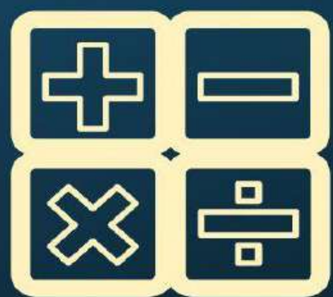
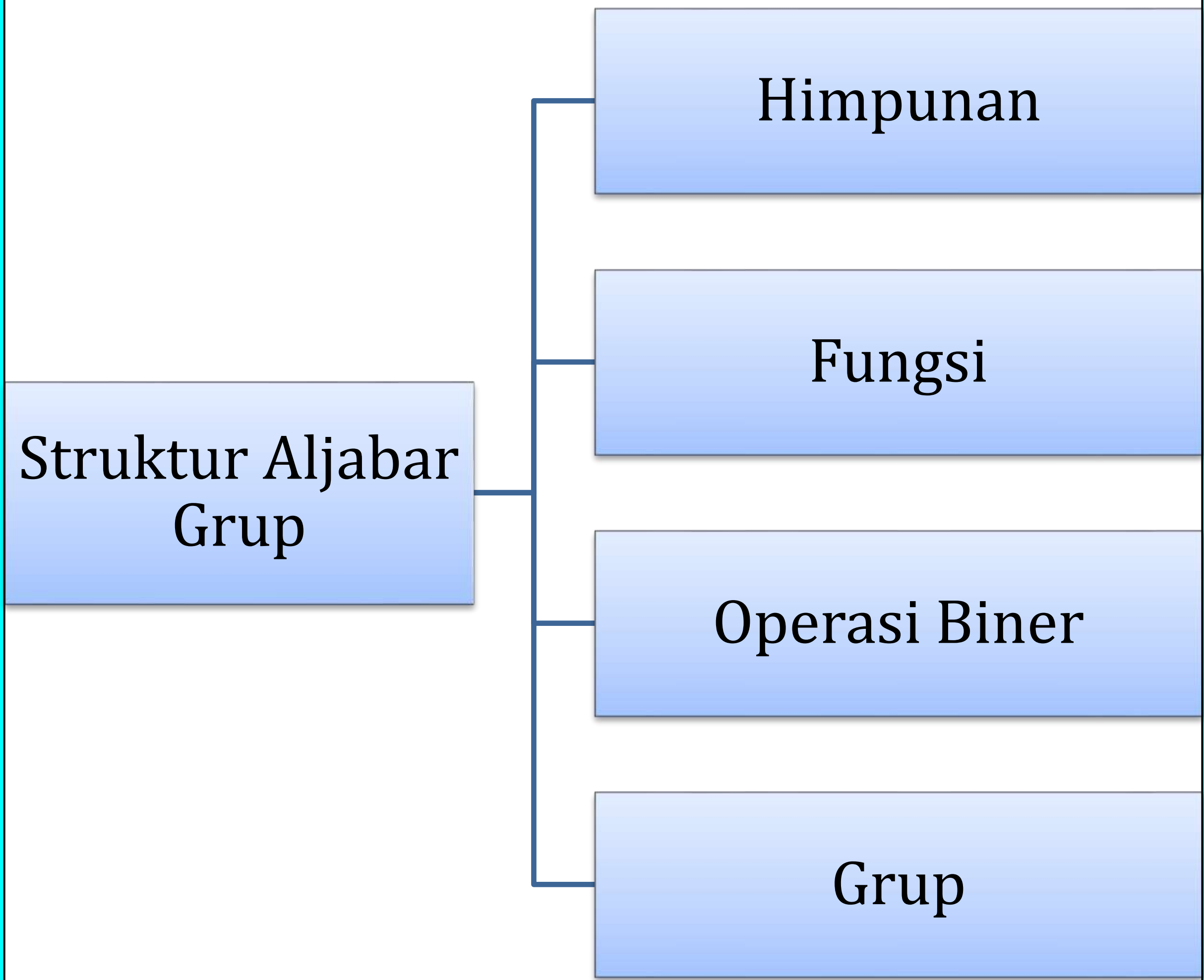
MODUL DIGITAL STRUKTUR ALJABAR GRUP

PENULIS:
SITI MAYSARAH, M.PD




Struktur Aljabar Grup
Himpunan
Fungsi
Operasi Biner
Grup

PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL DIGITAL INTERAKTIF

1. Baca materi dan saksikan video yang diberikan pada modul.
2. Di beberapa bagian tertentu terdapat soal latihan yang harus Anda kerjakan agar tujuan modul ini tercapai.
3. Bergabunglah di *e-learning* UIN Sumatera Utara dengan tautan link: https://elearning.uinsu.ac.id/
4. *E-learning* UIN Sumatera Utara digunakan untuk bertanya jawab seputar materi, dan untuk mengumpulkan jawaban pada latihan yang diberikan.

BAB 1
HIMPUNAN

Tujuan Instruksional Umum

Setelah mempelajari materi pada bab ini, maka diharapkan mahasiswa dapat memahami dan mengaplikasikan definisi dari himpunan, cara penyajian himpunan, kardinalitas, himpunan kosong, himpunan bagian (*subset*), himpunan yang sama, himpunan yang ekuivalen, himpunan saling lepas, himpunan kuasa, operasi himpunan, prinsip dualitas, prinsip inklusi dan eksklusi.

Tujuan Instruksional Khusus:

Setelah diberikan penjelasan materi terkait definisi operasi biner, maka mahasiswa dapat:

1.1. Menjelaskan konsep dari himpunan

1.2. Mengaplikasikan cara penyajian himpunan, seperti: enumerasi, keanggotaan, simbol-simbol baku, notasi pembentuk himpunan, dan diagram venn.

1.3. Menentukan kardinalitas dari suatu himpunan.

1.4. Menjelaskan definisi dari himpunan kosong.
1.5. Menentukan himpunan bagian dari suatu himpunan.
1.6. Menentukan dua himpunan yang dikatakan sama.
1.7. Menentukan dua himpunan yang saling lepas.
1.8. Menentukan himpunan kuasa dari suatu himpunan.
1.9. Mengaplikasikan beberapa macam operasi himpunan, seperti: irisan (*intersection*), gabungan (*union*), komplemen (*complement*), selisih (*difference*), beda setangkup (*symmetric difference*).
1.10. Membuktikan sifat-sifat aljabar himpunan.
1.11. Membuktikan prinsip dualitas himpunan.
1.12. Memahami prinsip inklusi dan eksklusi.

Deskripsi Singkat:

Pada kegiatan belajar 1 dibahas konsep-konsep dasar dan sifat dari himpunan. Salah satu alat yang paling penting dalam kajian matematika modern adalah teori himpunan. Matematika modern dapat digambarkan sebagai kajian tentang himpunan yang dilengkapi dengan berbagai struktur, yang dikenal dengan istilah sistem matematika.

Setiap objek pada matematika modern pada akhirnya selalu kembali kepada kajian tentang himpunan.

1.1. Pengertian Himpunan

Himpunan diartikan sebagai kumpulan dari objek-objek yang dapat diterangkan dengan jelas. Himpunan dinotasikan dengan sebuah huruf kapital, sedangkan keanggotaannya dituliskan dengan huruf kecil. Misalkan A sebuah himpunan dan a adalah sebuah objek di A, dikatakan a adalah anggota dari A, dan dinotasikan oleh $a \in A$, dalam kasus a bukan anggota A dinotasikan oleh $a \notin A$.

1.2. Cara Penyajian Himpunan

1.2.1. Enumerasi

Enumerasi yaitu suatu himpunan yang dapat dinyatakan dengan menyebutkan semua anggotanya yang dituliskan dalam tanda kurung kurawal "{ }" dan di antara setiap anggotanya dipisahkan dengan tanda koma.

Contoh 1:

a) Himpunan bilangan prima kurang dari 11, ditulis dengan: $A = \{2,3,5,7\}$

b) Himpunan 50 bilangan asli pertama, ditulis dengan: $\{1,2,3, \ldots ,50\}$

1.2.2. Keanggotaan

$a \in A$; a merupakan anggota himpunan A

$a \notin A$; a bukan merupakan anggota himpunan A

Contoh 2:

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$,

$C = \{\{\quad\}\}$

maka

$3 \in A$

$5 \notin A$

$\{a, b, c\} \in B$

$c \notin B$

$\{\quad\} \in C$

$\{\quad\} \notin B$

Contoh 3:

Misalkan $A = \{a, b\}, B = \{\{a, b\}\},\ C = \{\{\{a, b\}\}\}$, maka

$a \in A$

$a \notin B$

$A \in B$

$A \notin C$

$B \in C$

1.2.3. Simbol-Simbol Baku

Penulisan himpunan yang sudah baku dikhususkan bagi himpunan yang telah baku dan sering digunakan dalam penjabaran matematika.

Contoh 4:

P = himpunan bilangan bulat positif = $\{ 1, 2, 3, \dots \}$

N = himpunan bilangan alami (natural) = $\{ 1, 2, \dots \}$

Z = himpunan bilangan bulat = $\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

U = himpunan yang universal: **semesta**

1.2.4. Notasi Pembentuk Himpunan

Penulisan notasi:

$\{x \mid syarat\ yang\ harus\ dipenuhi\ oleh\ x\}$

Contoh 5:

B adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 10

$B = \{x \mid x \in P, x < 10\}$

yang ekuivalen dengan $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

1.2.5. Diagram Venn

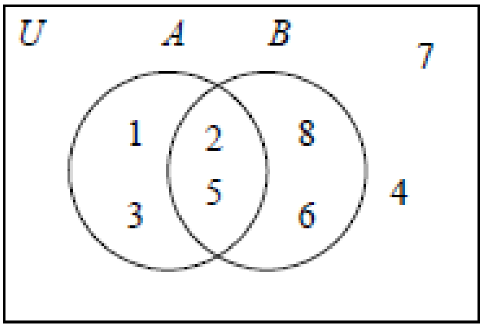
Diagram venn adalah cara lain untuk menyatakan suatu himpunan dengan gambar atau diagram. Diagram venn ini pertama kali ditemukan oleh ahli matematika berkebangsaan Inggris yang bernama **John Venn** (1834-1923).

Contoh 6:

Misalkan:

U = {1, 2, …, 7, 8}, A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.

Buat Diagram Venn:



Gambar 1.1. Diagram Venn Contoh 6

1.3. Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut kardinalitas dari himpunan A dan dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh 7:

$A = \{x | x\ bilangan\ bulat\ positif\ ganjil\ \ kecil\ dari\ 10\}$ atau $A = \{1,3,5,7,9\}$ maka $n(A) = 5$

1.4. Himpunan Kosong

Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*) yang dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\ \ \}$. Himpunan $\{\{\ \ \}\}$ dapat juga ditulis dengan $\{\emptyset\}$. Himpunan $\{\{\ \ \}, \{\{\ \ \}\}\}$ dapat juga ditulis dengan $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Akan tetapi $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

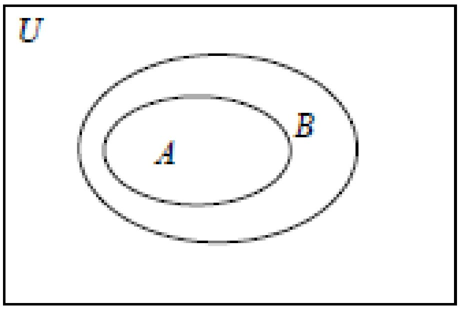
Contoh 8:

$B = \{buah\ yang\ rasanya\ asin\}$, maka $n(B) = 0$

$A = \{x|x\ akar\ persamaan\ kuadrat\ x^2 + 1 = 0\}$, maka $n(A) = 0$.

