malthusian Model) dikenal dengan model pertumbuhan eksponensial malthus, yang dicetuskan oleh Robert Maltus pada sekitar tahun 1798 melalui essay nya tentang kependudukan. Model pertumbuhan pada populasi menurut Malthus dijelaskan bahwa kaitan antara parameter populasi dan untuk waktu, sasarannya memperkirakan ukuran populasi saat waktu di masa mendatang.

Misalkan $P_i(t)$ adalah parameter populasi disaat waktu tertentu. Dan $P_i(t + \Delta t)$ adalah parameter populasi disaat waktu mendatang. Sehingga pertumbuhan populasi pada waktu tertentu Δt adalah

$$\Delta P_i = P_i(t + \Delta t) - P_i(t)$$

Selanjutnya asumsikan bahwa jumlah kematian dan kelahiran seimbang dibanding parameter populasi dengan interval saat Δt , adalah

$$\text{Banyaknya Kelahiran} = bP_i\Delta t$$



$$\text{Banyaknya Kematian} = dP_i \Delta t$$

b serta d konstanta bilangan asli.

Maka populasi ΔP_i berubah pada interval saat Δt menjadi:

$$\begin{aligned}\Delta P_i &= \text{Banyaknya Kelahiran} - \text{Banyaknya Kematian} \\ &= bP_i \Delta t - dP_i \Delta t \\ &= (b - d)P_i \Delta t \\ &= kP_i \Delta t\end{aligned}$$

dimana $k = b - d$

Untuk rerata laju perubahan dari populasi pada saat periode waktu Δt menjadi:

$$\frac{\Delta P_i}{\Delta t} = kP_i$$

Ambil Δt menuju 0, sehingga didapat persamaan differensial memakai definisi diferensial lewat pendekatan limit

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P_i}{\Delta t} = \frac{dP_i}{dt} = kP_i$$

Pada persamaan diatas dinyatakan laju perubahan pada saat populasi ketika waktu setimbang memakai parameter populasi saat waktu t.

Maka diperoleh persamaan model pertumbuhan dari populasi Malthus



Dari persamaan $\frac{dP}{dt} = kPi$

Untuk $Pi(t) = Ce^{kt}$, dimana $N(t_0) = N_0 > 0$

Disubstitusikan sehingga didapat

$$Pi(t) = Pi_0 e^{k(t-t_0)}$$

Dimana

Pi_0 = Populasi Awal,

$Pi(t)$ = Populasi pada saat waktu t

Sehingga diprediksi parameter populasi ikut dipengaruhi oleh konstanta k

- Untuk $k > 0$, sehingga populasi mengalami pertumbuhan sebagai eksponensial tak terbatas.
- Untuk $k < 0$, sehingga populasi mengalami peluruhan sebagai eksponensial mendekati nol.
- Untuk $k = 0$, sehingga parameter populasi akan konstan atau tidak berubah, artinya $Pi(t) = Pi_0$, t waktu.

Contoh:

Berikut tabel jumlah penduduk Sumatera Utara tahun 1971-1990 (sumber data BPS)



Tahun	Rata-Rata Populasi
1971	6.621.831
1980	8.360.894
1990	10.256.027

Perkirakan jumlah penduduk Sumatera Utara pada tahun 2010-2020. Kompare dengan data populasi diatas.

Penyelesaian

Model Malthus

$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$ dimana t_0 tahun 1971

$$P_0 = 6.621.831$$

Perkirakan nilai parameter k

Substitusi $N(0)$ dan $N(1)$ untuk menduga nilai k

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)} \leftrightarrow P(1) = P(0) e^k$$

$$\leftrightarrow 8.360.894 = 6.621.831 e^k$$



$$\leftrightarrow k = \ln \frac{8.360.894}{6.621.831}$$

$$k \approx 0,233193441$$

Dengan memakai $P(0)$ dan k , perkiraan tahun berikutnya adalah

Tahun	Rerata Populasi	Nilai Prediksi	Error
1980	8.360.894	8.360.894	0
1990	10.256.027	10.556.680	300.653
1995	11.114.667	12.949.523	1.834.856
2000	11.649.655	14.033.664	2.384.009
2010	12.982.204	14.709.154	1.726.950
2020	14.798.400	16.391.664	1.593.264

- Bila diamati hasil perkiraan sepertinya tepat pada sebagian tahun diawal tetapi bukan di tahun-tahun yang menunjukkan beda yang terlalu besar diantara nilai fakta sebenarnya untuk nilai perkiraan.



-
- Hal itu menyatakan kalau model belum bisa dipakai dalam menduga secara tepat pada kurun durasi saat yang begitu lama.
 - Sehingga anggapan yang dipakai untuk model perkembangan pada populasi ini butuh diperbaiki dan diulang.
 - Anggapan kelahiran serta banyaknya kematian akan bernilai tetap untuk model ini butuh diperiksa kembali.
 - Kenyataannya adalah populasi belum bisa mengalami pertumbuhan menurut eksponensial tak terbatas.
 - Pada kenyataannya adalah perhitungan dari jumlah populasi semakin meningkat hingga laju dari pertumbuhan menjadi definit sebab terdapatnya terbatasnya faktor tempat tinggal yaitu pangan sumber energi alam serta aspek pengaruh lingkungan yang lain.

4.2. Model Logistik

A. Pengertian Logistik

Menurut Yolanda Siagian (2005) logistik merupakan unsur dari cara rantai pensuplaian atau supply chain yang mempunyai kegunaan merancang, penyelenggaraan, menatalaksanakan, mengawasi, menyimpan pesediaan, secara tepat dan baik, efisiensi cara



mengadaan, melayani dan keterangan data dimulai saat dititik awal (point of origin) sampai saat titik pemakaian (point of consumption) untuk menuju pemenuhan kebutuhan para konsumen.

Arti lain logistik yaitu suatu cara ilmu pengetahuan atau keterampilan untuk melaksanakan urutan pelaksanaan menyimpan, menyalurkan dan memelihara, serta menghapus pada semua benda alat kebutuhan tertentu. Pengertian yang lain dari logistik yaitu rangkaian urutan pelaksanaan yang melibatkan aktivitas merencanakan, mengimplementasikan, sampai mengawasi pada urutan pelaksanaan pemindahan, untuk produk atau jasa, daya energi dan lainnya mulai tempat sumber sampai kepada titik penggunaannya.

Melalui definisi-definisi yang dijabarkan di atas, maka diambil kesimpulan pengertian logistik yaitu cabang ilmu manajemen yang rangkaian sistematisnya saling berkaitan serta dilaksanakan tahap demi tahap, dan mempunyai sasaran untuk pengelolaan dan pemeliharaan produk-produk atau perangkat-perangkat yang spesifik.

B. Manfaat dan Sasaran dari Logistik

Seluruh tindakan logistik yaitu agar tercapainya suatu rencana, diantaranya ketersediaan kebutuhan



tertentu pada saat waktu yang pas dan berada pada tempat yang pas pula. Maka dengan demikian, pada instansi tertentu harus melakukan rangkaian aktivitas logistik diantaranya urutan pelaksanaan pengadaan produk (*manufacturing support*), melakukan pengadaan produk (*manufacturing support*), lalu pendistribusian (*physical distribution*).

Pada proses pelaksanaan, aktivitas logistik ini mempunyai standart performa tercapainya. Adapun tahapan performa yang harus dicapai pada aktivitas logistik yaitu harus terjadi kesetimbangan diantara mutu layanan yang diinginkan konsumen menggunakan seluruh biaya yang dipakai agar tercapainya misi dari perusahaan.

Pendapat Bowersox, faktor-faktor premier untuk penentuan tingkatan performa logistik adalah (1) adanya variabel pelayanan, merupakan tingkat cara melayani oleh perusahaan ke konsumennya; (2) variabel pembiayaan (*cost*), merupakan pengeuaran yang dipakai dan dikeluarkan oleh perusahaan guna melakukan layanan terhadap konsumen.

Sedangkan, sasaran dari logistik diantaranya adalah sebagai berikut:



-
- a. Sasaran Operasional : setiap logistik harus mempunyai ketersediaan yang menyesuaikan pada keperluan, supaya produk tidak menghadapi kurang atau kelebihan persediaan di pasaran. Maka dari itu terdapat distributor-distributor produk yang melaksanakan sistem logistik ini, terkhusus pada daerah tempat tinggal yang jauh dan kurang terjangkau lokasinya. Kegiatan ini bersasaran mengantisipasi keadaan tidak adanya ketersediaan untuk produk pada lokasi yang diinginkan.
 - b. Sasaran finansial : Logistik pada umumnya mempersiapkan pengiriman barang yang mudah dijangkau dibanding cara lain, jika ada yang mempunyai cara perawatan sehingga produk dapat bisa sampai pada keadaan rusak yang terlalu kecil.
 - c. Sasaran pengamanan : Keamanan produk ini adalah hal terpenting dari setiap pengiriman produk. Dimasa modern itu logistik sudah mempunyai patokan keamanan, akan tetapi selain itu sarana prasarana transportasi merupakan hal yang terpenting juga, seharusnya dapat melengkapi standar pemilik perusahaan logistik.



