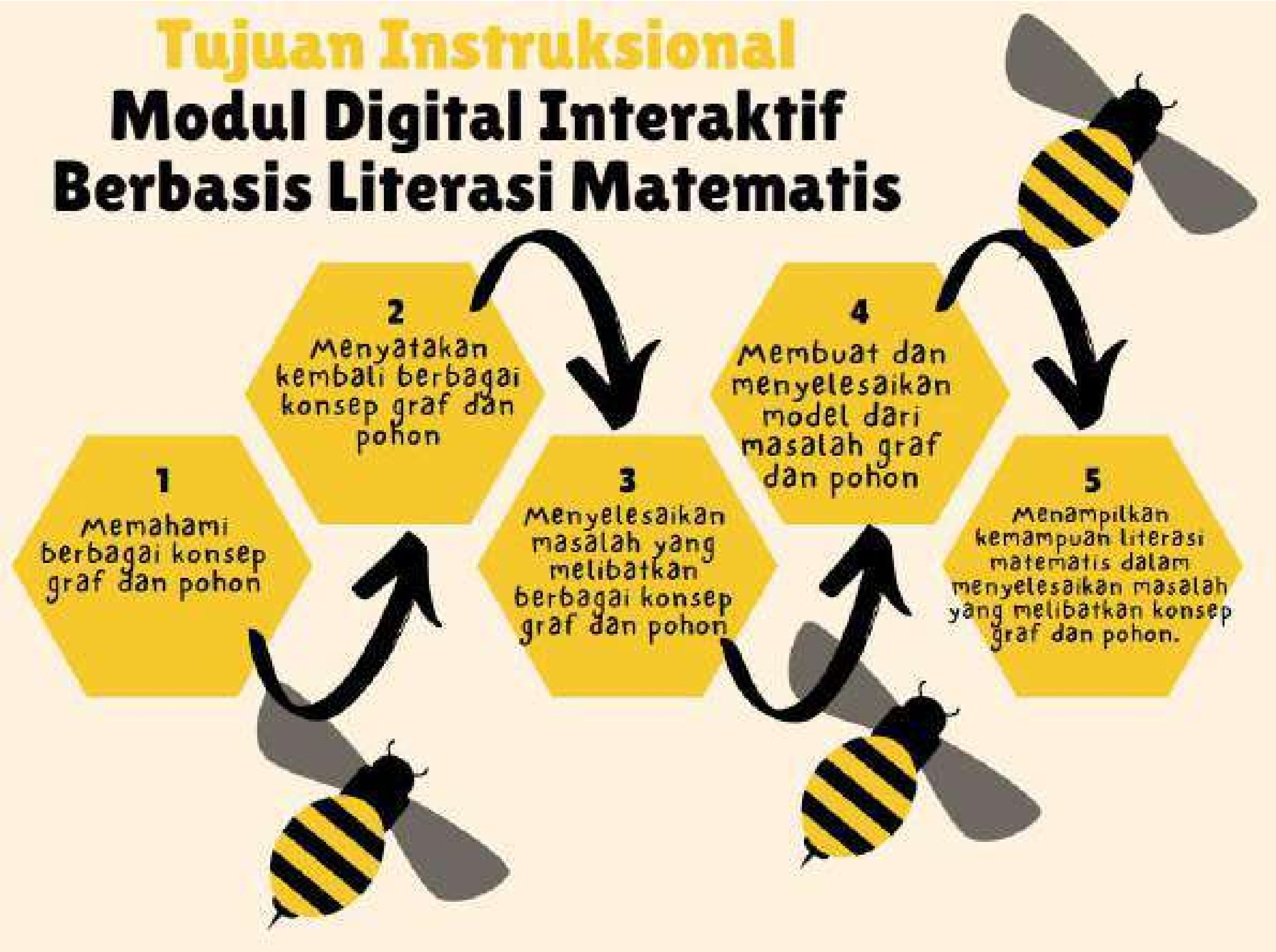
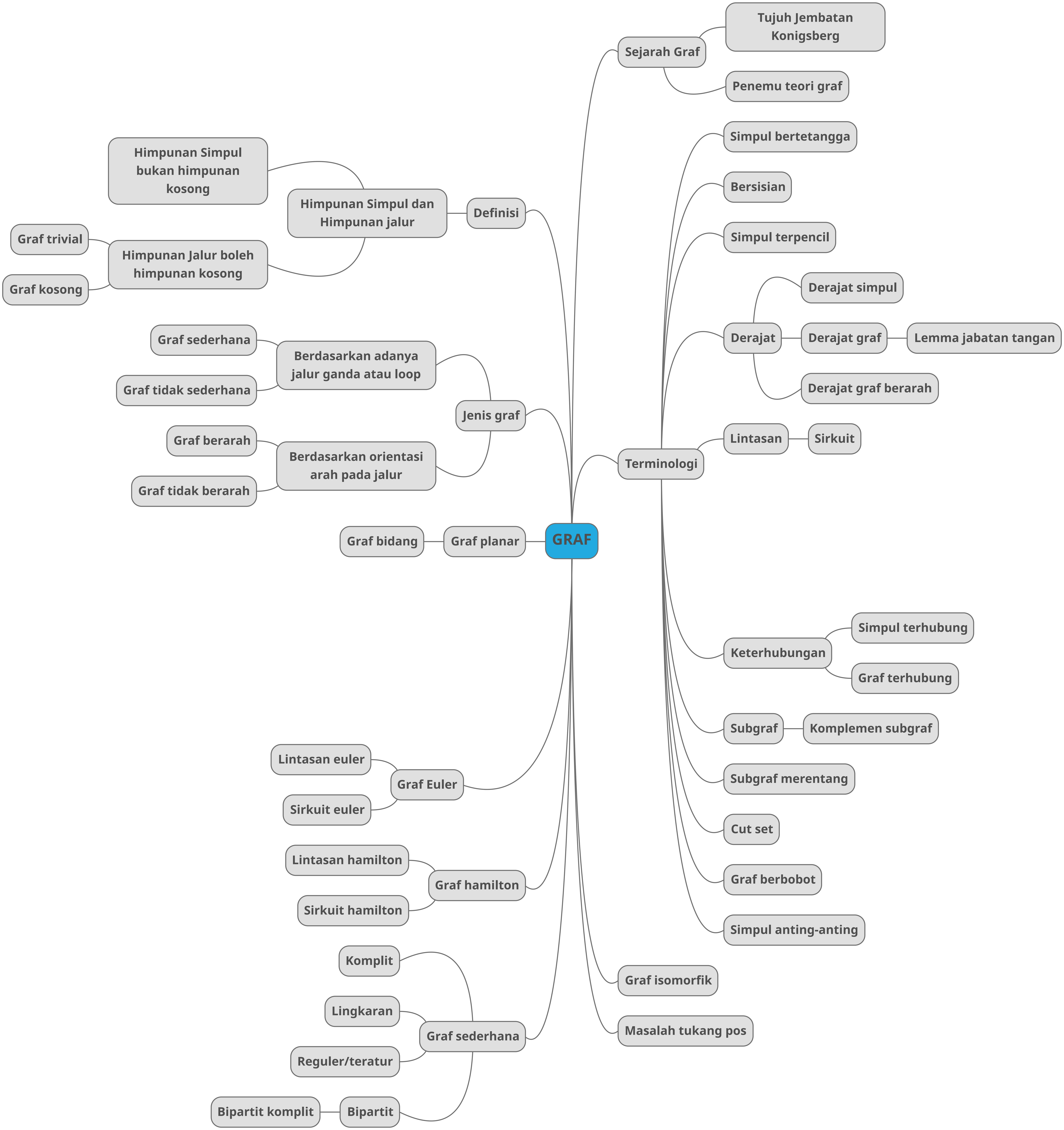
MODUL DIGITAL INTERAKTIF

MATEMATIKA DISKRIT

BERBASIS LITERASI MATEMATIS

ELLA ANDHANY , M.Pd


Tujuan Instruksional
Modul Digital Interaktif
Berbasis Literasi Matematis
1
Memahami berbagai konsep graf dan pohon
2
Menyatakan kembali berbagai konsep graf dan pohon
3
Menyelesaikan masalah yang melibatkan berbagai konsep graf dan pohon
4
Membuat dan menyelesaikan model dari masalah graf dan pohon
5
Menampilkan kemampuan literasi matematis dalam menyelesaikan masalah yang melibatkan konsep graf dan pohon.


GRAF
Sejarah Graf
Tujuh Jembatan Konigsberg
Penemu teori graf
Terminologi
Simpul bertetangga
Bersisian
Simpul terpencil
Derajat
Derajat simpul
Derajat graf
Lemma jabatan tangan
Derajat graf berarah
Lintasan
Sirkuit
Keterhubungan
Simpul terhubung
Graf terhubung
Subgraf
Komplemen subgraf
Subgraf merentang
Cut set
Graf berbobot
Simpul anting-anting
Graf isomorfik
Masalah tukang pos
Definisi
Himpunan Simpul dan Himpunan jalur
Himpunan Simpul bukan himpunan kosong
Himpunan Jalur boleh himpunan kosong
Graf trivial
Graf kosong
Jenis graf
Berdasarkan adanya jalur ganda atau loop
Graf sederhana
Graf tidak sederhana
Berdasarkan orientasi arah pada jalur
Graf berarah
Graf tidak berarah
Graf planar
Graf bidang
Graf Euler
Lintasan euler
Sirkuit euler
Graf hamilton
Lintasan hamilton
Sirkuit hamilton
Graf sederhana
Komplit
Lingkaran
Reguler/teratur
Bipartit
Bipartit komplit

TEORI GRAF

A. Pendahuluan

Cabang ilmu matematika yang mengkaji sifat graf dikenal dengan Teori Graf. Banyak sekali struktur yang bisa direpresentasikan dengan graf, dan banyak masalah yang bisa diselesaikan dengan bantuan graf. Jaringan persahabatan pada Facebook bisa direpresentasikan dengan graf, yakni simpul-simpulnya adalah para pengguna Facebook dan ada sisi antar pengguna jika dan hanya jika mereka berteman.

Graf sering digunakan untuk merepresentasikan sebuah objek dan hubungannya dengan objek lain. Sejarah teori graf bermula saat ahli matematika Swiss, Leonhard Euler memecahkan masalah jembatan Königsberg.

B. Sejarah Graf

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* yang sangat terkenal di Eropa.

Berikut kisahnya:

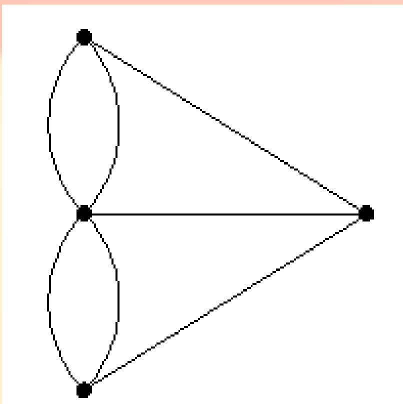
Tujuh Jembatan *Konigsberg*; Dapatkah Mengelilingi Konigsberg Dengan Melewati Tujuh Jembatan Tepat Satu Kali Dan Kembali Ke Titik Semula?

Konigsberg adalah sebuah kota pada Jerman kuno (Prussia). Setelah kekalahan Jerman di Perang Dunia 2 pada tahun 1945, kota ini diambil oleh Uni Soviet (sekarang Rusia) dan diubah namanya menjadi Kaliningrad. Di abad ke 18, Kota *Konigsberg* merupakan kota yang sangat besar dan makmur. Kota ini menjadi pusat perdagangan karena letaknya yang strategis, dilintasi oleh Sungai Pregel. Banyak perahu berlabuh untuk berdagang di sekeliling Pulau Kneiphof yang berada di tengah sungai ini. Untuk menghubungkan kota serta Pulau Kneiphoff, dibangun tujuh buah jembatan. Menurut cerita turun temurun, setiap hari Minggu sore para penduduk Kota *Konigsberg* suka sekali berjalan-jalan di sekitar sungai, menyebrangi jembatan sambil menikmati keindahan Kota *Konigsberg*. Agar lebih menarik, para penduduk iseng menciptakan sebuah tantangan, yakni: apakah kita bisa mengitari ke tujuh jembatan Konigsberg masing-masing tepat satu kali dari sebuah titik dan berakhir di titik itu kembali?

Adapun ilustrasi dari masalah 7 jembatan Konigsberg adalah seperti berikut ini:

Sumber gambar: https://scienceatelier.wordpress.com

Topologi grafnya adalah sebagai berikut:



Mereka terus mencari-mencari dan berjalan-jalan mengitari pulau, namun **tidak ada** satupun yang berhasil menemukan rute perjalanan yang dimaksud. Meski demikian, tidak ada yang yakin dan dapat menjelaskan bahwa rute seperti itu tidak ada. Tantangan ini menarik perhatian Leonhard Euler, salah seorang matematikawan terhebat sepanjang masa. Euler pun akhirnya berhasil menjelaskan tantangan ini dengan sangat baik. Euler menyatakan bahwa tidak mungkin setiap jalur pada graf dapat dilalui lebih dari satu kali jika derajat simpulnya tidak seluruhnya genap. Begitu baiknya solusi Euler ini sampai-sampai menjadi cikal bakal dari salah satu cabang ilmu di Matematika yaitu Teori Graf/ Grafik (*Graph Theory*).

Selanjutnya, kenalan dengan Euler dulu yuk !

Selesaikan lembar kerja berikut untuk mengenal euler

KLIK DISINI UNTUK MENGUMPULKAN JAWABAN

C. Aplikasi Ilmu Graf

Ilmu matematika ini sekarang banyak digunakan untuk menganalisa berbagai hal di kehidupan sehari-hari, mulai dari ilmu komputer, masalah transportasi, masalah jaringan listrik, hingga masalah kimia hidrokarbon.

Sumber gambar: canva.com

Sumber arus listrik dan segala perangkat yang dioperasikan dengan arus listrik seperti lampu, TV, dan alat elektronik lainnya dapat dipandang sebagai simpul (vertex), sedangkan kabel-kabel listrik untuk menyalurkan arus listrik tersebut dipandang sebagai jalur (edge)

Sumber gambar: https://pixabay.com

Jaringan pertemanan dalam media sosial merupakan aplikasi dari graf. Individu pemilik akun media sosial merupakan simpul-simpul grafnya, jalur pertemanan pada media sosial merupakan jalur grafnya.

Sumber gambar: canva.com

Gambar tersebut adalah gambar struktur senyawa metana (CH_4), salah satu senyawa kimia. Struktur senyawa kimia merepresentasikan sebuah graf.

https://www.kumparan.com

Kalian pasti tidak asing dengan rantai makanan tersebut, bukan? Rantai makanan merupakan konsep graf.

Sumber gambar: canva.com

Siklus air merupakan contoh sebuah graf.

Berikut ini lembar kerja yang harus kalian selesaikan agar kalian dapat memahami materi ini, klik gambar untuk melihat lembar kerja :

--Lembar Kerja 1—

KLIK DISINI UNTUK MENGUMPULKAN JAWABAN LKM

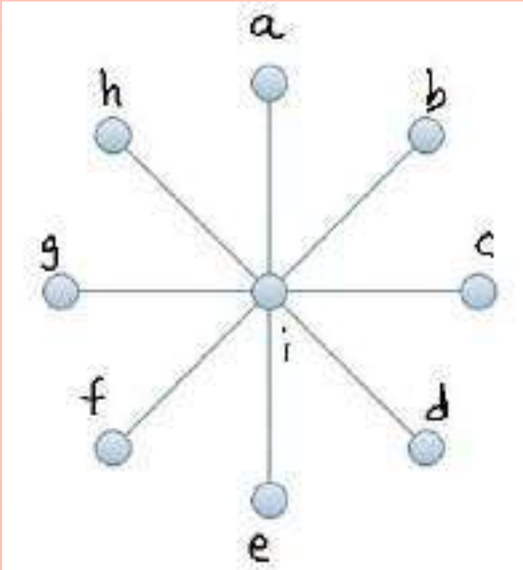
D. Definisi

Graf (G = V, E) adalah struktur diskrit yang terdiri atas himpunan simpul (V) dan himpunan jalur (E), dimana V≠ ∅. Sebuah graf boleh saja tidak mengandung jalur, tetapi tidak boleh tidak mengandung simpul.

Himpunan simpul diberi lambang V untuk menandai kata vertex yang berarti simpul. Simpul atau vertex ini dikenal pula dengan titik atau noktah. Dalam memberi nama vertex dapat menggunakan huruf kecil, angka, atau lambang v disertai dengan indexnya. Contohnya: simpul 1, simpul 2, simpul a, simpul b, simpul v_1, simpul v_2, dan seterusnya.

Sedangkan himpunan jalur diberi lambang E untuk menandai kata edge yang berarti jalur. Jalur atau edge ini dikenal juga dengan sisi, jalan, busur. Untuk memberi nama edge dapat menggunakan lambang e disertai indexnya, atau dengan pasangan tidak terurut simpul-simpul yang dihubungkannya. Contoh: e_1, e_2, (a,b), (b,a), (1,2), (2,1), dan sebagainya.

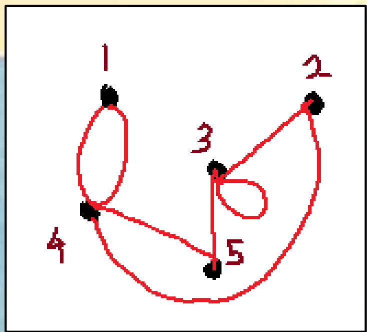
Berikut ini contoh graf:



Graf tersebut berbentuk bintang, memuat 9 simpul yakni: a,d,c, d,e, f, g, h, dan i, serta 8 jalur yakni: (a,i), (b,i), (c,i), (d,i), (e,i), (f,i), (g,i), dan (h,i).