1.5. Himpunan Bagian (*Subset*)

Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B yang dinotasikan dengan $A \subseteq B$. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A. Diagram Venn A himpunan bagian dari himpunan B yaitu:



Gambar 1.2. Himpunan Bagian (*Subset*)

Contoh 9:

a) $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$

b) $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$

c) $N \subseteq Z \subseteq R \subseteq C$

$A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

Jika $A \subset B$ adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.

Contoh 10:

$\{2\}$ dan $\{3,4\}$ adalah *proper subset* dari $\{2,3,4\}$

Sedangkan $A \subseteq B$ digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

Teorema 1.1.

Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri $(A \subseteq A)$
b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A $(\emptyset \subseteq A)$
c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

1.6. Himpunan yang Sama

$A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A. Selanjutnya, $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$. Dinotasikan dengan $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \; dan \; B \subseteq A$.

Contoh 11:

a) Jika $A = \{0,1\}$ dan $B = \{x|x(x-1) = 0\}$, maka $A = B$

b) Jika $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{2,3,1\}$ maka $A = B$

c) Jika $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{2,3\}$ maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan $A, B,$ dan C berlaku aksioma berikut:

1) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

2) Jika $A = B$, maka $B = A$

3) Jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

1.7. Himpunan yang Ekuivalen

Himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinalitas dari kedua himpunan tersebut sama. Dinotasikan dengan:

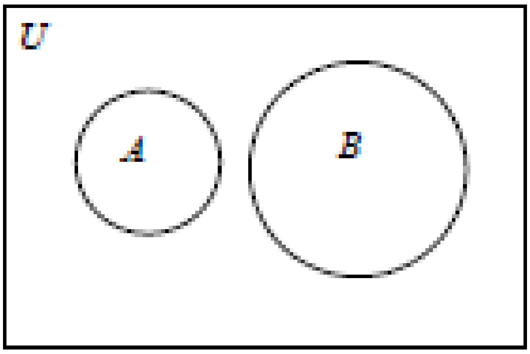
$$A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$$

Contoh 12:

Misalkan $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 5$

1.8. Himpunan Saling Lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama. Dinotasikan $A \,//\, B$ dan dapat disajikan dengan diagram venn berikut:



Gambar 1.3. Himpunan Saling Lepas

Contoh 13:

Jika $A = \{x | x \in N, x < 7\}$ dan $B = \{7,8,9,10\}$, maka $A \,//\, B$

1.8. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri. Dinotasikan dengan: $P(A)$ atau 2^A. Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$

Contoh 14:

Jika $A = \{1,2\}$, maka $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah:

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

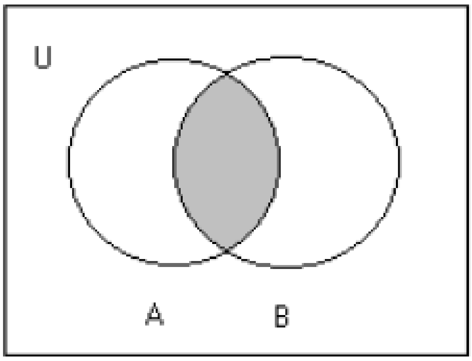
Himpunan kuasa dari $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1.9. Operasi Himpunan

1.9.1. Irisan (*intersection*)

Irisan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya berasal dari A yang juga menjadi anggota B. Dinotasikan dengan $A \cap B = \{x | x \in A \; dan \; x \in B\}$

Diagram venn dari irisan sebagai berikut:



Gambar 1.4. Irisan (*intersection*)

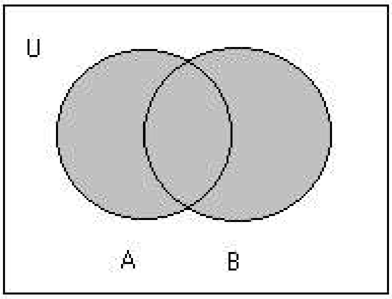
Contoh 15:

Jika $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $B = \{2,4,6,8,10\}$ maka $A \cap B = \{2,4,6\}$

1.9.2. Gabungan (*union*)

Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya berasal dari A atau B atau keduanya. Dinotasikan dengan $A \cup B = \{x | x \in A \; atau \; x \in B\}$

Diagram Venn dari gabungan sebagai berikut:



Gambar 1.5. Gabungan (*union*)

Contoh 16:

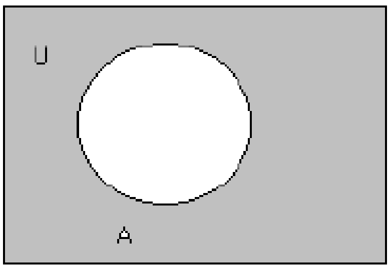
a) Jika $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,4,5\}$,

maka $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

b) $A \cup \emptyset = A$

1.9.3. Komplemen (*complement*)

Komplemen dari himpunan A yang dimuat himpunan semesta U adalah himpunan anggota U yang tidak dimuat di A. Dinotasikan dengan: $A^C = \{x | x \in U, x \notin A\}$. Komplemen juga terkadang sering dinotasikan dengan A' atau $\bar{A}$.



Gambar 1.6. Komplemen (*complement*)

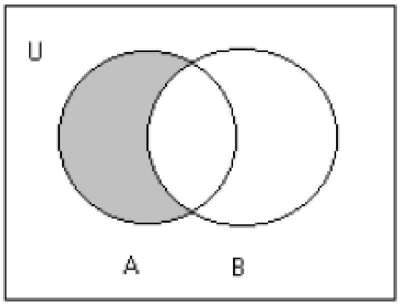
Contoh 17:

Misalkan $U = \{1,2,3,\ldots,10\}$

Jika $A = \{2,4,5\}$, maka $A^C = \{1,3,6,7,8,9\}$

1.9.4. Selisih (*difference*)

Selisih himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A tetapi bukan anggota himpunan B. Dinotasikan dengan $A - B = \{x|x \in A\ dan\ x \notin B\} = A \cap B^C$. Diagram venn disajikan sebagai berikut:



Gambar 1.7. Selisih (*Difference*)

Contoh 18:

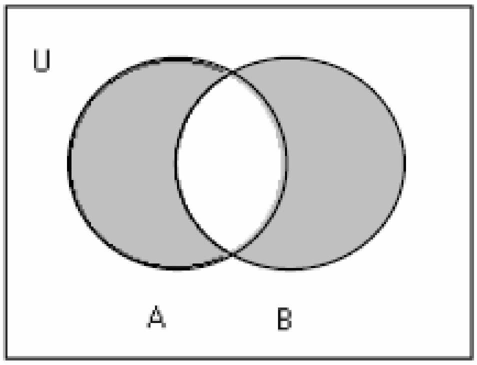
Jika $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dan $B = \{1,3,5,7,9\}$, maka $A - B = \{2,4,6,8\}$

Jika $A = \{1,3,5\}$ dan $B = \{1,2,3\}$, maka $A - B = \{5\}$ tetapi $B - A = \{2\}$

1.9.5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Beda setangkup (*Symmetric Difference*) A dan B dinotasikan dengan $A \oplus B$ adalah himpunan yang terdiri dari semua elemen di A atau di B tetapi tidak dalam keduanya. Jadi, $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cup (B - A)$ atau dapat juga dinotasikan dalam $A \oplus B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B \text{ dan } (x \notin A \cap B)\}$

Diagram venn dari beda setangkup dapat disajikan sebagai berikut:



Gambar 1.8. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Contoh 19:

Jika $A = \{2,4,6\}$ dan $B = \{2,3,5\}$,

maka $A \oplus B = \{2,3,4,5,6\} - \{2\} = \{3,4,5,6\}$

Contoh 20:

Misalkan:

U = Himpunan mahasiswa yang mengambil matakuliah Struktur Aljabar Grup

P = Himpunan mahasiswa yang memperoleh nilai UTS di atas 90

Q = Himpunan mahasiswa yang memperoleh nilai UAS di atas 90

Seorang mahasiswa memperoleh nilai A jika nilai UTS dan UAS keduanya di atas 90, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 90, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 90. Nyatakan semua nilai dengan notasi operasi himpunan!

1) Semua mahasiswa yang mendapat nilai $A = P \cap Q$
2) Semua mahasiswa yang mendapat nilai $B = P \oplus Q$

3) Semua mahasiswa yang mendapat nilai
$C = U - (P \cup Q)$

Teorema 1.2.

Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

1) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

2) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

1.10.Sifat-sifat Aljabar Himpunan

(a) Hukum Identitas:

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap U = A$

(b) Hukum *null* dominasi:

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup U = U$

(c) Hukum Komplemen:

$A \cup A^C = U$

$A \cap A^C = \emptyset$

(d) Hukum Idempoten:

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

(e) Hukum Involusi:

$(A^C)^C = A$

(f)Hukum Penyerapan (absorpsi):

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

(g) Hukum Komutatif:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

(h) Hukum Asosiatif:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(i) Hukum Distributif:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(j) Hukum De Morgan:

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(k) Hukum $^{0}/_{1}$

$(\emptyset)^C = U$

$(U)^C = \emptyset$

Contoh 21:

Buktikan hukum distributif dari:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Penyelesaian:

Misalkan $x \in A \cup (B \cap C)$ maka berlaku salah satu $x \in A$ atau $x \in (B \cap C)$. Sekarang bila $x \in A$, akibatnya tentu saja $x \in (A \cup B)$ dan $x \in (A \cup C)$. Dengan demikian berlaku $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Di lain pihak, jika $x \in (B \cap C)$, maka $x \in B$ dengan demikian akibatnya $x \in (A \cup B)$. Dari $x \in C$, diperoleh $x \in (A \cup C)$. Dari kedua kondisi ini diperoleh $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa:

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Sebaliknya, misalkan $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Akibatnya berlaku kedua hal berikut $x \in (A \cup B)$ dan $x \in (A \cup C)$. Perhatikan bahwa kondisi $x \in (A \cup B)$ ekuivalen dengan $x \in A$ atau $x \in B$, pada saat yang bersamaan, kondisi $x \in (A \cup C)$ ekuivalen dengan $x \in A$ atau $x \in C$. Kedua kondisi ini mengakibatkan bahwa $x \in A$ atau $x \in (B \cap C)$, jadi diperoleh bahwa:

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

Dengan demikian diperoleh bahwa:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

1.11. Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas berarti dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar. Prinsip dualitas pada himpunan, misal S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup, \cap$, dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mennganti $\cup \rightarrow \cap$, $\cap \rightarrow \cup$, $\emptyset \rightarrow U$, $U \rightarrow \emptyset$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S.