4.3. Perbandingan Model Malthus dan Model Logistik

Pierre-Francois Verhulst (1837) salah seorang ahli matematika biologi asal Belanda mengemukakan usulannya untuk melakukan perbaikan pada Model Malthus dengan tetap memperhatikan faktor kepadatan populasi, yakni:

- Populasi dimisalkan tumbuh terbatas
- Diperoleh jumlah populasi secara maksimal dengan memisalkan K yang bisa ditampung secara baik dan kontinu oleh lingkungannya.

Pada Model Malthus yang dianggap tidak selalu konstan adalah k sebab saat laju pertumbuhan populasi akan berkurang pasti karena populasi sudah padat.

- Oleh karena itu, jika dimisalkan jika pertumbuhan populasi sangat terikat dengan ukuran populasi di waktu t .
- Laju k akan menurun terjadi saat populasi meningkat menuju ukuran populasi maksimal K .
- Dalam hal ini dapat dibuat fungsi sederhananya sebagai berikut:

$k = r(K - P)$; dimana r adalah konstanta positif.



-
- Pada Model Malthus $k = r(K - P)$ diganti, didapatkan:

$$\frac{dP}{dt} = rP(K - P)$$

Dengan diperolehnya model ini, maka dikenal dengan Model Pertumbuhan Logistik (Verhulst).

Dengan memperhatikan adanya laju kematian akibat kompetisi dan mengasumsikan bahwa laju kematian akibat kompetisi tersebut sebanding dengan y^2 maka model pertumbuhan eksponensial dapat kita modifikasi menjadi bentuk $\frac{dy}{dt} = ry - dy^2 = ry \left(1 - \frac{d}{r}y\right)$ model ini bisa ditulis menjadi bentuk $\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ kemudian dengan mendefinisikan parameter $k = \frac{r}{d}$ maka modifikasi model pertumbuhan eksponensial tersebut menjadi bentuk $\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ modifikasi model ini memuat dua parameter yaitu r dan K dengan parameter r adalah laju intrinsic pertumbuhan populasi dan parameter K adalah kapasitas maksimum daya dukung lingkungan. Parameter K ini juga disebut sebagai carrying capacity parameter. Modifikasi model ini disebut juga model pertumbuhan logistik atau model pertumbuhan



Verhulst yang mula-mula dibentuk oleh Verhulst sebagai perbaikan dari model pertumbuhan eksponensial atau model pertumbuhan Malthus.

Contoh Pemakaian Model Verhulst:

Masih menggunakan contoh yang sama pada Model Malthus Berikut tabel jumlah penduduk Sumatera Utara tahun 1971-1990 (sumber data BPS)

Tahun	Rata-Rata Populasi
1971	6.621.831
1980	8.360.894
1990	10.256.027

Prediksi jumlah penduduk Sumatera Utara pada tahun 2020. Bandingkan Model Malthus dan Model Logistik.

Penyelesaian:

Diketahui dari data populasi periode awal, pertama dan kedua



$$P_0 = 6.621.831$$

$$P_1 = 8.360.894$$

$$P_2 = 10.256.027$$

asumsikan waktu (t) yang diukur dalam periode tertentu dan misalkan tahun 1971 adalah P_0 . Maka persamaan daya tampung (carrying capacity) dapat dituliskan menjadi :

$$K = \frac{P_1(P_1 \cdot P_0 - 2P_0 \cdot P_2 + P_0 \cdot P_2)}{P_1^2 - P_0 \cdot P_2}$$

diperoleh daya tampung

$$K = \frac{8.360.894((8.360.894 \times 6.621.831) - (2 \times 6.621.831 \times 10.256.027) + (6.621.831 \times 10.256.027))}{8.360.894^2 - (6.621.831 \times 10.256.027)}$$

$$K = 22.201.803,1$$

Kemudian P_0 dan K disubstitusi ke Model Logistik

$$P = \frac{K}{e^{-kt} \left(\frac{K}{P_0} - 1 \right) + 1}$$

$$P = \frac{22.201.803,1}{e^{-kt} \left(\frac{22.201.803,1}{6.621.831} - 1 \right) + 1}$$

$$P = \frac{22.201.803,1}{e^{-kt}(2,352819349) + 1}$$

Untuk P_1

$$P_1 = \frac{22.201.803,1}{e^{-kt}(2,352819349) + 1}$$

$$8.360.894 = \frac{22.201.803,1}{e^{-k}(2,352819349) + 1}$$

$$e^{-k}(2,352819349) = \frac{22.201.803,1 - 8.360.894}{8.360.894}$$



$$e^{-k} = \frac{1,655434108}{2,352819349}$$

$$-k = \ln(0,703595925)$$

$$k = 0,351551057$$

Akan diprediksi jumlah penduduk Sumatera Utara pada tahun 2020 asumsikan $t = 5$ menggunakan Model Logistik berikut:

$$P_t = \frac{K}{e^{-kt} \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) + 1}$$

$$P_5 = \frac{22.201.803,1}{e^{-0,351551057 \times 5} \left(\frac{22.201.803,1}{6.621.831} - 1 \right) + 1}$$

$$P_1 = \frac{22.201.803,1}{0,172431489(2,352819349)+1}$$

Untuk $P_{2020} = 15.794.124,51$

Menggunakan Model Logistik diprediksi populasi provinsi sumatera utara tahun 2020 adalah 15.794.124,51 jiwa, error lebih kecil dibanding menggunakan Model Malthus.

4.4. Model Logistik dan Model Pertumbuhan Populasi

A. Model Pertumbuhan Logistik

Menurut (Suddin, 2017) berdasarkan kaidah logistik (*logistic law*) beliau menyatakan persediaan logistik mempunyai suatu limit atau batasnya, dimana

model ini mengasumsikan pada saat tertentu jumlah populasi akan menuju titik keseimbangan (*equilibrium*). Allen (2008) dalam (Nugrahanto, 2010) mengungkapkan bertambahnya laju populasi menggunakan model pertumbuhan dari logistik bukan hanya berpengaruh pada banyaknya populasi yang semakin meningkat, akan tetapi dapat dipengaruhi oleh “*carrying capacity*” atau dikenal dengan kapasitas batas lingkungan yang membatasi pertumbuhan populasi. (Fitriani & Purnomo, 2013) mengatakan bahwa meningkatnya pertumbuhan populasi merupakan salah satu bentuk pertumbuhan logistik, dimana ini semua berkaitan dengan kepadatan jumlah yang mempengaruhi persaingan secara intraspesifik.

Laju pertumbuhan intrinsik (r) dalam model pertumbuhan logistik digunakan untuk mengetahui daya tumbuh populasi dan kapasitas batas lingkungan atau *carrying capacity* (K) digunakan sebagai faktor penghambat pertumbuhan populasi. Daya tumbuh merupakan kemampuan maksimal populasi untuk tumbuh dalam periode waktu tertentu. Daya tumbuh merupakan kemampuan maksimal populasi untuk tumbuh dalam waktu periode tertentu. Untuk menurunkan ulang model pertumbuhan logistik terdapat beberapa asumsi yaitu :



-
- a. Tidak ada struktur genetik yang artinya bahwa semua individu dalam populasi tersebut mempunyai tingkat kelahiran dan kematian yang sama, sehingga tidak ada variasi genetik yang memengaruhi kelahiran dan kematian.
 - b. Tidak ada waktu tunda, yang artinya bahwa individu lahir dan mati secara kontinu.
 - c. Laju intrinsik selalu bernilai positif, yang artinya populasi selalu tumbuh dan tidak ada penurunan jumlah populasi karena laju intrinsik yang bernilai negatif.

Kapasitas batas lingkungan (*carrying capacity*) konstan, artinya bahwa luasan kawasan pada daerah yang diteliti tidak akan pernah berubah (tidak ada penambahan dan pengurangan wilayah) sehingga kapasitas batas individu pada kawasan tersebut tidak berkurang dan tidak bertambah.

Menurut Gotelli [3], model pertumbuhan populasi dibangun dari model pertumbuhan eksponensial yang dikembangkan, yang dinyatakan:

$$\frac{dPi}{dt} = (b_i - d_i) Pi \quad (2.1)$$



Persamaan (2.1) merupakan persamaan pertumbuhan eksponensial. Pers (2.1) menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi selalu tumbuh dan belum dipengaruhi oleh suatu kapasitas batas lingkungan. Menurut Allen [1], pertumbuhan populasi pada model pertumbuhan logistik tak hanya bergantung pada populasi yang bisa diukur akan tetapi juga pengaruh dari kapasitas batas lingkungan yang membatasi pertumbuhan populasi. Maka akan dituliskan bentuk persamaan untuk b_i dan d_i sehingga didapatkan persamaan yang bergantung pada suatu kapasitas batas lingkungan.