Sebuah jalur harus menghubungkan sebuah simpul dengan simpul lainnya atau ke dirinya sendiri. Bila sebuah jalur menghubungkan sebuah simpul ke dirinya sendiri maka simpul itu disebut dengan loop atau gelang. Bila ada lebih dari satu jalur yang menghubungkan sepasang simpul maka beberapa jalur tersebut dinamakan jalur ganda.

Contoh:



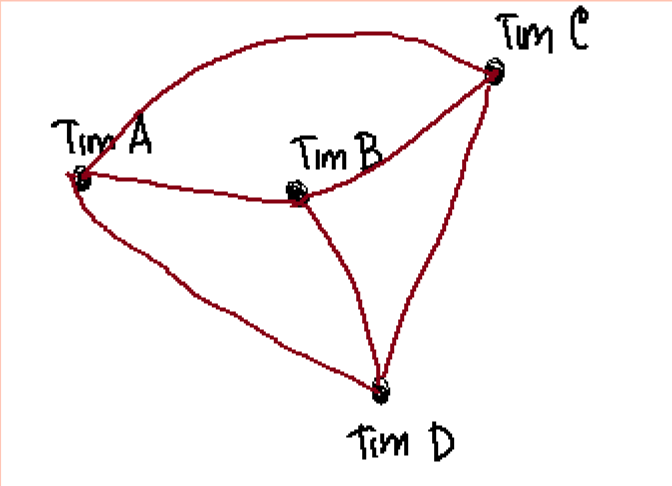
Graf tersebut memuat loop atau gelang yakni jalur (3,3), serta memuat jalur ganda yakni: (1,4) dan (4,1).

Berikut ini contoh sebuah permasalahan yang dapat direpresentasikan sebagai graf:

Empat tim gerak jalan masing-masing terdiri atas 20 orang. Mereka mulai bergerak dari titik yang berbeda dan waktu yang berbeda beberapa menit. Untuk berkomunikasi, pemimpin tim menggunakan Handy Talky. Jarak antar tim menentukan apakah handy talky mereka dapat menghubungkan komunikasi antar tim. Masalah ini dapat disajikan dalam graf dengan simpul merepresentasikan tim gerak jalan, dan hubungan komunikasi dengan handy talky merepresentasikan jalur.

Penyelesaian:

Empat tim direpresentasikan dengan simpul. Komunikasi dengan Handy Talky direpresentasikan dengan jalur. Keempat tim bisa saling berkomunikasi, artinya, ada jalur langsung yang menghubungkan tiap tim dengan tim lainnya. Graf yang sesuai dengan masalah ini adalah sebagai berikut:



Berikut ini lembar kerja yang harus kalian selesaikan agar kalian dapat memahami materi ini dengan baik, klik gambar untuk melihat lembar kerja:

--Lembar Kerja 2--

KLIK DISINI UNTUK MENGUMPULKAN JAWABAN LKM

E. Jenis Graf

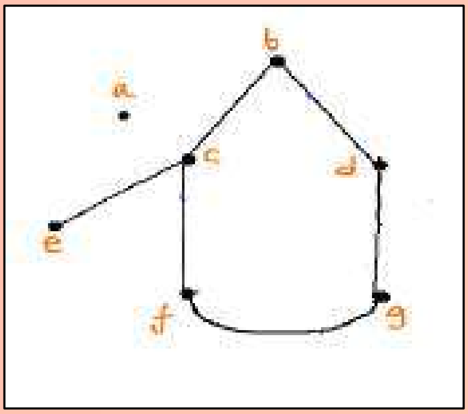
Graf dapat diklasifikasikan dalam beberapa kriteria:

1. Melihat apakah graf tersebut memuat jalur ganda dan atau loop:

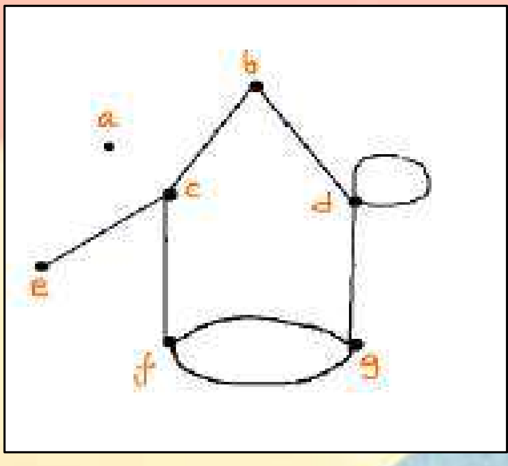
(i) Graf sederhana: tidak ada jalur ganda ataupun loop di dalamnya

(ii) Graf tidak sederhana: ada jalur ganda dan atau loop di dalamnya

Contoh:



(i) Graf sederhana



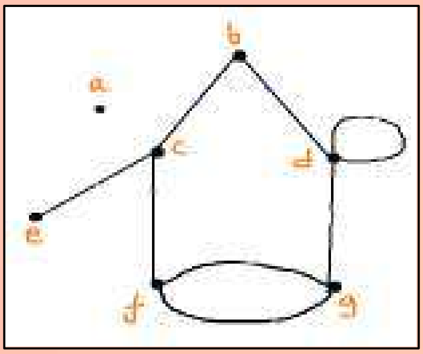
(ii) Graf tidak sederhana

2. Melihat apakah jalurnya memiliki arah atau tidak:

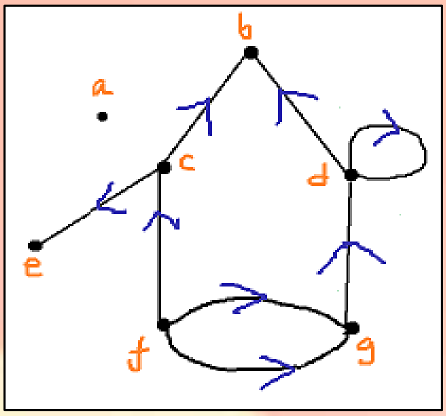
   (i) Graf tidak berarah: graf yang jalurnya tidak memiliki arah.

(ii) Graf berarah: graf yang jalurnya memiliki arah.

Contoh:



(i) Graf tidak berarah



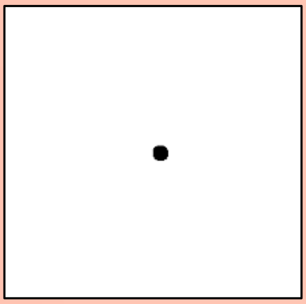
(ii) Graf berarah

F. Graf Trivial dan Graf Kosong

Dari definisi graf yakni struktur diskrit yang terdiri atas himpunan simpul dan himpunan jalur, dimana himpunan simpulnya bukan himpunan kosong, maka dapat dipahami bahwa sebuah graf itu berkemungkinan tidak memuat jalur. Graf yang tidak memuat jalur dapat berupa graf trivial ataupun graf kosong.

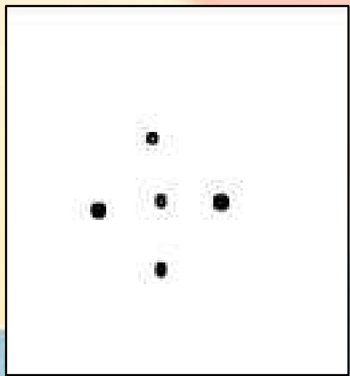
Graf trivial adalah graf yang hanya memuat 1 simpul dan tidak memuat jalur.

Graf trivial secara grafis adalah sebagai berikut:



Graf kosong adalah graf yang tidak memuat jalur dan hanya memuat beberapa simpul.

Contoh:



Mari berliterasi matematis sejenak:

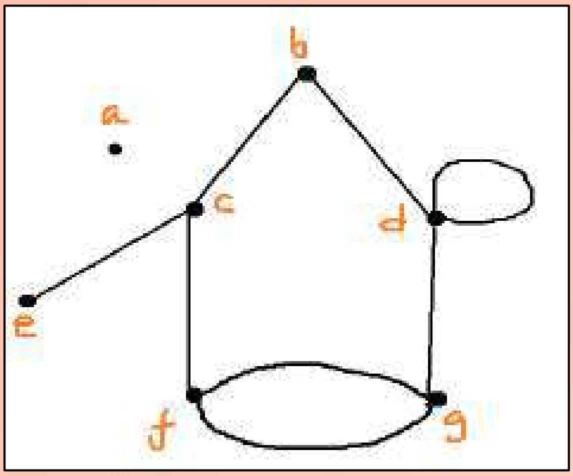
Apa perbedaan graf trivial dan graf kosong?

Apa persamaan graf trivial dan graf kosong?

KLIK DISINI UNTUK MENGUMPULKAN JAWABAN

G. Terminologi pada Graf

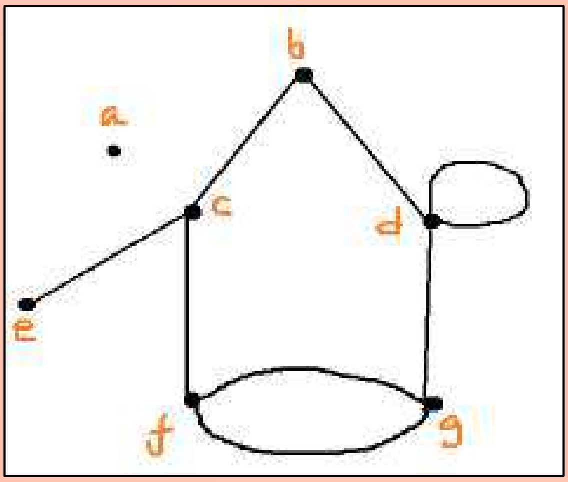
Untuk memahami istilah-istilah pada graf, dapat dijelaskan dengan merujuk gambar graf berikut:



1. Simpul bertetangga

Simpul a dan b dikatakan bertetangga jika keduanya dihubungkan langsung oleh sebuah jalur.

Contoh:



Simpul b dengan simpul c dan d saling bertetangga.

Tetangga simpul c adalah simpul b, e dan f.

Simpul d bertetangga dengan simpul b, g, dan d (dirinya sendiri karena ada loop pada simpul d)

Simpul a tidak memiliki tetangga.

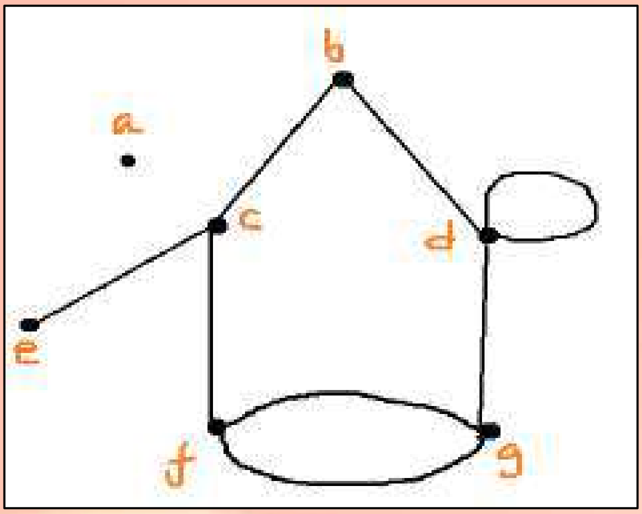
Perhatikan video berikut ini untuk lebih memahami penjelasan bagian ini.

KLIK DISINI UNTUK MENONTON VIDEO

2. Jalur Bersisian

Misalkan jalur e menghubungkan simpul v ke simpul lainnya atau ke dirinya sendiri (dengan loop). Jalur e dikatakan bersisian dengan simpul v karena jalur e menghubungkan simpul v ke simpul lain atau ke dirinya sendiri.

Contoh:



Jalur e = (b,c) dikatakan bersisian dengan simpul b dan c

Jalur e = (d,d) dikatakan bersisian dengan simpul d

Simpul d bersisian dengan e = (b,d), e = (d,d), dan e = (d,g)

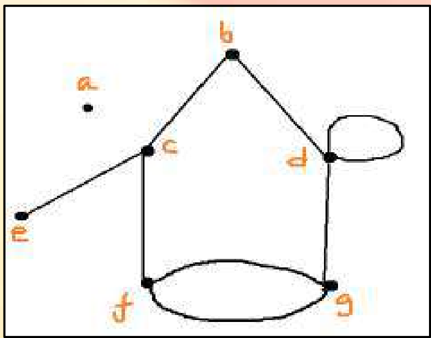
Perhatikan video berikut ini untuk lebih memahami penjelasan bagian ini.

KLIK DISINI UNTUK MENONTON VIDEO

3. Simpul Terpencil (Simpul Terasing / Simpul Terisolasi)

Sebuah simpul yang tidak memiliki tetangga disebut dengan simpul terpencil.

Contoh:



Simpul a merupakan simpul terpencil karena tidak memiliki tetangga.

4. Derajat Simpul

Misalkan G graf tidak berarah.

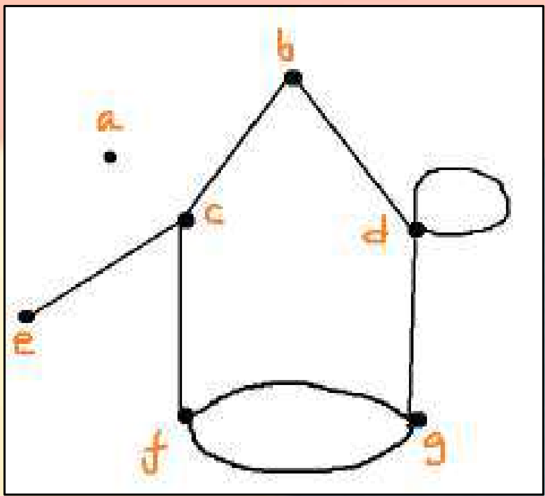
Derajat sebuah simpul pada graf tak berarah adalah jumlah jalur yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi:

Derajat dari simpul v disebut dengan *degree of v* dan dinotasikan dengan **d(v)**.

Catatan: **1 buah loop memberi derajat sebanyak 2 pada sebuah simpul**. Jika ada lebih dari 1 loop maka masing-masing loop juga memberi derajat 2 pada simpul yang bersisian dengan loop tersebut.

Contoh:



d(a) = 0, d(b) = 2, d(c) = 3, d(e) = 1, d(f) = 3, d(g) = 3

d(d) = 4……. (2 dari jalur, dan 2 dari 1 loop)

5. Derajat Graf Tidak Berarah

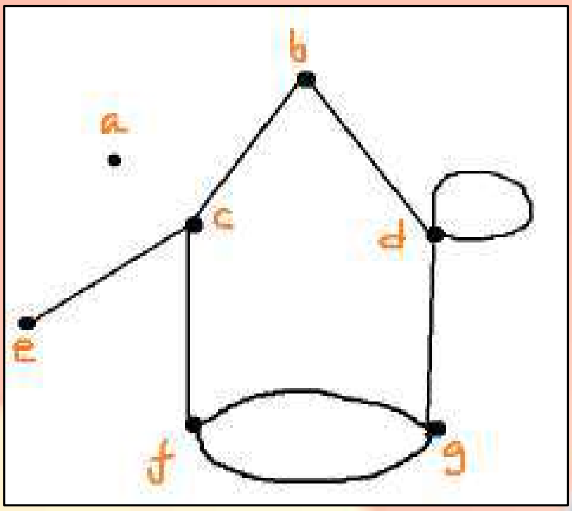
Misalkan G graf tidak berarah. Derajat G adalah jumlah dari derajat masing-masing simpul pada G.

Notasi:

$d(G) = \sum d(v)$

Contoh:

Hitung derajat dari graf G berikut:



$\sum d(v)$ = d(a) + d(b) + d(c) + d(d) + d(e) + d(f) + d(g)

= 0 + 2 + 3 + 4 + 1 + 3 + 3

6. Derajat Graf Berarah

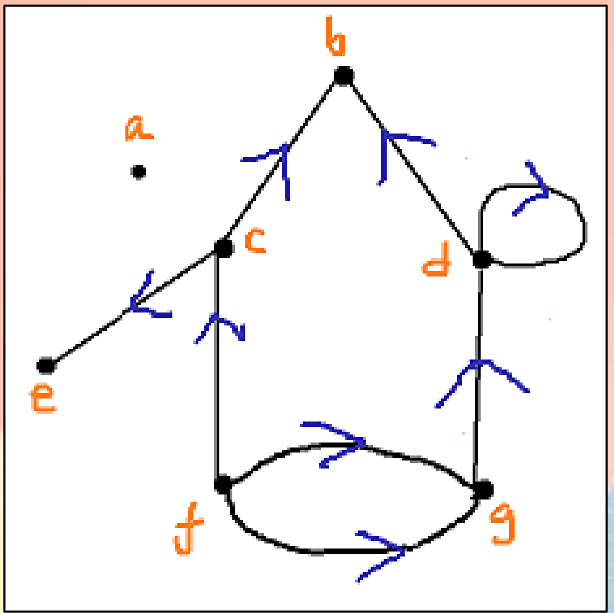
Misalkan G graf berarah. Derajat dari graf berarah G adalah jumlah derajat masuk dan derajat keluar dari simpul-simpulnya.