1) Hukum Identitas: $A \cup \emptyset = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2) Hukum *null* dominasi: $A \cap \emptyset = \emptyset$	Dualnya: $A \cup U = U$
3) Hukum Komplemen: $A \cup A^C = U$	Dualnya: $A \cap A^C = \emptyset$
4) Hukum Idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$
5) Hukum Penyerapan (absorpsi): $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$

6) Hukum Komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7) Hukum Asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8) Hukum Distributif: $A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
9) Hukum De Morgan: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	Dualnya: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
10) Hukum ${}^0/_1$ $(\emptyset)^C = U$	Dualnya: $(U)^C = \emptyset$

Contoh 22:

Buktikan dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

dengan menggunakan hukum distributif:

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A \cap (B \cup B^C)$$

dengan menggunakan hukum komplemen:

$$A \cap (B \cup B^C) = A \cap U$$

hukum *null* $A \cap U = A$

Jadi $(A \cup B) \cap (A \cup B^C) = A$

1.12.Prinsip Inklusi dan Eksklusi

Berkaitan dengan kardinalitas himpunan, diperoleh beberapa rumus sebagai berikut: Misalkan $|P|$ menyatakan kardinalitas himpunan P, dan $|Q|$ menyatakan kardinalitas himpunan Q, maka:

$|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q|$

$|P \cup Q| \leq |P| + |Q|$

$|P \cap Q| \leq \min(|P|, |Q|)$

$|P \oplus Q| = |P| + |Q| - 2|P \cap Q|$

$|P - Q| \geq |P| - |Q|$

untuk 3 buah himpunan hingga, maka:

$$|P \cup Q \cup R| = |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$$

Secara umum untuk himpunan-himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kita peroleh:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup\ A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap\ A_n|$$

Contoh 23:

Tentukan banyaknya bilangan asli kurang dari 51, yang habis dibagi 2, 5, atau 7.

Tentukan banyaknya bilangan asli kurang dari 51 yang habis dibagi 2 dan 5 tetapi tidak habis dibagi 7.

Penyelesaian:

Misalkan

P = Himpunan bilangan asli kurang dari 51 yang habis dibagi 2

Q = Himpunan bilangan asli kurang dari 51 yang habis dibagi 5

R = Himpunan bilangan asli kurang dari 51 yang habis dibagi 7

maka

$P = \{2,4,6,\ldots,50\} \rightarrow |P| = 25$

$Q = \{5,10,15,..,50\} \rightarrow |Q| = 10$

$R = \{7,14,21,..,49\} \rightarrow |R| = 7$

$P \cap Q = \{10,20,30,\ldots,50\} \rightarrow |P \cap Q| = 5$

$P \cap R = \{14,28,42\} \rightarrow |P \cap R| = 3$

$R \cap Q = \{35\} \rightarrow |R \cap Q| = 1$

$P \cap Q \cap R = \{\emptyset\} \rightarrow |P \cap Q \cap R| = 0$

$$|P \cup Q \cup R| = |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$$

$$= 25 + 10 + 7 - 5 - 3 - 1 + 0$$

$$= 33$$

Jadi, banyaknya bilangan asli kurang dari 51 yang habis dibagi 2 dan 5 tetapi tidak habis dibagi 7 adalah 33 bilangan.

Contoh 24:

Diantara 100 mahasiswa, 32 mahasiswa mempelajari matakuliah Kalkulus Integral, 20 mahasiswa mempelajari matakuliah Teori Bilangan, 45 mahasiswa mempelajari matakuliah Aljabar Linier, 15 mahasiswa mempelajari matakuliah Kalkulus Integral dan Teori Bilangan, 7 mahasiswa mempelajari matakuliah Kalkulus Integral dan Aljabar Linier, 10 mahasiswa mempelajari Teori Bilangan dan Aljabar Linier, dan 30 mahasiswa tidak mempelajari satupun diantara ketiga matakuliah tersebut. Hitunglah:

a. Banyaknya mahasiswa yang mempelajari ketiga matakuliah tersebut.

b. Banyaknya mahasiswa yang mempelajari hanya satu diantara ketiga matakuliah tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan:

P = Himpunan mahasiswa yang mempelajari matakuliah Kalkulus Integral

Q = Himpunan mahasiswa yang mempelajari matakuliah Teori Bilangan

R = Himpunan mahasiswa yang mempelajari matakuliah Aljabar Linier

Jadi,

$|P| = 32, |Q| = 20, |R| = 45, |P \cap Q| = 15, |P \cap R| = 7,$
$|R \cap Q| = 10$

$|P \cup Q \cup R|^C = 30, |P \cup Q \cup R| = 70$

$$|P \cup Q \cup R| = |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$$

$$\begin{aligned} |P \cap Q \cap R| &= |P \cup Q \cup R| - |P| - |Q| - |R| + |P \cap Q| + |P \cap R| + |R \cap Q| \\ &= 70 - 32 - 20 - 45 + 15 + 7 + 10 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya mahasiswa yang mempelajari ketiga matakuliah tersebut sebanyak 5 orang.

Banyaknya mahasiswa yang hanya memplejari matakuliah Kalkulus Integral adalah:

$|P| - |P \cap Q| - |P \cap R| + |P \cap Q \cap R|$

$= 32 - 15 - 7 + 5$

$= 15$ orang

Banyaknya mahasiswa yang hanya mempelajari natakuliah Teori Bilangan adalah:

$|Q| - |P \cap Q| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$

$= 20 - 15 - 10 + 5$

$= 0$ orang

Banyaknya mahasiswa yang hanya mempelajari matakuliah Aljabar Linier adalah:

$|R| - |P \cap R| - |R \cap Q| + |P \cap Q \cap R|$

$= 45 - 7 - 10 + 5$

$= 33$ orang

Jadi, banyaknya mahasiswa yang mempelajari hanya satu diantara ketiga matakuliah tersebut adalah 48 orang.

LATIHAN 1

Klik link di bawah ini untuk mengerjakan latihan!

PMM-1

PMM-2

PMM-3

PMM-4

Panduan penggunaan e-learning:

RENCANA TINDAK LANJUT

Setelah mahasiswa menjawab soal latihan pada setiap akhir bab, maka jawaban mahasiswa dikoreksi secara bersama-sama di kelas. Kemudian, masing-masing mahasiswa menghitung tingkat penguasaan materi dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Skor yang Diperoleh Siswa}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$

Klasifikasikan tingkat penguasaan terhadap materi yang telah diajari dengan rentang nilai di bawah ini:

Rentang Nilai (%)	**Kategori**
90 – 100	Sangat Baik
80 – 89	Baik
70 – 79	Sedang
$\leq$ 69	Kurang

Jika mahasiswa mendapatkan tingkat penguasaan materi $\geq$ 70%, maka mahasiswa tersebut dapat melanjutkan ke bab berikutnya. Namun, jika tingkat penguasaan mahasiswa berada pada rentang < 70%, maka mahasiswa tersebut dianjurkan untuk mengulang materi pada bab ini, terutama pada materi yang belum dikuasai.

Jika Anda belum menguasai materi ini, silahkan lihat video berikut:

BAB 2

FUNGSI (PEMETAAN)

Tujuan Instruksional Umum:

Setelah mempelajari materi pada bab ini, mahasiswa diharapkan dapat menjelaskan konsep dan sifat-sifat relasi, fungsi serta aljabar dari fungsi; menyelidiki keterkaitan antara satu himpunan dengan himpunan lainnya; dan menyelidiki keterkaitan antara satu struktur matematika dengan struktur matematika lainnya.

Tujuan Instruksional Khusus:

Setelah diberikan penjelasan materi terkait fungsi, diharapkan mahasiswa dapat:

2.1. Menjelaskan definisi dari fungsi.

2.2. Menentukan relasi dari dua buah himpunan.

2.3. Menjelaskan definisi daerah asal, jangkauan atau bayangan.

2.4. Memahami sifat-sifat relasi seperti: refleksif, simetrik, transitif, dan anti transitif.

2.5. Menjelaskan definisi fungsi.

2.6. Menentukan contoh dan bukan contoh dari fungsi.

2.7. Memahami dan membedakan jenis-jenis fungsi, seperti: injektif, surjektif, dan bijektif.

2.8. Menentukan contoh dan bukan dari masing-masing jenis fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.

2.9. Menentukan komposisi dari dua buah fungsi.

2.10. Memahami definisi bilangan bulat.

2.11. Memahami definisi dari faktor persekutuan terbesar (*greatest common divisor*).

2.12. Menentukan gcd dari beberapa bilangan bulat.

2.13. Membuktikan teorema dari gcd.

2.14. Memahami persekutuan terkecil (*least common multiple*).

2.15. Menentukan lcm dari beberapa bilangan bulat.

2.16. Memahami definisi kekongruenan.

2.17. Membuktikan beberapa teorema dari kekongruenan.

2.18. Memahami definisi induksi matematika.

2.19. Membuktikan kebenaran dengan menggunakan induksi matematika.

Deskripsi Singkat:

Pada kegiatan belajar 2 dibahas konsep dasar dan sifat dari fungsi. Konsep-konsep ini menjadi dasar bagi sistem matematika dan sifat-sifat sistem matematika. Hubungan antara dua atau lebih himpunan dapat digambarkan melalui suatu fungsi. Konsep fungsi memungkinkan kita untuk dapat mengetahui keterkaitan antara satu himpunan dengan himpunan lainnya. Lebih dari itu, melalui fungsi tertentu, dalam hal ini fungsi yang mengawetkan struktur matematika (homomorfisma, transformasi linier), dapat dikaji keterkaitan satu struktur matematika dengan struktur matematika lainnya.

Konsep fungsi atau pemetaan menempati posisi yang sentral pada setiap cabang matematika. Pada cabang matematika yang lebih dekat dengan dunia aplikasi, misalnya Kalkulus, sebutan fungsi lebih populer digunakan dari pada sebutan pemetaan. Pada cabang matematika yang lebih abstrak, misalnya Struktur Aljabar, istilah pemetaan lebih populer digunakan dari pada istilah fungsi. Pada dasarnya sebuah fungsi adalah sebuah relasi atau hubungan yang mempunyai sifat khusus.

2.1. Relasi

Sebuah relasi pada dasarnya adalah sebuah himpunan dari pasangan terurut.

Definisi 2.1:

Misalkan A dan B merupakan dua buah himpunan, maka hasil kali silang (*cross product*) dari A dan B. Dinotasikan dengan:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Definisi 2.2:

Sebuah relasi dari A ke B adalah subhimpunan dari $A \times B$

Contoh 1:

Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$, maka $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A|.|B|$
2. Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$
3. Perkalian tidak bersifat komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

4. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

Misalkan f adalah sebuah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Dengan melihat unsur-unsur dari f, kita dapat menemukan unsur-unsur A yang terkait dengan unsur-unsur dari B. Unsur-unsur dari A yang terkait dengan unsur-unsur di B adalah sebuah subhimpunan dari A, disebut **daerah asal (*domain*)** dari f. Unsur-unsur dari B yang berelasi dengan unsur dari A adalah sebuah subset dari B, disebut **jangkauan (*range*)** atau **bayangan (*image*)** dari f. Secara lebih formal, kita memiliki definisi berikut.