Menurut Gotelli [3] jika kepadatan populasi tinggi maka akan meningkatkan laju kematian dan menurunkan laju kelahiran yang dapat dinyatakan sebagai :

$$b_i = b - aP_i \quad (2.2)$$

$$d_i = d - cP_i \quad (2.3)$$

dengan b dan d merupakan laju kelahiran dan laju kematian yang dipengaruhi oleh suatu kepadatan, berbeda dengan b_i dan d_i yang merupakan laju kelahiran dan kematian saat sumber daya tidak terbatas. Konstanta a dan c menggambarkan kepadatan pada populasi tersebut, serta P_i merupakan jumlah populasi. Persamaan (2.2)



merupakan persamaan yang menunjukkan bahwa laju kelahiran menurun karena tingginya kepadatan. Persamaan (2.3) merupakan persamaan yang menunjukkan bahwa laju kematian meningkat karena tingginya kepadatan.

Dari pers. (2.1), (2.2), dan (2.3) diperoleh penurunan model dari pertumbuhan logistik menggunakan cara substitusi pers. (2.2) dan (2.3) pada pers. (2.1) berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dPi}{dt} &= [(b - aPi) - (d + cPi)]Pi \\ &= [(b - d) - (a + c)Pi]Pi \\ &= \left[\frac{b - d}{b - d} \right] [(b - d) - (a + c)Pi]Pi \\ &= (b - d) \left[\frac{b - d}{b - d} - \frac{a + c}{b - d} Pi \right] Pi \end{aligned}$$

Jika mengacu pada Allen dan Allen [2], Gotelli [3], serta Matis dan Kiffe [4] diketahui bahwa laju intinsik (r) dapat dituliskan dengan $r = b - d$, dengan mengacupada persamaan (2.2) dan (2.3) persamaan pada model matematis nya dapat dituliskan :

$$\frac{dPi}{dt} = rPi \left[1 - \frac{(a + c)}{b - d} Pi \right]$$



$$= rPi \left[1 - \frac{1}{\frac{b-d}{a+c}} Pi \right]$$

Nilai dari $\frac{b-d}{a+c}$ adalah kapasitas batas lingkungan (K) yaitu kapasitas batas maksimal lingkungan (Gotelli [3]).

Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{dPi}{dt} = rPi \left(1 - \frac{Pi}{K} \right) \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) disebut model pertumbuhan logistik yang mempunyai penyelesaian :

$$Pi(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{Pi_0} - 1 \right) e^{-rt}} \quad (2.5)$$

Pers. (2.5) adalah hasil model pertumbuhan logistik dengan N_0 adalah nilai mula-mula. Matis dan Kiffe [4], jika $Pi_0 = 0$, sehingga populasi akan terusmeningkat sampai menuju nilai kapasitas dari batas lingkungan. Bila nilai mula-mula $Pi_0 = K$, dapat ditarik kesimpulan maka populasi tidak akan berkurang dan tidak akan bertambah, tetapi jika nilai mula-mula $Pi_0 > K$, dapat ditarik populasi akan berkurang sampai akhirnya pada $Pi_0 = K$.



B. Model Pertumbuhan Populasi

Populasi adalah formasi tanaman, hewan, ataupun organisme lain asal spesies yang sama yg hidup dan melakukan proses berkembang biak. Sementara proses perkembangbiakan adalah kemampuan setiap individu maupun organisme untuk bereproduksi yang bertujuan mempertahankan keberlangsungan keturunannya. Pada populasi tertentu bisa mengalami proses perkembangan dengan baik bila mempunyai persediaan yang cukup terutama pangan serta tempat wilayah daerah yang mampu memuatnya. Populasi bisa saja mengalami suatu pergantian, baik dalam hal penambahan jumlah populasinya maupun terjadi penurunan jumlah populasi. Ada beberapa faktor primer yg mensugesti perubahan pada populasi penduduk yaitu lahir, mati, berimigrasi serta beremigrasi.

Model pada pertumbuhan populasi merupakan bentuk matematika yang mendeskripsikan pertumbuhan jumlah populasi. Seperti yang dikemukakan Yulianti (2005), bahwa beberapa dari model pertumbuhan populasi antara lain:

- a. Model berbentuk diskrit, mendeskripsikan bentuk pertumbuhan populasi dengan memperhatikan



interval saat waktu pengamatan sebagai peubah diskrit.

- b. Model eksponensial, menjabarkan bentuk pertumbuhan populasi dengan melihat jarak waktu pengamatan sebagai peubah kontinu.
- c. Model pertumbuhan populasi berdistribusi umur, pada model jenis ini akan mengklasifikasikan populasi kelompok berdasarkan umur dengan melihat setiap kelompok umur mempunyai peran khusus pada model populasi.
- d. Model logistik. Model bentuk ini tampak pertumbuhan populasi memperhatikan terbatasnya lingkungan, maka laju pertumbuhan populasi bergantung oleh kepadatan dari populasinya.

Berdasarkan pembahasan yang ada diatas, maka pertumbuhan populasi dari model logistik dengan menggunakan tundaan saat waktu diskrit. Pada waktu tunda ini mengakibatkan turunnya populasi, namun untuk berikutnya akan meningkat, maka terjadilah osilasi di pertumbuhan populasinya.

Pada tahun 1830 Verhulst memperkenalkan suatu model pertumbuhan logistik untuk menggambarannya,



pada model pertumbuhan logistik ini menghasilkan penyelesaian yang bentuknya fungsi monoton naik ataupun monoton turun, yang mana fungsi ini diberikan artian bahwa jumlah populasi kedepannya terus meningkat atau menurun. Namun pada kenyataannya, sepanjang waktu pertumbuhan kondisi lingkungan dapat berubah. Kondisi lingkungan yang berubah akan menyebabkan pertumbuhan tertunda.

Populasi merupakan sekumpulan organisme yang sangat sederhana pada komunitas tertentu, karena hanya mempunyai satu jenis spesies saja (Yulianti, 2005). Misal, diibaratkan bahwa dalam suatu ekosistem diperoleh satu spesies dengan persediaan makanan memadai. Misalkan $Pi(t)$ adalah banyaknya populasi pada waktu t , dengan $t \geq 0$, maka menurut Haberman (1997) mengungkapkan laju pertumbuhan populasi saat interval waktu tertentu (Δt) berikut :

$$R(t) = \frac{Pi(t + \Delta t) - Pi(t)}{\Delta t Pi(t)}$$

Jika besar populasi dituju oleh suatu fungsi yang berkelanjutan terhadap saat t yang dimisalkan diferensiabel, sehingga laju pertumbuhan sesaat dituliskan dengan,



$$R(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Pi(t + \Delta t) - Pi(t)}{\Delta t Pi(t)} = \frac{1}{Pi} \frac{dPi}{dt}$$

Dari persamaan di atas, maka dapat dibuat laju pertumbuhan populasi merupakan laju pertumbuhan sesaat ($R(t)$) mengalikannya dengan banyaknya populasi ($Pi(t)$), maka:

$$\frac{dPi(t)}{dt} = R(t)Pi(t) \quad (3.1.a)$$

Pada model laju pertumbuhan ($R(t)$) diasumsikan bergantung dengan populasi waktu itu, maka $R(t)$ adalah fungsi dari $Pi(t)$. Maka persamaan (3.1) dapat dibuat dengan:

$$\frac{dPi(t)}{dt} = R(Pi(t)) \quad (3.1.b)$$

Kaitan antara $R(t)$ dan $Pi(t)$ menurut Verhust (1830), Pearl dan Reed (1920) yakni laju pertumbuhan disebabkan oleh angka pertumbuhan tidak ada pengaruh lingkungan, disimbolkan dengan bilangan tak negatif a , dan pengaruh naiknya angka kepadatan populasi, disimbolkan dengan bilangan tak negatif b . Maka persamaan (3.1) adalah



$$\frac{dPi(t)}{dt} = Pi(t)(a - bPi(t)) \quad (3.2)$$

C. Model Tundaan Waktu Diskrit

Berubahnya populasi pada suatu ekosistem tidak melulu menuju ataupun jauh dari kapasitas batas. Ini dikarenakan individu tidak bisa selalu melahirkan sepanjang hayatnya. Ada juga individu yang belum bisa bereproduksi dikarenakan belum dewasa untuk berkembangbiak, ada juga individu yang tidak mampu bereproduksi karena tidak bisa hamil. Peristiwa ini adalah suatu keadaan di mana suatu individu membutuhkan tundaan waktu (*time delay*) untuk melakukan reproduksi. Menurut Widodo (2007), pada saat populasi melewati kapasitas batas, angka kematian akan terlihat meningkat dibanding angka kelahiran, sehingga terjadi penurunan dari populasi. Sedemikian menurunnya ini, sehingga mengakibatkan populasi menurun hingga di bawah ambang batas.

Dari persamaan (3.2), maka :

$$\frac{dPi(t)}{dt} = Pi(t)(a - bPi(t))$$

laju pertumbuhan pada populasi mempunyai ketergantungan kepada populasi pada masanya, namun kenyataannya (Purnomo, 2000) menyampaikan bahwa

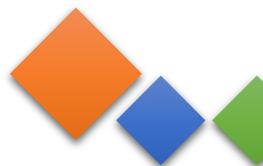
pada interval waktu tumbuhnya kondisi lingkungan dapat berganti. Ada proses biologi dilibatkan mencakup stadium pertumbuhan, sehingga keadaan lingkungan yang berganti, pada akhirnya menerima efek pertumbuhan akan mengalami penundaan. Waktu tunda ini mengakibatkan penurunan populasi, tetapi kemudian terjadi peningkatan. Dengan kata lain, sehingga terjadilah osilasi di pertumbuhan populasinya. Model dari laju pertumbuhan populasi demikian, dilambangkan oleh $Pi(t - t_d)$, dengan t_d adalah waktu tundaan (*time delay*). Ketergantungan ini mungkin berwujud dari beberapa jumlah individu dewasa, banyaknya individu yang mandul, kondisi lingkungan saat itu, dan lain-lain. Fenomena ini (Haberman, 1977) dimodelkan dalam pers

$$\frac{1}{Pi(t)} \frac{dPi(t)}{dt} = R((Pi(t - t_d)) \quad (3.3.a)$$

Persamaan ini disebut dengan persamaan diferensial tundaan.