Notasi:

d(G) = $\sum d_{in}(v) + \sum d_{out}(v)$

Contoh:

Hitung derajat dari graf berikut:



d(G) $= \sum d_{in}(v) + \sum d_{out}(v)$

$= [d_{in}(a)+d_{in}(b)+d_{in}(c)+d_{in}(d)+d_{in}(e)+d_{in}(f)+d_{in}(g)] +$

$[d_{out}(a)+d_{out}(b)+d_{out}(c)+d_{out}(d)+d_{out}(e)+d_{out}(f)+$

$d_{out}(g)]$

= [0+2+1+**2**+1+0+2] + [0+0+2+**2**+0+3+1]

= 8+8

= 16

Catatan:

Perhatikan derajat masuk dan derajat keluar simpul d yang bersisian dengan loop. Sebuah loop berarah akan memberi derajat keluar 1 dari simpul itu dan sekaligus juga derajat masuk 1 ke simpul tersebut.

7. Lemma Jabatan Tangan

Lemma jabatan tangan (*hand shaking lemma*) berbunyi:

"Jumlah dari derajat simpul pada suatu graf pasti genap yaitu dua kali banyak jalur pada graf itu."

Notasi:

$$\sum \mathrm{d}\ (\mathrm{v}) = 2\ .\ |\mathrm{E}|$$

Dimana:

d(v) = derajat simpul v

|E| = Banyak anggota himpunan jalur (banyak jalur pada graf)

Lemma jabatan tangan dapat digunakan untuk menentukan apakah graf dengan kondisi tertentu yang diberikan itu ada (eksis).

Contoh:

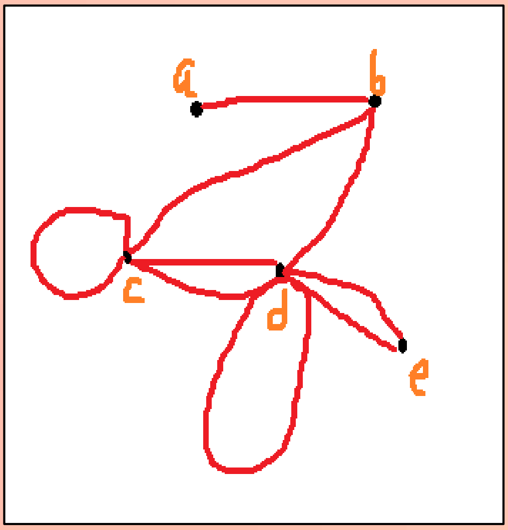
Periksa apakah urutan derajat simpul dari sebuah graf dengan 5 vertex berikut ini ada atau tidak. Jika ada, ilustrasikan 2 gambar yang berbeda untuk menyatakan graf tersebut secara grafis.

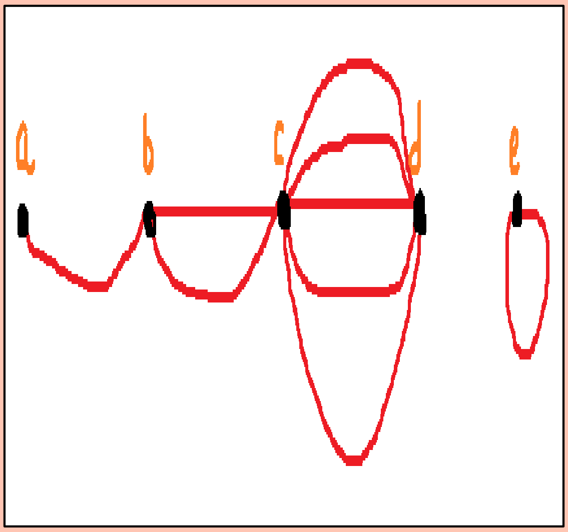
a. 1, 3, 7, 5, dan 2
b. 1, 3, 4, 4, dan 1

Penyelesaian:

a. Andaikan grafnya ada, dan simpul-simpulnya adalah a,b,c,d,e. Urutan derajat simpulnya yaitu 1, 3, 7, 5, 2. Jumlah dari derajat simpul = 1+3+7+5+2 = 18 ... (bilangan genap).
   Berdasarkan lemma jabatan tangan, jumlah dari derajat simpul pada graf pasti genap. Berarti grafnya ada.

Adapun graf tersebut secara grafis adalah:





b. Urutan derajat simpulnya yaitu 1, 3, 4, 4, dan 1

Jumlah dari derajat simpul pada graf = 1+3+4+4+1 = 13 ....(bilangan ganjil)

Hal ini kontradiksi dengan lemma jabatan tangan, artinya grafnya tidak ada. Jika kita tetap berusaha menggambarkan secara grafis maka akan ada beberapa simpul yang tidak dapat digambarkan sesuai dengan derajat yang diberikan.

8. Lintasan (*Path*)

Lintasan adalah barisan berselang seling: simpul – jalur – simpul.

Berdasarkan jalur yang dilaluinya, lintasan terbagi 2 jenis:

(1) Lintasan sederhana : setiap jalur yang dilalui berbeda (setiap jalur pada lintasan tersebut hanya dilalui tepat satu kali)

(2) Lintasan tidak sederhana : ada jalur yang dilalui lebih dari satu kali

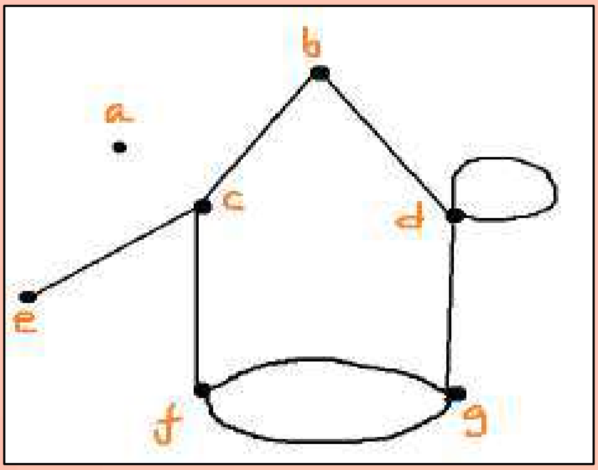
Berdasarkan simpul awal dan simpul akhir lintasan, lintasan terbagi 2 jenis:

(1) Lintasan terbuka : simpul awalnya berbeda dengan simpul akhir

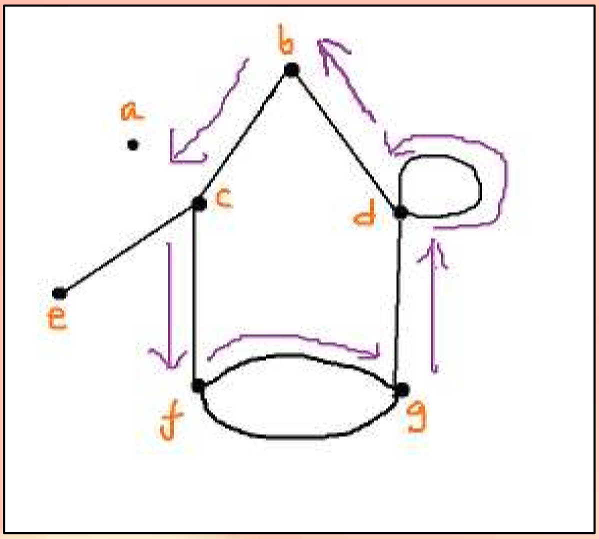
(2) Lintasan tertutup : simpul awalnya sama dengan simpul akhir (kembali ke simpul awal)

Dengan menghitung berapa kali sebuah jalur dilalui dan berapa banyak jalur yang telah dilalui, maka sebuah lintasan memiliki panjang. **Panjang lintasan** adalah berapa banyak jalur yang telah ditelusuri baik itu ditelusuri satu kali ataupun lebih dari satu kali.

Contoh:



Lintasan: b-c-f-g-d-d-b



Lintasan: b-c-f-g-d-d-b ini merupakan lintasan sederhana, tertutup, dan memiliki panjang 6.

9. Sirkuit (*Circuit / Cycle*)

Sirkuit adalah nama lain dari lintasan tertutup. Sirkuit adalah lintasan yang simpul awalnya sama dengan simpul akhirnya.

Karena sirkuit merupakan lintasan, maka sirkuit juga terbagi

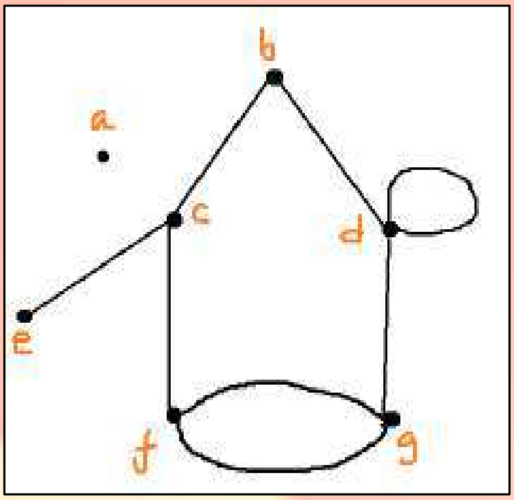
2 jenis yakni:

(1) Sirkuit sederhana : sirkuit yang setiap jalurnya hanya dilewati satu kali

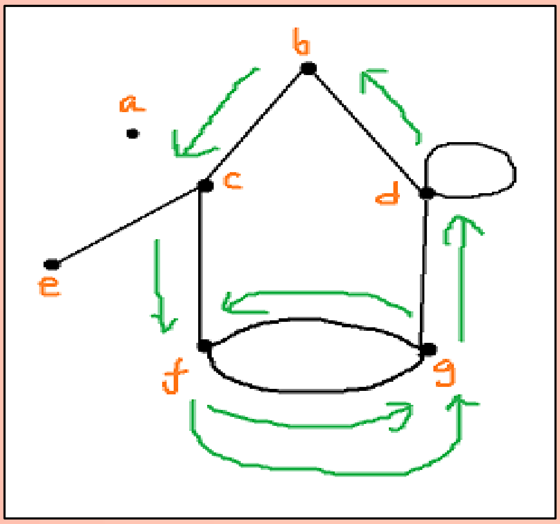
(2) Sirkuit tidak sederhana : sirkuit yang memuat jalur yang dilalui lebih dari satu kali

Sirkuit juga punya panjang.

Contoh:



Lintasan c-f-g-f-g-d-b-c

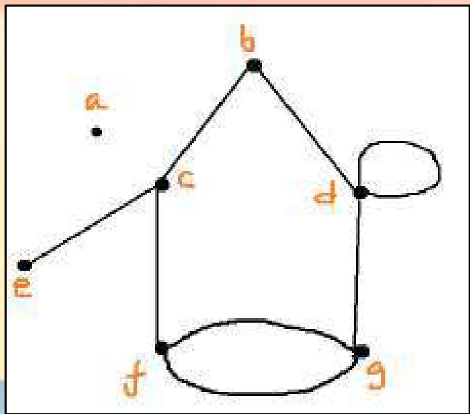


Lintasan c-f-g-f-g-d-b-c merupakan sirkuit tidak sederhana dengan panjang 7.

10. Simpul Terhubung (*Connected Vertex*)

Simpul u dan v dikatakan simpul terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya.

Contoh:



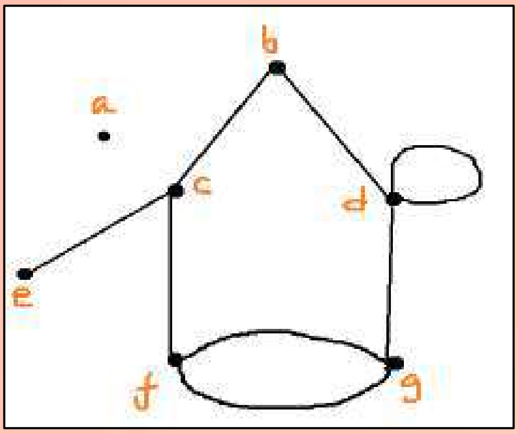
Simpul a tidak terhubung dengan simpul manapun (karena a simpul terpencil). Simpul b terhubung dengan simpul c, d, e, f, dan g.

11. Graf Terhubung (*Connected Graph*)

G dikatakan graf terhubung jika untuk setiap pasangan simpul pada G terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya.

Contoh:

Periksa apakah graf berikut ini terhubung!



a adalah simpul pada G. a tidak terhubung dengan b karena tidak ada lintasan yang menghubungkan a dengan b. Jadi, G tidak terhubung karena ada pasangan simpulnya yang tidak terhubung, yaitu simpul a dan b.

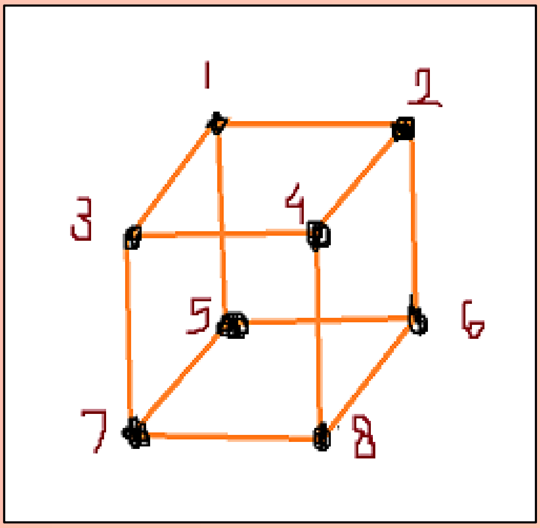
12. Subgraf dari Graf G

Misalkan G = (V,E) adalah graf.

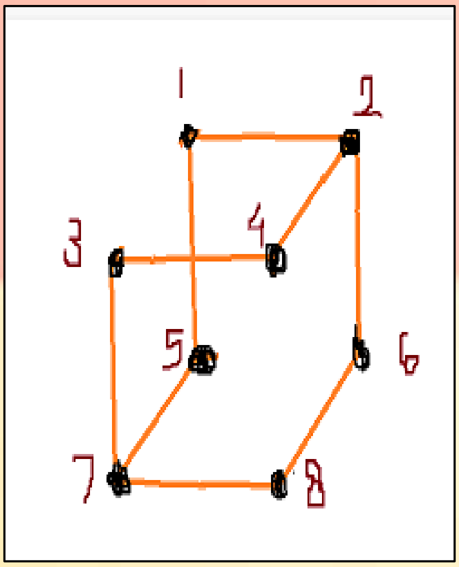
$G_1 = (V_1,E_1)$ adalah subgraf dari graf $G = (V,E)$ jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

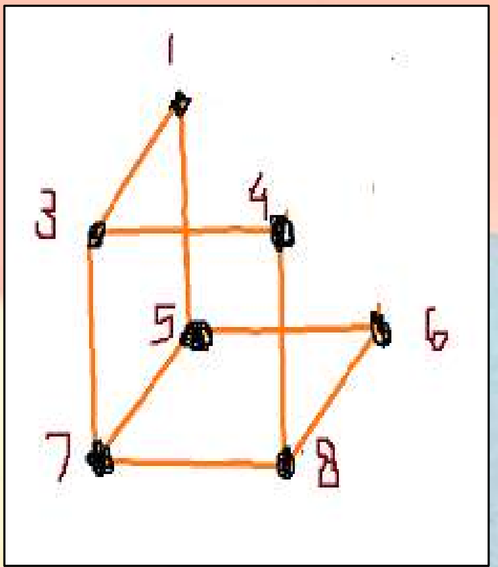
Contoh:

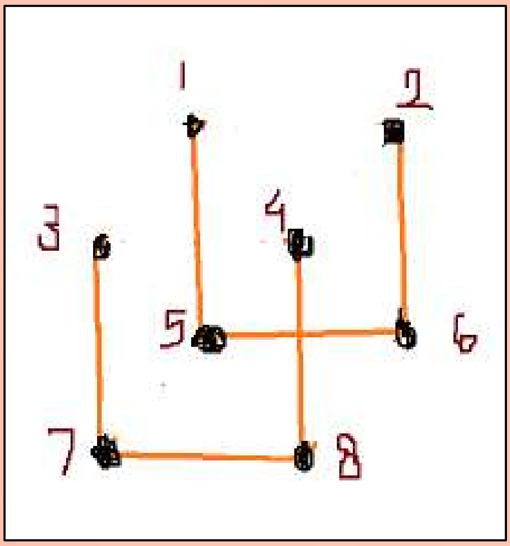
Graf G = (V,E)



Beberapa subgraf dari graf G adalah:







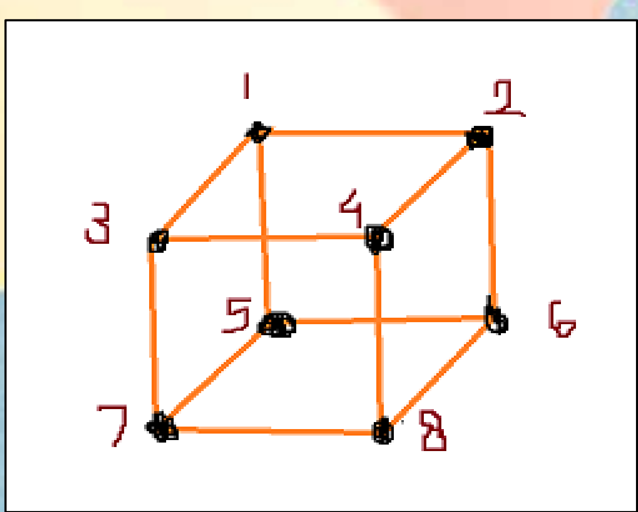
13. Komplemen dari Subgraf

Misalkan $G = (V,E)$ adalah graf dan $G_1 = (V_1,E_1)$ adalah subgraf dari graf G.