Definisi 2.3:

Misalkan f sebuah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka **daerah asal** dari f, dinotasikan dengan $D(f)$ didefinisikan sebagai himpunan

$\{x | x \in A \text{ dan terdapat } y \in B \text{ sedemikian sehingga } (x, y) \in f\}$

Jangkauan atau **bayangan** dari f, dinotasikan dengan $I(f)$ didefinisikan sebagai himpunan

$\{y | y \in B \text{ dan terdapat } x \in A \text{ sedimikian sehingga } (x, y) \in f\}$

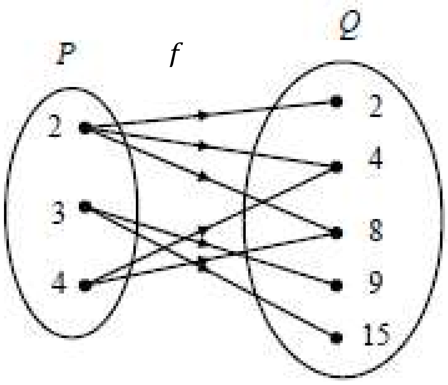
Contoh 2:

Misalkan $A = \{4,5,7,8,9\}$ dan $B = \{16,18,20,22\}$. Definisikan $f \subseteq A \times B$ dengan

$$f = \{(4,16), (4,20), (5,20), (8,16), (9,18)\}$$

Maka f adalah relasi dari A ke B. Perhatikan bahwa $(a, b) \in f$ jika dan hanya jika a membagi b, di mana $a \in A$ dan $b \in B$. Perhatikan bahwa $D(f) = \{4,5,8,9\}$ dan $I(f) = \{16,18,20\}$.

Contoh 3:



Gambar 2.1. Diagram Venn Relasi *f*

Menunjukkan Relasi f dari himpunan P ke Himpunan Q dengan demikian diperoleh:

$$f = \{(2,2), (2,4), (2,8), (3,9), (3,15), (4,4), (4,8)\}$$

2.1.1. Sifat-Sifat Relasi:

Suatu relasi R pada himpunan A, maka:

1. $(x, x) \in f, \forall\, x \in A$ (Sifat Refleksif)
2. $(x, y) \in f$ maka $(y, x) \in f, \forall\, x, y \in A$ (Sifat Simetrik)
3. $(x, y) \in f$ dan $(y, z) \in f$ maka $(x, z) \in f,\ \forall\, x, y, z \in A$ (Sifat Transitif)
4. $(x, y) \in f$ dan $(y, x) \in f$ maka $x = y,\ \forall\, x, y \in A$ (Sifat Anti Transitif)

Definisi 2.4:

Suatu relasi f pada himpunan A dikatakan ekuivalen jika memenuhi sifat-sifat refleksif, simetrik dan transitif.

Contoh 4:

Misalkan $A = \{1,2,3\}$, maka $R = \cdots$

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

Contoh 4:

$f = \{(x, y) | x \in N, y \in N\ dan\ x \geq y\}$

Tunjukkan apakah f memenuhi ketiga sifat di atas.

Bukti:

Ambil sembarang $x \in N$ maka $x = x$ akibatnya dipenuhi $x \geq x$ artinya $(x, x) \in f$ *<u>(sifat refleksif dipenuhi)</u>*

Ambil sembarang $x, y, z \in N$ dengan $(x, y) \in f$ dan $(y, z) \in f$

akan ditunjukkan $(x, z) \in f$

$(x, y) \in f$ artinya $x \geq y$ dan $(y, z) \in f$ artinya $y \geq z$

dari $x \geq y$ maka $x - y \geq 0$

$y \geq z$ maka $y - z \geq 0$ akibatnya diperoleh $x - z \geq 0$ atau $x \geq z$ menurut definisi $(x, y) \in f$ dan $(y, x) \in f$ maka $(x, z) \in f$

<u>(sifat transitif terpenuhi)</u>

Ambil sembarang $x, y \in A$ dengan $(x, y) \in f$ dan $(y, x) \in f$

akan ditunjukkan bahwa $x = y$

Andaikan $x \neq y$ berarti $x > y$ atau $x < y$

Dari $x > y$ terjadi kontradiksi dengan $(y, x) \in f$ atau $y \geq x$

Dari $x < y$ terjadi kontradiksi dengan $(x, y) \in f$ atau $x \geq y$

Jadi pengadaian salah yang benar $x = y$

Sifat simetri tidak dipenuhi (beri contoh penyangkalan)

2.2. Fungsi (Pemetaan)

Suatu pemetaan dari himpunan A ke himpunan B (masing-masing tidak kosong) adalah satu cara atau aturan yang dapat dipakai untuk mengaitkan setiap unsur di A dengan tepat satu unsur di B.

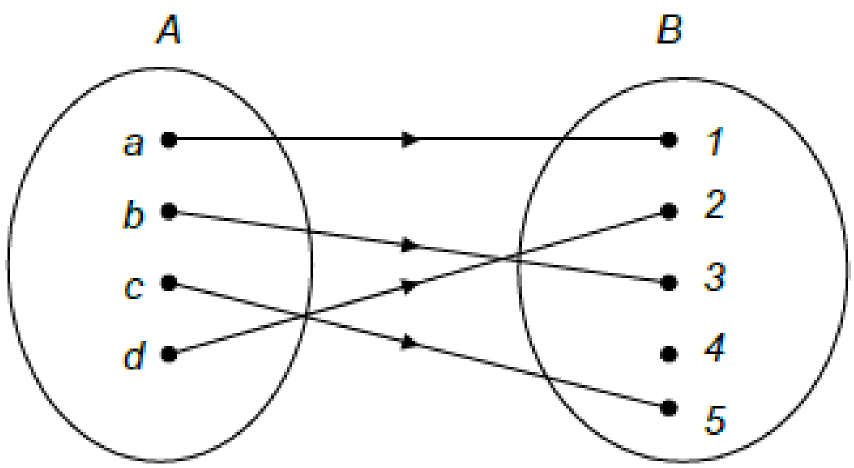
Pemetaan $\beta: A \rightarrow B$

Secara matematik definisi di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\forall\, x \in A\, \exists\, y! \in B \ni y = \beta(x)$$

(Baca untuk setiap $x \in A$ terdapat y tunggal elemen dari B sehingga $y = \beta(x)$.

Definisi pemetaan di atas dapat diilustrasikan dengan gambar berikut:



Gambar 2.2.

Menunjukkan Relasi Sebagai Suatu Pemetaan

Definisi di atas ekuivalen dengan: $\forall\, x, y \in A$ dengan $x = y$ maka $\beta(x) = \beta(y)$. Himpunan A dinamakan daerah asal (Domain) dari β, sedangkan himpunan B dinamakan daerah kawan (kodomain) dari β. Jika $\beta: A \rightarrow B$ suatu pemetaan, dengan $\beta(x) = y$, maka y dikatakan banyangan (*image*) atau peta dari x dan pengaitannya dituliskan sebagai $x \rightarrow y$.

Hubungan dari unsur-unsur dari B yang merupakan peta dari unsur-unsur A dinamakan daerah hasil (*range*) dari β atau jelajah dan dinyatakan dengan $\beta(A)$. Sehingga $\beta(A) = \{\beta(x) | x \in A\}$ atau $\beta(A) = \{1,2,3,5\}$

Jika $y \in B$, maka semua unsur-unsur dari A yang dipetakan menjadi y disbeut **prapeta** dari y dan dinyatakan dengan $\beta^*(y)$. Dengan demikian, berarti:

$$\beta^*(y) = \{\beta(x) = y | x \in A\}$$

jelaslah bahwa $B(A) \subseteq B$ dan juga $\beta^*(y) \subseteq A, \forall\, y \in B$.

2.2.1. Jenis-Jenis Fungsi (Pemetaan)

2.2.1.1. Fungsi Injektif

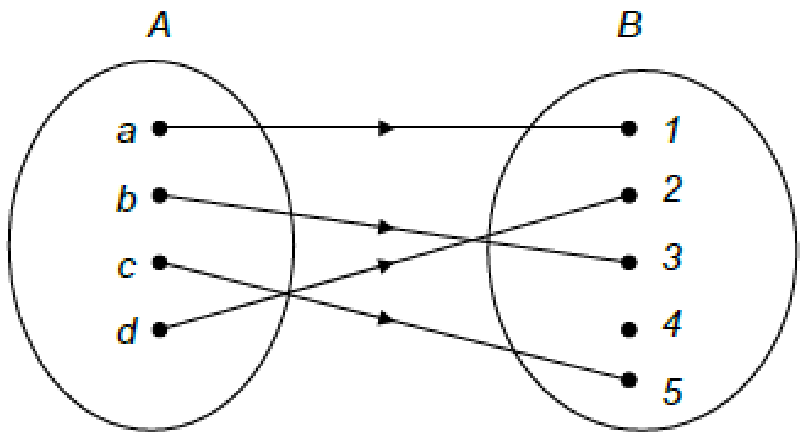
Definisi 2.5:

Suatu pemetaan $\beta: A \rightarrow B$ dikatakan injektif atau satu-satu jika dan hanya jika $\forall\ x \in \beta(A) \rightarrow \beta^{*}(x)$ berupa himpunan tunggal.

Dengan demikian pernyataan yang ekuivalen dengan definisi di atas adalah:

a) $\forall\ x, y \in S$ dengan $x \neq y$, maka $\beta(x) \neq \beta(y)$ atau

b) $\forall\ x, y \in S$ dengan $\beta(x) = \beta(y)$, maka $x = y$



Gambar 2.3.

Menunjukkan Pemetaan Injektif

Contoh 6:

Misalkan $\beta: Z \rightarrow Z$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-satu?

Penyelesaian:

a) $f(x) = x^2 + 1$ bukan merupakan fungsi satu-satu, karena untuk kedua x yang bernilai mutlak sama, tetapi tandanya berbeda memiliki nilai fungsi yang sama. Misalnya, $f(3) = f(-3) = 10$ padahal $3 \neq -3$.

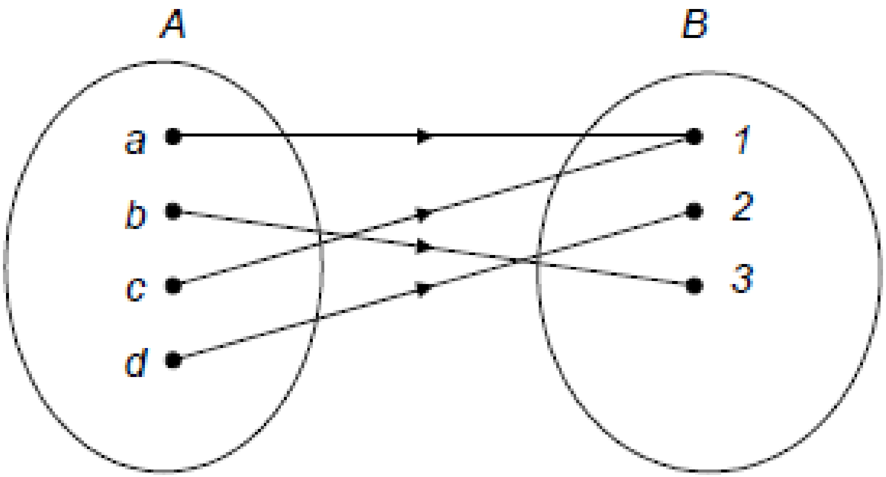
b) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu ke satu karena untuk $x \neq y$,
$x - 1 \neq y - 1$. Misal, untuk $x = 2$, maka $f(2) = 1$ dan untuk $y = -2$
maka $f(-2) = -3$.

2.2.1.2.Fungsi Surjektif

Definisi 2.6:

Suatu pemetaan $\beta: A \to B$ dikatakan surjektif jika dan hanya jika $\beta(A) = B$. Dengan kata lain, daerah nilai sama dengan daerah kawan.

Dari definisi di atas relasi β yang digambarkan di bawah ini menunjukkan fungsi surjektif.