Dari persamaan (3.2), persamaan logistik untuk model pertumbuhan populasi dengan menggunakan tundaan saat (t_d) dituliskan:

$$\frac{dPi(t)}{dt} = Pi(t)(a - bPi(t - t_d)) \quad (3.3.b)$$



Model pertumbuhan logistik menggunakan waktu tunda berdasarkan analiti sangat sukar untuk bisa dikerjakan. Maka dari itu, supaya mendapatkan penyelesaian numerik model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda, maka diselesaikan dengan memakai perumusan waktu diskrit.

Generalisasi model pertumbuhan populasi satu jenis individu tidak menggunakan waktu tunda diskrit disampaikan Habermen (1997) diartikan berikut :

$$\frac{Pi(t + \Delta t) - Pi(t)}{\Delta t Pi(t)} = R(Pi(t))$$

atau

$$Pi(t + \Delta t) - Pi(t) = R \Delta t Pi(t) \quad (3.4)$$

untuk Δt yaitu jarak/interval waktu ke t . Kemudian, model pertumbuhan pada populasi logistik tidak menggunakan waktu tunda diskrit untuk R konstan adalah:

$$Pi(t + \Delta t) - Pi(t) = R_0 \Delta t Pi(t)$$

Untuk laju pertumbuhan disesuaikan menurut jumlah populasinya. Misalkan stok konsumsi pangan mempunyai batasan, maka laju pertumbuhan pasti akan turun. Keadaan ini diperhatikan (Habermen, 1977), dan melakukan

pemodelan pertumbuhan logistik diskritnya menggunakan waktu tunda berikut ini:

$$Pi(t + \Delta t) - Pi(t) = \Delta t Pi(t)[a - bPi(t)(t - t_d)] \quad (3.5)$$

menggunakan pengukuran di setiap interval pada waktu Δt . Oleh karena itu, dari pers (3.5), jika $t_d = \Delta t$ akan didapat:

$$Pi(t + \Delta t) - Pi(t) = \Delta t Pi(t)[a - bPi(t)(t - \Delta t)]$$

atau (3.6)

$$Pi(t + \Delta t) = Pi(t)[1 + a\Delta t - b\Delta tPi(t - \Delta t)]$$

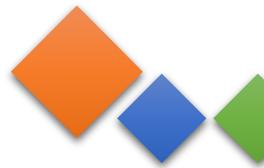
Jika dianalisis persamaan (3.6), diibaratkan populasi tertentu yaitu $Pi(t)$ akan meningkat secara konstan tiap tahun ($\Delta t = 1$). Dengan demikian, pertambahan individu pada daerah yang diberi tergantung oleh berapa jumlah sumber pangan yang dimakan oleh individu di wilayah itu selama tahun-tahun lalunya. Penyelesaian persamaan (3.6), digunakan syarat mula-mula, yaitu:

$$t = m\Delta t \text{ dan } Pi(t) = Pi(m\Delta t) = Pi_m \text{ dengan } m = 1, 2, 3, \dots$$

Sehingga,

$$Pi_1 = Pi(\Delta t) = Pi(t)$$

$$Pi_2 = Pi(2\Delta t) = Pi_1[1 + a\Delta t - b\Delta tPi(\Delta t - \Delta t)]$$



$$Pi_3 = Pi(3\Delta t) = Pi_2[1 + a\Delta t - b\Delta tPi(2\Delta t - \Delta t)]$$

⋮

$$Pi_m = Pi(m\Delta t) = Pi_{m+1}[1 + a\Delta t - b\Delta tPi(m\Delta t - \Delta t)]$$

Jadi, selesaian dari persamaan (3.6) dapat dibuat dengan memakai kalkulasi numerik berikut ini:

$$Pi(t + \Delta t) - Pi(t) = \Delta tPi(t)[a - bPi(t - \Delta t)] \quad (3.7)$$

Dengan demikian, $t = m\Delta t$ dan $Pi(t) = Pi(m\Delta t) = Pi_m$ dengan $m = 1, 2, 3, 4, \dots$, maka pers (3.7) dapat dituliskan menjadi :

$$Pi_{m+1} - Pi_m = Pi_m(a\Delta t - b\Delta tPi_{m-1}) \quad (3.8)$$

Dimana Pi_{m+1} = hasil bertambahnya populasi pada $m + 1$ unit; Pi_m = hasil bertambahnya populasi pada m unit; dan Pi_{m-1} = jumlah dari populasi pada $m - 1$.

Sederhananya, pers (3.7) dituliskan dengan:

$$Pi_{m+1} - Pi_m = P_m(\alpha - \beta P_{m-1}) \quad (3.9)$$

Dengan $\alpha = a\Delta t$ dan $\beta = b\Delta t$



BAB V

MODEL TRAFFIC FLOW

5.1. Lalu Lintas

Lalu lintas adalah suatu system yang terdiri dari komponen komponen. Komponen utama adalah sistem *head way* (waktu antara dua kendaraan yang berurutan ketika melalui sebuah titik pada suatu jalan) meliputi semua jenis prasarana infrastruktur dan sarana dari semua jenis angkutan yang ada, yaitu : jaringan jalan, pelengkap jalan, fasilitas jalan, angkutan umum dan pribadi, dan jenis kendaraan lain yang menyelenggarakan proses pengangkutan, yaitu memindahkan orang atau bahan dari suatu tempat ketempat yang lain yang dibatasi jarak tertentu (Sumarsono, 1996). Menurut Undang – Undang No. 22 Tahun 2009 tentang lalu lintas, didefinisikan gerak kendaraan dan orang di ruang lalu lintas jalan. Ruang lalu lintas jalan adalah prasarana yang berguna bagi gerak pindah kendaraan, orang, dan barang yang berupa jalan dan fasilitas penumpang.



5.2. Kecepatan

Kecepatan merupakan parameter utama kedua yang menjelaskan keadaan arus lalu lintas di jalan. Kecepatan dapat didefinisikan sebagai gerak dari kendaraan dalam jarak persatuan waktu. Dalam gerakan arus lalu lintas, tiap kendaraan berjalan dengan kecepatan yang berbeda. Dengan demikian arus lalu lintas tidak dikenal karakteristik kecepatan tunggal akan tetapi sebagai distribusi dari kecepatan kendaraan tunggal. Dari hal tersebut, maka jumlah rata-rata atau nilai tipikal dapat digunakan untuk mengetahui karakteristik dari arus lalu lintas. Dalam perhitungannya kecepatan rata-rata dibedakan menjadi dua, yaitu :

1. *Time Mean Speed* (TMS) yang didefinisikan sebagai kecepatan rata-rata dari seluruh kendaraan yang melewati suatu titik dari jalan selama periode tertentu.
2. *Space Mean Speed* (SMS) yakni kecepatan rata-rata dari seluruh kendaraan yang menempati penggalan jalan selama periode waktu tertentu.



5.3. Kepadatan Lalu Lintas

Jumlah kendaraan persatuan panjang jalan dengan beberapa unit kendaraan per kilometer. kondisi lalu lintas yang dimaksud sebagai jumlah kendaraan yang menempati suatu arus jalan tertentu, lajur lalu lintas yang biasanya dinyatakan dalam satuan kendaraan per kilometer. kepadatan menunjukkan kemudahan bagi kendaraan untuk bergerak, seperti pindah lajur dan memilih kecepatan yang diinginkan.

Faktor-faktor yang diakibatkan kepadatan lalu lintas:

1. Banyak pengguna jalan yang tidak tertib.
Pengguna jalan yang tidak tertib sehingga dapat mengganggu kelancaran lalu lintas sehingga akan mengakibatkan kemacetan lalu lintas
2. Pemakai jalan melawan arus.
Adanya system satu arah [ada jalan diharapkan dapat mengurangi kemacetan lalu lintas, tidak ada kendaraan yang keluar masuk persimpangan dan kentaannya masih banyak pemakai jalan yang melawan arah sehingga berlawanan arus pada lajur yang mrngganggu kelancaran arus lalu lintas.



-
3. Kurangnya petugas lalu lintas yang mengawasi/mengatur.

Kurangnya jumlah petugas lalu lintas dalam mengatasi dan mengatur jalan lalu lintas terutama di jalan yang rawan macet lalu lintas.