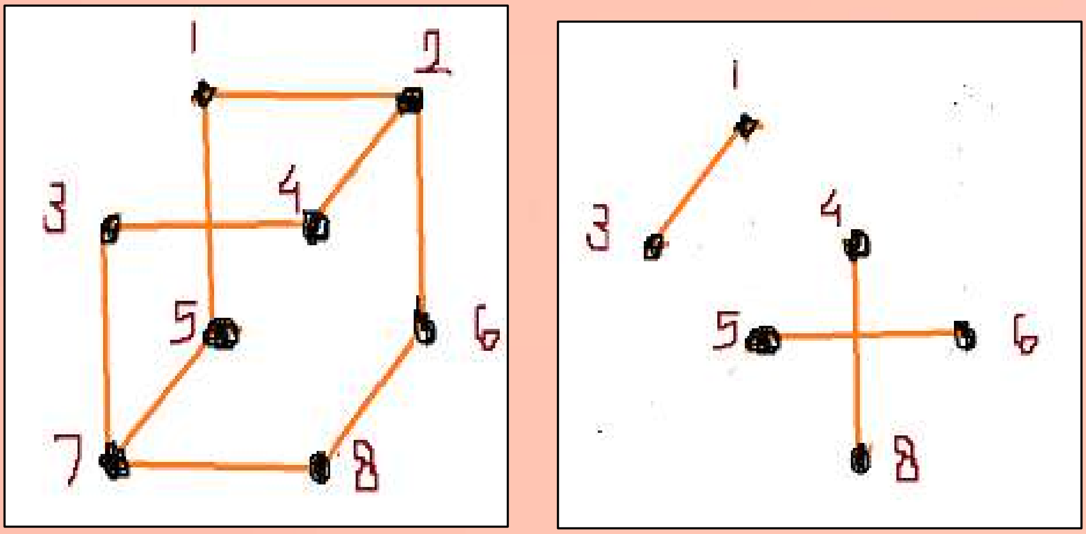
$G_2 = (V_2, E_2)$ dikatakan komplemen dari subgraf jika $E_2 = E - E_1$ dan V = {simpul yang bersisian dengan jalur di E_2}.

Contoh:

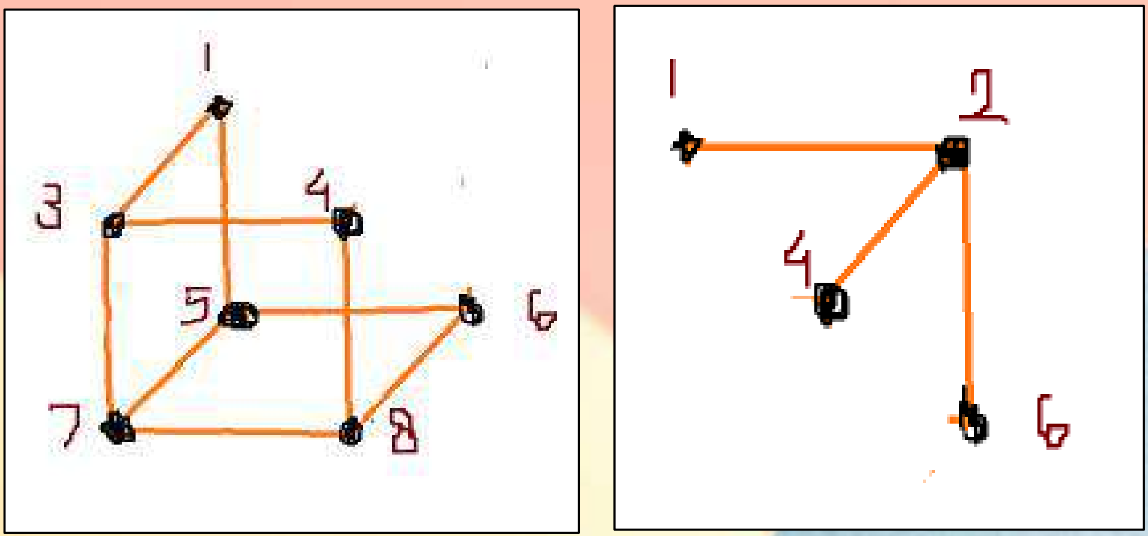
Graf G



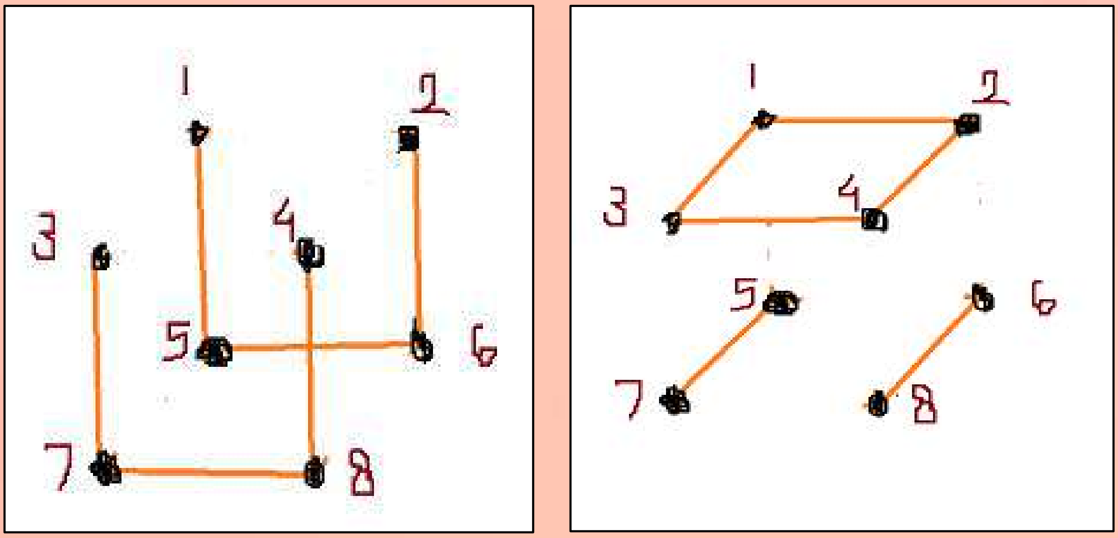
Berikut ini pasangan subgraph dari graf G dan komplemen dari subgraf tersebut:



(i)



(ii)



(iii)

Perhatikan video berikut ini untuk lebih memahami penjelasan bagian ini.

KLIK DISINI UNTUK MENONTON VIDEO

Berikut ini lembar kerja yang harus kalian selesaikan agar kalian dapat memahami materi ini, klik gambar untuk melihat lembar kerja :

--Lembar Kerja —

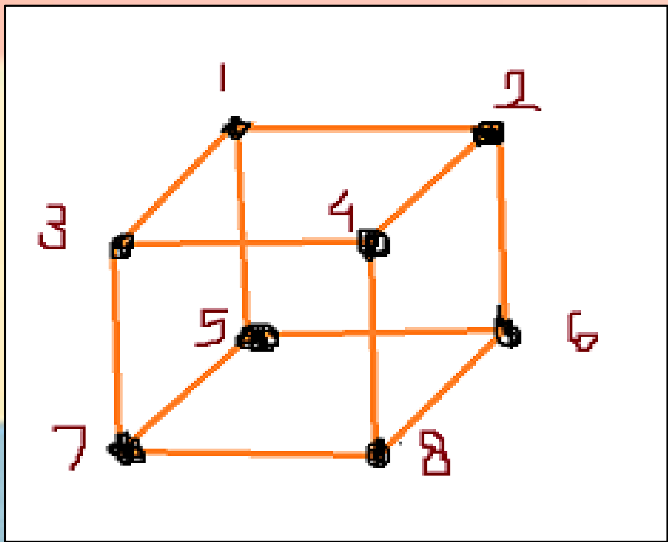
KLIK DISINI UNTUK MENGUMPULKAN JAWABAN LKM

14. Subgraf Merentang dari Graf (*Spanning Graph*)

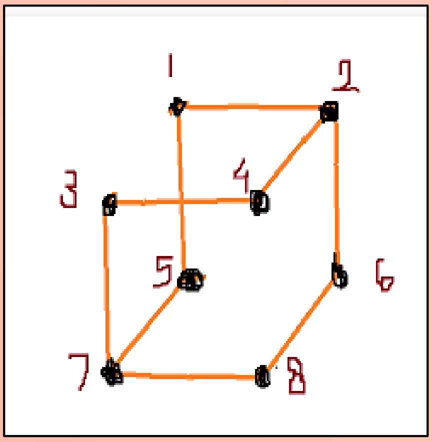
Sub graf G_1 = (V_1,E_1) dari graf G = (V,E) dikatakan subgraph merentang dari G = (V,E) jika V_1 = V.

Contoh:

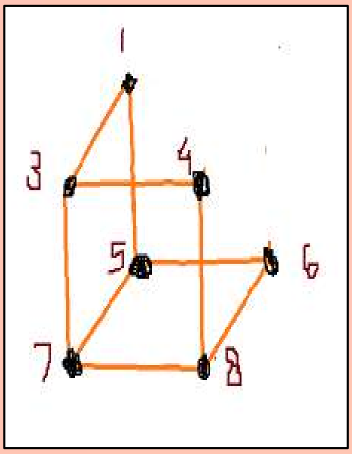
Graf G berikut:



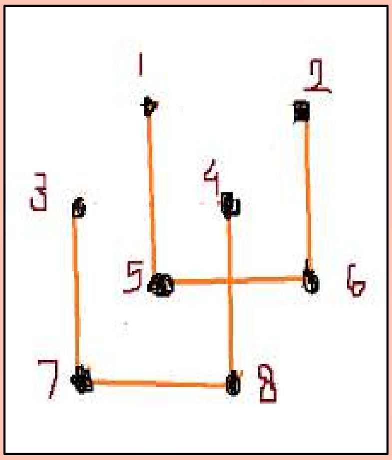
Beberapa subgraf dari graf G adalah:



(i)



(ii)



(iii)

Subgraf (i) dan (iii) merupakan subgraf merentang dari G = (V,E) karena memuat semua simpul pada G.

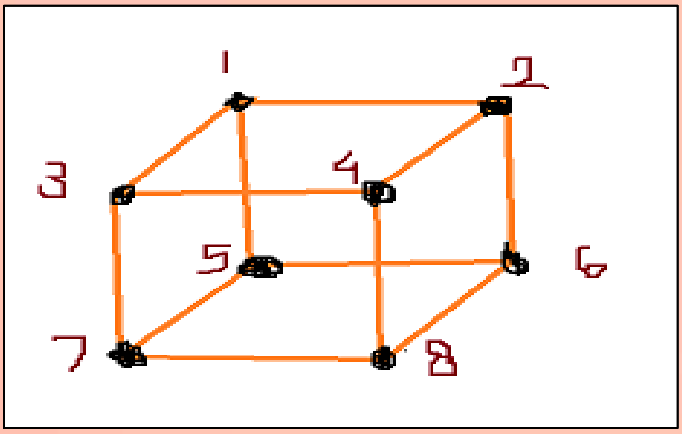
Subgraf (ii) bukan subgraf merentang dari G = (V,E) karena tidak memuat semua simpul pada G.

15. Jembatan (*Bridge / Cut Set*)

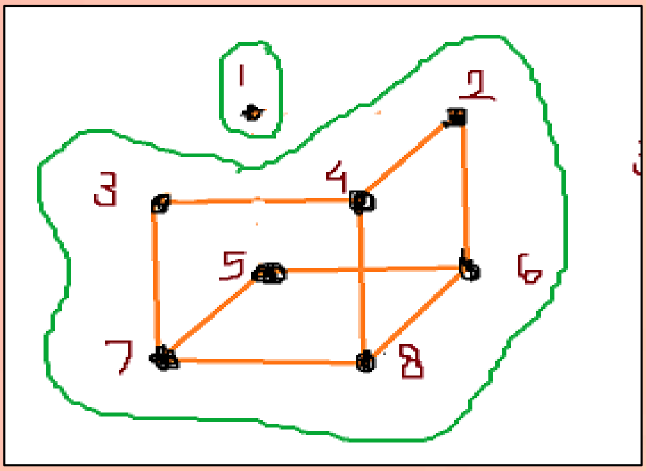
Misalkan G graf terhubung. Cut Set adalah himpunan jalur yang jika diputus atau dipotong maka graf terhubung G akan ***menjadi 2 komponen*** *(menyebabkan G menjadi tidak terhubung).*

Contoh:

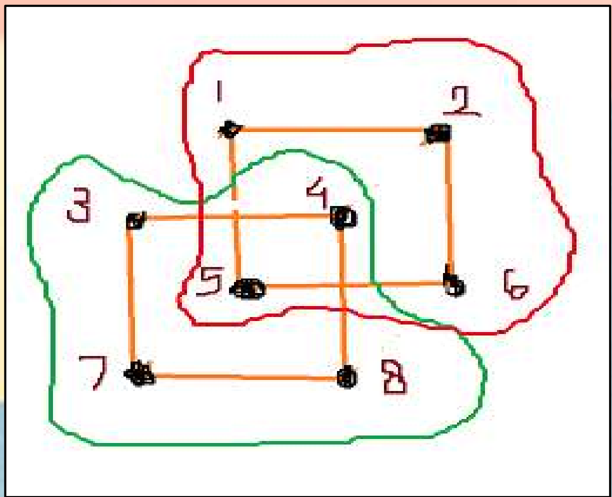
Perhatikan graf terhubung G berikut:



Beberapa cut set dari graf tersebut adalah:



Cut set = {(1,3), (1,5), (1,2)}



Cut set = {(1,3), (5,7), (6,8), (2,4)}

Perhatikan video berikut ini untuk lebih memahami penjelasan bagian ini.

KLIK DISINI UNTUK MENONTON VIDEO

LEMBAR KERJA

Desa Karangasem merupakan desa terpencil yang hanya dihuni 15 keluarga yang tinggal di 15 rumah yang saling berdekatan. Terdapat pembangkit listrik tenaga air yang mampu

menyalurkan tenaga listrik ke seluruh rumah di desa tersebut yang dirangkai seri. Suatu malam, turun hujan lebat yang menyebabkan pohon tumbang dan memutuskan kabel listrik antara rumah ke delapan dan ke sembilan.

a. Dapatkah kamu menggambarkan graf yang sesuai dengan masalah ini saat sebelum dan juga setelah kabel listrik terputus?

b. Masalah yang mana kah yang merupakan graf terhubung dan tidak terhubung, sebelum kabel listrik terputus atau sesudah kabel listrik terputus? Mengapa?

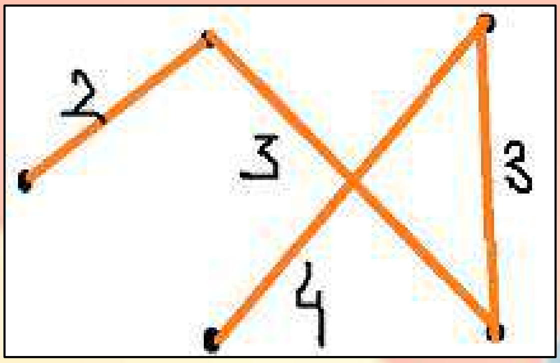
c. Apakah masing-masing kabel listrik dapat disebut sebagai cut set? Mengapa?

KLIK DISINI UNTUK MENGUMPULKAN JAWABAN

16. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

G dikatakan graf berbobot jika setiap jalurnya mempunyai bobot.

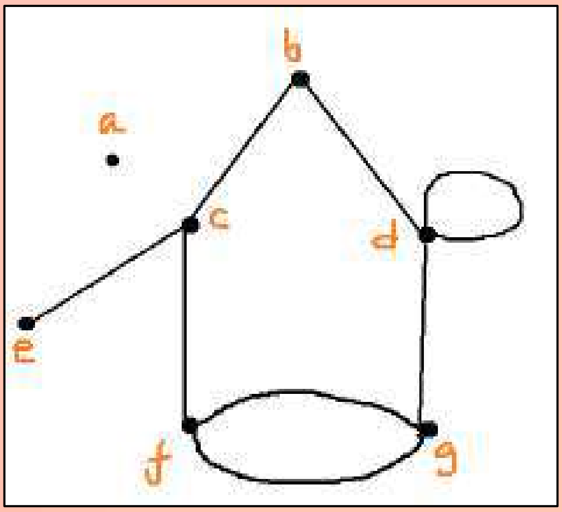
Contoh:



17. Simpul Anting-Anting (*Pendant Vertex*)

Simpul anting-anting adalah simpul yang berderajat 1.

Contoh:



Simpul e adalah simpul anting-anting.

E. Graf Sederhana Khusus

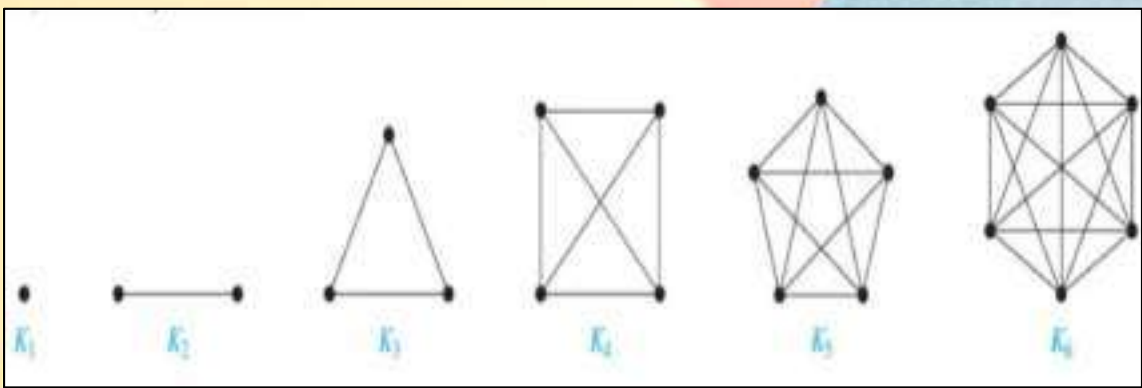
1. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Sebuah graf sederhana dimana setiap simpul pada graf itu memiliki derajat yang sama disebut dengan graf lengkap.

Notasi:

K_n

Berikut ini beberapa graf lengkap:



Pada graf lengkap, banyaknya jalur yang dimilikinya dapat kita tentukan secara tepat yakni dengan menggunakan rumus:

$$\text{Banyak jalur pada graf } K_n = \frac{[n(n-1)]}{2}$$

Demikian pula dengan derajat dari tiap simpulnya juga dapat ditentukan secara tepat dengan menggunakan rumus:

$$\text{Derajat setiap simpul pada } K_n = n - 1$$

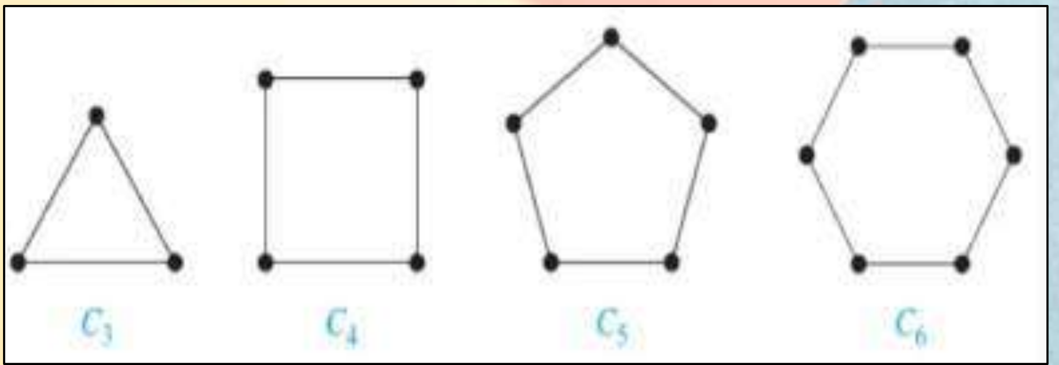
2. Graf Lingkaran (*Cycle Graph*)

Sebuah graf sederhana dimana setiap simpulnya berderajat 2 disebut dengan graf lingkaran.

Notasi:

Cn

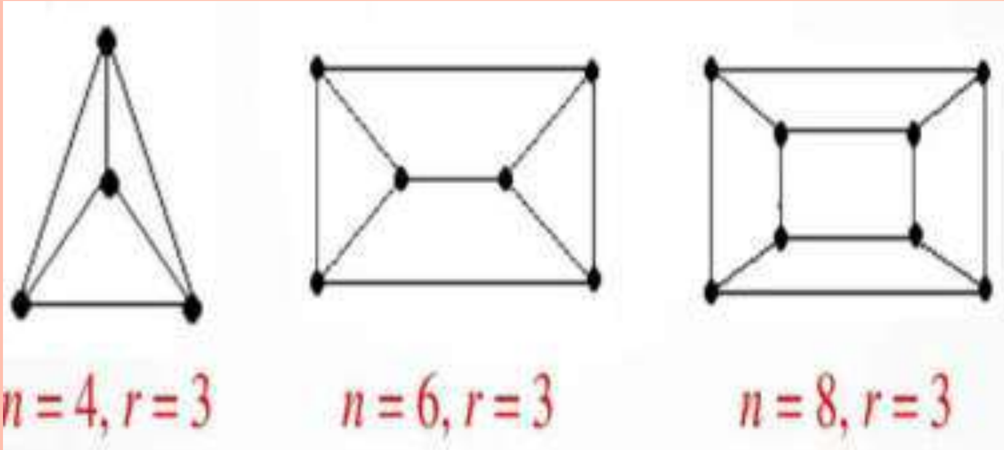
Berikut ini beberapa graf lingkaran:



3. Graf Teratur (*Regular Graph*)

Sebuah graf sederhana dimana setiap simpulnya berderajat *tertentu yang sama disebut dengan graf teratur.*

Contoh:

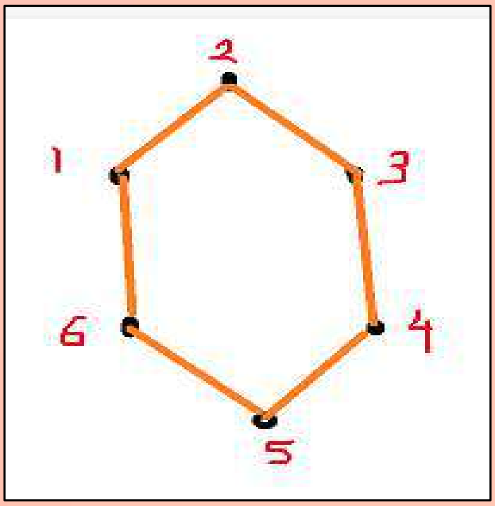


4. Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

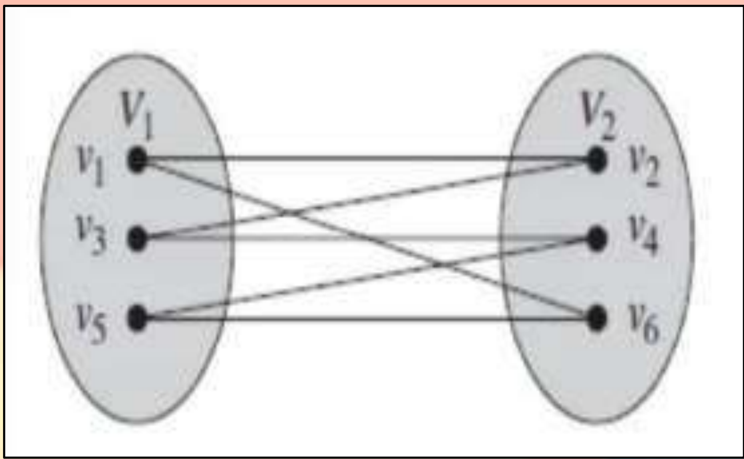
Sebuah graf sederhana manakala himpunan simpulnya dapat dibagi menjadi 2 himpunan (misalnya V_1 *dan* V_2*) sedemikian sehingga akan terbentuk himpunan jalur yang hanya menghubungkan simpul pada himpunan yang berbeda maka graf itu disebut graf bipartit.*

Contoh:

Periksa apakah graf berikut ini bipartit?



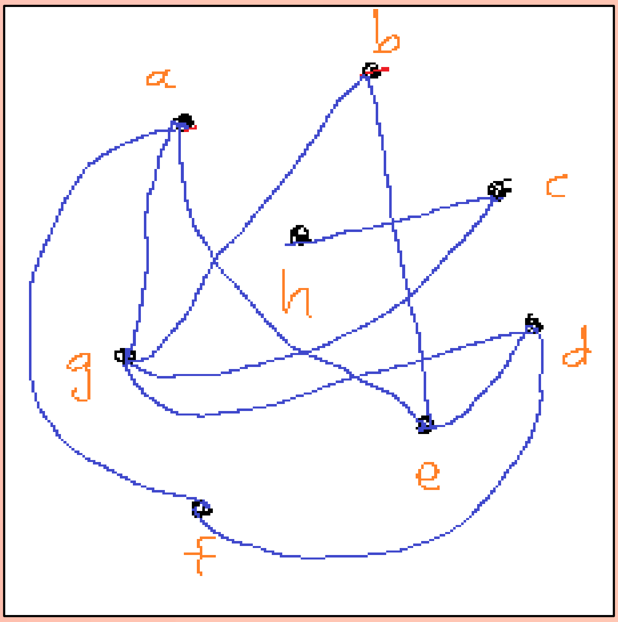
Himpunan simpul pada graf tersebut dapat dibagi menjadi 2 himpunan yakni V_1 dan V_2 sedemikian sehingga jalurnya hanya menghubungkan simpul-simpul pada himpunan berbeda, yakni seperti tampak pada gambar berikut:



Jadi, graf tersebut adalah graf bipartit.

Mari berlatih:

Periksa apakah graf berikut ini merupakan graf bipartit?



Penyelesaian:

Graf tersebut bipartit jika himpunan simpulnya dapat dibagi dua menjadi V_1 dan V_2 sedemikian sehingga jalur yang ada hanya menghubungkan simpul dihimpunan berbeda.

Pemeriksanaan kita mulai dari simpul a dikelompokkan ke dalam V_1. Selanjutnya, simpul a bertetangga dengan simpul f, g, dan e sehingga ketiga simpul ini harus berada di himpunan berbeda yakni V_2, tentu saja agar jalur yang ada nanti hanya akan menghubungkan simpul-simpul di himpunan berbeda. Sampai di sini, diperoleh bahwa:

$V_1 = \{a\}$ dan $V_2 = \{e, f, g\}$.

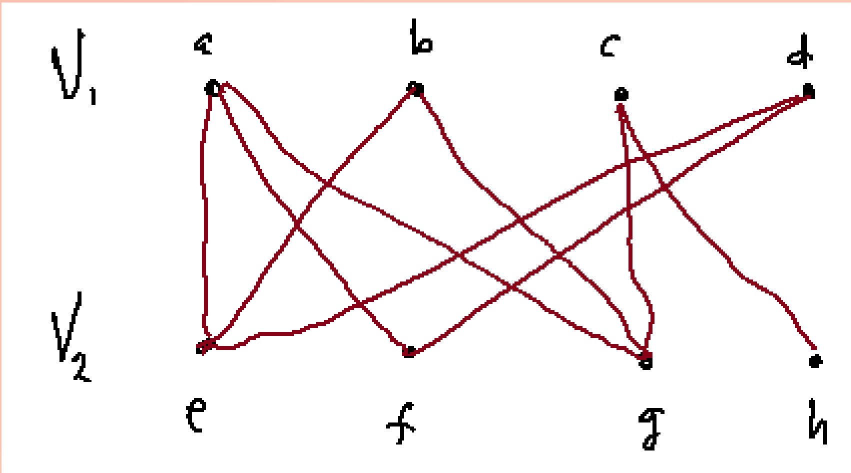
Selanjutnya, pemeriksaan beralih pada simpul b yang belum dikelompokkan ke dalam salah satu himpunan simpulnya.

Simpul b tidak bertetangga dengan simpul a di V_1 namun bertetangga deng bertetangga dengan simpul g di V_2, artinya simpul b harus dikelompokkan ke dalam V_1. Akibatnya, simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul b yakni simpul g dan e harus berada di himpunan V_2. Sampai di sini, diperoleh bahwa: V_1 = {a, b} dan V_2 = {e, f, g}.

Selanjutnya, pemeriksaan beralih pada simpul c yang belum dikelompokkan ke dalam salah satu himpunan simpulnya. Simpul c bertetangga dengan simpul h dan g, sehingga tidak boleh berada pada himpunan simpul yang sama dengan kedua simpul tersebut, dan simpul c tidak bertetangga dengan semua simpul di V_1 yakni a dan b sehingga dapat dikelompokkan pada V_1. Sedangkan simpul h dan g tidak saling bertengga dengan simpul-simpul di V_2. Sampai di sini, diperoleh: V_1 = {a, b, c} dan V_2 = {e, f, g, h}.

Pemeriksaan terakhir yakni terhadap simpul d yang belum dikelompokkan ke dalam salah satu himpunan simpul. Simpul d tidak bertetangga dengan semua simpul di himpunan V_1 dan simpul d bertetangga dengan simpul g, e, dan f, sedangkan simpul g, e, f juga tidak saling bertetangga sehingga simpul di dapat dikelompokkan pada V_1 dan simpu g, e, f dapat dikelompokkan pada V_2. Pada akhirnya diperoleh: V_1 = {a, b, c, d} dan V_2 = {e, f, g, h}.

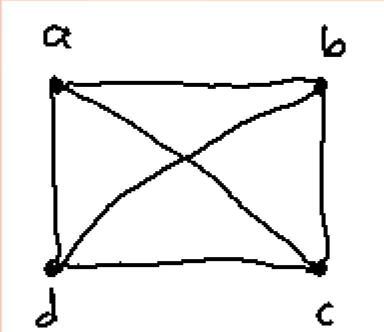
Selanjutnya, mari kita gambarkan grafnya dengan menyusun ulang simpulnya sesuai dengan pengelompokan himpunan simpulnya, yakni:



Diperoleh bahwa himpunan simpulnya dapat dibagi 2 kelompok yakni V_1 dan V_2 sedemikian sehingga jalur yang ada hanya memghubungkan simpul di himpunan berbeda. Maka graf tersebut merupakan graf bipartit.

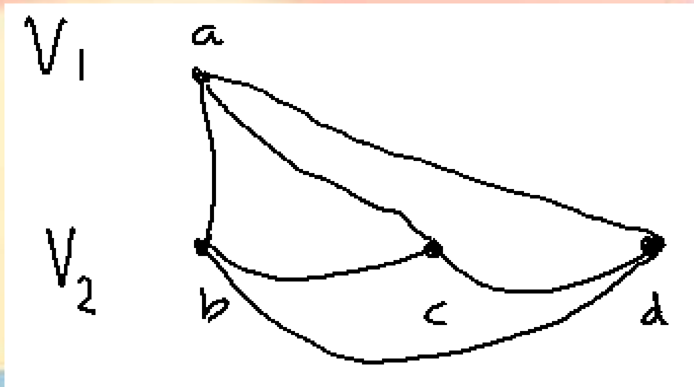
Contoh latihan:

Periksa apakah graf berikut bipartit?



Penyelesaian:

Pemeriksaan dimulai dengan simpul a yang dikelompokkan pada V_1. Selanjutnya, simpul a bertetangga dengan b, c, dan d sehingga b, c, dan d harus di kelompokkan pada V_2. Namun, simpul b, c, dan d juga saling bertetangga sehingga tidak boleh berada pada himpunan yang sama yakni di V_2. Akibatnya, jalur yang ada itu menghubungkan simpul di himpunan yang sama. Bila kita gambarkan ulang maka akan membentuk graf berikut:

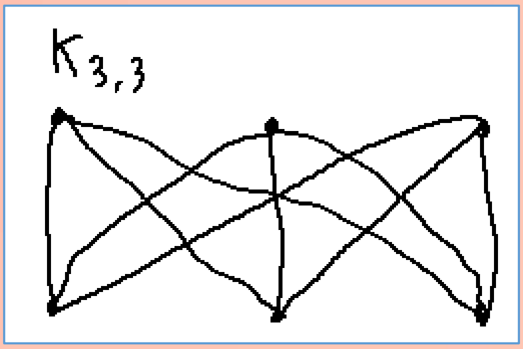


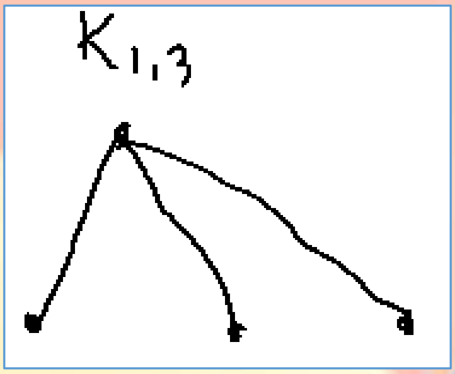
Artinya graf tersebut bukan bipartit.

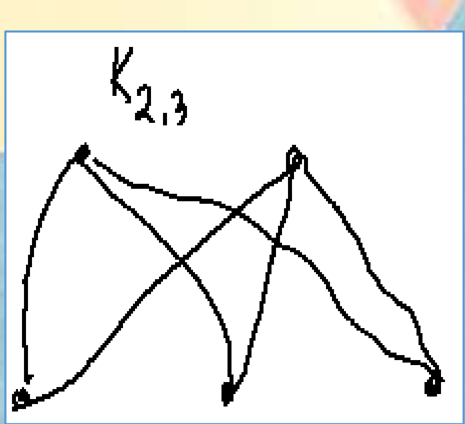
Graf bipartit ada yang mempunyai kekhasan tertentu yakni ketika setelah kita gambar ulang grafnya lalu kita temukan bahwa *setiap simpul di V_1 dan bertetangga dengan setiap simpul di V_2 dan jalur yang ada hanya menghubungkan simpul di himpunan berbeda* maka graf tersebut diberi nama khusus yakni: **Bipartit Komplit**.

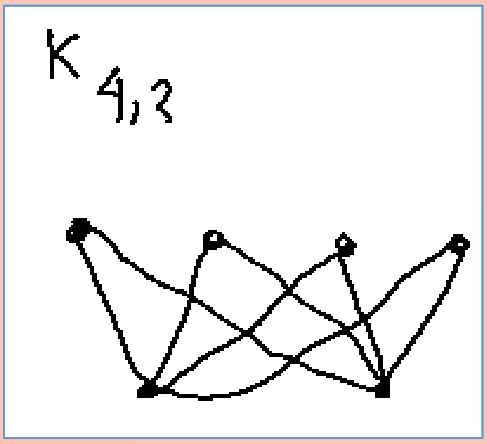
Graf bipartit komplit diberi simbol $\mathbf{K_{m,n}}$ dengan m = banyak simpul di V_1 dan m= banyak simpul di V_2.

Contoh graf bipartit komplit:









F. Graf Euler dan Graf Hamilton

Sebuah graf dapat kita selidiki bagaimana lintasan-lintasan yang termuat di dalamnya. Bila memperhatikan jenis lintasan yakni ada berupa lintasan sederhana dan tidak sederhana, maka sebuah graf dapat memuat takhingga banyaknya lintasan. Beberapa lintasan yang bisa dibentuk dapat diperiksa lebih lanjut apakah memenuhi beberapa kondisi yakni: **berapa kali jalurnya dilalui, dan atau berapa kali simpulnya dilalui**. Pemeriksaan terhadap lintasan pada graf yang memenuhi kondisi-kondisi tertentu sebagaimana yang disebutkan itu akan memiliki penamaan khusus untuk graf tersebut.

1. Graf Euler

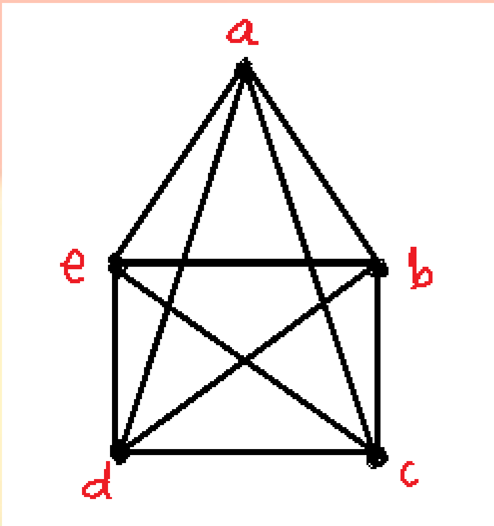
Graf euler adalah graf yang memuat sirkuit euler.

Apakah itu sirkuit euler? *Sirkuit euler adalah lintasan tertutup yang melintasi setiap jalur pada graf masing-masing tepat satu kali*.

Pengecekan terhadap ada atau tidaknya sirkuit euler pada suatu graf terkadang perlu dilakukan dengan mengganti simpul awal sirkuit. Karena bisa saja ketika suatu simpul v dipilih sebagai simpul awalnya kita ganti menjadi simpul u maka akan ditemukan sirkuit eulernya. Ketelitian kita diperlukan untuk menemukan sirkuit euler ini.

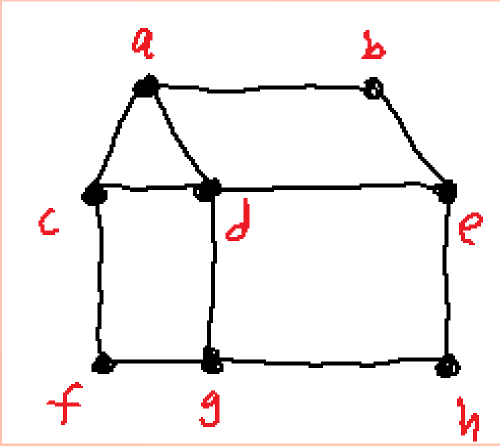
Contoh:

Periksa apakah graf berikut ini graf euler?



Graf ini merupakan graf euler karena kita dapat menemukan sirkuit eulernya yakni: a-b-c-a-d-c-e-b-d-e-a.

Sedang graf berikut ini:



Bukan graf euler karena tidak memuat sirkuit euler.

Catatan:

Ciri khusus graf euler (memuat sirkuit euler) yaitu derajat setiap simpul pada graf itu adalah genap.

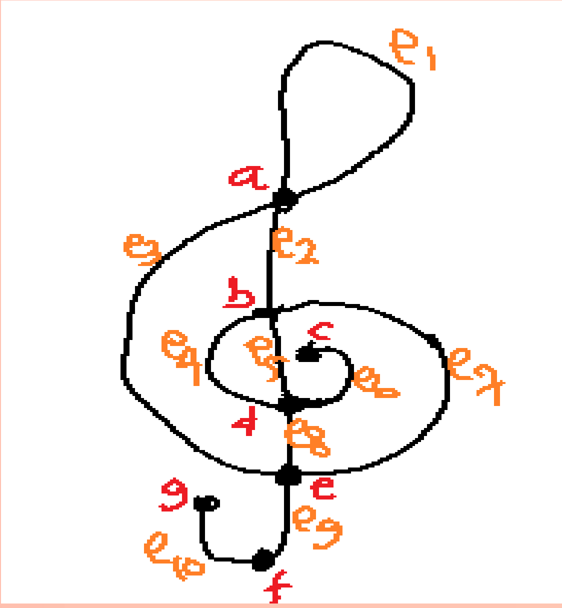
2. Graf Semi Euler

Graf semi euler adalah graf yang memuat lintasan euler. Lintasan euler adalah lintasan terbuka yang melewati setiap jalur pada graf tepat satu kali.

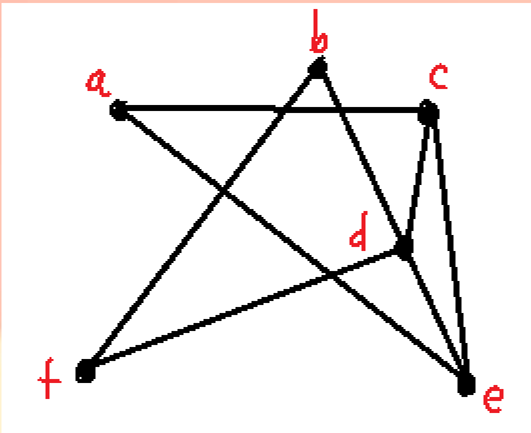
Pencarian kita terhadap ada atau tidaknya lintasan euler ini juga akan sangat ditentukan oleh simpul awal lintasan yang ditetapkan. Oleh sebab itu, berhati-hatilah dalam memillih simpul yang tepat sebagai simpul awal.

Contoh:

Graf berikut ini semi euler karena memuat lintasan euler yakni: c-d-b-e-a-a-b-d-e-f-g.



Sedangkan graf berikut bukan semi euler karena tidak memuat lintasan euler:



Catatan:

Graf semi euler pasti memiliki tepat dua buah simpul berderajat ganjil.

3. Graf Hamilton

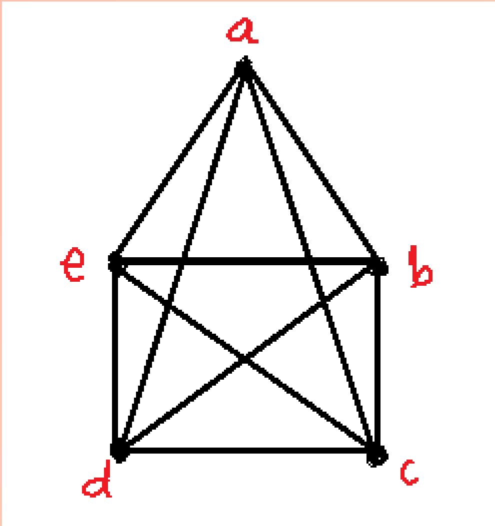
Graf hamilton adalah graf yang memuat sirkuit hamilton.

Sirkuit hamilton adalah lintasan tertutup yang memuat setiap simpul pada graf tepat satu kali.

Berbeda dengan euler, pada Hamilton, pemeriksaannya beralih pada simpul. Sehingga pencarian terhadap hamilton relatif lebih mudah dari pada euler.

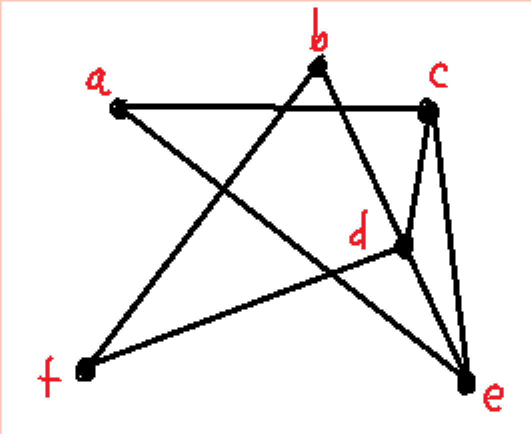
Contoh:

Berikut ini graf Hamilton:



Adapun sirkuit Hamiltonnya yakni a-b-c-g-d-e-a.

Graf berikut ini bukan graf Hamilton karena tidak ada sirkuit hamiltonnya.

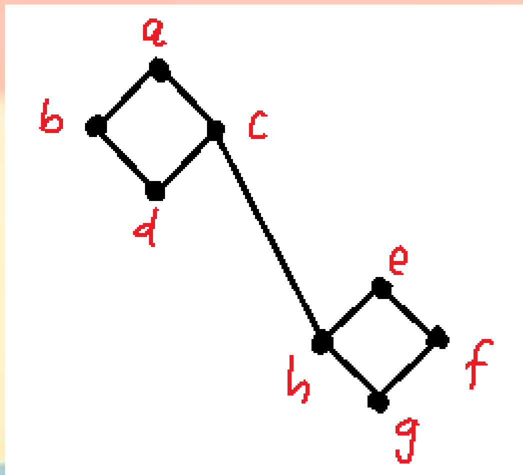


4. Graf semi Hamilton

Graf semi hamilton adalah graf yang memuat lintasan hamilton.

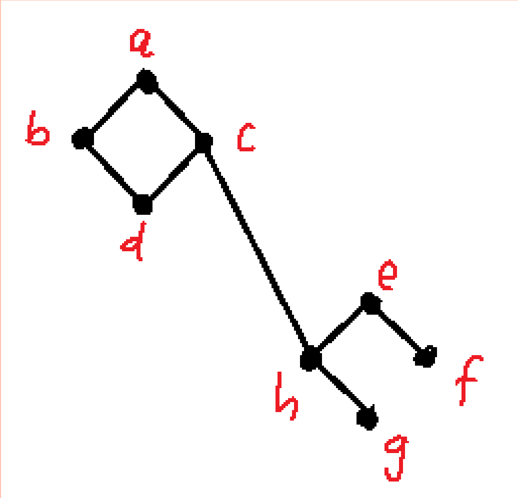
Sirkuit hamilton adalah lintasan tertutup yang memuat setiap simpul pada graf tepat satu kali.

Contoh:



Graf ini semi hamilton karena memuat lintasan hamilton yakni: a-b-d-c-h-g-f-e.

Sedangkan graf berikut bukan graf semi hamilton karena tidak ada lintasan hamiltonnya.



G. Representasi Graf

Misalkan graf G adalah graf tidak berarah. Sejauh pembahasan kita sebelumnya, graf G yang dikaji merupakan representasinya dalam bentuk grafis atau gambar. Ternyata, ada beberapa cara penyajian graf selain dengan grafis ini, yaitu dengan menggunakan matriks dan daftar. Perhatikan bahwa, sebuah graf dalam bentuk grafis selalu dapat diubah penyajiannya menjadi bentuk matriks ataupun juga daftar. Begitu pula sebaliknya, graf dalam bentuk matriks atau daftar, dapat diubah penyajiannya menjadi bentuk grafis.

1. Matriks Ketetanggaan

Matriks ketetanggaan merupakan penyajian graf dengan bentuk matriks dimana baris dan kolomnya diwakili oleh simpul-simpulnya serta entri matriksnya menunjukkan apakah sebuah simpul bertetangga atau tidak dengan simpul lainnya atau dirinya sendiri. Adapun bentuk matriksnya pasti merupakan matriks persegi (n x n), di mana n adalah banyak simpulnya.

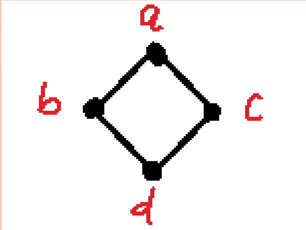
Matriks ketetanggaan untuk graf sederhana, atau graf yang mengandung loop tapi tidak mengandung jalur ganda:

$\mathrm{A_{ij}} = [\mathrm{a_{ij}}]$ dengan $\mathrm{a} = \begin{cases} \text{1 jika i bertetangga dengan j} \\ \text{0 jika i tidak bertetangga dengan j} \end{cases}$

Bila grafnya adalah (mengandung jalur ganda) maka entri 1 berubah menjadi bilangan asli yakni sebanyak berapa buah jalur gandanya.

Contoh:

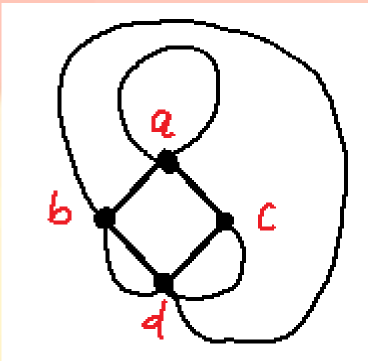
Graf dalam bentuk grafis berikut ini dapat diubah menjadi bentuk matriks ketetanggaan:



Berikut iini matriks ketetanggaannya:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Bila mengandung jalur ganda:



Matriks ketetanggaannya:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Seandainya kita hanya mengetahui matriks ketetanggaannya lalu diminta menggambarkan grafnya, maka kita dapat melakukannya. Adapun langkahnya adalah:

(1) Lihat nama simpulnya (jika sudah diberi nama) atau beri nama simpulnya (jika belum diberi nama)

(2) Lukis simpul-simpulnya

(3) Beri jalur simpulnya sesuai dengan entri matriksnya

Untuk mencobanya, silahkan gambarkan grafnya dari matriks ketetanggaan pada contoh yangtelah diberikan di atas.

2. Matriks bersisian

Bentuk penyajian graf berikutnya yang merupakan bentuk matriks juga yaitu matriks bersisian. Matriks bersisian ini merupakan representasi graf dimana ordonya adalah (n x m), n = banyak simpul, dan m = banyak jalur. Oleh karena banyak simpul suatu graf belum tentu sama dengan banyak jalurnya maka bentuk matriksnya tidak dapat dipastikan persegi seperti halnya pada matriks ketetanggaan yang pasti persegi.

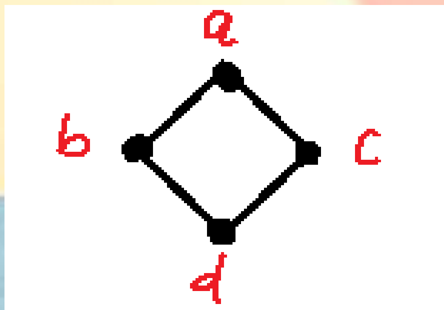
Matriks bersisian dari suatu graf yaituL

$A_{ij} = [a_{ij}]$ dengan:

$$a = \begin{cases} 1 \text{ jika simpul ke i bersisian dengan jalur j} \\ 0 \text{ jika simpul ke i bersisian dengan jalur j} \end{cases}$$

Untuk membuat matriks bersisiannya, letakkan simpulnya untuk memberi nama baris, dan jalurnya untuk memberi nama kolom. Kemudian berikan entri masing-masingnya dengan melihat apakah simpul tertentu bersisian dengan jalur tertentu atau tidak.

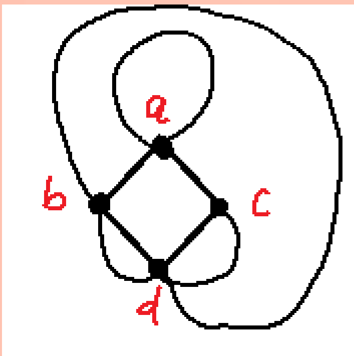
Contoh:



Matriks bersisian dari graf tersebut adalah:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} (a,b) & (a,c) & (b,d) & (d,c) \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Sedangkan untuk graf berikut:



Matriks bersisiannya adalah:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} (a,a) & (a,b) & (a,c) & (b,d) & (c,d) \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Adapun langkah-langkah untuk mengubah matriks bersisian menjadi graf bentuk grafis adalah:

(1) Lukislah simpul-simpulnya

(2) Lukislah jalur yang bersisian dengan masing-masing simpul dengan memperhatikan entri matriksnya masing-masing.

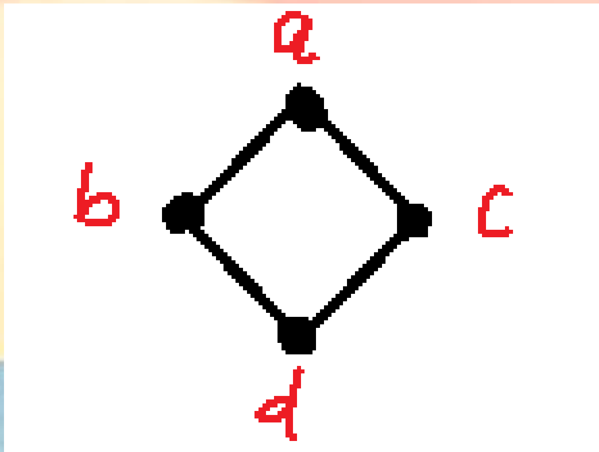
Sebagai latihan, lukislah graf dengan matriks bersisian seperti yang diberikan pada contoh di atas.

3. Senarai ketetanggaan

Senarai artinya daftar. Senarai ketetanggaan artinya kita mendaftarkan (menguraikan) simpul-simpul graf dan semua simpul tetangganya. Bila kita berhadapan dengan jalur ganda maka tuliskan simpul yang dihubungkan dengan jalur ganda tersebut beberapa kali yakni sebanyak jalur gandanya.

Contoh:

Buatlah senarai ketetanggaan dari graf berikut:



Senarai ketetanggaan:

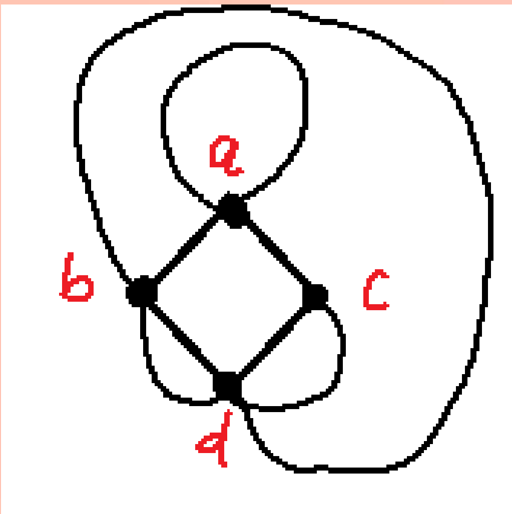
a : b, c

b : a, d

c : a, d

d : b, c

Senarai ketetanggan graf berikut:



yakni:

a : a, b, c

b : d, d, d

c : a, d, d

d : b, b, b, c, c

Bila diketahui senarai ketetanggaannya maka langkah-langkah untuk melukis grafnya adalah:

(1) Lukislah simpul-simpulnya

(2) Lukislah jalurnya dengan memperhatikan nama simpul tetangganya dan lukis sebanyak berapa kali simpul itu

didaftarkan

Sebagai latihan, gambarkan graf dari senarai yang diberikan pada contoh sebelumnya.

H. Graf Isomorfik

Setelah mempelajari subbab representasi graf, kita menemukan bahwa saat kita menggambar graf dari matriks ketetanggaan, matriks bersisian, atau senarai ketetanggaan suatu graf maka kita dapat menemukan graf yang berbeda-beda namun tetap bersesuaian dengan matriks ataupun senarai yang diberikan. Artinya, secara grafis grafnya memang berbeda tetapi graf tersebut sebenarnya graf yang sama.

Dua buah graf yang secara grafis berbeda namun merupakan graf yang sama (matriks dan senarainya) dikenal dengan nama graf isomorfik.

Dengan kalimat lain:

Dua buah graf G1 (V1, E1) dan G2 = (V2, E2) disebut isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara jalur-jalur keduanya.

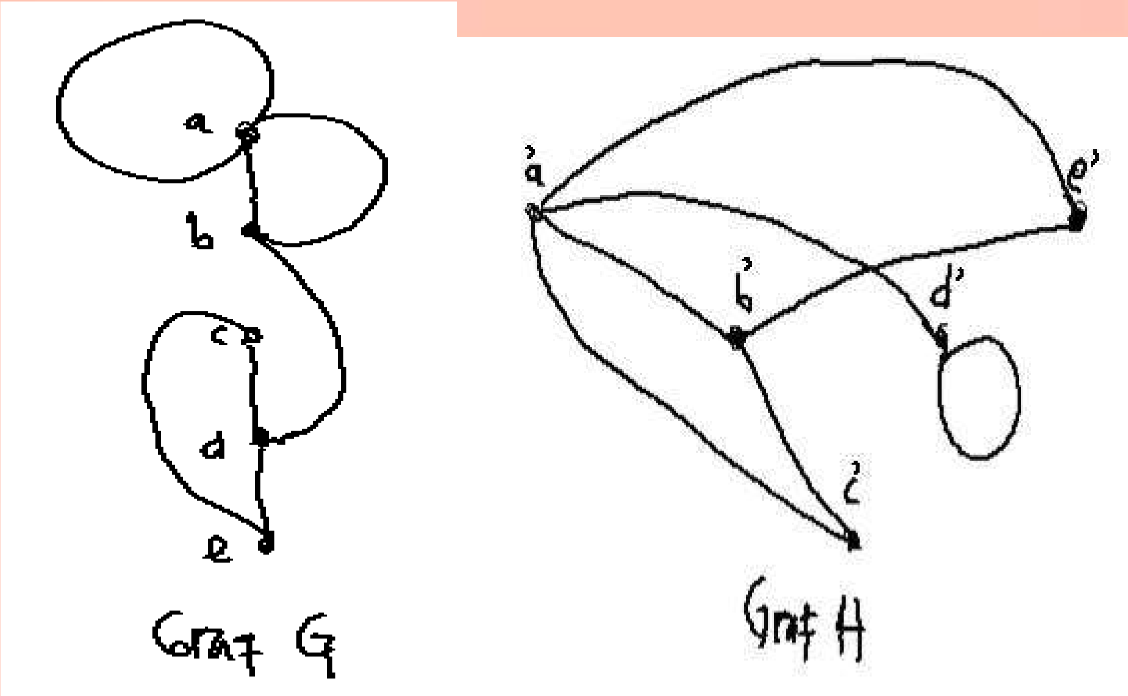
Ada 3 syarat perlu agar 2 buah graf saling isomorfik, yakni:

(1) Banyak simpul keduanya harus sama
(2) Banyak jalur keduanya harus sama
(3) Banyak simpul berderajat tertentu pada keduanya harus sama

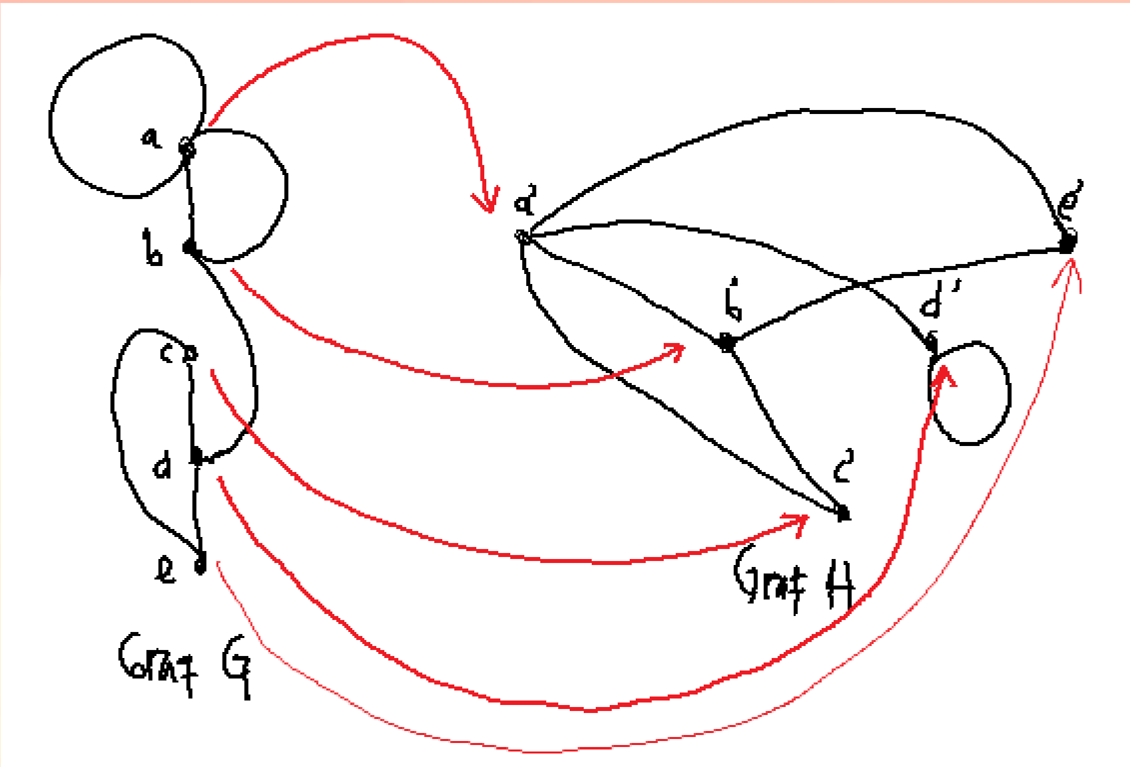
Namun, 3 syarat perlu ini belum mencukupi syarat agar 2 buah graf isomorfik, pemeriksaan apakah terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara jalur-jalur keduanya masih diperlukan. Sehingga adanya korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara jalur-jalur keduanya menjadi syarat cukup agar 2 buah graf saling isomorfik.

Contoh:

Periksa apakah graf G dan H berikut ini saling isomorfik:



Penyelesaian:



Kita perhatikan untuk syarat perlu dari graf isomorfik:

1. Banyak simpul pada G dan H sama yakni 5 buah
2. Banyak jalur pada G dan H sama yakni 7 buah
3. Banyak simpul berderajat 2 pada G dan H sama yakni 2 buah; banyak simpul berderajat 3 pada G dan H sama yakni 2 buah; dan banyak simpul berderajat 4 pada G dan H sama yakni 1 buah

   Maka ada kemungkinan bahwa G dan H isomorfik.

Mari kita periksa syarat cukup dari graf isorfik, apakah ada pada G dan H: temukan korespondensi simpul-simpulnya.

- Simpul a pada G berderajat 4, dan tetangganya adalah 1 simpul berderajat 3. Korespondesi yang tepat pada H adalah simpul a' yang mempunyai kondisi yang sama.
- Simpul b pada G berderajat 3, dan tetangganya adalah 1 simpul berderajat 3. Korespondensi yang tepat pada H adalah simpul b' yang mempunyai kondisi yang sama.
- Simpul c pada G berderajat 2, dan mempunyai tetangga 1 simpul berderajat 3 serta 1 simpul bederajat 2. Korespondensi yang tepat pada H adalah simpul c' yang mempunyai kondisi yang sama.
- Simpul d pada G berderajat 3, dan tetangganya adalah 2

simpul berderajat 2. Korespondensi yang tepat pada H adalah simpul d’ yang mempunyai kondisi yang sama.

- Simpul e pada G berderajat 2, dan memunyai tetangga 1 simpul berderajat 2 serta 1 simpul berderajat 2. Korespondensi yang tepat pada H adalah simpul e’ yang mempunyai kondisi yang sama.

Sehingga diperoleh:

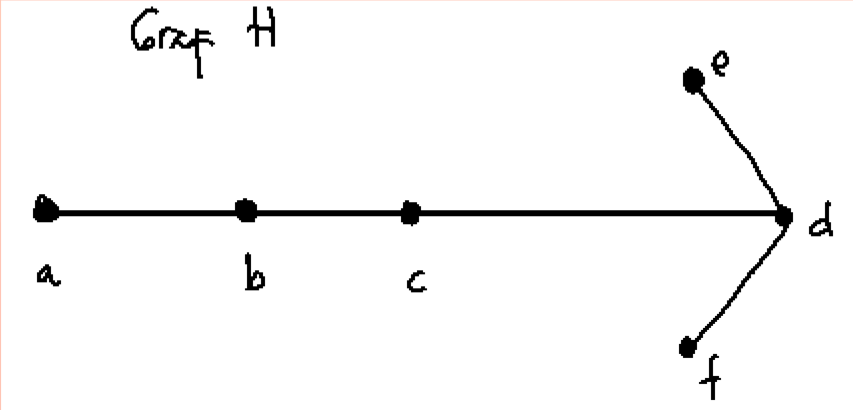
Setiap simpul di G berkorespondensi satu-satu dengan setiap simpul di H, yakni:

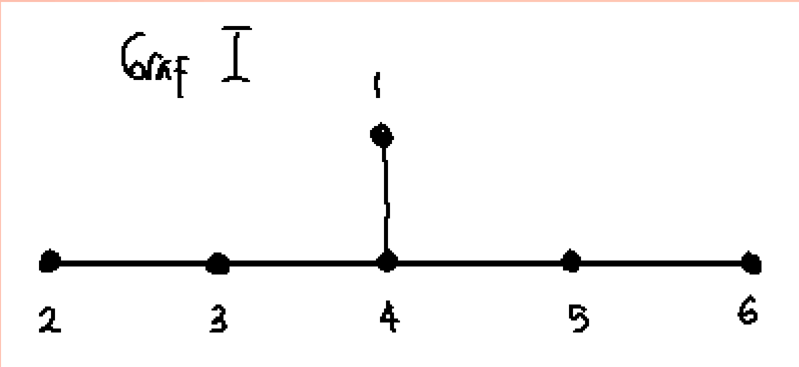
a dengan a’, b dengan b’, c dengan c’, d dengan d’, dan e dengan e’. Jadi, G dan H isomorfik.

Bila syarat perlu dari graf isomorfik tidak dipenuhi, pemeriksaan untuk mencari korespondensi satu-satu simpul-simpulnya tidak perlu dilakukan karena dipastikan tidak isomorfik. Namun, bila syarat perlu dipenuhi, belum tentu dua buah graf saling isomorfik.

Contoh:

Periksa apakah graf H dan I berikut ini saling isomorfik?





Penyelesaian:

Berdasarkan syarat perlu dari graf isomorfik, graf H dan I memenuhi ketiga syarat perlu tersebut:

1. Banyak simpul kedua graf adalah sama
2. Banyak jalur kedua graf adalah sama
3. Banyak simpul berderajat tertentu pada kedua graf juga sama.

Tetapi, mari kita coba untuk menemukan korespondensi satu-satu dari simpul pada kedua graf tersebut.

- Simpul a berkorespondensi dengan simpul 1, karena a memilik tetangga : 1 buah simpul derajat 1

- Simpul b tidak memiliki koresnpondensi dengan simpul pada graf I, karena simpul b berderajat 2, tetangganya 1 simpul berderajat 1 dan 1 simpul berderajat 3. Simpul berderajat 2 pada graf I hanya simpul 3 dan simpul 5, namun, tetangganya tidak seperti kondisi tetangga simpul b.

Ini artinya tidak ada korespondensi satu-satu antara simpul-simpul pada H dan I. Jadi, H dan I tidak isomorfik.

Selain dari syarat perlu dan syarat cukup dari graf isomorfik ini, pemeriksaan terhadap 2 buah graf apakah isomorfik atau tidak dapat dilakukan dengan melihat matriks ketetanggaannya. Bila matriks ketetanggaannya identik (sama persis) maka dua graf tersebut saling isomorfik.

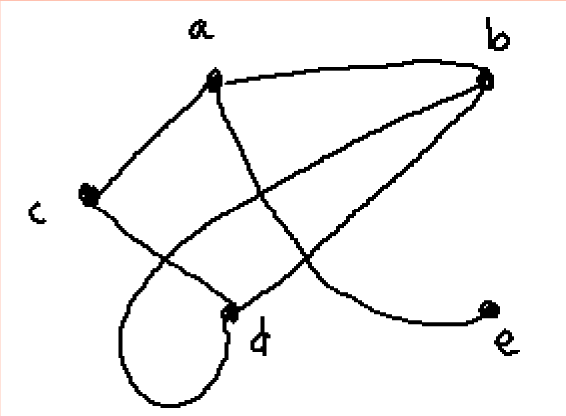
I. Graf Planar dan Graf Bidang

Graf planar adalah graf yang memiliki jalur bersilangan namun dapat digambarkan ulang menjadi graf yang tidak memiliki jalur bersilangan.

Hasil dari penggambaran ulang graf planar sedemikian hingga tidak ada jalurnya yang bersilangan disebut dengan graf bidang.

Contoh:

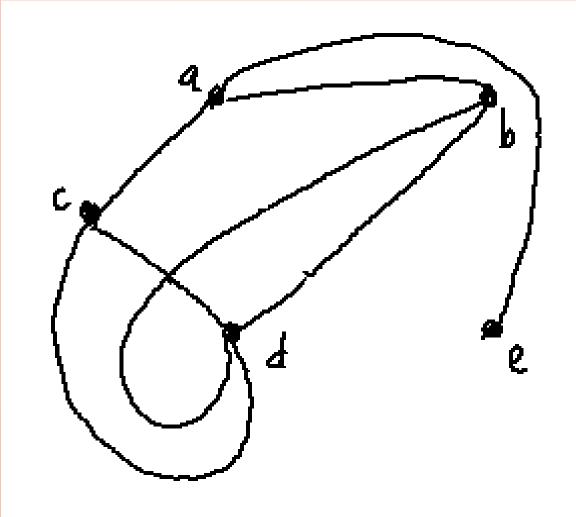
Diberikan graf G berikut ini yang memuat jalur-jalur bersilangan.



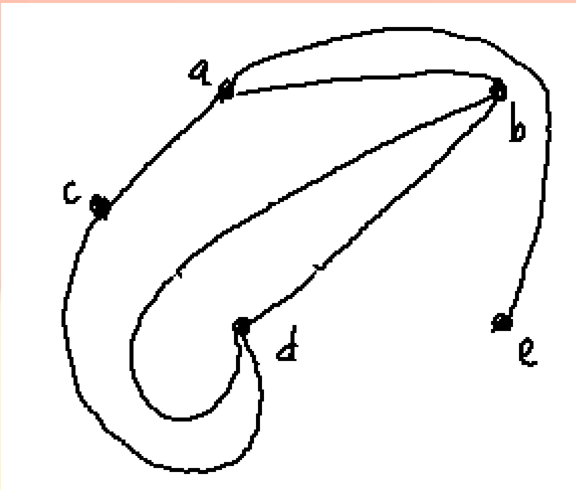
Penyelesaian:

Perhatikan graf G. G memuat beberapa jalur yang saling bersilangan. Selanjutnya cobalah menggambar ulang jalur-jalur bersilangan tersebut sehingga tidak lagi bersilangan.

Jalur (a,e) dapat digambar ulang ke kanan atas, menjadi seperti berikut:



Selanjutnya masih ada jalur yang bersilangan lainnya. Perhatikan jalur (c,d) dapat digambar ulang dari kiri bawah, menjadi seperti berikut:



Setelah ini, ternyata grafnya sudah tidak lagi memuat jalur bersilangan. Misalnya graf terakhirini kita beri nama graf H.

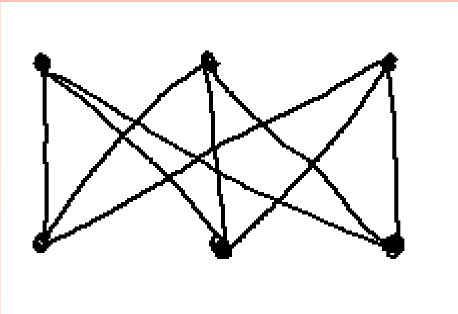
Diikarenakan graf G adalah graf yang memuat jalur bersilangan dan dapat digambar ulang menjadi graf yang tidak memuat jalur yang bersilangan, maka graf G disebut graf planar, sedangkan graf H sebagai hasil penggambaran ulangnya disebut dengan graf bidang dari graf planar G.

Contoh:

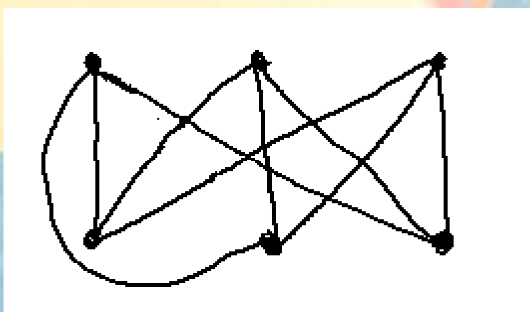
Ingat kembali graf bipartit komplit $K_{3,3}$. Periksa apakah $K_{3,3}$ planar?

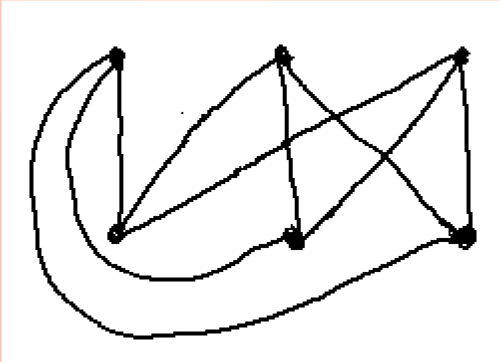
Penyelesaian:

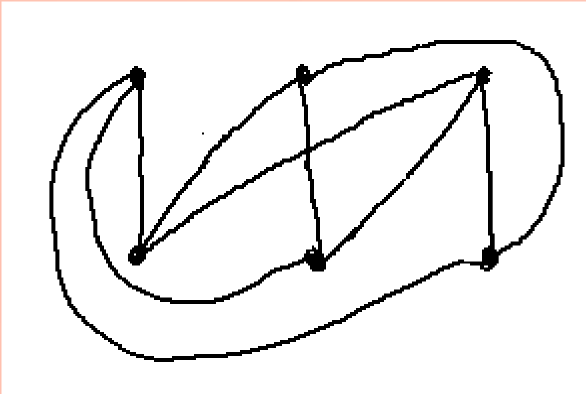
Berikut ini graf bipartit komplit $K_{3,3}$:

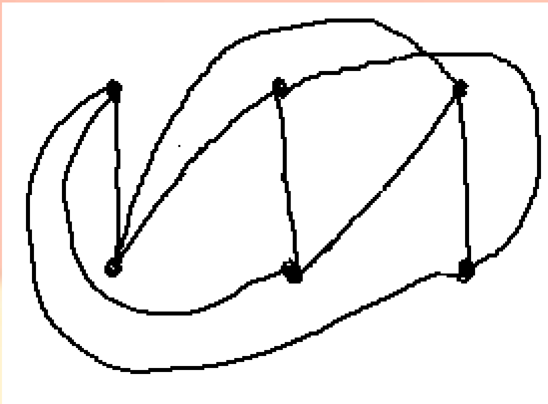


Selanjutnya, mari kita gambarkan ulang jalur-jalur yang bersilangan, prosesnya adalah sebagai berikut:





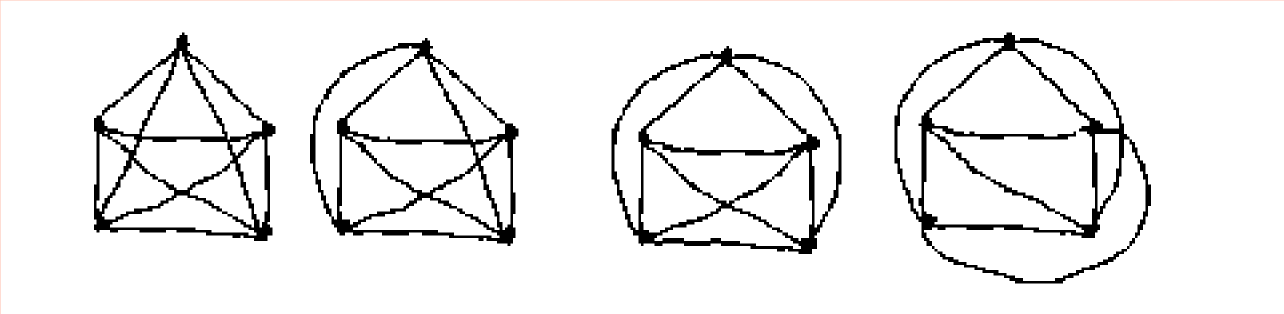




Artinya, $K_{3,3}$ tidak planar.

Bagaimana dengan graf komplit K_5? Apakah planar?

Penyelesaian:



K_5 juga bukan planar.

Untuk lebih jelasnya, saksikan video berikut yang menampilkan sebuah contoh lain dari pemeriksaan apakah sebuah graf planar atau tidak.

KLIK DISINI UNTUK MENONTON VIDEO

Berikut ini lembar kerja yang harus kalian selesaikan agar kalian dapat memahami materi ini dengan baik, klik gambar untuk melihat lembar kerja:

--Lembar Kerja --

KLIK DISINI UNTUK MENGUMPULKAN JAWABAN LKM

J. Pewarnaan Graf (*Graph Colouring*)

Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada graf.

Terdapat 3 jenis perwarnaan graf,yaitu:

1) Pewarnaan simpul
2) Pewarnaan jalur
3) Pewarnaan wilayah

Dalam modul ini, kita hanya membahas pewarnaan simpul saja.

Dalam memberi warna pada simpul, tentu saja yang paling mudah adalah dengan memberi warna-warna berbeda untuk setiap simpul-simpulnya. Artinya, dengan cara ini, kita akan menggunakan warna yakni sebanyak n, n adalah banyak simpul pada graf.

Namun, persoalannya adalah kita membutuhkan banyak warna yang paling minimum yang kita gunakan untuk memberi warna simpul-simpul graf. Dengan catatan bahwa simpul yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

Penggunaan warna yang paling minimum yang digunakan untuk mewarnai simpul-simpul pada graf ini akan membuat kita menemukan sebuah nilai tertentu yang disebut dengan bilangan kromatik.

Jadi, *bilangan kromatik adalah bilangan yang menunjukkan banyak warna minimum yang digunakan untuk mewarnai simpul graf*.

Bilangan kromatik disimbolkan dengan $\chi(G)$.

Terdapat sebuah algoritma untuk menentukan bilangan kromatik ini, yakni Algoritma Welch-Powell.

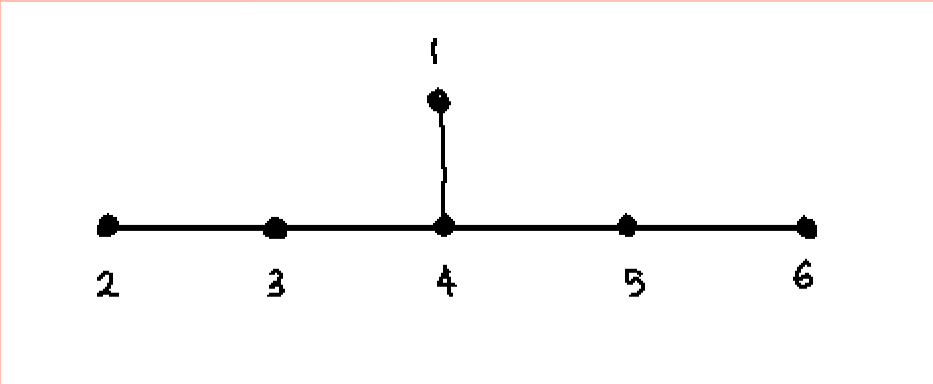
Algoritma Welch-Powell:

1. Urutkan simpul pada G dengan urutan sesuai derajatnya dari tinggi ke rendah.
2. Gunakan warna pertama untuk mewarnai simpul pertama dan simpul-simpul lain dalam urutan (dengan

ketentuan: tidak bertetangga dengan simpul pertama)

3. Beri warna kedua untuk simpul yang belum diberi warna pada urutan tersebut dan setiap simpul lain yang tidak bertetangga dengan simpul di awal langkah ini.
4. Ulangi langkah (3) sampai semua simpul diberi warna. Selesai.

Contoh: carilah bilangan kromatik dari graf berikut:



Penyelesaian:

Algoritma Welch-Powell:

1. Urutan simpul dari derajat yang paling tinggi ke paling rendah:

Nama Simpul	4	3	5	1	2	6
Derajat	3	2	2	1	1	1

2. Beri warna pertama (misalkan Merah) pada simpul pertama pada urutan (simpul 4) dan simpul lain yang bertetangga dengan simpul 4.

Nama Simpul	4	3	5	1	2	6
Derajat	3	2	2	1	1	1
Warna Simpul	Merah	Hijau	Hijau	Hijau	Merah	Merah

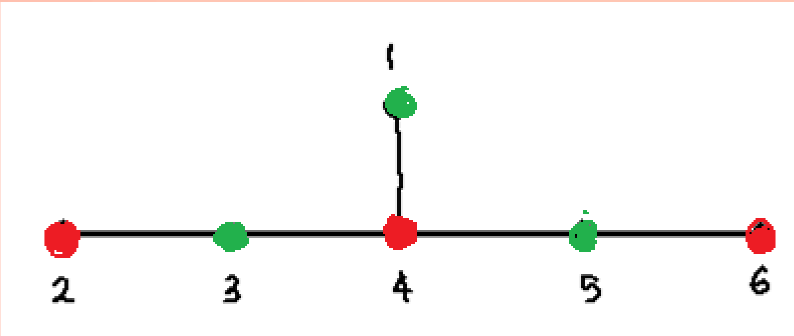
3. Beri warna kedua (misalnya Hijau) untuk simpul yang belum diberi warna pada urutan tersebut (simpul 3) dan setiap simpul lain yang tidak bertetangga dengan simpul 3 ini.

Nama Simpul	4	3	5	1	2	6
Derajat	3	2	2	1	1	1
Warna Simpul	Merah	Hijau	Hijau	Hijau	Merah	Merah

4. Ulangi langkah (3) sampai semua simpul diberi warna. Simpul 2 diberi warna ketiga (misalnya Kuning). Selesai.

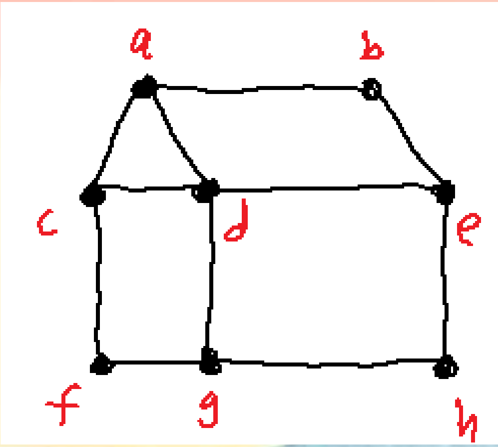
   Semua simpul sudah diberi warna. Selesai.

Diperoleh bilangan kromatiknya yakni 2.



Latihan:

Cari bilangan kromatik dari graf berikut:



KLIK DISINI UNTUK MENONTON VIDEO

TES KOMPETENSI LITERASI MATEMATIS

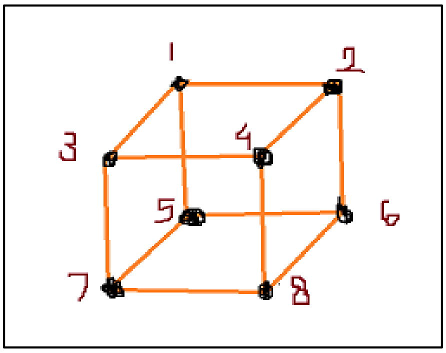
Petunjuk:

(1) Baca soal berikut dengan cermat lalu jawab dengan langkah penyelesaian yang lengkap.

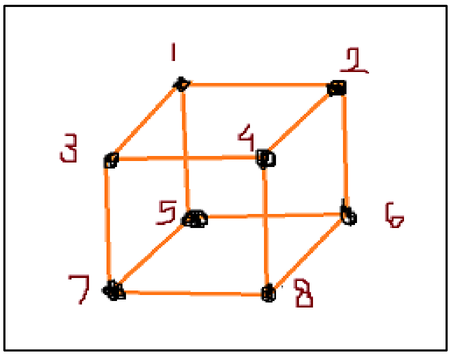
(2) Jawaban dituliskan di kertas selembar kemudian difoto dan dikirimkan ke google *classroom*.

Soal:

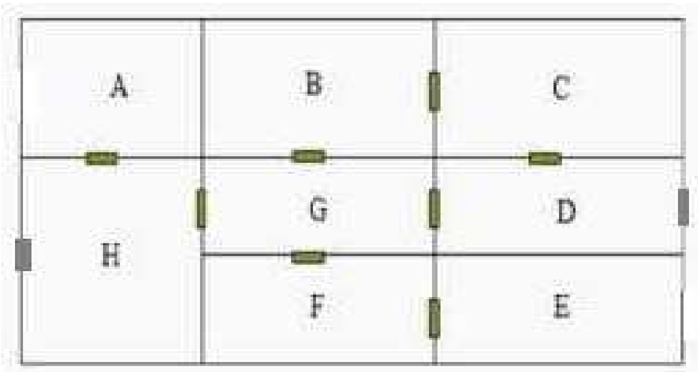
1. Gunakan algortima Welch-Powell untuk menemukan bilangan kromatik graf berikut:



2. Representasikan graf berikut dalam bentuk matriks ketetanggaan, matriks bersisian, dan senarai ketetanggaan.



3. Berikut ini denah rumah Clara. Clara mencoba memikirkan apakah ia bisa mengelilingi setiap ruangan di rumahnya hanya dengan 1 kali masuk, dimulai dari ruangan E lalu keluar rumah dari ruang D.



   a. Bagaimana lintasannya?
   b. Apakah masalah yang dipikirkan Clara ini merupakan masalah graf Euler/Semi Euler atau graf Hamilton/Semi Hamilton.
4. Diberikan 10 simpul graf yakni simpul a, b, c, d, e, f, g,h, i, dan j. Bila derajat masing-masing simpulnya seperti berikut ini maka dapatkah grafnya digambar?

   (i) 3, 3, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, dan 2

(ii) 4, 5, 3, 4, 2, 1, 3, 3, 3, dan 5

Jika grafnya dapat digambarkan, maka gambarkanlah.

Beri alasan jawaban kamu.

5. Terdapat 6 jenis senyawa kimia yang akan disimpan dalam gudang baru. Hal ini memerlukan kehati-hatian dalam cara penyimpanan tersebut karena beberapa senyawa kimia jika bercampur akan membentuk ledakan. Untuk itu dibutuhkan ruangan terpisah. Membangun gudang penyimpanan yang sesuai dihadapkan pada budget yang terbatas, sehingga diupayakan ruangan yang akan dibangun haruslah minimum banyaknya.

Berikut ini uraian senyawa kimia yang tidak dapat disimpan dalam ruang yang sama:

Senyawa 1 tidak dapat disimpan dengan senyawa 2 dan 4; senyawa 2 tidak dapat disimpan dengan senyawa 1, 4, 5, dan 6; senyawa 3 tidak dapat disimpan dengan senyawa 5; senyawa 4 tidak dapat disimpan dengan senyawa 1, 2, dan 6; senyawa 5 tidak dapat disimpan dengan senyawa 2 dan 3; senyawa 6 tidak dapat disimpan dengan senyawa 2 dan 4.

a. Tentukan banyak ruangan minimum yang dibutuhkan?
b. Gambarkan sebuah cara untuk menyimpanannya.

6. Seorang petani akan menyeberangkan hewan dan hasil kebunnya yakni: seekor serigala penjaga kebun, seekor kambing gembalaan, dan sekarung sayuran hijau, ke seberang sungai. Perahu yang tersedia hanya muat untuk 2 penumpang.

   Penyeberangannya menjadi rumit karena kondisi berikut:

   - serigala tidak dapat ditinggal dengan kambing karena akan menyerang kambing
   - kambing tidak dapat ditinggal dengan sayuran hijau karena kambing akan memakan sayuran.

   Bantu petani menyeberang dengan selamat bersama hewan dan hasil kebunnya yuk.

   a. Bagaimana cara menyeberangkan semuanya dengan selamat?

b. Berapa kali minimum penyeberangan dapat dilakukan. Jelaskan.

7. Diketahui graf G memuat 6 buah simpul dan 6 buah jalur dengan derajat masing-masing 1, 2, dan 3. Andaikan G memuat 2 simpul berderajat 2, berapa simpulkah yang berderajat 1 dan 3? Beri alasan dan gambar grafnya.

8. Temukan 5 buah cut set berbeda dari graf itu.