Gambar 2.4. Menunjukkan Pemetaan Surjektif

Pernyataan berikut ini ekuivalen dengan definisi di atas:

a) $\forall\, b \in B, \exists\, a \in A \ni \beta(A) = b$ (dibaca untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian hingga $\beta(A) = b$)

b) $\forall\, b \in B \rightarrow B^*(b) \neq \emptyset$

Contoh 7:

Misalkan $\beta: Z \rightarrow Z$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi surjektif?

Penyelesaian:

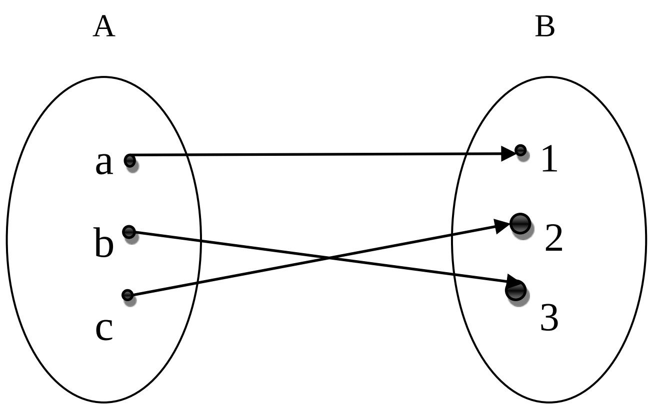
a) $f(x) = x^2 + 1$ bukan merupakan fungsi surjektif, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari β.

b) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi surjektif karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

2.2.1.3.Fungsi Bijektif

Definisi 2.7:

Suatu pemetaan $\beta: A \to B$ dikatakan bijektif jika dan hanya jika β merupakan fungsi yang surjektif dan injektif.



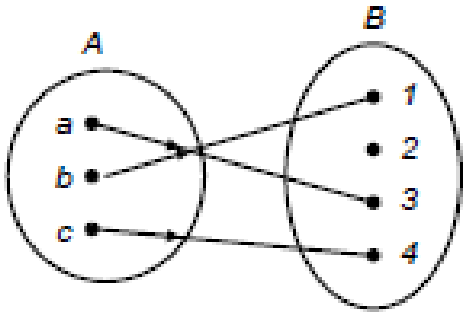
Gambar 2.5. Menunjukkan Pemetaan Bijektif

Contoh 8:

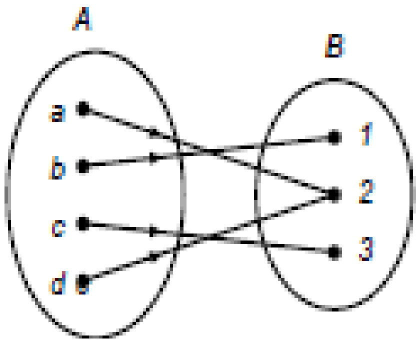
Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang bekoresponden satu-satu, karena f adalah fungsi injektif dan fungsi surjektif.

Perhatikan gambar berikut:

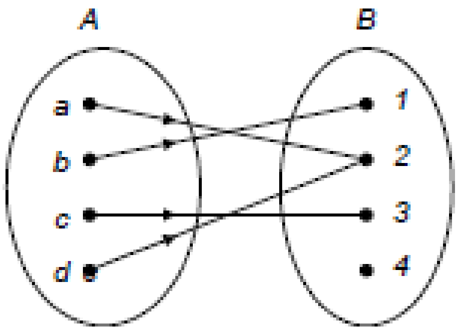
a) Fungsi injektif, bukan surjektif



b) Fungsi surjektif, bukan injektif



c) Bukan fungsi injektif maupun surjektif



Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa:

a) Jika f adalah fungsi berkoresponden satu ke satu dari A ke B, maka dapat menemukan **balikan (invers)** dari f.

b) Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

c) Fungsi yang berkoresponden satu ke satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu ke satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 9:

Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu ke satu, jadi balikan fungsi tersebut ada. Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi dari $f(x) = x - 1$ adalah $f^{-1}(y) = y + 1$.

2.2.3. Komposisi Dua Fungsi

Definisi 2.8:

Misalkan $A, B,$ dan C adalah himpunan-himpunan tak kosong. Misalkan pula $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ adalah dua buah fungsi. Komposisi dari f dan g dituliskan dengan $f \circ g$ adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan sebagai:

$g \circ f = \{(x, z) | x \in A, z \in C\}$ terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$ dan $g(y) = z$.

Sekarang misalkan $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ dan $(x, y) \in g \circ f$ yaitu $(g \circ f)(x) = z$. Berdasarkan definisi komposisi fungsi, terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$ dan $g(y) = z$. Sekarang $z = g(y) = g\big(f(x)\big)$. Jadi, $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$.

Misalkan $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ dan $(x, y) \in f \circ g$ yaitu $(f \circ g)(x) = z$. Berdasarkan definisi komposisi fungsi, terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $g(x) = y$ dan $f(y) = z$. Sekarang $z = f(y) = f\big(g(x)\big)$. Jadi,

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$$

Contoh 10:

Tentukan komposisi dari dua fungsi jika $f: A \to B$ dan $g: B \to C$. Misalkan $f(x) = 3x + 1$ dan $g(x) = x - 3$ maka:

a) $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$
$$= g(3x+1)$$
$$= (3x+1) - 3$$
$$= 3x - 2$$

b) $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$
$$= f(x-3)$$
$$= 3(x-3) + 1$$
$$= 3x - 8$$

Teorema:

Misalkan pemetaan $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ maka:

a) $g \circ f$ adalah injektif jika g dan f masing-masing injektif
b) $g \circ f$ adalah surjektif jika g dan f masing-masing surjektif

Bukti:

a) Misalkan $x, y \in A$ dan $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, maka

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big)$$

Karena g injektif, maka $f(x) = f(y)$ dan karena f injektif, maka $x = y$.

Jadi, $g \circ f$ adalah injektif.

Untuk bukti bagian kedua diserahkan pada pembaca.

2.3. Bilangan Bulat

Konsep bilangan bulat banyak digunakan dalam permasalahan aljabar abstrak, oleh karena itu pembahasan berikut ini akan menyangkut konsep tersebut terutama terkait dengan sifat-sifat bilangan bulat. Bilangan bulat memiliki sifat terurut dengan baik (*well ordering principle*) yang mengandung arti setiap himpunan bilangan bulat positif tak kosong mengandung bilangan terkecil. Di samping itu, konsep keterbagian pada bilanganbulat juga tidak kalah penting dan sangat mendasar.

Definisi 2.9:

Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (ditulis $a \mid b$) jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian hingga $b = ka$. Jika a tidak membagi habis b, maka ditulis dengan $a \nmid b$.

Contoh 11:

$5 \mid 45$ karena ada bilangan bulat $k = 9$ sedemikian hingga $5.9 = 45$

$5 \nmid 18$ karena tidak ada bilangan bulat k sedimikan hingga $5.k = 18$

2.4. Faktor Persekutuan Terbesar (*Greatest Common Divisor*)

Secara umum, pengertian tentang faktor persekutuan dari dua bilangan bulat dituliskan dengan definisi berikut:

Definisi 2.10:

$a, b \in Z$ dan $a \neq 0$ (himpunan bilangan bulat tak nol), bilangan bulat d disebut faktor persekutuan dari a dan b jika dan hanya jika $d \mid a$ dan $d \mid b$.

Contoh 12:

Faktor bulat positif dari $20 = \{1,2,4,5,10,20\}$

Faktor bulat positif dari $40 = \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$

Faktor-faktor persekutuan (pembagi bersama) dari 20 dan 40 adalah $1,2,4,5,10,20$.

Definisi 2.11:

$a, b \in Z$ (himpunan bilangan bulat tak nol), bilangan bulat d disebut faktor persekutuan terbesar (*Greatest Common Divisor*) dari a dan b dinotasikan dengan $gcd(a, b)$ jika dan hanya jika memenuhi:

1) $d \mid a$ dan $d \mid b$
2) jika $e \mid a$ dan $e \mid b$, maka $e \leq d$

Definisi di atas menunjukkan bahwa jika $gcd(a, b) = d$, maka $d \geq 1$, dan apabila ada faktor persekutuan lain, misalnya e, maka $e \leq d$.

Contoh 13:

Tentukan $gcd(15,35)$

Penyelesaian:

Faktor-faktor bulat positif dari 15 adalah: 1,3,5,15

Faktor-faktor bulat positif dari 35 adalah: 1,5,7,35

Sehingga dengan demikian $gcd(15,35)$ adalah 5.

Apabila a dan b adalah dua bilangan bulat positif dengan $gcd(a,b) = 1$, maka dikatakan bahwa a dan b saling prima atau a prima relatif terhadap b.

Teorema

1. Jika $gcd(a,b) = d$, maka $gcd(a{:}\, d, b{:}\, d) = 1$
2. Jika $b = aq + r$ maka $gcd(b,a) = gcd(a,r)$
3. Jika $a, b \neq 0 \in Z$ (himpunan bilangan bulat), maka ada bilangan bulat x dan y sedemikian hingga $ax + by = gcd(a,b)$
4. Jika $a, b \neq 0 \in Z$ (himpunan bilangan bulat), a dan b saling prima maka ada bilangan bulat x dan y sedemikian hingga $ax + by = 1$

2.5. Kelipatan Persekutuan Terkecil (*Least Common Multiple*)

Definisi 2.12:

Kelipatan persekutuan terkecil $a, b \in Z$ (himpunan bilangan bulat tak nol), adalah bilangan bulat positif terkecil k yang memenuhi:

1) $a \mid k$ dan $b \mid k$

2) Jika $a \mid m$ dan $b \mid m$, maka $k \leq m$

Kelipatan persekutuan terkecil a dan b dinotasikan dengan $lcm(a,b)$.

Contoh 14:

Tentukan $lcm(3,5)$

Penyelesaian:

Kelipatan 3 adalah:

3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,…

Kelipatan 5 adalah 5,10,15,20,25,30,35,45,…

Kelipatan persektuan dari 3 dan 5 adalah $\{15,30,45, \ldots\}$

Dapat dilihat bahwa $15 \mid 30$ dan $15 \mid 45$

maka kelipatan persekutuan terkecil dari 3 dan 5 atau $lcm(3,5)$ adalah 15.

2.6. Kekongruenan

Definisi 2.13:

$a, b \in Z$ dan $n \in Z^+, a$ dan b dikatakan kongruen modulo n dinotasikan dengan $a \equiv b$ (mod n) jika dan hanya jika n membagi habis $a - b$ atau $a - b = kn$ untuk suatu $k \in Z$.

Contoh 15:

a) $25 \equiv 4 \pmod{7}$ karena $7 \mid (25 - 4)$

b) $-16 \equiv 5 \pmod{3}$ karena $3 \mid (-16 - 5)$

Teorema:

Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan $a, b, c,$ dan d bilangan bulat sebarang berlaku:

1. $a \equiv a \pmod{n}$
2. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $b \equiv a \pmod{n}$
3. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $b \equiv c \pmod{n}$ $maka\ a \equiv c \pmod{n}$
4. Jika $a \equiv b \pmod{n}$dan $c \equiv d \pmod{n}$maka $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
5. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$ maka $ac \equiv bd \pmod{n}$
6. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $a + c \equiv b + c \pmod{n}$
7. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $ac \equiv bc \pmod{n}$
8. Jika $a \equiv b \pmod{n}$ maka $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ untuk k bilangan bulat positif sebarang.