4. Persimpangan jalan tidak dikendalikan dengan lampu lalu lintas/traffic light.

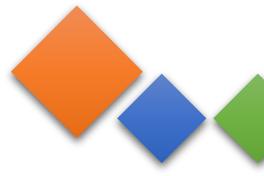
Persimpangan yang sangat sering dapat menimbulkan kemacetan seharusnya dapat diatur dengan lampu lalu lintas/traffic light dengan waktu yang telah disesuaikan sehingga tidak akan menimbulkan kemacetan lalu lintas.

5. Terjadi konflik antara kendaraan arah lurus dengan kendaraan arah belok.

Konflik yang terjadi antara kendaraan yang arus lurus dan arah belok sering terjadi ditikungan jalan karena para pengguna jalan tidak adayang mau mengalah sehingga menimbulkan kemacetan lalu lintas.

6. Adanya mobil yang parkir dipinggir jalan.

Kemacetan lalu lintas dan parker sembarangan merupakan problem yang tidak dapat dituntaskan



karena banyaknya mobil yang parker dipinggir jalan sehingga mengakibatkan ruas jalan sempit sehingga pergerakan arus lalu lintas tidak dapat melewati jalan tersebut dan akibatnya penyempitan jalan. kendaraan yang lewat terpaksa berjalan lambat, dan bahkan sama sekali tidak bisa bergerak.

7. Rambu-rambu lalu lintas kurang jelas dan banyak yang hilang.

Rambu rambu lalu lintas sebagai penagtur lalu lintas kurang jelas dan bahkan banyak yang hilang sehingga mengakibatkan kemacetan lalu lintas. untuk itu sangat perlu dipasang kembali rambu rambu lalu lintasyang hilang dan memperbaiki rambu rambu lalu lintas yang kurang jelas.

8. Rambu-rambu lalu lintas banyak yang hilang.
9. Rambu lalu lintas yang telah dipasang diruas jalan sebaiknya dipelihara dan yang tidak jelas atau rusak supaya segera diganti demi kelancaran lalu lintas.



5.4. Flow sama dengan Densitas Dikalikan dengan Kecepatan

Aliran lalu lintas pada ruas jalan raya terdapat tiga hal yang sangat penting digunakan untuk mengetahui karakteristik arus lalu lintas, yaitu:

a. Volume (*Flow*)

Adalah jumlah kendaraan yang melewati titik tertentu pada suatu ruas jalan persatuan waktu tertentu. Volume arus lalu lintas, dinyatakan dengan notasi V adalah jumlah kendaraan yang melintas pada suatu titik tertentu dalam suatu ruas jalan tertentu, dalam satu satuan waktu tertentu, bias dinyatakan dalam satuan kendaraan/jam (Tamin, 2008)

b. Kecepatan (*speed*)

adalah jarak yang dapat ditempuh suatu kendaraan pada ruas jalan per satuan waktu.

c. Kepadatan (*density*)

adalah jumlah kendaraan per satuan panjang jalan tertentu.



Flow (volume), Kecepatan, dan kepadatan dari lalu lintas dihubungkan dengan persamaan :

$$\text{Flow (volume)} = \text{kecepatan} \times \text{kepadatan}$$

Atau

$$V = S \times D$$

Keterangan :

V = volume arus lalu lintas (kendaraan/jam)

S = kecepatan ruang rata-rata (km/jam)

D = kepadatan/density (kendaraan/jam)

5.5. Jumlah Konservasi Kendaraan

Konservasi kendaraan adalah usaha yang dilakukan untuk meminimalisir terjadinya pematatan kendaraan yang ada di jalan raya dikarenakan keadaan jalan yang sudah tidak memadai. Telah kita ketahui bahwa variabel utama dalam arus lalu lintas adalah $\mu(x,t)$ dan $\rho(x,t)$. Perlu diketahui bahwa variabel lalu lintas yaitu kecepatan kepadatan dan juga aliran tidak hanya tertuju pada suatu kendaraan tertentu namun harus digunakan dalam kendaraan yang jumlahnya lebih dari satu. Jika



posisi $x = a$ dan $x = b$ maka kita bisa merumuskan jumlah kendaraan dengan mengintegrasikan kepadatan lalu lintas

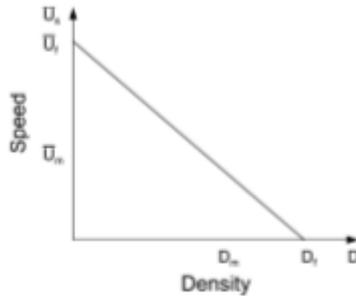
$$N = \int_b^a \rho(x, t) dx$$

Jika dengan solusi tersebut juga tidak terdapat pintu baik pintu keluar maupun pintu masuk maka jumlah kendaraan pada interval $x = a$ dan $x = b$ masih tetap dapat berubah sesuai waktu. Bila terjadi demikian maka kita dapat melakukan penurunan jumlah kendaraan karena adanya kendaraan yang keluar dari posisi b dan sebaliknya jika terdapat peningkatan arus yaitu dengan jumlah masuknya sejumlah dengan kendaraan yang berasal dari segmen a .

5.6. Hubungan Kepadatan dengan Kecepatan

Kecepatan akan menurun jika adanya kepadatan yang bertambah. Kecepatan arus bebas terjadi jika adanya kepadatan yang nilainya sama dengan nol dan jika kecepatan sama dengan nol maka yang akan terjadi adalah kemacetan. Hubungan kepadatan dengan kecepatan akan ditunjukkan pada gambar berikut:





Gambar 5.6 Hubungan Kepadatan dan Kecepatan

Pada gambar 1 kita bisa melihat hubungan antar kecepatan dan kepadatan sebagai bentuk sederhana dari hubungan yang dinyatakan secara linier. Kecepatan akan mengalami penurunan apabila kepadatan bertambah. Kecepatan arus bebas dapat terjadi jika nilai kepadatan sama dengan nol dan nilai kecepatan sama dengan nol maka akan terjadilah jam density. Variabel kepadatan dan kecepatan dapat dihubungkan dalam satu persamaan yaitu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

Persamaan di atas digunakan untuk mengetahui tingkat kepadatan di masa yang akan datang dengan mengetahui tingkat kepadatan pada mulanya. Kecepatan dan kendaraan secara teknis tergantung pada pengendara.

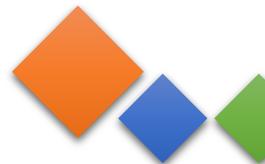
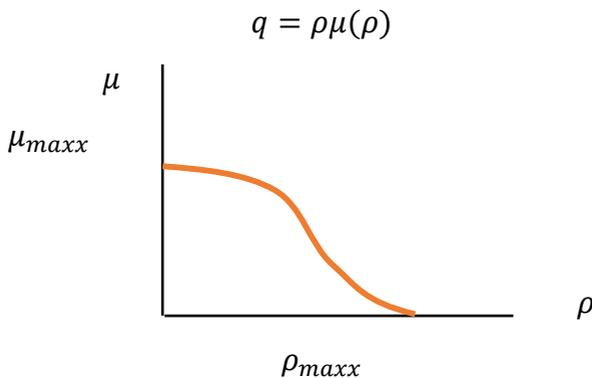


Dapat kita ketahui bersama bahwa jika pengendara melaju dengan kecepatan yang kencang pada saat kepadatan kendaraan rendah dan akan melaju melambat jika kepadatan kendaraan tinggi. Nah dari pernyataan di atas kita dapat mengasumsikan bahwa kecepatan kendaraan akan bergantung kepada kepadatan kendaraan.

$$\mu = \mu(\rho)$$

5.7. Aliran Kemacetan (Traffic Flow)

Traffic-Flow merupakan sebuah sistem yang menampilkan informasi statistik akan besar atau banyaknya paket-paket yang melewati sebuah router. Maka dengan fitur ini kita bisa melakukan monitoring terhadap sebuah jaringan dan memungkinkan bagi kita untuk mengidentifikasi berbagai macam masalah yang terjadi di dalamnya.



5.8. Model Kendaraan dalam Kondisi Steady State

Pada kondisi steady-state, perubahan karakteristik kendaraan (yaw rate dan sudut slip) terhadap waktu diabaikan ($dt = 0$; $dr/dt = 0$). Penyederhanaan kondisi steady-state diatas disubstitusikan kedalam persamaan (1) dan (2) dan didapatkan persamaan output variabel gerak belok kendaraan berupa radius belok (ρ), yaw rate (r), dan sudut slip (β) pada persamaan (5)— (7).

$$\rho = \left(1 - \frac{m}{2l^2} \frac{l_f K_f - l_r K_r}{K_f K_r} V^2\right) \frac{l}{\delta} \quad (5)$$

$$r = \frac{1}{1 - \frac{m}{2l^2} \frac{l_f K_f - l_r K_r}{K_f K_r} V^2} \frac{V}{l} \delta \quad (6)$$

$$\beta = \left(\frac{1 - \frac{m}{2l} \frac{l_f}{l_r K_r} V^2}{1 - \frac{m}{2l^2} \frac{l_f K_f - l_r K_r}{K_f K_r} V^2}\right) \frac{l_r}{l} \delta \quad (7)$$

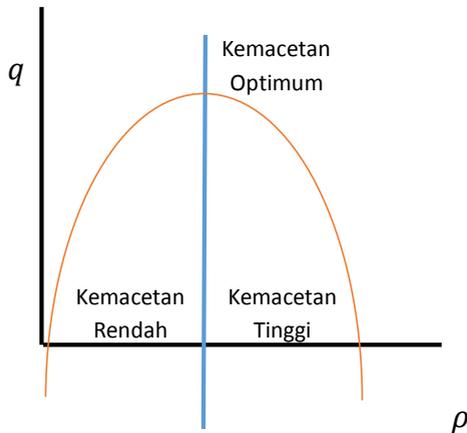


5.9. Tingkat Kepadatan Kemacetan

Grafik di bawah menunjukkan garis yang memisahkan antara kemacetan yang tinggi dengan



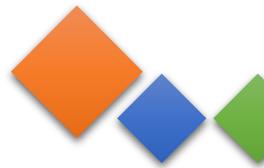
kemacetan yang rendah dan merupakan titik optimum dari kepadatan.