Bukti:

1. Untuk a bilangan bulat sebarang dan n suatu bilangan bulat positif berlaku $a - a = 0.n$ dengan demikian, $a \equiv a \pmod{n}$
2. $a \equiv b \pmod{n}$

   Misal k suatu bilangan bulat

   Akibatnya, $b - a = -(a - b)$

   $= -(kn)$

   $= (-k)n$

   Karena $-k$ juga suatu bilangan bulat, $b \equiv a \pmod{n}$
3. $a \equiv b \pmod{n}$ dan $b \equiv c \pmod{n}$

   Misal k dan l adalah bilangan bulat, sehingga:

   $$a - b = kn \text{ dan } b - c = ln$$

   Akibatnya, $a - c = (a - b) + (b - c)$

   $$= kn + ln$$

   $$= (k + l)n$$

   Karena $k + l$ juga bilangan bulat, maka $a \equiv c \pmod{n}$

Bukti selanjutnya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Definisi 2.14:

Jika $a \equiv b \pmod{n}$ dengan $0 \leq r \leq n$, maka r disebut residu terkecil dari a modulo n. Himpunan $\{0,1,2,3,4,\ldots,(n-1)\}$ dinamakan himpunan residu terkecil modulo n.

Contoh 16:

Residu terkecil dari 29 modulo 2 adalah 1 karena $29:2$ sisa 1

Residu terkecil dari 29 modulo 3 adalah 2 karena $29:3$ sisa 2

Residu terkecil dari -37 modulo 7 adalah 5 karena $-37:7$ sisa 5

2.7. Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan salah satu proses pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat positif atau himpunan bilangan asli. Dengan demikian, induksi matematika merupakan salah satu metode pembuktian yang absah dalam matematika.

Prinsip induksi matematika adalah misalkan $a \in S$ (S bilangan bulat positif). Jika S memiliki sifat: untuk suatu $n \geq a \in S$ berlaku jika $n \in S$ maka $n + 1 \in S$, maka $n \in S, \forall\, n \geq a$.

Prinsip di atas menunjukkan bahwa untuk membuktikan kebenaran dari suatu pernyataan yang melibatkan bilangan bulat positif, maka terlebih dahulu harus dibuktikan benar untuk $n = 1$. Kemudian diasumsikan pernyataan benar untuk $n = k$, berdasarkan asumsi tersebut dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$.

Berikut adalah langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika:

Langkah 1: Ditunjukkan bahwa pernyataan $p(n)$ benar untuk $n = 1$ atau $p(1)$ benar.

Langkah 2: Diasumsikan bahwa pernyataan $p(n)$ benar untuk suatu bilangan asli k atau $p(k)$ benar dan selanjutnya ditunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar

Langkah 3: Merupakan bentuk implikasi, yaitu: $p(k)$ benar $\rightarrow p(k + 1)$ benar

Contoh 17:

Buktikan bahwa:

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1), \forall n \in N$$

Bukti:

Langkah (1):

$$P(1) = 1 = \frac{1}{2}.1(1+1)$$

$$1 = 1 \text{ (Terbukti)}$$

Langkah (2):

Buktikan $P(k)$ benar $\rightarrow$ $P(k+1)$ benar

$P(k) \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$ (Benar)

Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar, yaitu:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1)$

$= (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k+1)$

$= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$

Diasumsikan

$$= (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Jadi $1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

Berarti $P(k+1)$ benar.

$P(k)$ benar → $P(k+1)$ benar (Terbukti)

Contoh 18:

Buktikan bahwa $n^5 - n$ terbagi habis oleh 5 untuk setiap bilangan asli n.

Bukti:

Langkah (1):

$P(1) \equiv 1^5 - 1 = 0$ (0 habis dibagi 5)

Langkah (2):

Buktikan: $P(k)$ benar → $P(k+1)$ benar

$P(k) \equiv k^5 - k$ habis dibagi 5 artinya ada $m \in B$ sedemikian hingga $k^5 - k = 5m$

Akan dibuktikan: $P(k+1) \equiv (k+1)^5 - (k+1)$ habis dibagi 5

$(k+1)^5 - (k+1)$

$= (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - (k + 1)$

$= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k - k$

$= k^5 - k + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k$

$= (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$

$= 5m + 5\,l$

$P(k + 1) \equiv (k + 1)^5 - (k + 1) = 5m + 5l$ habis dibagi 5 (terbukti)

LATIHAN 2

Klik link di bawah ini untuk mengerjakan latihan!

PMM-1

PMM-2

PMM-3

PMM-4

Panduan penggunaan e-learning:

RENCANA TINDAK LANJUT

Setelah mahasiswa menjawab soal latihan pada setiap akhir bab, maka jawaban mahasiswa dikoreksi secara bersama-sama di kelas. Kemudian, masing-masing mahasiswa menghitung tingkat penguasaan materi dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Skor yang Diperoleh Siswa}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$

Klasifikasikan tingkat penguasaan terhadap materi yang telah diajari dengan rentang nilai di bawah ini:

Rentang Nilai (%)	Kategori
90 – 100	Sangat Baik
80 – 89	Baik
70 – 79	Sedang
$\leq$ 69	Kurang

Jika mahasiswa mendapatkan tingkat penguasaan materi $\geq$ 70%, maka mahasiswa tersebut dapat melanjutkan ke bab berikutnya. Namun, jika tingkat penguasaan mahasiswa berada pada rentang < 70%, maka mahasiswa tersebut dianjurkan untuk mengulang materi pada bab ini, terutama pada materi yang belum dikuasai.

Jika Anda belum menguasai materi ini, silahkan lihat video berikut:

BAB 3
OPERASI BINER

Tujuan Instruksional Umum:

Setelah mempelajari materi pada bab ini, maka diharapkan mahasiswa dapat memahami dan mengaplikasikan definisi operasi biner, sifat-sifat operasi biner, dan menerapkan beberapa operasi biner seperti: bilangan kompleks, akar pangkat n dari satuan, dan bilangan satuan.

Tujuan Instruksional Khusus:

Setelah diberikan penjelasan materi terkait definisi operasi biner, maka mahasiswa dapat:

3.1. Menjelaskan definisi operasi biner

3.2. Memahami sifat-sifat operasi biner, seperti: komutatif, assosiatif, mempunyai identitas, mempunyai sifat invers, distributif terhadap +

3.3. Mengaplikasikan beberapa operasi biner, seperti: bilangan kompleks, akar pangkat n dari satuan, dan bilangan satuan.

Deskripsi Singkat:

Sebuah sistem dimana terdapat sebuah himpunan satu atau lebih dari satu operasi Biner (*binary operation*), yang didefinisikan pada himpunan tersebut, dinamakan sistem aljabar. Selanjutnya, sebuah sistem aljabar akan dinyatakan dengan $(S, f_1, f_2, f_3, .., f_n)$ dimana S sebuah himpunan tidak kosong dan $f_1, f_2, f_3, .., f_n$ operasi-operasi yang didefinisikan pada S. Sebagai contoh, $(Z, +)$ adalah sebuah sistem aljabar yang dibentuk oleh himpunan bilangan bulat Z dan operasi penjumlahan biasa. Sementara $(Z, +, \times)$ adalah sebuah sistem aljabar yang dibentuk oleh himpunan bilangan bulat dan dua buah operasi biner.

3.1. Definisi Operasi Biner

Definisi:

Jika S sebuah himpunan, maka sebuah operasi biner * pada S adalah satu relasi yang menghubungkan setiap pasangan berurut $\forall\, s_1, s_2 \in S$ ketepat satu unsur S, dan diberi notasi dengan $s_1 * s_2$.

Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi biner adalah $+, \times, *, \cdot, \oplus, \otimes$. Hasil dari sebuah operasi, misalnya $*$, pada unsur a dan b akan ditulis sebagai $a * b$.

Contoh 1:

1. Penjumlahan $a * b = a + b$ adalah sebuah operasi biner pada himpunan bilangan bulat positif (Z^+)
2. Pengurangan $a * b = a - b$ bukanlah operasi biner pada himpunan bilangan bulat positif, tetapi merupakan operasi biner pada himpunan bilangan bulat (Z).
3. Perkalian $a * b = a \times b$ adalah sebuah operasi biner pada Z^+, Z, R atau Q.
4. Pembagian $a * b = \frac{a}{b}$ adalah sebuah opearsi biner pada Q^+ atau R^+ tetapi tidak pada, Z^+ , R atau Q.
5. $a * b = a^2 + b^2 + 1$ adalah sebuah operasi pada Z, Q, R, Z^+, Q^+, atau R^+
6. Misalkan x adalah beberapa himpunan dan S adalah kumpulan semua himpunan bagian dari x, sebagai contoh jika x $=\{1\}$, maka $S = \{\emptyset, \{1\}\}$, dan jika $x = \{1,2\}$, maka $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Operasi

irisan adalah sebuah operasi biner pada S, karena $A * B = A \cap B$ merupakan sebuah unsur dari S, begitu juga operasi gabungan merupakan operasi biner pada S.

Contoh 2:

R^* : Himpunan bilangan Real kecuali 0

Dengan operasi penjumlahan biasa bukan merupakan operasi biner karena jika kita ambil 2 dan $-2 \in R^*$ maka hasil penjumlahan yaitu $2 + (-2) = 0 \notin R^*$

3.2. Sifat-Sifat Operasi Biner

Sifat-sifat yang dimiliki oleh sebuah sistem aljabar nantinya ditentukan oleh sifat-sifat yang dimiliki oleh setiap operasi di dalam sistem aljabar tersebut. Berikut akan dijelaskan mengenai sifat-sifat yang dapat dimiliki oleh sebuah operasi biner. Misalkan $*$ dan $\oplus$ adalah operasi biner. Operasi $*$ dikatakan:

1. Komutatif

   Jika $a * b = b * a, \forall\ a, b$

2. Assosiatif

   Jika $(a * b) * c = a * (b * c), \forall\ a, b, c$

3. Mempunyai identitas

   Identitas, jika terdapat i sedemikian hingga $a * i = i * a = a, \forall\, a$

   Identitas kiri, jika terdapat i_1 sedemikian hingga $i_1 * a = a, \forall\, a$

   Identitas kanan, jika terdapat i_2 sedemikian hingga $a * i_2 = a, \forall\, a$

4. Mempunyai sifat Invers

   Jika $\forall\, a$ terdapat a^{-1} sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$, dimana i adalah unsur identitas untuk operasi $*$. Sedangkan a^{-1} disebut invers dari unsur a.

5. Distributif terhadap operasi $\oplus$

   Jika $\forall\, a, b, c$ berlaku $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$ distributif kiri

   dan $(b \oplus c) * a = (b * a) \oplus (c * a)$ distributif kanan.

Contoh 3:

Buktikan bahwa operasi penjumlahan biasa merupakan operasi biner.

Akan ditunjukkan bahwa:

1. Komutatif

   Ambil sembarang unsur, misal x dan y. Maka berlaku $x + y = y + x$.

2. Assosiatif

   Operasi penjumlahan bersifat assosiatif, karena untuk sembarang unsur, misal x, y, z, berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3. Identitas

   Identitas operasi penjumlahan adalah 0 (nol), karena $a + 0 = a$

4. Invers

   Invers penjumlahan untuk sembarang bilangan a adalah $-a$, karena $a + (-a) = 0$.

Contoh 4:

1. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan, karena untuk setiap bilangan a, b, c berlaku $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ dan $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$.