Gambar 5.9 Kurva Kemacetan Tinggi dan Rendah

Kepadatan berkaitan dengan kapasitas jalan yang terutama dapat menangani jumlah kendaraan yang dapat dimuat oleh badan jalan. Terdapat dua masalah kecepatan yakni kecepatan masing-masing kendaraan dan kecepatan sejauh mana kemacetan yang akan dilambangkan dengan diagram kemacetan jalan yaitu

$$c = \frac{dq}{d\rho} |_{\rho = \rho_0}$$



5.10. Interpretasi Kemacetan

Kemacetan terjadi jika sebuah jalan sudah mencapai kategori merah, yaitu mengalami kepadatan tinggi hingga kepadatan puncak (kendaraan sudah tidak dapat sama sekali untuk berpindah tempat)

- a. Tidak ada lampu lalu lintas sehingga sebuah fase terdiri dari 67 detik lampu hijau saja dan lampu merah tidak dipedulikan.
- b. Untuk mempermudah perhitungan, maka perhitungan dilakukan pada detik kelipatan dua atau bilangan genap saja.

5.11. Aliran Kemacetan Seragam

Kemacetan lalu lintas terjadi bila ditinjau dari tingkat pelayanan jalan yaitu pada kondisi lalu lintas mulai tidak stabil, kecepatan operasi menurun relatif cepat akibat hambatan yang timbul dan kebebasan bergerak relatif kecil. Pada kondisi ini volume kapasitas lebih besar atau sama dengan $0,80 VC > 0,80$ jika tingkat pelayanan sudah mencapai (E) aliran lalu lintas menjadi tidak stabil sehingga terjadilah tundaan berat yang disebut dengan kemacetan lalu lintas.



Untuk ruas jalan perkotaan, apabila perbandingan volume per kapasitas menunjukkan angka diatas 0,85 sudah dikategorikan tidak ideal lagi yang secara fisik dilapangan dijumpai bentuk permasalahan kemacetan lalu lintas. Jadi kemacetan adalah turunnya tingkat kelancaran lalu lintas pada jalan yang ada, dan sangat mempengaruhi pelaku perjalanan, baik yang menggunakan angkutan umum maupun angkutan pribadi, hal ini berdampak pada ketidaknyamanan serta menambah waktu perjalanan bagi pelaku perjalanan.

Kemacetan mulai terjadi jika arus lalu lintas mendekati besaran kapasitas jalan. Kemacetan semakin meningkat apabila arus begitu besarnya sehingga kendaraan sangat berdekatan satu sama lain. Kemacetan total terjadi apabila kendaraan harus berhenti atau bergerak sangat lambat. Lalu lintas tergantung kepada kapasitas jalan, banyaknya lalulintas yang ingin bergerak tetapi kalau kapasitas jalan tidak bisa menampung, maka lalulintas yang ada akan terhambat dan akan mengalir sesuai dengan kapasitas jaringan jalan maksimum.



5.12. Kemacetan Tidak Seragam

Tipe kemacetan menjadi tiga yaitu *recurent congestion*, *non-recurrent congestion* dan *pre-congestion* atau *border line congestion*. *Recurrent congestion* adalah kemacetan yang terjadi secara berulang dan terus menerus, misalnya pada periode pagi pada saat pergi kerja dan sore pada pulang kerja. *Non-recurrent congestion* adalah kemacetan yang terjadi karena adanya suatu insiden misalnya kecelakaan lalu lintas. *Pre-congestion* atau *borderline congestion* adalah tipe kemacetan yang terjadi ketika kecepatan aktual kendaraan berada di bawah kecepatan arus bebas yang mengakibatkan kerugian bagi pengguna jalan berupa pemborosan konsumsi bahan bakar, waktu yang terbuang, pencemaran lingkungan (Sugiyanto, 2011).

Menurut Hobbs (1979), kecepatan adalah laju perjalanan yang biasanya ditempuh dalam satu satuan waktu tertentu, biasanya dinyatakan dalam satuan km/jam dan umumnya dibagi menjadi tiga jenis, yaitu sebagai berikut :

1. Kecepatan setempat (*Spot Speed*)



Kecepatan setempat (*Spot Speed*) adalah kecepatan kendaraan diukur pada suatu saat dan pada suatu tempat yang ditentukan.

2. Kecepatan bergerak (*Running Speed*)

Kecepatan bergerak (*Running Speed*) adalah banyaknya waktu yang diperhitungkan dalam menempuh suatu perjalanan, dimana waktu yang di perhitungkan adalah pada saat kendaraan bergerak saja. Sedangkan waktu berhenti akibat adanya hambatan (kemacetan) tidak diperhitungkan.

3. Kecepatan perjalanan (*Journey Speed*)

Kecepatan perjalanan (*Journey Speed*) adalah kecepatan efektif kendaraan yang sedang dalam perjalanan antara dua tempat, dan merupakan jarak antara dua tempat dibagi dengan lama waktu bagi kendaraan untuk menyelesaikan perjalanan antara dua tempat tersebut, dengan lama waktu mencakup setiap waktu berhenti yang ditimbulkan oleh hambatan (penundaan) lalu lintas.



Metode yang umum digunakan dalam menentukan kecepatan lalu lintas, yaitu metode kendaraan contoh (*Floating Car Method*), di mana metode ini dilakukan dengan kendaraan contoh yang dikendarai pada arus lalu lintas, dengan mengikuti salah satu dari kondisi operasi sebagai berikut ini :

- a. Pengemudi berusaha membuat kendaraan contoh mengambang pada arus lalu lintas, dalam arti mengusahakan agar jumlah kendaraan yang menyiap dan disiap kendaraan contoh adalah sama, Pengemudi mengatur kecepatan kendaraan contoh disesuaikan dengan perkiraan kecepatan arus lalu lintas.
- b. Kendaraan contoh melaju sesuai dengan kecepatan batas kecuali terhambat oleh kondisi lalu lintas. Sedangkan untuk kecepatan arus bebas (FV) didefinisikan sebagai kecepatan pada tingkat arus nol, yaitu kecepatan yang dipilih pengemudi jika mengendarai kendaraan bermotor tanpa dipengaruhi oleh kendaraan bermotor lain di jalanan atau dapat dikatakan kecepatan pada saat kepadatan kosong, yaitu pada saat tidak ada



kendaraan. Untuk jalan tak terbagi semua analisis (kecuali analisis kelandaian khusus) dilakukan pada kedua arah, sedangkan untuk jalan terbagi dilakukan pada masing-masing arah dan seolah-olah tiap arah adalah jalan satu arah yang terpisah.



BAB VI

PEMODELAN DI BIDANG PERTUMBUHAN EKONOMI

6.1. Teori Pertumbuhan Ekonomi

Suatu perekonomian dikatakan mengalami pertumbuhan jika jumlah produksi barang dan jasanya meningkat. Artinya, pertumbuhan ekonomi menunjukkan peningkatan aktivitas perekonomian di tengah masyarakat yang menyebabkan kenaikan produksi barang dan jasa, serta berujung pada bertambahnya pendapatan nasional.

Sementara dalam studi ekonomi makro, definisi pertumbuhan ekonomi adalah sebuah proses dari perubahan kondisi perekonomian yang terjadi di suatu negara secara berkesinambungan untuk menuju keadaan yang dinilai lebih baik selama jangka waktu tertentu.

Definisi itu menjelaskan, pertumbuhan ekonomi menunjukkan perubahan kondisi perekonomian di suatu negara yang menjadi simbol keberhasilan pembangunan.

Sementara teori pertumbuhan ekonomi merupakan konsep untuk menjelaskan faktor-faktor yang bisa

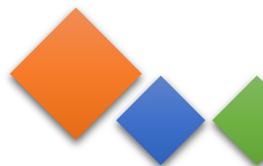


mempengaruhi atau menentukan pertumbuhan ekonomi dalam proses jangka panjang. Teori pertumbuhan juga menjelaskan bagaimana faktor-faktor itu berinteraksi satu dengan yang lain sehingga dapat menimbulkan terjadinya proses pertumbuhan ekonomi. Salah satu contoh indikator pertumbuhan ekonomi ialah produk domestik bruto (PDB) yang biasa dihitung dalam periode tiga bulan (triwulan) dan tahunan. PDB mengukur dua hal, yakni pendapatan total dari seluruh penduduk di sebuah wilayah ekonomi, dan jumlah keseluruhan nilai belanja barang dan jasa di kawasan perekonomian itu. Oleh karena itu, PDB didefinisikan sebagai nilai pasar seluruh barang dan jasa yang diproduksi suatu negara pada periode tertentu.

6.2. Teori Pertumbuhan Ekonomi Klasik dan Neoklasik

A. Teori Pertumbuhan Ekonomi Klasik

Teori pertumbuhan klasik menilai bahwa ekonomi pada suatu Negara dapat dikatakan menurun apabila populasi di Negara itu bertambah sedangkan sumber daya alam dan manusia terbatas. Menurut adam smith, bertambahnya jumlah penduduk akan membuat perekonomian semakin tumbuh pesat. Orang yang ahli di



bidangnya juga dapat membuat meningkatnya produktivitas para pekerja.

Menurut David Ricardo jika pertumbuhan penduduk meningkat maka ekonomi akan semakin menurun karena tingkat populasi yang tinggi tersebut akan meningkat pula jumlah para pekerja sehingga upah yang dihasilkan akan minimum.

B. Teori Pertumbuhan Ekonomi Neoklasik

Teori Pertumbuhan Neoklasik adalah suatu model pertumbuhan ekonomi yang menjelaskan bahwa ekonomi di suatu Negara dapat stabil apabila beberapa pilar yang dapat menguatkan ekonomi terpenuhi. Yaitu adanya tenaga kerja, modal yang cukup dan teknologi yang canggih.

6.3. Aplikasi Persamaan Diferensial Pada Model Pertumbuhan Ekonomi

Pemodelan dalam matematika merupakan ilmu terapan yang termasuk cabang dari matematika dan sangat bermanfaat dalam kehidupan ini. Pemodelan matematika telah banyak diterapkan untuk mendeskripsikan permasalahan nyata, termasuk dalam dunia ekonomi.

Dalam hal ekonomi, persamaan diferensial bisa digunakan pada penurunan kesetimbangan antara harga



penawaran dengan permintaan. Kita dapat melakukan langkah awal berupa dibentuknya suatu model matematika yang didapat dari masalah sehari-hari terkait ekonomi. Hukum ekonomi mengatur pemodelan ekonomi secara sederhana saja. Sehingga masalah dari fenomena ekonomi yang belum kita ketahui dapat dibuat pemodelannya menggunakan pemodelan matematika.

Pembahasan untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan Matematika terdapat tiga langkah yang harus dilakukan:

Step 1: Membuat Model Matematika dari proses, yaitu penerjemahan informasi yang diberikan dan data ke dalam bentuk matematika, yaitu ke dalam suatu model matematika.

Step 2: Menyelesaikan model matematika. Yaitu penyelesaian model matematika dengan pemilihan dan penggunaan metoda matematika yang sesuai.

Step 3: Interpretasi hasil yang diperoleh, yaitu pemahaman dan implikasi penyelesaian matematika untuk masalah khusus.



6.4. Aplikasi Persamaan Diferensial Linier Orde Satu dalam Ekonomi

Masalah ekonomi yang berhubungan dengan penawaran, permintaan dan harga pasar dari komoditi tunggal, dapat diselesaikan dengan matematika. Model sederhana yang akan digunakan adalah model linier. Dengan cara berikut:

Step 1: Menyusun Model Matematika

Jika Diketahui permintaan adalah D , penawaran adalah Q dan harga adalah P . Permintaan D berdasarkan pada harga. Jadi, dapat dituliskan

$$D = D(P)$$

Akan tetapi, karena modelnya linier maka model yang dapat dibentuk

$D(P) = a + bP$, dengan a , b , adalah konstanta dan $b < 0$.

Penawaran juga berdasarkan pada harga, secara umum ditulis

$$Q = Q(P)$$

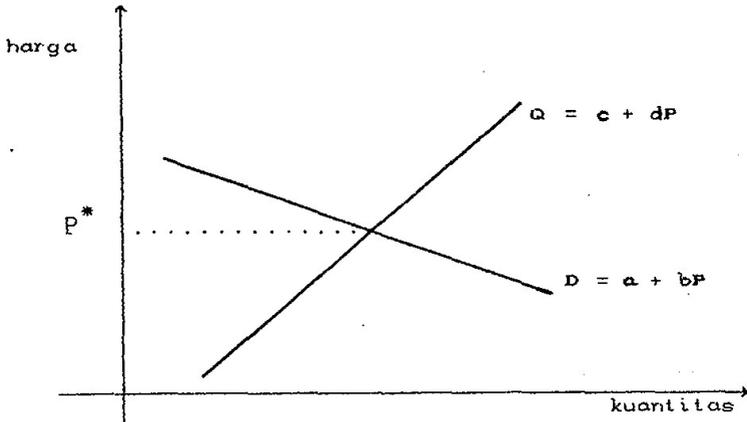
karena modelnya linier maka model matematikanya :

$Q(P) = c + dP$, dengan c dan d adalah konstanta d bernilai positif karena harga naik maka produksi ikut naik.

Pada gambar berikut dideskripsikan hubungan antara harga, permintaan dan penawaran, di mana D



sebagai fungsi dari P adalah monoton turun dan Q sebagai fungsi dari P adalah monoton naik.



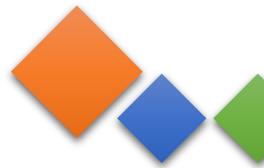
P^* adalah harga kesetimbangan

Apabila penawaran = permintaan, Dengan $D = Q$ atau $a + bP = c + dP$ maka diperoleh

$$P = \frac{a-c}{d-b} = P^* \text{ (harga kesetimbangan)}$$

Harga dari produksi dianggap bukan harga kesetimbangan. Jika $P > P^*$, maka penawaran akan lebih dari permintaan ($Q > D$) dan harga akan turun. Sebaliknya, Jika ($P < P^*$) maka permintaan lebih dari penawaran ($D > Q$) dan harga akan naik.

Dapat digambarkan dengan menggunakan persamaan diferensial



$$\frac{dP}{dt} = \gamma(D - Q) \quad (\text{pers. 3})$$

Dengan γ konstanta dan $\gamma > 0$

Dari persamaan (1), (2) dan (3) diatas, dengan mensubstitusikan pers (1) dan (2) ke pers (3) maka didapat:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \gamma(a + bP - c - dP) \text{ atau} \\ \frac{dP}{dt} + \gamma(d - b) &= \gamma(a - c) \quad (\text{pers. 4}) \end{aligned}$$

Persamaan yang diperoleh diatas merupakan persamaan diferensial linear orde satu.

Step 2: Menyelesaikan Model Matematika

Dengan membandingkan dengan pers (4) dan

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t)y = r(t) \\ y(t) &= e^{-h(t)} \int e^{h(t)} \cdot r(t) dt + C e^{h(t)} \\ h(t) &= \int f(t) dt. \\ y &= p ; f(t) = \gamma y (d - b) ; r(t) = \gamma(a - c) \\ h(t) \int f(t) dt. &= \int \gamma(d - b) dt. \end{aligned}$$

Sehingga

$$P(t) = e^{-\gamma(d-b)t} \int e^{\gamma(d-b)t} \cdot \gamma(a - c) dt + C e^{-\gamma(d-b)t}$$



$$= e^{-\gamma(d-b)t} \frac{\gamma(a-c)}{-\gamma(d-b)}, e^{\gamma(d-b)t} + C e^{-\gamma(d-b)t}$$

$$= \frac{a-c}{d-b} + C e^{-\gamma(d-b)t}$$

Karena $\gamma > 0$, $d > 0$ dan $b > 0$, mengakibatkan $\gamma(d-b) > 0$

Maka $P(t) \rightarrow \frac{a-c}{d-b} = P^*$ adalah nilai kesetimbangan harga.

Step 3: Menentukan penyelesaian matematika untuk masalah khusus

Contoh

Jika fungsi permintaan D adalah $D(P) = 160 - \frac{3}{4}P$ dan fungsi penawaran Q adalah: $Q(P) = 20 + P$, Maka berapa harga kesetimbangannya ?

Penyelesaian

Fungsi permintaan D: $D(P) = 160 - \frac{3}{4}P$

Fungsi penawaran Q: $Q(P) = 20 + P$

Diketahui $a = 160$; $b = -\frac{3}{4}$; $c = 20$; $d = 1$.Maka harga kesetimbangan:



$$P = \frac{a - c}{d - b} = \frac{160 - 20}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{140}{\frac{7}{4}} = 80$$

Jadi, harga kesetimbangan $P = 80$. dan banyak barang yang terjual adalah

$$Q = 20 + P$$

$$Q = 100 \text{ (Jumlah barang yang dijual).}$$

6.5. Aplikasi Persamaan Diferensial Linear Orde Dua dalam Ekonomi

Step 1 : Membuat Model Matematika

Berdasarkan bentuk industri tunggal diatas.diketahui bahwa:

$$D = a + bP \text{ (Pers 5)}$$

$$Q = c + dP \text{ (Pers 6)}$$

Dalam hal ini berdasarkan barang yang tersedia dan semua penawaran tidak terjual, Maka barang yang tersedia semakin banyak . Dengan banyak barang yang tersedia $S(t)$ dengan waktu $t = 0$ dan $t = t$. diperoleh :



$$S(t) = S(0) = \int_0^t [Q(t) - D(t)] dt$$

Dengan dideferensialkan menjadi

$$\frac{dS}{dt} = Q(t) - D(t) \dots\dots\dots \text{(Pers 7)}$$

Dengan Persamaan harga diketahui:

$$\frac{dP}{dt} = \gamma(D - Q) = -\gamma \frac{dS}{dt}$$

Kemudian model ini dimodifikasi. Bila persediaan barang bertambah banyak dari yang telah ditetapkan sebelumnya, yaitu

$S_0 = S(0)$, maka membutuhkan biaya penyimpanan sehingga harga akan turun. Produsen akan berusaha mengurangi

kelebihan persediaan barang. Dan jika persediaan barang menurun maka harga barang akan naik.

Diperoleh :

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma \frac{dS}{dt} + \gamma(S_0 - S) \dots\dots\dots \text{(Pers 8)}$$

$\gamma > 0$, *suatu konstan*



Dari persamaan diatas. Diperolah bahwa persediaan barang So' itu berdasarkan pada permintaan D. Sehingga

$$S_o = ID + m \quad \dots\dots\dots \text{(Pers 9)}$$

I dan m adalah konstanta

Step 2: Menyelesaikan Model Matematika

Eliminasikan D, Q dan So' pada Persamaan (5) sampai (9),maka diperoleh

$$\frac{dP}{dt} = [\gamma(d - b) - \lambda I b]. P + \lambda S = \gamma(a - c) + \lambda(Ia + m) \dots$$

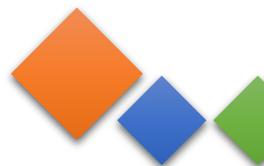
Pers (10)

$$\frac{dS}{dt} - (d - b) = c - a \quad \dots\dots\dots \text{(Pers 11)}$$

dalam keadaan setimbang

$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{dS}{dt} = 0$$

Melalui persamaan (11) maka



$$P^* = -\left(\frac{c-a}{d-b}\right) \dots\dots\dots \text{(Pers 12)}$$

diperoleh nilai kesetimbangan harga. Kemudian melalui persamaan (10) diperoleh

$$\lambda S^* = \gamma(a - c) + \lambda(Ia + m - \gamma(d - b)P^* + \lambda Ib \cdot P^*$$

menggunakan (pers 12)

$$\gamma(d - b)P^* = \gamma(a - c)$$

Diperoleh

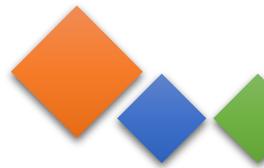
$$S^* = Ia + m + Ib \left(\frac{a-c}{d-b}\right) \dots\dots\dots \text{(Pers 13)}$$

Pada keadaan setimbang, persamaan (10) dan (11) menjadi

$$[\gamma(d - b) - \lambda Ib] \cdot P^* + \lambda S^* = \gamma(a - c) + \lambda(Ia + m) \dots$$

(Pers 14)

Dan $-(d - b)P^* = c - a \dots\dots\dots \text{(Pers 15)}$



Dari persamaan (10) didiferensialkan diperoleh

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \alpha \frac{dP}{dt} + \lambda \frac{dS}{dt} = 0$$

$$\alpha = \gamma(\mathbf{d} - \mathbf{b}) - \lambda \mathbf{Ib}$$

Dengan menggunakan persamaan (11) dieliminasi $\frac{dS}{dt}$, diperoleh

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \alpha \frac{dP}{dt} + \lambda \beta P = -\lambda(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$

$$\text{dimana, } \beta = \mathbf{d} - \mathbf{b}$$

Bentuk Persamaan (11) dan (12) termasuk persamaan diferensial linier orde dua.

Bentuk persamaan karakteristiknya,

$$x^2 + \alpha x + \lambda \beta = 0$$

Maka penyelesaian umum persamaan diferensialnya adalah

$$P(t) = Ae^{x_1 t} + Be^{x_2 t} + P^*$$

$$\text{Dimana } P^* = \frac{-\lambda(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\lambda(\mathbf{d}-\mathbf{b})} = \frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{\mathbf{d}-\mathbf{b}}$$



DAFTAR PUSTAKA

- Akrom, Muhammad. 2010. Terapi Wudhu. Yogyakarta: Mutiara Media Al-Albani, M. Nashiruddin. 2008. Ringkasan Shahih Bukhari. Depok: Gema Insani.
- Al-Qur'an Terjemah. 2015. Departemen Agama RI. Bandung: CV Darus Sunnah.
- Allen, L. J. S., and Allen., A Comparison of Three Different Stochastic Population Models with Regard to Persistence Time. *Theoretical Population Biology* Texas Tech University, Lubbock, Texas 64 (2003), 439-449
- Allen, L. J. S., An Introduction to Stochastic Epidemic Models, Departemen of Mathematics and Statistic, Texas Tech University, Lubbock, Texas, 2008
- Andari, Ari. 2017. Aljabar Linier Elementer. Malang: UB Press.
- Annas, S., Pratama, M. I., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110072.
- Arofi, Zuhron. 2021. Optimis di Tengah Pandemi: Cara Rasulullah Menyelesaikan Masalah Pandemi. Lembaga Pengembangan Studi Islam: Universitas Muhammadiyah Magelang.

-
- Ayres, Frank, & Mendelson, Elliot. 2006. Kalkulus: Edisi Keempat. Jakarta: Erlangga.
- Boyce, W.E & DiPrima, R.C. 2001. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. New York: Von Hoffmann Press.
- Di Gennaro, F., Pizzol, D., Marotta, C., Antunes, M., Racalbuto, V., Veronese, N., & Smith, L. (2020). Coronavirus diseases (COVID-19) current status and future perspectives: a narrative review. *International journal of environmental research and public health*, 17(8), 2690.
- E. Harahap, F. H. Badruzzaman, M. Y. Fajar. Metoda Iteratif Pada Permasalahan Menara Hanoi. *Jurnal Matematika UNISBA*. Vol. 6 No. 1, 2007.
- Finizio, N & Ladas. 1988. Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua. Jakarta: Erlangga.
- Fitriani, V. N., & Purnomo, K. D. (2013). Estimasi Solusi Model Pertumbuhan Logistik dengan Metode Ensemble Kalman Filter Solution Estimation of Logistic Growth Model with Ensemble Kalman Filter Method. *Jurnal Ilmu Dasar*, 14(2), 85–90.
- Gotelli, N. J., A Primer of Ecology, Sinour Associates, Inc. University of Vermont, USA, 1995.
- Haberman, Richard. Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow. Prentice-Hall Inc. New Jersey. 1997
- Handayani, D., Hadi, D. R., Isbaniah, F., Burhan, E., & Agustin, H. (2020). Corona virus disease 2019. *Jurnal Respirologi Indonesia*, 40(2), 119-129.
- Hardiningsih, A, Y. 2010. Kajian Model Epidemik SIR



Deterministik dan Skokastik Pada Waktu Diskrit. Sura baya: Jurusan Matematika ITS.

Hobbs, F.D., 1979. *Traffic Planning and Engineering, Second edition, edisi Indonesia, 1995, terjemahan Suprpto T.M. dan Waldijono, Perencanaan dan Teknik Lalu Lintas, Edisi kedua*, Gadjah Mada University Press, Yogyakarta.

Matis, J. H., and T. R. Kiffe., Effect of Immigration on some Stochastic Logistic Models, *Theoretical Population Biology*, USA 56 (1999), 139-161.

Muhammad Fauzan, Sugimun, dan Sahid. (1993).

Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Ekonomi,
111-119.

Nugrahanto, R. dan S. (2010). *Penerapan Model Pertumbuhan Logistik Dengan Memperhatikan Laju Intrinsik Andrian Gun*. 1–8.

Pandu, Y. K. (2020). Prediksi Penduduk Kabupaten Alor Dengan Menggunakan Model Pertumbuhan Logistik Pada Beberapa Tahun Mendatang. *Asimtot : Jurnal Kependidikan Matematika*, 2(1), 71–81.

Suddin, A. (2017). *Model Pertumbuhan Logistik Dengan Waktu Tunda*. 11(2), 1–15. Suddin, A. (2017). *Model Pertumbuhan Logistik Dengan Waktu Tunda*. 11(2), 1–15.

Sugiyanto, G. dkk. (2011). *Pengembangan Model Biaya Kemacetan Bagi Pengguna Mobil Pribadi di*



Daerah Pusat Perkantoran Yogyakarta. Jurnal Transportasi Vol.11 No.2, 87-94.

Sumarsono, 1996. *Perencanaan Lalu Lintas*. Yogyakarta : UGM.

Taha, 1996. *Riset Operasi Jilid satu Edisi Kelima*. Jakarta : Binarupa Aksara.

Tamin, 2008. *Perencanaan, Pemodelan & Rekayasa Transportasi : Teori, Contoh Soal dan Aplikasi*, Bandung : Penerbit ITB.