2. Operasi penjumlahan tidak bersifat distributif terhadap operasi perkalian, karena terdapat p, q, r dimana $p + (q \times r) \neq (p + q) \times (p + r)$. Misal, $1 + (2 \times 3) \neq (1 + 2) \times (1 + 3)$

Definisi Sifat Tertutup:

Himpunan S dikatakan tertutup terhadap operasi biner $*$, jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b \in S$.

3.3. Beberapa Operasi Biner

3.3.1. Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang dapat disajikan dalam bentuk $a + bi$ atau $a + ib$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

Sifat-sifat bilangan kompleks:

(i) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

(ii) $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$

(iii) $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

(iv) $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ disebut dengan Modulus

(v) Jika $Z = a + bi$, maka bilangan kompleks sekawan (konjugat) dari Z ditulis dengan $\bar{Z}$. Didefinisikan sebagai $\bar{Z} = a - bi$

(vi) $Z \cdot \bar{Z} = \mathbb{R}$

Teorema

Jika Z_1, Z_2 merupakan bilangan kompleks, maka berlaku:

1. $|Z_1 . Z_2| = |Z_1| . |Z_2|$
2. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$
3. $|z_1 + z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$
4. $|z_1 - z_2| \geq |Z_1| - |Z_2|$
5. $|z_1 - z_2| \geq \left||Z_1| + |Z_2|\right|$

Pembuktian Teorema 2:

Buktikan bahwa $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

Penyelesaian:

Ambil sembarang unsur $Z_1 = x_1 + iy_1$ dan

$Z_2 = x_2 + iy_2$, sehingga:

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \left|\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}\right|$$

$$= \left|\frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right|$$

$$= \left|\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_2y_1x_1y_2 + x_1^2y_2^2}{(x_2^2+y_2^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2) + (x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2)}{(x_2^2+y_2^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x_1^2(x_2^2+y_2^2) + y_1^2(x_2^2+y_2^2)}{(x_2^2+y_2^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1^2+y_1^2)}{(x_2^2+y_2^2)}\cdot\frac{(x_2^2+y_2^2)}{(x_2^2+y_2^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$$= \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

Terbukti

Untuk pembuktian teorema 1, 3, 4, 5 diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

3.3.2. Akar Pangkat n dari satuan

Jika $x^n = 1$, maka:

$x_k = \frac{\cos 2k\pi}{n} + i\frac{\sin 2k\pi}{n}$ dimana $\mathrm{n} = \{1,2,3,..,\mathrm{n}\}$,

$\mathrm{k} = \{1,2,3, \ldots, \mathrm{n}\}$

untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut:

Contoh 5:

Hitunglah harga x jika $x^3 = 1$

Jawab:

Untuk $x^3 = 1$, maka

$$x_k = \frac{\cos 2k\pi}{n} + i\frac{\sin 2k\pi}{n}$$

$$x_1 = \frac{\cos 2\pi}{3} + i\frac{\sin 2\pi}{3}$$

$$= \cos 120° + i \sin 120°$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{\cos 2.2\pi}{3} + i\frac{\sin 2.2\pi}{3}$$

$= \cos 240° + i \sin 240°$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$

$x_{3=} \frac{\cos 2.3\pi}{3} + i \frac{\sin 2.3\pi}{3}$

$= \cos 360° + i \sin 360°$

$= 1$

Sehingga, $x = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}, 1\right\}$

*	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	**1**
$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$
$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$
1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$	1

Terbukti tertutup.

Adapun contoh perhitungan sebagai berikut:

$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) * \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} i\sqrt{3} - \frac{1}{4} i\sqrt{3} + \frac{3}{4} i^2$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} i\sqrt{3} + \frac{3}{4}(-1)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$$

Bukti perhitungan yang lain, diserahkan kepada pembaca

Apakah assosiatif pada operasi perkalian?

Ambil sembarang unsur, misal:

$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}, b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}, c = 1, \forall a, b, c \in x^3$

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

$$\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right)\right) \times 1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) \times \left(\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) \times 1\right)\right)$$

$$1 \times 1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right)$$

$$1 = 1$$

Terbukti memiliki sifat assosiatif.

3.3.3. Bilangan Satuan

Definisi:

Bilangan satuan (*unit number*) adalah bilangan prima relatif terhadap Z_n (bilangan bulat modulo n) yang lebih kecil dari n dan biasa dituliskan dengan U_n. Angka 1 pada U_n dikatakan unsur kesatuan (*unity*).

Contoh 6:

1. $U_5 = \{1,2,3,4\}$
2. $U_6 = \{1,5\}$
3. $U_7 = \{1,2,3,4,5,6\}$
4. $U_8 = \{1,3,5,7\}$
5. $U_{10} = \{1,3,7,9\}$

Contoh 7:

Tentukanlah unsur-unsur $U_{8,}$ kemudian buatlah tabel Cayley pada operasi perkalian.

Penyelesaian:

$U_8 = \{1,3,5,7\}$

*	**1**	**3**	**5**	**7**
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

LATIHAN 3

Klik link di bawah ini untuk mengerjakan latihan!

PMM-1

PMM-2

PMM-3

PMM-4

Panduan penggunaan e-learning:

RENCANA TINDAK LANJUT

Setelah mahasiswa menjawab soal latihan pada setiap akhir bab, maka jawaban mahasiswa dikoreksi secara bersama-sama di kelas. Kemudian, masing-masing mahasiswa menghitung tingkat penguasaan materi dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Skor yang Diperoleh Siswa}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$

Klasifikasikan tingkat penguasaan terhadap materi yang telah diajari dengan rentang nilai di bawah ini:

Rentang Nilai (%)	Kategori
90 – 100	Sangat Baik
80 – 89	Baik
70 – 79	Sedang
$\leq$ 69	Kurang

Jika mahasiswa mendapatkan tingkat penguasaan materi $\geq$ 70%, maka mahasiswa tersebut dapat melanjutkan ke bab berikutnya. Namun, jika tingkat penguasaan mahasiswa berada pada rentang < 70%, maka mahasiswa tersebut dianjurkan untuk mengulang materi pada bab ini, terutama pada materi yang belum dikuasai.

Jika Anda belum menguasai materi ini, silahkan lihat video berikut:

BAB 4
GRUP

Tujuan Instruksional Umum:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu memahami semigrup, monoid, syarat terbentuknya suatu grup, teorema-teorema dasar tentang grup.

Tujuan Instruksional Khusus:

Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa mampu:

4.1. Memahami definisi semigrup.
4.2. Memahami definisi monoid.
4.3. Memenuhi definisi dan syarat terbentuknya grup.
4.4. Memberikan contoh dan bukan contoh grup.
4.5. Memahami definisi grup abelian.
4.6. Memahami definisi grup hingga dan grup tak hingga.
4.7. Membuktikan teorema-teorema dasar tentang grup.

Deskripsi Singkat:

Grup adalah suatu himpunan beserta **satu** operasi biner, seperti perkalian atau penjumlahan, yang memenuhi beberapa aksioma yang akan dijelaskan di bawah ini. Cabang matematika yang mempelajari grup disebut teori grup. Kegunaan dari teori Grup ini adalah merupakan dasar-dasar untuk mempelajari ring, field, integral domain, ideal dan ruang vektor.

4.1. Semi Grup

Sebuah semi grup $(S,*)$ adalah sebuah himpunan S dengan operasi $*$ yang didefinisikan kepada S sedemikian hingga memenuhi aksioma berikut:

(i) Himpunan S tertutup di bawah operasi $*$.

(ii) Operasi $*$ bersifat asosiatif.

Contoh 1:

$(Z,+)$ merupakan sebuah semigrup.

Jika operasi $*$ pada semigrup $(S,*)$ komutatif maka $(S,*)$ dikatakan semigrup yang abelian.

Contoh 2:

$(Z,+)$ merupakan sebuah semigrup yang abelian.

4.2. Monoid

Sebuah monoid $(S,*)$ adalah sebuah himpunan S dengan operasi * yang didefinisikan terhadap S sedemikian hingga memenuhi aksioma berikut:

(i) Himpunan S tertutup di bawah operasi *

(ii) Operasi * bersifat asosiatif

(iii) Pada S terdapat unsur identitas untuk operasi *

Dengan kata lain, semigrup yang mempunyai unsur identitas pada operasi yang berlaku kepadanya disebut Monoid.

Contoh 3:

$(Z,+)$ merupakan sebuah monoid dengan unsur identitas penjumlahan. Jika operasi biner pada monoid $(S,*)$ tersebut bersifat komutatif, maka monoid $(S,*)$ disebut juga monoid abelian.

Contoh 4:

Sistem aljabar $(Z,+)$ merupakan sebuah monoid abelian.

4.3. Grup

Definisi 4.1:

Sebuah grup $< G,* >$ adalah sebuah himpunan G dengan operasi biner * pada G, sedemikian sehingga memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:

(i) Operasi * *closure* (tertutup)

(ii) Operasi * Assosiatif

(iii) Terdapat sebuah unsur i dalam G, sedemikian hingga $i * a = a * i = a$ untuk setiap $a \in G$, unsur i disebut sebuah unsur identitas dalam Grup G.

(iv) Untuk setiap $a \in G$ terdapat sebuah unsur $a^{-1} \in G$, sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$. Dimana a^{-1} disebut invers dari a.

Atau sebuah Grup G dengan operasi biner * dituliskan dengan simbol $< G,* >$, jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:

(i) $a * b = c \in G, \forall a, b \in G$

(ii) $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$

(iii) $\exists e \in G \ni e * a = a * e = a \in G$

(iv) $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Contoh 5:

Buktikan bahwa himpunan bilangan bulat Z merupakan Grup dengan operasi $< Z, + >$

Penyelesaian:

(i) Akan dibuktikan tertutup

ambil sembarang unsur $a, b \in Z$

karena $a, b \in Z$, maka $a + b \in Z$ (terbukti tertutup)

(ii) Akan dibuktikan assosiatif

ambil sembarang unsur $a, b, c \in Z$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$a + b + c = a + b + c$

karena $a, b, c \in Z$, maka $a + b + c \in Z$ sehingga $(a + b) + c = a + (b + c)$ memenuhi sifat assosiatif penjumlahan

(iii) Akan dibuktikan terdapat unsur identitas

Terdapat unsur identitas, yaitu $i = 0$, ambil sembarang unsur $a \in Z$, maka $0 + a = a + 0 = a$

jadi, terdapat unsur identitas, $i = 0$

(iv) Akan dibuktikan mempunyai invers

ambil sembarang unsur misalkan $a, b, c \in Z$

maka invers dari a atau a^{-1} yaitu = $-a$

sebab $a + (-a) = 0$

invers dari b atau b^{-1} yaitu = $-b$

sebab $b + (-b) = 0$

invers dari c atau c^{-1} yaitu = $-c$

sebab $c + (-c) = 0$

Terbukti bahwa $< Z, +>$ merupakan sebuah Grup.

Contoh 6:

Buktikan bahwa $< U_8, \times>$ merupakan sebuah Grup.

Penyelesaian:

$U_8 = \{1, 3, 5, 7\}$

Tabel 4.1. Tabel Cayley $< U_8, \times>$

$\times$	**1**	**3**	**5**	**7**
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

(i) Jelas tertutup (perhatikan tabel di atas)

$a * b \in U_8$

(ii) Akan dibuktikan assosiatif

ambil sembarang unsur, misal $a = 3, b = 5, c = 7$, dimana $\forall a, b, c \in U_8$

$(3 \times 5) \times 7 = 3 \times (5 \times 7)$

$7 \times 7 \qquad = 3 \times 3$

$1 = 1$ (Terbukti assosiatif)

(iii) Akan dibuktikan terdapat unsur identitas

terdapat unsur identitas yaitu $i = 1$

sebab $a \times 1 = a$

(iv) Akan dibuktikan mempunyai invers

$1^{-1} = 1$ sebab $1 \times 1 = 1 = i$

$3^{-1} = 3$ sebab $3 \times 3 = 1 = i$

$5^{-1} = 5$ sebab $5 \times 5 = 1 = i$

$7^{-1} = 1$ sebab $7 \times 7 = 1 = i$

Terbukti bahwa $< U_8, \times >$ merupakan sebuah Grup.

Contoh 7:

Buktikan bahwa himpunan matriks 2×2, dimana $|A| \neq 0$ dengan operasi perkalian matriks membentuk sebuah grup.

Penyelesaian:

(i) Akan dibuktikan operasi perkalian matriks 2×2 adalah tertutup

ambil sembarang unsur $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, dimana $A, B \in A_{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix}$$

terbukti bahwa $A \times B \in A_{2\times 2}$

(ii) Akan dibuktikan operasi perkalian matriks 2×2 adalah assosiatif

ambil sembarang unsur $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$, dimana $A, B, C \in A_{2\times 2}$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} kp + mq & lp + nq \\ kr + ms & lr + ns \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} akp + bkr + amq + bms & alp + blr + anq + bns \\ ckp + dkr + cmq + dms & clp + dlr + cnq + dns \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} akp + amq + bkr + bms & alp + anq + blr + bns \\ ckp + cmq + dkr + dms & clp + cnq + dlr + dns \end{bmatrix}$$

Terbukti assosiatif

(iii) Akan ditunjukkan terdapat identitas matriks 2×2

terdapat identitas matriks 2×2, yaitu $i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

sebab $A \times i = A$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(iv) Akan ditunjukkan terdapat invers matriks 2×2

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka invers dari A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

sebab $A \times A^{-1} = i$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{ad - bc}{ad - bc} & \dfrac{-ab + ab}{ad - bc} \\ \dfrac{cd - cd}{ad - bc} & \dfrac{-bc + ad}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena semua syarat grup telah dipenuhi, maka himpunan matriks 2×2 adalah sebuah grup.

Contoh 8:

Buktikan bahwa himpunan bilangan asli N **bukan** grup terhadap operasi $+$

Penyelesaian:

(i) Akan dibuktikan tertutup

ambil sembarang unsur, misal: $a = 1, b = 2$, dimana $a, b \in N$

$1 + 2 = 3 \in N$ dimana $a + b \in N$ (terbukti tertutup)

(ii) Akan dibuktikan assosiatif

ambil sembarang unsur, misal: $a = 1, b = 2, c = 3$ dimana $a, b, c \in N$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$

$6 = 6$

memenuhi sifat assosiatif penjumlahan

(iii) Akan dibuktikan terdapat unsur identitas

Terdapat unsur identitas, yaitu $i = 0$, ambil sembarang unsur, misal: $a = 1$ dimana $a \in N$, maka

$0 + a = 0 + 1$

$\quad\quad = 1$

$\quad\quad = a$

jadi, terdapat unsur identitas, $i = 0$

(iv) Akan dibuktikan mempunyai invers

tidak mempunyai invers, ambil sembarang unsur

misal: $c = 3,$ maka $c^{-1} = -3 \notin N$

$c + c^{-1} = 0$

$3 + (-3) = 0 \notin N$

Terbukti bahwa himpunan bilangan asli N bukan grup terhadap operasi $+$

Contoh 9:

Tunjukkan bahwa $G =< x^4 = 1,\ \times>$ merupakan sebuah grup.

Penyelesaian:

$G = \{1, -1, i, -i\}$

Tabel 4.2. Tabel Cayley $< x^4 = 1, \times>$

×	1	-1	*i*	-*i*
1	1	-1	*i*	-*i*
-1	-1	1	-*i*	*I*
I	*i*	-*i*	-1	1
-*i*	-*i*	*i*	1	-1

(i) Jelas tertutup

(ii) Asosiatif

$\left(i \times (-i)\right) \times i = i \times \left((-i) \times i\right)$

$1 \times i = i \times 1$

$i = i$

(iii) Mempunyai unsur identitas $i = 1$

(iv) Setiap unsur mempunyai invers, yaitu:

$1^{-1} = 1$

$(-1)^{-1} = -1$

$i^{-1} = -i$

$(-i)^{-1} = i$

Terbukti bahwa $G =< x^4 = 1, \times>$ adalah sebuah grup.

Definisi 4.2:

Sebuah Grup G disebut Grup Abelian atau Komutatif jika berlaku $a * b = b * a \; \forall \; a, b \in G$.

Contoh 10:

Himpunan bilangan Bulat terhadap operasi penjumlahan, Himpunan bilangan Real tanpa nol, Himpunan (Zn ,+) merupakan grup komutatif.

Contoh 11:

Misalkan G grup abelian. Tunjukkan bahwa:

$(ab)^2 = a^2b^2, \forall \; a, b \in G$.

Penyelesaian:

G abelian artinya $ab = ba, \forall \; a, b \in G$

$ab \quad = ba$

$ab(ab) = ba(ab)$

$(ab)^2 \quad = ba^2b$

$(ab)^2 \quad = a^2b^2$ (Terbukti G abelian)

Definisi 4.3:

Sebuah grup disebut grup hingga jika banyaknya unsur dari grup tersebut hingga, sedangkan jika banyaknya unsur dari grup tersebut tak hingga maka grupnya merupakan grup tak hingga.

Contoh 12:

(Zn, +) merupakan grup hingga, sedangkan $(Z, +)$ merupakan grup tak hingga.

4.4. Teorema-Teorema Dasar Tentang Grup

Teorema 4.4.1:

Jika G sebuah Grup dengan operasi biner $*$, dan jika a dan b termuat dalam G, maka Persamaan linier $a * x = b$ dan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian yang unik (tunggal) dalam G.

Bukti:

$a * x \quad\quad\quad\quad = b$

$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$, karena G grup, maka a^{-1} termuat dalam G

$(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$ (asosiatif)

$i * x = a^{-1} * b$ (invers)

$x = a^{-1} * b$

dengan cara yang sama diperoleh $y = a^{-1} * b$ (mempunyai penyelesaian yang tunggal).

Teorema 4.4.2:

Dalam sebuah grup G dengan operasi biner $*$ terdapat hanya 1 identiti i sedemikian hingga $i * a = a * i = a$.

Bukti:

Andaikan selain i ada identity yang lain, misalkan e maka:

$$a * i = a * e$$

$$a^{-1} * (a * i) = a^{-1} * (a * e)$$

$$(a^{-1} * a) * i = (a^{-1} * a) * e$$

$$i * i = i * e$$

$$i = e$$

Terbukti hanya ada satu unsur netral (identity) dalam sebuah Grup G.

Teorema 4.4.3:

Untuk setiap unsur dalam sebuah grup G dengan operasi biner $*$ mempunyai hanya satu invers dalam G.

Bukti:

Misalkan selain a^{-1} yang merupakan invers dari $a \in G$ terdapat invers yang lain misalkan saja y, maka:

$a^{-1} * a = i$ dan $y * a = i$ karena y juga invers dari a akibatnya

$$a^{-1} * a = y * a$$
$$a^{-1} * a * a^{-1} = y * a * a^{-1}$$
$$a^{-1} * i = y * i$$
$$a^{-1} = y$$

jelas bahwa setiap unsur hanya mempunyai satu invers.

Teorema 4.4.4:

Jika $< G,*>$ sebuah grup dengan operasi biner $*$, maka untuk setiap $g \in G$ berlaku $(g^{-1})^{-1} = g$

Bukti:

Karena g^{-1} adalah invers dari g, maka:

$$(g^{-1})^{-1} * (g^{-1} * g) = (g^{-1})^{-1} * i$$
$$((g^{-1})^{-1} * i) = (g^{-1})^{-1} \text{ sifat asosiatif}$$
$$i * g = (g^{-1})^{-1}$$
$$g = (g^{-1})^{-1}$$

Teorema 4.4.5:

Jika $< G,*>$ adalah sebuah Grup dengan operasi $*, x, y \in G$, maka: $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) &= x * \left(y * (y^{-1} * x^{-1})\right) \\
&= x * \left((y * y^{-1}) * x^{-1}\right) \\
&= x * (i * x^{-1}) \\
&= x * x^{-1} \\
&= i
\end{aligned}
$$

Terbuktilah bahwa $(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = i$ dengan demikian berarti:

$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Teorema 4.4.6:

Jika $< G,*>$ adalah sebuah grup dengan operasi $*$ dan ambil $x, y \in G$, jika $x * y = i$ atau $y * x = i$, maka $y = x^{-1}$ atau sebaliknya.

Bukti:

Misalkan $x * y = i$ gandakan ruas kiri dan kanan dengan x^{-1}, maka diperoleh:

$x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * i$

$(x^{-1} * x) * y = x^{-1}$

$i * y = x^{-1}$

$y = x^{-1}$ terbukti

Teorema 4.4.7:

Jika sebuah grup G dengan operasi $*$, padanya berlaku hukum kanselasi kiri dan kanan yaitu jika $a * b = a * c$, maka $b = c$ dan jika $b * a = c * a$ maka $c = b$ untuk setiap a, b, c termuat dalam G.

Bukti:

$a * b = a * c$ berarti a^{-1} termuat dalam G sebab G grup, maka:

$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$ (sifat asosiatif)

$i * b = i * c$ (sifat invers)

$b = c$ (sifat identity)

analog $c = b$ (terbukti)

Teorema 4.4.8:

Jika G sebuah Grup dengan operasi biner $*$, dan jika a dan b termuat dalam G, maka persamaan linier $a * x = b$ dan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian yang unik (tunggal) dalam G.

Bukti:

$a * x \qquad\qquad = b$

$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$, karena G grup maka a^{-1} termuat dalam G

$(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$ (asosiatif)

$i * x = a^{-1} * b$ (invers)

$x = a^{-1} * b$

dengan cara yang sama diperoleh $y = a^{-1} * b$ (mempunyai penyelesaian yang tunggal).

LATIHAN 4

Klik link di bawah ini untuk mengerjakan latihan!

PMM-1

PMM-2

PMM-3

PMM-4

Panduan penggunaan e-learning:

RENCANA TINDAK LANJUT

Setelah mahasiswa menjawab soal latihan pada setiap akhir bab, maka jawaban mahasiswa dikoreksi secara bersama-sama di kelas. Kemudian, masing-masing mahasiswa menghitung tingkat penguasaan materi dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Skor yang Diperoleh Siswa}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$

Klasifikasikan tingkat penguasaan terhadap materi yang telah diajari dengan rentang nilai di bawah ini:

Rentang Nilai (%)	Kategori
90 – 100	Sangat Baik
80 – 89	Baik
70 – 79	Sedang
$\leq$ 69	Kurang

Jika mahasiswa mendapatkan tingkat penguasaan materi $\geq$ 70%, maka mahasiswa tersebut dapat melanjutkan ke bab berikutnya. Namun, jika tingkat penguasaan mahasiswa berada pada rentang < 70%, maka mahasiswa tersebut dianjurkan untuk mengulang materi pada bab ini, terutama pada materi yang belum dikuasai.

Jika Anda belum menguasai materi ini, silahkan lihat video berikut: