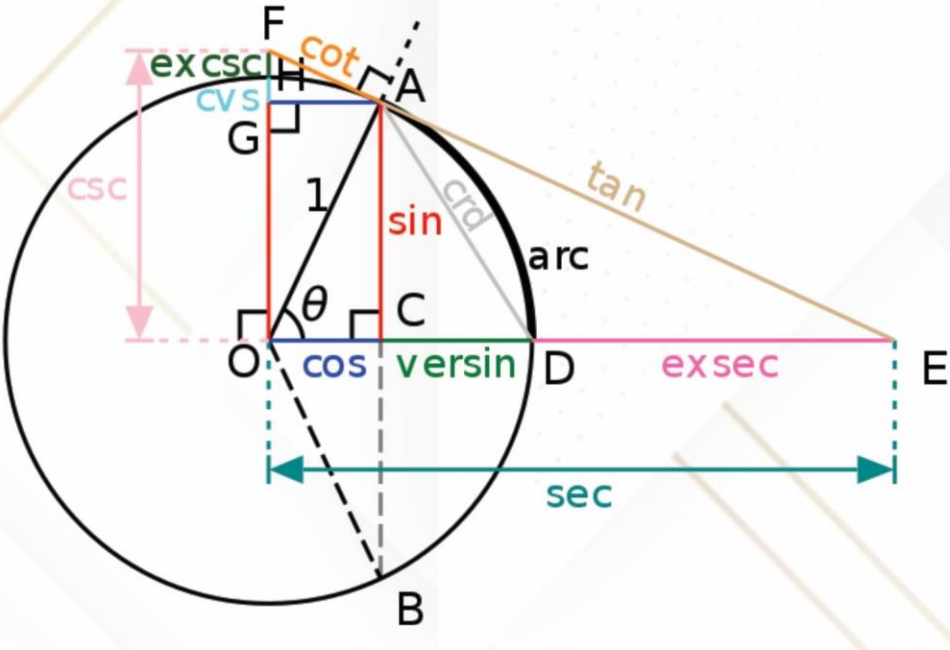
Editor :
Dina Zhafira, S.Pd.

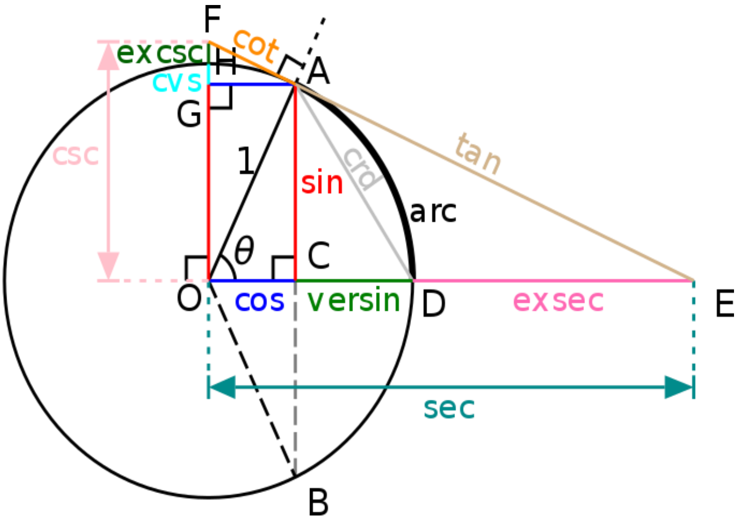
K-Media

TRIGONOMETRI



Tanti Jumaisyaroh Siregar, M.Pd.

TRIGONOMETRI



Penyusun :
Tanti Jumaisyaroh Siregar, M.Pd.

Editor :
Dina Zhafira, S.Pd.

Penerbit K-Media
Yogyakarta, 2022

TRIGONOMETRI
vi + 159 hlm.; 15,5 x 23 cm

ISBN: 978-623-316-979-0

Penulis : Tanti Jumaisyaroh Siregar
Editor : Dina Zhafira
Tata Letak : Nur Huda A.
Desain Sampul : Desainer

Cetakan 1 : September 2022

Penerbit K-Media
Anggota IKAPI No.106/DIY/2018
Banguntapan, Bantul, Yogyakarta.
e-mail: kmedia.cv@gmail.com

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah. Puji dan syukur kepada Allah SWT atas rahmat, hidayah, waktu dan kesempatan yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan buku ”**TRIGONOMETRI**” ini. Selanjutnya, shalawat berangkaikan salam penulis sampaikan kepada Rasullullah SAW beserta keluarga dan sahabatnya yang telah membimbing dan mengarahkan manusia ke jalan yang lurus dalam menggapai ridho Illahi.

Buku ini ditulis dimaksudkan sebagai bahan bacaan dan buku penuntun bagi mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan (FITK) di Universitas Islam Negeri (UIN) Sumatera Utara Medan dalam mempelajari mata kuliah trigonometri. Materi dalam buku ini disampaikan dengan cara yang sederhana sehingga isinya mudah dipahami. Buku ini berisi berbagai contoh soal terkait konsep trigonometri yang telah dipelajari sebelumnya. Selain itu, pada buku ini terdapat juga soal-soal latihan yang berkaitan dengan materi setiap bab. Hal ini dimaksudkan agar mahasiswa dapat mengaplikasikan konsep yang telah dipelajari secara optimal.

Penulis menyadari bahwa buku ini belum sempurna. Oleh karena itu, penulis menerima segala bentuk kritikan dan saran untuk penyempurnaan buku ini selanjutnya. Besar harapan penulis, semoga buku ini dapat memberikan kebermanfaatan bagi para pembacanya.

Medan, Juli 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .... **iii**
DAFTAR ISI .... **iv**

BAB I

UKURAN SUDUT **1**
A. Ukuran Sudut dalam Derajat 1
B. Ukuran Sudut Dalam Radian 3
C. Mengubah Ukuran Sudut dari Derajat ke Radian dan Sebaliknya 5
D. Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Jari-Jari Lingkaran 7

BAB II

PERBANDINGAN TRIGONOMETRI **13**
A. Pengertian Perbandingan Trigonometri 13
B. Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut pada Segitiga Siku-Siku 14
C. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut-Sudut Istimewa 17
D. Perhitungan dalam Segitiga Siku-siku yang Melibatkan Perbandingan Trigonometri 19
E. Perbandingan Trigonometri suatu Sudut pada Semua Kuadran 20
F. Rumus Perbandingan Trigonometri Sudut yang Berelasi 23

BAB III

KOORDINAT KUTUB **36**
A. Pengertian Koordinat Kutub Sebuah Titik 36
B. Hubungan Koordinat Kartesius dengan Koordinat Kutub 37

BAB IV

IDENTITAS TRIGONOMETRI **45**

A. Identitas Trigonometri Dasar 45
B. Penerapan Identitas Dasar Trigonometri pada Berbagai Permasalahan 47
C. Identitas Trigonometri yang Lain... 50

BAB V

GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI... 57
A. Fungsi Trigonometri Sinus, Kosinus, dan Tangen 57
B. Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{sin}\, x^0$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{cos} x^0$, $\boldsymbol{dan}\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{tan}\, x^0$ untuk $\mathbf{0}^0 < \boldsymbol{x} < \mathbf{360}^0$ 57
C. Menentukan Nilai Minimum dan Maksimum dari Suatu Fungsi Trigonometri 62
D. Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri yang Lain 64

BAB VI

DALIL-DALIL DALAM SEGITIGA 69
A. Aturan Sinus 69
B. Aturan Kosinus 75
C. Luas Segitiga 80

BAB VII

PENERAPAN RUMUS TRIGONOMETRI DALAM KEHIDUPAN SEHARI-HARI... 90

BAB VIII

RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI... 102
A. Rumus Trigonometri untuk Jumlah Dua Sudut dan Selisih Dua Sudut 102
B. Rumus Trigonometri untuk Sudut Rangkap............................. 110
1. Rumus untuk sin $2a$.. 110
2. Rumus untuk cos 2 a.. 111
3. Rumus untuk tan 2 a... 111

C. Rumus Trigonometri untuk Sudut Pertengahan 114
D. Rumus Perkalian Sinus dan Kosinus (Bentuk Perkalian ke Penjumlahan) 120

E. Rumus Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Kosinus (Bentuk Penjumlahan Ke Perkalian) 122

BAB IX

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI 130

A. Persamaan Trigonometri Sederhana 130
B. Menyelesaikan Persamaan Trigonometri Sederhana................ 130
C. Persamaan Trigonometri yang Berbentuk sin x = a^0, cos x = a^0 dan tan x = a^0 134
D. Persamaan Trigonometri yang Berbentuk sin px^0 = a, cos px^0 = a dan tan px^0 = a 136
E. Persamaan Trigonometri yang Memuat Jumlah dan Selisih Sinus dan Kosinus.. 137
F. Persamaan Kuadrat dalam Sinus, Kosinus dan Tangen 139
G. Menyelesaikan Pertidaksamaan Trigonometri 141

BAB X

BENTUK A COS X + B SIN X.. 146

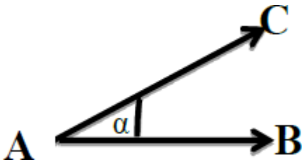
A. Mengubah Bentuk a cos x + b sin x menjadi k cos (x – α) 146
B. Mengubah Bentuk a cos x + b sin x menjadi k cos (x + α) 147
C. Penyelesaian Persamaan a cos x^0 + b sin x^0 = c 151
D. Nilai Maksimum dan Nilai Minimum Fungsi f(x) = a cos x + b sin x.. 153

DAFTAR PUSTAKA 158
PROFIL PENULIS 159

BAB I

UKURAN SUDUT

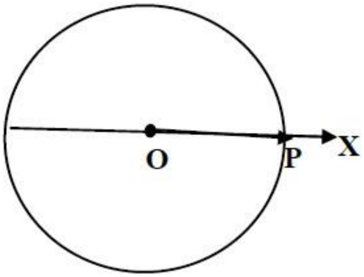
Materi trigonometri berkaitan erat dengan sudut. **Sudut adalah** sebuah daerah yang terbentuk melalui dua buah sinar garis yang berimpit pada titik pangkalnya. Satuan sudut dalam trigonometri yaitu derajat dan radian. Gambar di bawah merupakan contoh sudut yang dibentuk oleh dua garis yaitu AB dan AC dengan A sebagai titik pusat. Garis AB dan garis AC dan AC disebut dengan kaki sudut. Selanjutnya gambar berikut disebut dengan sudut CAB atau sudut A.



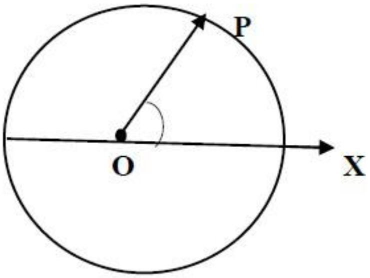
Gambar 1.1.

A. Ukuran Sudut dalam Derajat

Besar ukuran sudut dalam derajat dapat dipahami melalui konsep dari sudut yang dimaksud sebagai jarak putar seperti gambar di bawah ini.



Gambar 1.2.a.



Gambar 1.2.b.

Berdasarkan gambar 1.2.a. di atas dapat dilihat pada awalnya jarum jam berada ada titik P dimana titik P terletak pada garis OX dan besar sudut yang dibentuk titik P terhadap garis OX adalah 0^0. Kemudian jarum jam diputar berlawanan jarum jam sehingga diperoleh hasil seperti gambar 1.2.b. Sudut yang dibentuk antara jarum jam dan garis OX disebut jarak putar. Semakin besar jarak putar yang dihasilkan maka besar sudut yang dibentuk akan semakin besar. Jika jarum jam diputar sehingga jarum jam menepati titik semula maka jarak putar yang ditempuh oleh jarum jam merupakan satu putaran. Panjang lintasan yang ditempuh atau dilewati oleh titik ujung jarum jam dalam hal ini adalah titik P sama dengan keliling lingkaran dan besar ukuran sudut selama satu putaran adalah 360^0.

Satu derajat ($1°$) adalah ukuran besar sudut yang dibentuk oleh jari-jari lingkaran dengan jarak putar sejauh $\frac{1}{360}$, ditulis dengan $1° = \frac{1}{360°}\ putaran.$ Berdasarkan definisi ini dapat juga dinyatakan bahwa 1 putaran = $360°$.

Contoh 1:

Sepertiga lingkaran = $\frac{1}{3} \times 360^0 = 120^0$

Seperlima lingkaran = $\frac{1}{5} \times 360^0 = 72^0$

Seperenam lingkaran = $\frac{1}{6} \times 360^0 = 60^0$

Tiga perempat lingkaran = $\frac{3}{4} \times 360^0 = 270^0$

Selain itu, juga ada ukuran menit dan detik. Ukuran sudut dalam menit disimbolkan dengan ($'$) dan ukuran sudut dalam detik disimbolkan dengan (") yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

1 derajat $= 60$ menit, ditulis $1° = 60'$

1 menit $= \frac{1}{60}$ derajat, ditulis $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$

1 menit = 60 detik, ditulis $1' = 60''$

1 detik $= \frac{1}{60}$ menit, ditulis $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$

Contoh 2 :

Diketahui besar sudut $\alpha = 118°10'$.

a. Ubahlah besar sudut α tersebut dalam notasi desimal.

b. Ubahlah besar sudut α tersebut dalam ukuran derajat, menit dan detik.

(i) $\frac{1}{2}\alpha$ (ii) $\frac{1}{3}\alpha$ (iii) $\frac{1}{4}\alpha$ (iv) $\frac{1}{5}\alpha$

Jawab:

a. $10' = 10 \times 1' = 10 \times \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} = \left(\frac{10}{60}\right)^{\circ} = 0{,}166°$

Jadi, $118°10' = 118° + 10' = 118° + 0{,}166° = 118{,}166°$

b. (i). $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(118°10') = \frac{1}{2}(118°10') = 59°5'$

Jadi, $\frac{1}{2}\alpha = 59°5'$

(ii). $\frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{3}(118°10') = \frac{1}{3}(117°70') = \frac{1}{3}(117°69'60'') = 39°23'20''$

Jadi, $\frac{1}{3}\alpha = 39°23'20''$

(iii). $\frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{4}(118°10') = \frac{1}{4}(116°130') = \frac{1}{4}(116°128'120'') = 29°32'30''$

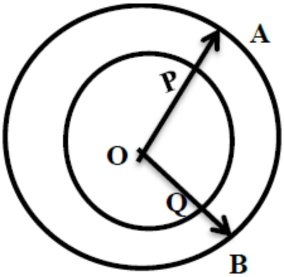
Jadi, $\frac{1}{4}\alpha = 29°32'30'$

(iv). $\frac{1}{5}\alpha = \frac{1}{5}(118°10') = \frac{1}{5}(115°190') = 23°38'$

Jadi, $\frac{1}{5}\alpha = 23°38'$

B. Ukuran Sudut Dalam Radian

Ukuran sudut dalam radian akan dijelaskan melalui gambar berikut. Dari gambar, titik O sebagai pusat lingkaran. OP, OQ merupakan jari-jari lingkaran kecil dan besar, juring BOA diperoleh dari juring POQ melalui proses dilatasi dengan titik pusat O sehingga juring POQ dapat dinyatakan sebangun dengan juring BOA.

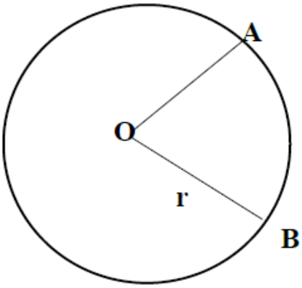


Gambar 1.3.

Kesebangunan pada kedua lingkaran dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\boxed{\frac{panjang\ busur\ PQ}{jari - jari\ OP} = \frac{panjang\ busur\ BA}{jari - jari\ OB}}$$

Hubungan perbandingan di atas dipengaruhi oleh besar sudut POQ bukan dipengaruhi oleh panjang jari-jari lingkaran. Hasil dari perbandingan panjang busur PQ dan jari-jari lingkaran OP merupakan ukuran sudut POQ yang ditulis dalam radian. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.4.

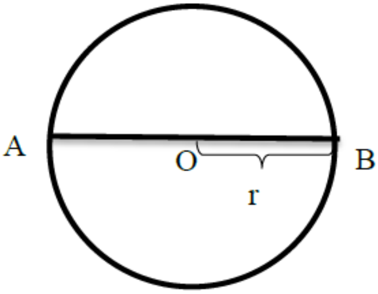
Pada gambar tersebut misalkan panjang busur BA = jari-jari lingkaran = r atau panjang busur BA = OB = OA = r maka nilai perbandingan

$$\boxed{\frac{panjang\ busur\ BA}{jari - jari\ MB} = \frac{r}{r} = 1}$$

Satu radian (1 rad) adalah besaran sudut yang terdapat di bidang datar dan berada antara dua buah jari-jari lingkaran dimana panjang busurnya sama dengan panjang jari-jari lingkaran tersebut. Radian adalah konsep yang relatif baru dalam sejarah matematika. Penggunaan istilah radian pertama kali dicetak oleh fisikawan James T. Thomson pada tahun 1873.

C. Mengubah Ukuran Sudut dari Derajat ke Radian dan Sebaliknya

Dalam menentukan relasi antara ukuran sudut yang dinyatakan dalam ukuran derajat dengan ukuran sudut yang dinyatakan ke dalam radian akan dibuktikan pada gambar berikut.



Gambar 1.5.

Berdasarkan gambar di atas, besar sudut dalam ukuran derajat : $\angle$BOA = 180^0 karena besar sudut BOA yaitu separuh putaran. Besaran sudut BOAyang dinyatakan dalam ukuran radian :

$$\angle BOA = \frac{Panjang\ busur\ BA}{OB}$$

$\angle BOA \ = \frac{\boldsymbol{\pi}}{r}$ (Panjang busur BA = setengah lingkaran)

$\angle BOA = \pi\, radian$. Selanjutnya diperoleh hubungan : $\angle BOA = 180 = \pi\, radian$ dengan $\pi = 3{,}14159$ maka:

- $1 \ = \ \frac{\pi}{180} radian \cong \frac{3{,}14159}{180} radian = \ 0{,}017453\, radian$
- $1\, radian = \frac{180}{\pi} \cong \frac{180}{3{,}14159} = 57{,}296°$

Contoh 3 :

Konversi ukuran sudut berikut ini menjadi ukuran radian:

a. $30°$	c. $135°$	e. $24°15'$
b. $90°$	d. $210°$	f. $30°12'15''$

Jawab:

Sebagaimana diketahui, $1° = 0{,}017453$ radian.

a. Sudut $30°$ dalam ukuran radian.

$$30° = 30 \times 1° = 30 \times \left(\frac{\pi}{180} radian\right) = 30 \cdot \frac{\pi}{180} radian = \frac{\pi}{6} radian$$

Jadi, $30° = \frac{\pi}{6} radian.$

b. Sudut $90°$ dalam ukuran radian.

$$90° = 90 \times 1° = 90 \times \left(\frac{\pi}{180} radian\right) = 90 \cdot \frac{\pi}{180} radian = \frac{\pi}{2} radian$$

Jadi, $90° = \frac{\pi}{2} radian.$

c. Sudut $135°$ dalam ukuran radian.

$$135° = 135 \times 1° = 135 \times \left(\frac{\pi}{180} radian\right) = 135 \cdot \frac{\pi}{180} radian = \frac{3}{4}\pi\ radian$$

Jadi, $135° = \frac{3}{4}\pi\ radian$

d. Sudut $210°$ dalam ukuran radian.

$$210° = 210 \times 1° = 210 \times \left(\frac{\pi}{180} radian\right) = 210 \cdot \frac{\pi}{180} radian = \frac{7}{6}\pi\ radian$$

Jadi, $210° = \frac{7}{6}\pi\ radian.$

e. Sudut $24°15'$ dalam ukuran radian.

$$24°15' = 24° + \left(\frac{15}{60}\right)^{\circ} = 24° + 0{,}25° = 24{,}25° = 24{,}25 \times 1° = 24{,}25 \times 0{,}017453 \quad = 0{,}423\ radian$$

Jadi, $24°15' = 0{,}423\ radian$ (teliti sampai 3 tempat desimal).

f. Sudut $30°12'15''$ dalam ukuran radian.

$$30°12'15'' = 30° + \left(\frac{12}{60} + \frac{15}{3600}\right)^{\circ} = 30° + \left(\frac{720+15}{3600}\right)^{\circ} =$$

$$30° + \left(\frac{735}{3600}\right)^{\circ} = 30° + 0{,}204° = 30{,}204° = 30{,}204 \times 1° = 30{,}204 \times 0{,}017453\ radian\ \ 0{,}00356\ radian$$

Jadi, $30°12'15'' = 0{,}00356\ radian$ (teliti sampai 2 tempat desimal).

$$30°12'15'' = 30° + \left(\frac{12}{60} + \frac{15}{3600}\right)^{\circ} = 30° + \left(\frac{720+15}{3600}\right)^{\circ} =$$

$$30° + \left(\frac{735}{3600}\right)^{\circ} = 30° + 0{,}204° = 30{,}204° = 30{,}204 \times 1° = 30{,}204 \times 0{,}017453\ radian\ \ 0{,}00356\ radian$$

Jadi, $30°12'15'' = 0{,}00356\ radian$ (teliti sampai 2 tempat desimal).

Contoh 4 :

Ubahlah sudut-sudut berikut menjadi ukuran derajat:

a. $\frac{\pi}{6} radian$ c. $\frac{2}{3} radian$

b. $\frac{3\pi}{10} radian$ d. $\frac{4}{5} radian$

Jawab:

a. $\frac{\pi}{6} radian = \frac{\pi}{6} \times 1\ radian = \frac{\pi}{6} \times \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{6} = 30°$

Jadi, $\frac{\pi}{6} radian = 30°$.

b. $\frac{3\pi}{10} radian = \frac{3\pi}{10} \times 1\ radian = \frac{3\pi}{10} \times \frac{180°}{\pi} = \frac{540°}{10} = 54°$

Jadi, $\frac{3\pi}{10} radian = 54°$.

c. $\frac{2}{3} radian = \frac{2}{3} \times 1\ radian = \frac{2}{3} \times 57{,}296° = 38{,}197°$

Jadi, $\frac{2}{3} radian = 38{,}197°$.

Dengan cara lain, $\frac{2}{3} \times 1\ radian = \frac{2}{3} \times \frac{180°}{\pi} = \frac{120°}{\pi} = \frac{120°}{3{,}14159} = 38{,}197°$

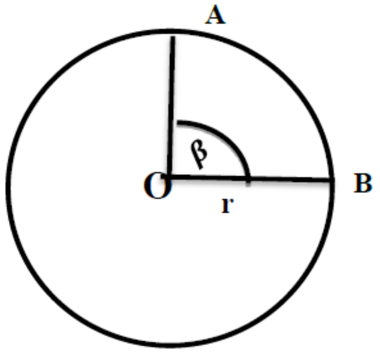
Jadi, $\frac{2}{3} radian = 38{,}197°$.

d. $\frac{4}{5} radian = \frac{4}{5} \times 1\ radian = \frac{4}{5} \times \frac{180°}{\pi} = \frac{144°}{\pi} = \frac{252°}{3{,}14159} = 45{,}836°$

Jadi, $\frac{4}{5} radian = 45{,}836°$.

D. Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Jari-Jari Lingkaran

Sudut pusat lingkaran merupakan bagian dari daerah sudut yang diapit oleh dua buah jari-jari lingkaran dan titik sudutnya yaitu titik pusat lingkaran. Gambar 1.6. di bawah ini ∠AOB merupakan sudut pusat lingkaran yang dibatasi oleh jari-jari lingkaran OA dan OB. Busur lingkaran merupakan bagian dari keliling lingkaran berbentuk sebuah garis lengkung yang menghubungkan dua buah titik pada lingkaran. Gambar 1.6. menunjukkan bahwa garis yang menghubungkan titik A dan titik B disebut dengan busur AB.



Gambar 1.6.

Berdasarkan gambar tersebut maka :

$$\angle BOA = \frac{panjang\ busur\ BA}{OB}$$

$$\beta = \frac{panjang\ busur\ BA}{r}$$

$$panjang\ busur\ BA = \beta . r$$

Sehingga dapat dinyatakan jika terdapat sebuah lingkaran yang memiliki jari-jari r satuan dan memiliki panjang busur s yang membatasi sudut pusat dengan sebesar β radian maka diperoleh

$$s = \beta . r$$

Contoh 5 :

Roda sebuah mobil berputar dengan kecepatan sudut 80 rpm (*revolution per minute*). Ubahlah kecepatan sudut roda mobil tersebut ke dalam:

a. putaran/ detik b. radian/ menit c. radian/ detik

Jawab:

a. 80 rpm = 80 putaran/menit = $\frac{80}{60}$ putaran/detik = 1,333 putaran/detik
Jadi, 80 rpm = 1,333 putaran/detik.

b. Satu putaran penuh menempuh sudut $2\pi\ radian$, maka:
80 putaran/menit = 80 × ($2\pi\ radian$)/menit = $160\pi\ radian$/menit
Jadi, 80 putaran/menit = $160\pi\ radian$/menit.

c. 80 rpm = $160\pi\ radian$/menit = $\frac{160\pi}{60} radian$/detik = $2{,}667\ \pi\ radian$/detik
Jadi, 80 rpm = $2{,}667\ \pi\ radian$/detik.

Contoh 6 :

Suatu lingkaran memiliki panjang jari-jari 12 cm, ukuran sudut pusat $\frac{1}{4}\pi\ radian$ yang berada pada lingkaran dengan panjang busur s. Hitunglah nilai s!

Jawab:

Jari-jari lingkaran (r) = 12 cm dan sudut pusat$(\alpha) = \frac{1}{4}\pi\ radian$, sehingga panjang busur s adalah:

$$s = \alpha r = \frac{1}{4}\pi \times 12cm = 3\pi\ cm = 3 \times 3{,}14159\ cm = 9{,}42477\ cm$$

Contoh 7 :

Diketahui:

Sebuah lingkaran dengan O sebagai titik pusat, dan terdapat titik M dan N di keliling lingkaran.

Panjang jari-jari adalah r.

Keliling lingkaran = $2\pi r$

Panjang busur MN = $\frac{1}{8}$ kali keliling lingkaran = $\frac{1}{8} \times 2\pi r = \frac{1}{4}\pi r$

Ditanya:

Carilah besar sudut MON dalam ukuran radian!

Jawab:

Besar sudut MON = $\alpha = \frac{s}{r} = \frac{(\frac{1}{4}\pi r)}{r} = \frac{1}{4}\pi\ radian$

Jadi, besar sudut MON adalah $\frac{1}{4}\pi\ radian$.

Contoh 8 :

Roda sebuah truk berjalan menempuh suatu tempat yang berjarak 120 meter dari tempat semula. Jika besar sudut pusat roda truk tersebut membentuk sudut 25^0. Hitunglah panjang jari-jari lingkar roda truk tersebut.

Jawab:

α = 25^0= $\frac{5\pi}{36}$ rad

Panjang jari-jari lingkar roda sepeda motor : $r = \frac{s}{\alpha} = \frac{120}{\frac{5\pi}{36}} = \frac{864}{\pi} =$

$275\ m$

Contoh 9:

Busur lingkaran MN terletak di sebuah lingkaran. Busur tersebut membatasi sudut pusat yang berukuran 8 radian.

Buktikan bahwa keliling lingkaran : panjang busur MN = π: 4!

Jawab:
Misalnya r adalah panjang jari-jari lingkaran, maka panjang busur DE = $8 \times r = 8r$.
Keliling lingkaran = $2\pi r$.

Jadi, perbandingan keliling lingkaran dengan panjang busur DE adalah $2\pi r : 8r = \pi : 4$.

LATIHAN

1. Tentukan besar sudut dari :
   a. $\frac{4}{5}$ sudut putaran penuh
   b. $\frac{3}{2}$ sudut putaran penuh
   c. $\frac{5}{6}$ sudut putaran penuh
2. Ubahlah satuan sudut berikut ke dalam sudut putaran.
   a. $37{,}5^0$
   b. 140^0
   c. 215^0
3. Ubahlah satuan sudut ini bentuk desimal.
   a. $23^0 18'$
   b. $76^0 43' 26''$
   c. $128^0 37' 45''$
4. Ubahlah satuan sudut ini ke satuan sudut derajat, menit dan detik.
   a. $23{,}36^0$
   b. $143{,}52^0$
   c. $98{,}75^0$
5. Ubahlah satuan sudut ini ke satuan sudut radian.
   a. $50°$
   b. $89°$
   c. $72{,}3^0$
6. Ubahlah satuan sudut ini ke satuan sudut radian.
   a. $17^0 28'$
   b. $120^0\ 35'\ 25''$
   c. $89^0 54' 46''$

7. Ubahlah ukuran sudut ini ke satuan sudut derajat, menit dan detik.
   a. 14 radian
   b. $\frac{7}{8}$ radian
   c. $\frac{2}{5}$ radian

8. Isilah tabel berikut ini :

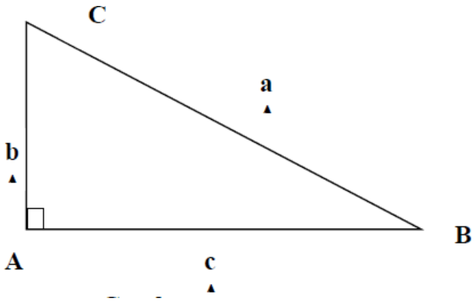
Satuan Derajat (^{0})	Satuan Radian
72	
135	
198	
210	
216	
315	
	$\frac{6\pi}{5}$
	$\frac{2\pi}{3}$
	$\frac{4\pi}{9}$
	$\frac{\pi}{12}$
	$\frac{7\pi}{10}$
	$\frac{11\pi}{6}$

9. Sebuah mesin berputar dengan laju 45 putaran per menit. Tentukan laju daripada putaran mesin tersebut ke dalam satuan :
   a. radian per detik
   b. radian per menit
10. Sebuah jari-jari sepeda memiliki diameter 28 cm, sudut pusat jari-jari sepeda tersebut $\frac{5}{6}\pi$ radian. Hitunglah panjang busur yang membatasi sudut pusat jari-jari lingkaran sepeda tersebut!

BAB II
PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

A. Pengertian Perbandingan Trigonometri

Perbandingan trigonometri dinyatakan sebagai perbandingan sisi-sisi pada segitiga siku-siku. Bab ini membahas lebih dalam mengenai unsur-unsur dalam segitiga siku-siku. Perhatikan gambar 2.1 agar lebih memahami mengenai perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku.

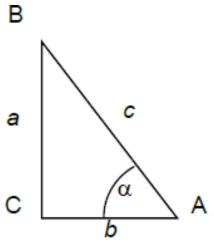


Gambar 2.1.

Gambar 2.1 menunjukkan bahwa sudut A adalah sudut siku-siku yang besar sudutnya 90^0. Sisi BC atau sisi a merupakan sisi yang berada dihadapan sudut A yang disebut dengan sisi miring atau hipotenusa. Sisi AB atau sisi c merupakan sisi yang berada di hadapan sudut C. Selanjutnya sisi AC atau sisi b merupakan sisi yang berada di depan sudut B.

Jika ditinjau dari sudut B, sisi BC atau sisi a merupakan sisi miring atau sisi hipotenusa. Sisi AB atau sisi c merupakan sisi yang berada di samping sudut B. Sisi AC atau sisi b merupakan sisi yang berada di hadapan sudut B. Selanjutnya, jika ditinjau dari sudut C maka sisi sisi BC atau sisi a merupakan sisi miring atau sisi hipotenusa. Sisi AB atau sisi c merupakan sisi yang berada di hadapan sudut C. Sisi AC atau sisi b merupakan sisi yang berada di samping sudut C.

B. Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut pada Segitiga Siku-Siku



Gambar. 2.2.

Gambar di samping merupakan sebuah segitiga siku-siku yang mana sudut C adalah sudut siku-sikunya. *a* merupakan panjang sebuah sisi di hadapan sudut A, *b* adalah panjang sisi di hadapan sudut B, dan *c* adalah panjang sisi di hadapan sudut C.

Terhadap sudut α:
Sisi a merupakan sisi siku-siku di depan sudut α.
Sisi b merupakan sisi siku-siku yang berimpit dengan sudut α.
Sisi c (sisi miring) disebut hipotenusa.

Dari gambar tersebut dapat kita buat perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga berdasarkan masing-masing ketiga sudut pada segitiga tersebut. Misalkan kita ambil sudut A sebagai pemisalan maka perbandingan panjang sisi-sisinya yaitu : $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$.
Selanjutnya perbandingan trigonometri tersebut diberi nama sebagai berikut:

$\frac{a}{c}$ dinyatakan sebagai sinus atau sin

$\frac{b}{c}$ dinyatakan sebagai kosinus atau cos

$\frac{a}{b}$ dinyatakan sebagai tangen atau tan

$\frac{c}{b}$ dinyatakan sebagai sekan atau sec

$\frac{c}{a}$ dinyatakan sebagai kosekan atau cosec

$\frac{b}{a}$ dinyatakan sebagai kotangen atau cot

Keterangan di atas dapat diuraikan menjadi enam perbandingan trigonometri terhadap sudut α sebagai berikut:

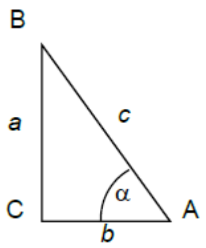
1. $sin\ \alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku-siku di depan sudut } A}{\text{panjang hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$
2. $\cos\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku-siku di dekat sudut } C}{\text{panjang hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$
3. $\tan\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku-siku di depan sudut } A}{\text{panjang sisi siku-siku di dekat sudut } C} = \dfrac{a}{b}$
4. $csc\ \alpha = \dfrac{\text{panjang hipotenusa}}{\text{panjang sisi siku}-\text{siku di depan sudut A}} = \dfrac{c}{a}$
5. $sec\ \alpha = \dfrac{\text{panjang hipotenusa}}{\text{panjang sisi siku}-\text{siku di dekat sudut } C} = \dfrac{c}{b}$
6. $\cot\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku-siku di dekat sudut } C}{\text{panjang sisi siku-siku di depan sudut A}} = \dfrac{b}{a}$

Berdasarkan definisi di atas dapat diturunkan hubungan antar perbandingan trigonometri sebagai berikut :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ dan } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \text{ dan } \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Contoh 1:



Gambar. 2.3.

Sebuah segitiga siku – siku ABC dimana panjang $a = 24$ dan $c = 25$.

Temukan keenam perbandingan trigonometri untuk α

Jawab:

Dengan menggunakan teorema Pythagoras maka nilai b adalah:

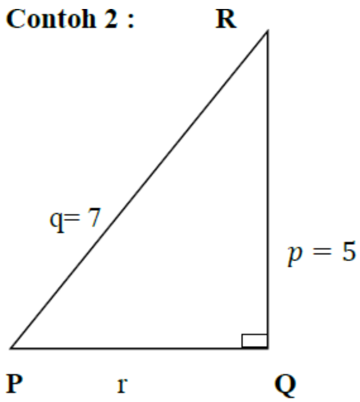
$$b = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7$$

$$sin\ \alpha = \frac{a}{c} = \frac{24}{25} \qquad csc\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{25}{24}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{7}{25} \qquad sec\ \alpha = \frac{c}{b} = \frac{25}{7}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{24}{7} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{7}{24}$$

Contoh 2 :



Gambar 2.4.

Berdasarkan gambar 2.4. tentukan ke enam perbandingan trigonometri berdasarkan sudut RPQ dan sudut PRQ.

Jawab :

Sebelumnya kita mencari nilai panjang sisi r menggunakan rumus phytagoras :

$$r = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{49 - 25} = \sqrt{24}$$

a. Perbandingan trigonometri berdasarkan sudut RPQ yaitu :

$\sin \text{RPQ} = \frac{p}{q} = \frac{5}{7}$ $\qquad$ $csc\ \text{RPQ} = \frac{q}{p} = \frac{7}{5}$

$\cos \text{RPQ} = \frac{r}{q} = \frac{\sqrt{24}}{7}$ $\qquad$ $sec\ \text{RPQ} = \frac{q}{r} = \frac{7}{\sqrt{24}}$

$\tan \text{RPQ} = \frac{p}{q} = \frac{5}{\sqrt{24}}$ $\qquad$ $\cot \text{RPQ} = \frac{r}{p} = \frac{\sqrt{24}}{5}$

b. Perbandingan trigonometri berdasarkan sudut PRQ yaitu :

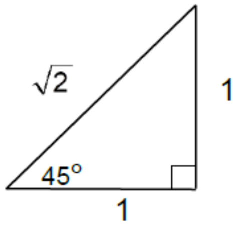
$\sin PRQ = \frac{r}{q} = \frac{\sqrt{24}}{7}$ $\qquad$ $csc\ PRQ = \frac{q}{r} = \frac{7}{\sqrt{24}}$

$\cos PRQ = \frac{p}{q} = \frac{5}{7}$ $\qquad$ $sec\ PRQ = \frac{q}{p} = \frac{7}{5}$

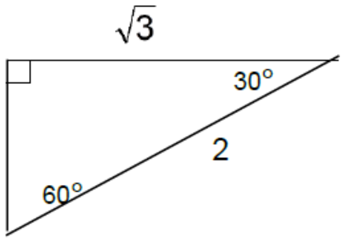
$\tan PRQ = \frac{r}{p} = \frac{\sqrt{24}}{5}$ $\qquad$ $\cot PRQ = \frac{p}{r} = \frac{5}{\sqrt{24}}$

C. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut-Sudut Istimewa

Sudut istimewa merupakan sudut yang dapat diperoleh tanpa menggunakan kalkulator atau tabel seperti: 0°, 30°, 45°, 60°, dan 90°. Nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa dapat diperoleh dengan menggunakan segitiga siku - siku seperti pada gambar 2.5.a. dan 2.5.b.



Gb. 2.5.a.



Gb. 2.5.b.

Berdasarkan gambar 2.5.a dapat ditentukan

$sin\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$sec\ 4\,5° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$

$\cot 45° = \frac{1}{1} = 1$

Berdasarkan gambar 2.5.b dapat ditentukan

$sin\ 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\csc 30° = \frac{2}{1} = 2$

$sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$sec\, 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ $sec\, 60° = \frac{2}{1} = 2$

$\cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Tabel 2.1. Nilai perbandingan trigonometri sudut - sudut istimewa.

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi
cot α	tak terdefinisi	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Contoh 3:

1. $sin\ 30° + \cos 45° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$
2. $sin\, 45° \tan 60° + cos\, 45° \cot 60° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} =$
   $\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{6}\sqrt{6} = \frac{4}{6}\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$
3. Tunjukkan bahwa : $sin\, 30° \cos 30° + \cos 60° \cos 30° = \sin 60°$

Jawab :

Ruas kiri

$sin\, 30° \cos 30° + \cos 60° \cos 30° = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Ruas kanan

$\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi terbukti bahwa $sin\, 30° \cos 30° + \cos 60° \cos 30° = \sin 60^0$

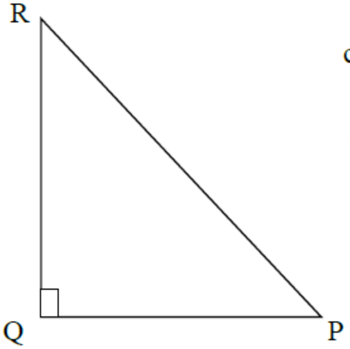
D. Perhitungan dalam Segitiga Siku-siku yang Melibatkan Perbandingan Trigonometri

Dalam berbagai permasalahan matematika yang berkaitan dengan segitiga siku-siku konsep perbandingan trigonometri digunakan dalam mencari panjang sisi-sisinya atau besar sudut lainnya. Perhatikan contoh berikut :

Contoh 4:

Pada segitiga siku-siku PQR,siku-siku di R, diketahui $\angle P = 30^0$ dan PR = 8 cm. Perhatikan gambar di bawah lalu hitung panjang sisi PQ dan QR?

Jawab :



$\cos \angle P = \frac{PQ}{PR}$

$\cos 30^0 = \frac{PQ}{8}$

$PQ = 8 \times \cos 30^0$

$PQ = 8 \times \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$PQ = 4\sqrt{3}$ cm

Gambar 2.6

Jadi, panjang sisi PQ = $4\sqrt{3}$ cm

$QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2}$

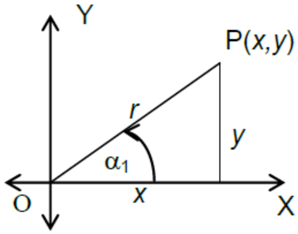
$QR = \sqrt{(8)^2 - (4\sqrt{3})^2}$

$QR = \sqrt{(64 - 48)}$

$QR = \sqrt{16}$

$QR = 4$ cm

E. Perbandingan Trigonometri suatu Sudut pada Semua Kuadran



Gambar. 2.7.

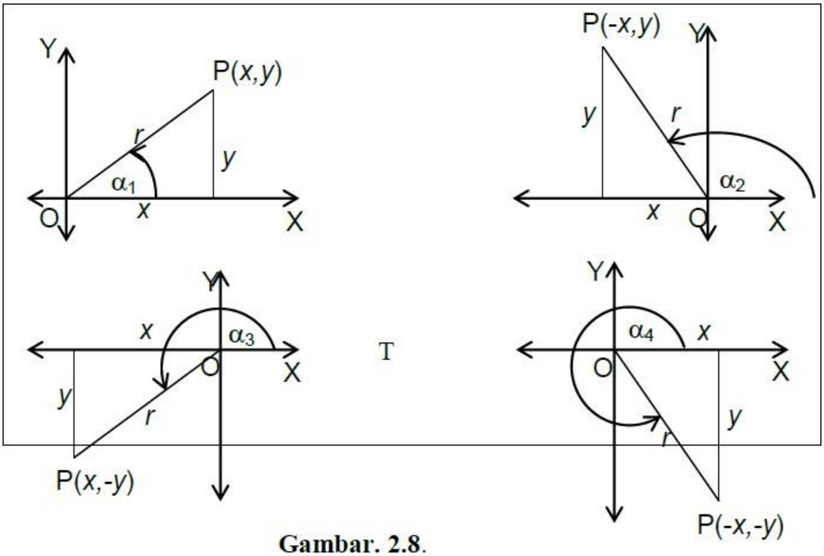
P merupakan titik sebarang yang berada pada kuadran I memiliki koordinat (x,y). OP merupakan sebuah garis yang berputar dengan titik asal O pada koordinat kartesius, sehingga ∠XOP bernilai 0° sampai dengan 90°. Perlu diketahui bahwa

OP $= \sqrt{x^2 + y^2} = r$ dan $r > 0$

Dari gambar tersebut dapat didefinisikan beberapa perbandingan trigonometri dalam absis (x), ordinat (y), dan panjang OP (r) sebagai berikut:

1. $\sin\ \alpha = \dfrac{\text{ordinat P}}{\text{panjang OP}} = \dfrac{y}{r}$
2. $\csc \alpha = \dfrac{\text{panjang OP}}{\text{ordinat P}} = \dfrac{r}{y}$
3. $\cos \alpha = \dfrac{\text{absis } P}{\text{panjang OP}} = \dfrac{x}{r}$
4. $\sec\ \alpha = \dfrac{\text{panjang OP}}{\text{absis } P} = \dfrac{r}{x}$
5. $\tan \alpha = \dfrac{\text{ordinat P}}{\text{absis } P} = \dfrac{y}{x}$
6. $\cot \alpha = \dfrac{\text{absis } P}{\text{ordinat P}} = \dfrac{x}{y}$

Apabila garis OP diputar maka ∠ XOP = α dapat berada di kuadran I, kuadran II, kuadran III atau kuadran IV, sebagaimana gambar di bawah ini.



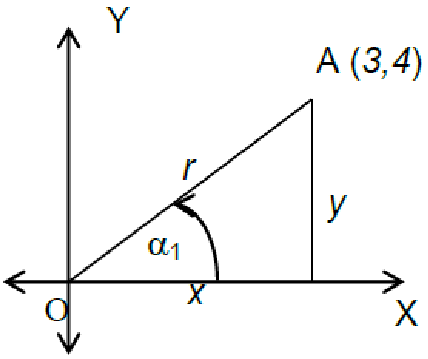
Gambar. 2.8.

Tabel 2.2. Tanda nilai perbandingan trigonometri pada tiap kuadran.

Perbandingan Trigonometri	Kuadran			
	I	II	III	IV
Sin	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-
Csc	+	+	-	-
Sec	+	-	-	+
Cot	+	-	+	-

Contoh 5 :

Pada gambar berikut, koordinat titik A (3,4).



Gambar. 2.9.

a. Hitung panjang r atau OA !
b. Jika sudut XOA = α, hitunglah sin α, cos α dan tan α !
c. Tentukan besar sudut α !

Jawab

a. Panjang r atau OA = $\sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

b. sin α = $\frac{y}{r} = \frac{4}{5}$

cos α = $\frac{x}{r} = \frac{3}{5}$

tan α = $\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$

c. tan α = $\frac{4}{3}$ = 1,333 karena α berada di kuadran I maka α = $53{,}12^0$

Contoh 6 :

Diketahui cos α $=-\frac{10}{26}$. Carilah :

a. sin α   b. cos α   c. cot α

d. sec α   e. cosec α

Jawab:

cos α $=-\frac{10}{26}$ dimana α berada di kuadran III .

cos α $=-\frac{10}{26}$ berarti x = -10, dan r = 26 dapat kita peroleh.

$$y = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{26^2 - (-10)^2}$$
$$= \sqrt{676 - 100}$$
$$= \sqrt{576} = 24$$

Karena α berada kuadran III maka nilai y bernilai negatif y = -24

sin α $= \frac{y}{r} = -\frac{24}{26}$

tan α $= \frac{y}{x} = \frac{24}{10}$

cot α $= \frac{x}{y} = \frac{10}{24}$

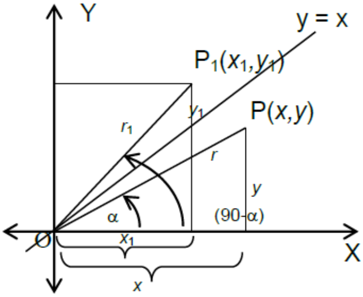
sec α $= \frac{r}{x} = -\frac{26}{10}$

cosec α $= \frac{r}{y} = -\frac{26}{24}$

F. Rumus Perbandingan Trigonometri Sudut yang Berelasi

Beberapa sudut yang memiliki relasi dengan sudut α yaitu sudut (90° ± α), (180° ± α), (360° ± α), dan -α°. Dua buah sudut yang memiliki relasi ada yang diberi nama sudut **penyiku** (komplemen) yaitu untuk sudut α° dan (90°- α) dan yang lain diberi nama **pelurus** (suplemen) untuk sudut α° dengan (180°- α). Contoh: penyiku sudut 30° adalah 60° dan pelurus sudut 100° adalah 80°.

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (90° - α)



Gambar 2.9.

Dari gambar 2.9. diketahui bahwa pencerminan garis $y = x$ menghasilkan titik $P_1 (x_1,y_1)$ bayangan dari P (x,y), sehingga diperoleh:

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 90° - \alpha$

b. $x_1 = y$, $y_1 = x$ dan $r_1 = r$

dari hal tersebut diperoleh:

a. $\sin\ (90° - \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos\ \alpha$

b. $\cos\ (90° - \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{y}{r} = \sin\ \alpha$

c. $\tan\ (90° - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y} = \cot \alpha$

d. $\cot\ (90° - \alpha) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{y}{x} = \tan \alpha$

e. $\sec\ (90° - \alpha) = \frac{r_1}{x_1} = \frac{r}{y} = \operatorname{cosec}\ \alpha$

f. $\operatorname{cosec}\ (90° - \alpha) = \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{x} = \sec \alpha$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh rumus perbandingan trigonometri sudut α dengan (90° - α) yang dinyatakan sebagai berikut:

a. $\sin\left(90° - \alpha\right) = \cos\ \alpha$	d. $\csc\left(90° - \alpha\right) = \sec\ \alpha$
b. $\cos\left(90° - \alpha\right) = \sin\ \alpha$	e. $\sec\left(90° - \alpha\right) = \cos ec\ \alpha$
c. $\tan\left(90° - \alpha\right) = \cot\ \alpha$	f. $\cot\left(90° - \alpha\right) = \tan\ \alpha$

Contoh 7 :

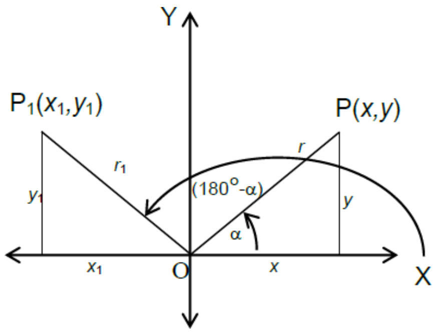
Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ini ke dalam perbandingan trigonometri sudut komplemennya.

a. $\sin 46^0 = \sin (90^0 - 44^0) = \cos 44^0$

b. $\cos 67^0 = \cos (90^0 - 23^0) = \sin 23^0$

c. $\tan 18^0 = \tan (90^0 - 72^0) = \tan 72^0$

2. Perbandingan trigonometri untuk sudut α° dengan(180° - α)



Gambar 2.10.

Titik P_1 (x_1,y_1) merupakan bayangan dari titik P (x,y) dan merupakan hasil dari pencerminan terhadap sumbu y.

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 180° - \alpha$

b. $x_1 = -x$, $y_1 = y$ dan $r_1 = r$

dari hal tersebut diperoleh:

a. $sin\ (180° - \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{y}{r} = sin\ \alpha$

b. $\cos\ (180° - \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{-x}{r} = -cos\ \alpha$

c. $\tan\ (180° - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{-x} = -\tan \alpha$

d. $cot\ (180° - \alpha) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{-x}{y} = -cot\ \alpha$

e. $\sec\ (180° - \alpha) = \frac{r_1}{x_1} = \frac{r}{-x} = -sec\ \alpha$

f. $\text{cosec}\ (180° - \alpha) = \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{y} = cosec\ \alpha$

Dari beberapa hubungan tersebut diperoleh rumus :

a. $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$	d. $\csc(180° - \alpha) = \csc \alpha$
b. $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$	e. $\sec(180° - \alpha) = -\sec \alpha$
c. $\tan(180° - \alpha) = -\tan \alpha$	f. $\cot(180° - \alpha) = -\cot \alpha$

Contoh 8:

Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ini ke dalam perbandingan trigonometri sudut pelurusnya.

a. 152^0 b. sec 128^0 c. tan 175^0

Jawab :

a. $\sin 152^0 = \sin (180^0 - 28^0) = \sin 28^0$
b. $\sec 128^0 = \sec (180^0 - 52^0) = -\sec 52^0$
c. $\tan 175^0 = \tan (180^0 - 5^0) = -\tan 5^0$

Contoh 9 :

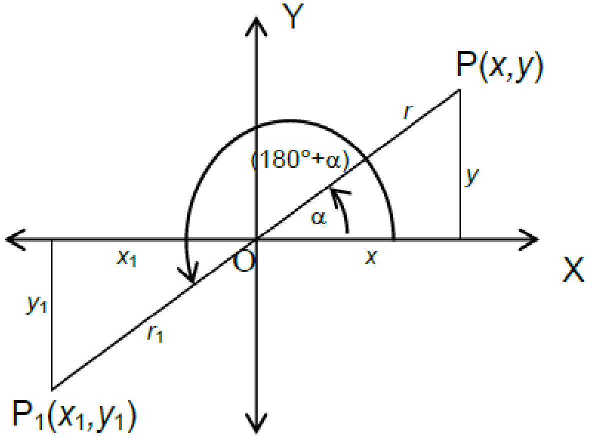
Carilah nilai dari :

a. cosec 135^0 b. cos 150^0 c. tan 120^0

Jawab :

a. $\text{cosec } 135^0 = \text{cosec } (180^0 - 135^0) = \text{cosec } 45^0 = \sqrt{2}$
b. $\cos 150^0 = \cos (180^0 - 150^0) = -\cos 30^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
c. $\tan 120^0 = \tan (180^0 - 120^0) = -\tan 60^0 = -\sqrt{3}$

3. Perbandingan trigonometri untuk sudut $\alpha°$ dengan $(180° + \alpha)$



Gambar 2.11

Gambar 2.11. menunjukkan bahwa pencerminan terhadap garis $y = -x$ menghasilkan titik P_1 (x_1,y_1) yang merupakan sebuah bayangan daripada titik P (x,y), sehingga

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 180° + \alpha$

b. $x_1 = -x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan:

a. $sin\ (180° + \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{y}{r} = sin\ \alpha$

b. $\cos\ (180° + \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{-x}{r} = -cos\ \alpha$

c. $\tan\ (180° + \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{-x} = \tan\ \alpha$

d. $cot\ (180° + \alpha) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{-x}{-y} = cot\ \alpha$

e. $\sec\ (180° + \alpha) = \frac{r_1}{x_1} = \frac{r}{-x} = -sec\ \alpha$

f. $\text{cosec}\ (180° + \alpha) = \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{-y} = -co\text{sec}\ \alpha$

Dari beberapa hubungan tersebut diperoleh rumus :

a. $\sin\left(180° + \alpha\right) = -\sin\alpha$	d. $\csc\left(180° + \alpha\right) = -\csc\alpha$
b. $\cos\left(180° + \alpha\right) = -\cos\alpha$	e. $\sec\left(180° + \alpha\right) = -\sec\alpha$
c. $\tan\left(180° + \alpha\right) = \tan\alpha$	f. $\cot\left(180° + \alpha\right) = \cot\alpha$

Contoh 10:

Ubah perbandingan trigonometri berikut ini ke dalam perbandingan trigonometri sudut lancip.

a. cosec 215^0 b. sec 198^0 c. tan 256^0

Jawab :

a. cosec 215^0 = cosec $(180^0 + 35^0)$ = -cosec 35^0

b. sec 198^0 = sec $(180^0 + 18^0)$ = - sec18^0

c. tan 256^0 = tan $(180^0 + 76^0)$ = tan 76^0

Contoh 11 :

Hitunglah nilai dari :

a. sin 210^0 b. cos 240^0 c. tan 225^0

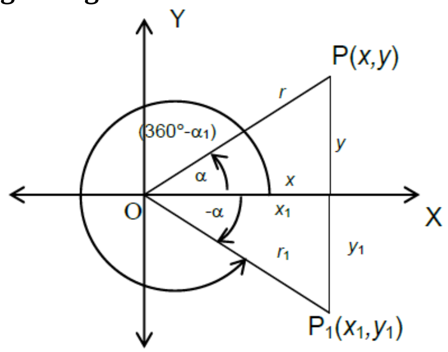
Jawab :

a. sin 210^0 = sin ($180^0 + 30^0$) = - sin 30^0 = $-\frac{1}{2}$

b. cos 240^0 = cos ($180^0 + 60^0$) = - cos 60^0 = $-\frac{1}{2}$

c. tan 225^0 = tan ($180^0 + 45^0$) = tan 45^0 = 1

4. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (- α)



Gambar. 2.12.

Dari gambar 2.12 diketahui bahwa pencerminan terhadap sumbu x menghasilkan titik P_1 (x_1,y_1) bayangan dari P (x,y), sehingga :

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = -\alpha$

b. $x_1 = x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan :

a. $sin\ (-\alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -sin\ \ \alpha$

b. $\cos\ (-\alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r} = cos\ \ \alpha$

c. $\tan\ (-\alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\tan\alpha$

d. $cot\ \ (-\alpha) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{-y} = -cot\ \alpha$

e. $\sec\ (-\alpha) = \frac{r_1}{x_1} = \frac{r}{x} = sec\ \ \alpha$

f. $\text{cosec}\ (-\alpha) = \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{-y} = -\text{cosec}\ \alpha$

Dari beberapa hubungan tersebut diperoleh rumus :

a. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	d. $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$
b. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	e. $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
c. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	f. $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

Untuk relasi α dengan $(-\alpha)$ tersebut identik dengan relasi α dengan $360° - \alpha$, misalnya $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$.

a. $sin\ (360 - \alpha) = -sin\ \alpha$	d. $\csc(360 - \alpha) = -\csc\alpha$
b. $\cos(360 - \alpha) = cos\ \alpha$	e. $\sec(360 - \alpha) = \sec\alpha$
c. $\tan(360 - \alpha) = -\tan\alpha$	f. $\cot(360 - \alpha) = -\cot\alpha$

Contoh 12:

Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ini ke dalam perbandingan trigonometri sudut lancip.

a. $\sin(-70^0)$ b. $\cos(-165^0)$ c. $\tan 314^0$ d. cosec 295^0

Jawab :

a. $\sin(-70)^0 = -\sin 70^0$

b. $\cos(-165)^0 = \cos 165^0 = \cos(180^0 - 15^0) = -\cos 15^0$

c. $\tan 314^0 = \tan(360^0 - 46^0) = -\tan 46^0$

d. cosec 295^0 = cosec $(360^0 - 65^0)$ = - cosec 65^0

Contoh 13 :

Hitunglah nilai dari :

a. $\sin(-60)^0$ b. $\cos(-30)^0$ c. $\tan 300^0$ d. $\sec 330^0$

Jawab :

a. $\sin(-60)^0 = = -\sin 60^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

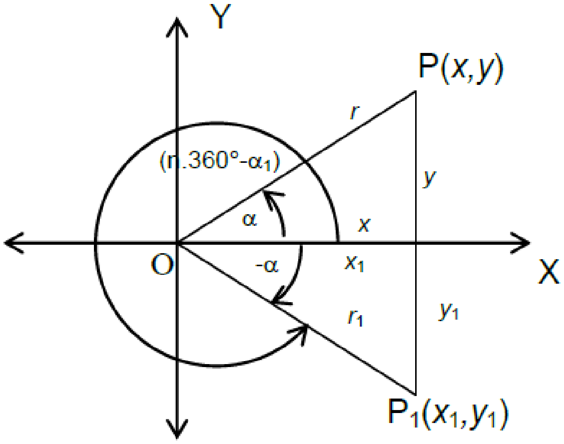
b. $\cos(-30^0) = \cos(30^0) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c. $\tan 300^0 = \tan(360^0 - 60^0) = -\tan 60^0 = -\sqrt{3}$

d. $\sec 330^0 = \sec(360^0 - 30^0) = \sec 30^0 = 2$

5. Rumus Perbandingan Trigonometri untuk sudut ($n.360^0 - \alpha$) dan sudut ($n.360^0 - \alpha$)

Perhatikan gambar berikut ini.

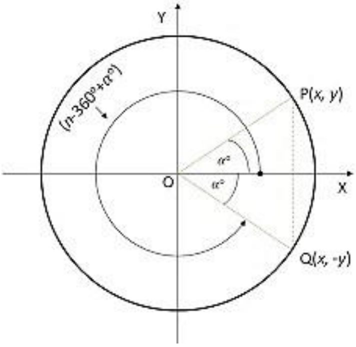


Gambar. 2.13.

Pada gambar di atas misalkan $\angle POX = \alpha$ dan $\angle P_1OX = (n.360^0 - \alpha)$ dengan n bilangan bulat sehingga titik P_1 berada pada kaki sudut yang nilainya $(-\alpha)$. Oleh karena itu, rumus-rumus perbandingan untuk sudut $(n.360^0 - \alpha)$ sama dengan rumus-rumus perbandingan trigonometri untuk sudut $(-\alpha)$.

a. $sin\ (n.360 - \alpha) = -sin\ \alpha$	d. $\csc(n.360 - \alpha) = -\csc\alpha$
b. $\cos(n.360 - \alpha) = cos\ \alpha$	e. $\sec(n.360 - \alpha) = \sec\alpha$
c. $\tan(n.360 - \alpha) = -\tan\alpha$	f. $\cot(n.360 - \alpha) = -\cot\alpha$

Selanjutnya perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 2.14.

Misalkan ∠POX = α dan ∠QOX = $(n.360^0 + \alpha)$ dengan n bilangan bulat sehingga titik Q berimpit dengan titik P. Oleh karena itu, rumus-rumus perbandingan untuk sudut $(n.360^0 + \alpha)$ sama dengan rumus-rumus perbandingan trigonometri untuk sudut (α).

a. $sin\ (n.360+\alpha) = sin\ \alpha$	d. $\csc(n.360+\alpha) = \csc\alpha$
b. $\cos(n.360+\alpha) = cos\ \alpha$	e. $\sec(n.360+\alpha) = \sec\alpha$
c. $\tan(n.360+\alpha) = \tan\alpha$	f. $\cot(n.360+\alpha) = \cot\alpha$

Contoh 14:

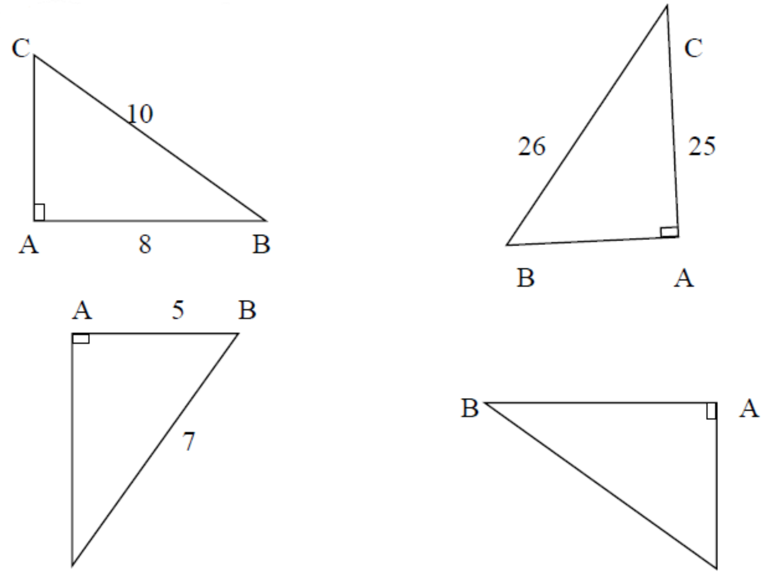
a. sin 387^o
b. cos 765^o
c. tan 986^0
d. cot 1142^0
e. sec 1042^0
f. cosec 586^0

Jawab :

a. sin 387^0 = sin $(1 \times 360 + 27)^0$ = sin 27^0
b. cos 765^0 = cos $(2 \times 360 + 45)^0$ = cos 45^o = cos 45^0
c. tan 986^0 = tan $(3 \times 360 - 94)^0$ = - tan 94^0
d. cot 1142^0 = cot $(3 \times 360 + 62)^0$ = cot 62^o
e. sec 1040^0 = sec $(3 \times 360 – 40)^0$ = sec 40^0
f. cosec 586^0 = cosec $(2 \times 360 – 134)^0$ = - cosec 134^0

LATIHAN

1. Carilah nilai perbandingan trigonometri daripada sudut B dan sudut C pada segitiga ABC di bawah ini!



2. Sebuah segitiga ABC siku-siku di A dan α merupakan besar sudut B. Carilah perbandingan trigonometri sudut α jika diketahui panjang sisi sebagai berikut :
   a. a = 15 cm dan b = 12 cm
   b. p = 27 cm dan b = 17 cm
   c. b = 6 cm dan c = 8 cm
   d. b = 10 cm dan c = $2\sqrt{5}$
   e. a = 16 cm dan c = $4\sqrt{2}$
   f. a = 8 cm dan c = 17 cm

3. Carilah nilai perbandingan trigonometri sudut β yang lainnya (sudut β merupakan sudut lancip) jika diketahui:
   a. $\sin \beta = \frac{8}{17}$
   b. $\cos \beta = \frac{3}{7}$
   c. $\tan \beta = \frac{2}{3}$

4. Isilah nilai fungsi trigonometri yang kosong pada tabel di bawah ini :

	sin α	cos α	tan α	cot α
sin α	a	$\sqrt{1-a^2}$	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
cos α		a		
tan α			a	
cot α				a

5. Hitunglah nilai dari fungsi trigonometri berikut ini :
   a. $\cos 45^0 + \tan 30^0$
   b. $\sin 30^0 + \cos 45^0$
   c. $\sin 60^0 + \sec 30^0 + \cot 45^0$
   d. $\operatorname{cosec} 30^0 + \cos 60^0 + \tan 45^0$
   e. $\sin 60^0 . \cos 45^0 + \cot 45^0 . \sec 30^0$
   f. $\tan 30^0 . \sin 60^0 . \cos 45^0 . \operatorname{cosec} 60^0 . \sec 30^0 . \sec 45^0$
   g. $\frac{\sin 45°}{sec\ 30° + \tan 30°}$
   h. $2 \cot^2 45^0 + \sec^2 30^0 - \sin^2 60^0$
   i. $\frac{\sin 30° + \tan 60° - \cos 45°}{\cos 30° - \tan 45° + \sin 60°}$

6. Sebuah segitiga siku-siku PQR, siku-siku di Q jika diketahui ∠P = 60^0 , panjang sisi PQ = 8 cm. Hitunglah panjang sisi-sisi segitiga PQR yang lainnya.
7. Pada segitiga ABC, siku-siku di C, diketahui ∠B = 45^0 dan panjang sisi AC= 16 cm. Tentukanlah panjang sisi-sisi segitiga ABC yang lainnya.

8. Pada segitiga KLM, siku-siku di L, diketahui panjang sisi KM = 10 cm dan panjang sisi LM = 6 cm. Hitunglah besar ∠K dan ∠M.

9. 9. Pada segitiga XYZ, siku-siku di X, jika diketahui panjang sisi XY = 5 cm dan panjang sisi YZ = 8 cm. Hitunglah besar ∠Y dan ∠Z.

10. Pada nilai setiap fungsi trigonometri berikut, tentukan fungsi yang positif dan negatif. Lengkapi dengan alasannya!

a. sin 123^0	e. sec 342^0
b. cos 216^0	f. cosec 172^0
c. tan 315^0	g. sin 78^0
d. cot 289^0	i. tan 155^0

11. Diketahui $sin\ \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, Tentukanlah nilai dari :

a. cos α	b. tan α	c. cosec α
d. sec α	e. cot α	

12. Diketahui tan tan $\beta = -\frac{3}{5}$. Hitunglah nilai dari :

a. sin β	b. cos β	c. cosec β
d. sec β	e. cotβ	

13. Ubahlah bentuk perbandingan trigonometri berikut dalam bentuk perbandingan sudut lancip:

a. sin 123^0	e. sec 145^0	i. cos 132^0
b. cos 146^0	f. cosec 152^0	j. cosec 171^0
c. tan 155^0	g. sin 168^0	k. sec 163^0
d. cot 139^0	h. tan 124^0	l. cot 119^0

14. Ubahlah bentuk perbandingan trigonometri berikut dalam bentuk perbandingan sudut lancip:

a. sin 195^0	e. sec 237^0	i. cos 259^0
b. cos 204^0	f. cosec 248^0	j. cosec 199^0
c. tan 213^0	g. sin 251^0	k. sec 217^0
d. cot 226^0	h. tan 262^0	l. cot 233

15. Ubahlah bentuk perbandingan trigonometri berikut dalam bentuk perbandingan sudut lancip:

a. sin 525^0	e. sec 1180^0	i. cos 2024^0
b. cos 624^0	f. cosec 964^0	j. cosec 862^0
c. tan 716^0	g. sin 1042^0	k. sec 395^0
d. cot 804^0	h. tan 467^0	l. cot 467^0

16. Sederhanakan bentuk perbandingan fungsi trigonometri berikut :

a. $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\tan(90°-\alpha)}$

b. $\frac{\sec(90°-\alpha)}{\cot(90°-\alpha)}$

c. $\frac{\operatorname{cosec}(90°+\alpha)}{\tan(90°-\alpha)}$

d. $\frac{\sin(180°-\alpha)}{cos\ (90°+\alpha)}$

e. $\frac{\tan(90°-\alpha)}{sec\ (180°+\alpha)}$

f. $\frac{\sin(90°-\alpha)-cos(180°-\alpha)}{\tan(90°+\alpha)+\cot(270°-\alpha)}$

g. $\frac{\tan(90°+\alpha)+sin\ (180°+\alpha)}{\cot(180°-\alpha)-\cos(270°+\alpha)}$

17. Tentukanlah nilai dari :

a. $\frac{\sin 18°}{\cos 32°}$

b. $\frac{\cot 26°}{\tan 64°}$

c. cos 42^0 – sin 38^0

d. sec 31^0- cosec 59^0

e. $\frac{cos^2 63°+sin^2 27°}{sin^2 17°+cos^2 73°}$

f. sin 35° cos 55° + cos 35° sin 55°

18. Buktikan bahwa :

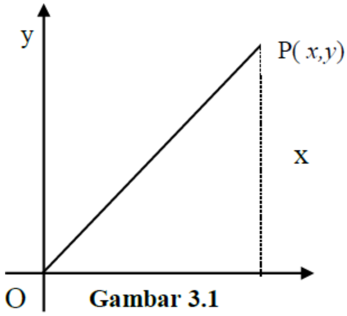
a. tan 48° tan 23° tan 42° tan 67° = 1

b. cos 38° cos 52° – sin 38° sin 52° = 0

BAB III
KOORDINAT KUTUB

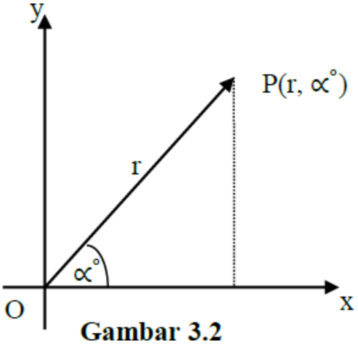
A. Pengertian Koordinat Kutub Sebuah Titik

Kedudukan suatu titik terhadap bidang *xy* dapat dinyatakan pada *koordinat kartesius* yang terdiri atas sumbu x pada sumbu horizontal dan sumbu y pada sumbu vertikal. Perhatikan gambar 3.1 berikut ini.



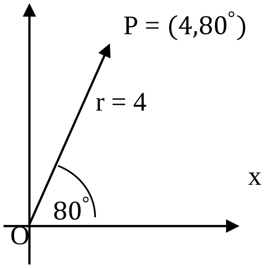
Gambar 3.1

Pada gambar di atas dapat dilihat bahwa Titik P dengan absis x dan ordinat y sehingga koordinat kartesius titik P adalah (x, y). Letak titik P pada bidang xy dapat digambarkan secara geometris ke dalam koordinat kutub yang terdiri atas nilai r sebagai titik absis dan $\angle\alpha$ sebagai titik ordinatnya yang dapat dilihat pada gambar dibawah ini.

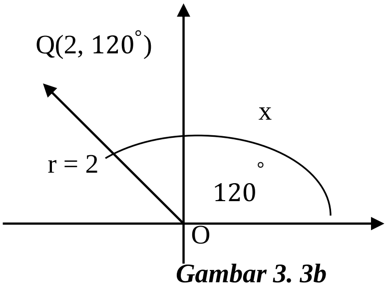


Gambar 3.2

Pada gambar 3.3. berikut ini, koordinat titik P adalah (4, 80°), sebagai r = 4 dan a°= 80°. Adapun pada gambar 3. 3b, koordinat titik Q adalah (2, 120°), sebab r = 2 dan a°= 120°.



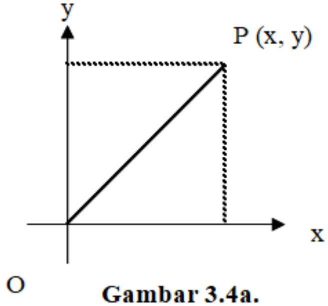
Gambar 3. 3a



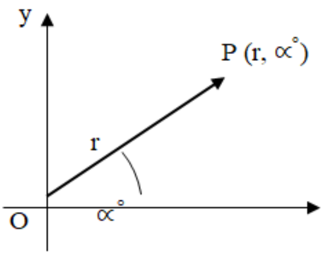
Gambar 3. 3b

B. Hubungan Koordinat Kartesius dengan Koordinat Kutub

Gambar 3.4a menunjukkan bahwa, titik P disajikan dalam koordinat kartesius (x, y) dan pada gambar 3. 4b titik P disajikan dalam koordinat kutub (r, a°)



Gambar 3.4a.



Gambar 3.4b.

Jika koordinat kutub titik P (r, a) diketahui maka koordinat kartesius P (x, y) dapat ditentukan dengan menggunakan rumus:

$$\boxed{\sin \propto^\circ = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \propto^\circ}$$

dan

$$\boxed{\cos \propto^\circ = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \propto^\circ}$$

Selanjutnya, jika koordinat titik P(x, y) sudah diketahui maka koordinat kutub titik P(r, a°) dapat diperoleh dengan menggunakan rumus:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \; dan \tan \propto^\circ = \frac{y}{x}$$

Berdasarkan uraian diatas, dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. Jika koordinat titik P(r, a°) diketahui, maka koordinat kartesius titik P(x, y) dapat diperoleh dengan rumus:

$$\sin \propto^\circ = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \propto^\circ$$

dan

$$\cos \propto^\circ = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \propto^\circ$$

2. Jika koordinat titik P(x, y) diketahui, maka koordinat kutub titik P(r, a°) dapat diperoleh dengan rumus:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \; dan \tan \propto^\circ = \frac{y}{x}$$

Contoh 1:

Koordinat kutub titik P adalah (4, 60°). Koordinat kartesius titik P adalah….

Jawab:

P (4, 60°) maka r = 4 dan a°= 60°. Titik P berada pada kuadran I sehingga dengan menggunakan hubungan x = r cos a° dan y = r sin a°, diperoleh:

$x = 4 \cos 60^\circ$

$= 4 \cdot \frac{1}{2}$

$= 2$

$y = 4 \sin 60^\circ$

$\quad = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\quad = 2\sqrt{3}$

Sehingga, koordinat kartesius titik P adalah $(2, 2\sqrt{3})$

Contoh 2:

Diketahui koordinat kutub titik Q adalah $(6, 72^\circ)$. Tentukan koordinat kartesius titik Q tersebut (teliti sampai tiga tempat desimal)!

Jawab:

Q $(4, 72^\circ)$ maka r = 6 dan $a^\circ = 72^\circ$. Titik Q berada di kuadran I. Ingat kembali hubungan x = r cos a° $dan\ y = r \sin a^\circ$, maka diperoleh:

$X = 6 \cos 72^\circ$

$\quad = 6.\ 0{,}309$

$\quad = 1{,}854$

$Y = 6 \sin 72^\circ$

$\quad = 6.\ 0{,}951$

$\quad = 5{,}706$

Sehingga, koordinat kartesius titik Q adalah (1,854; 5,706).

Contoh 3:

Koordinat kutub titik R adalah $(8, 150^\circ)$. Tentukan koordinat kartesius titik R tersebut!

Jawab:

Diketahui R (8, 150) maka r = 8 dan $a^\circ = 150^\circ$. Titik R berada di kuadran II. Ingat kembali hubungan x = r cos a° dan y = r sin a°, diperoleh:

$x = 8 \cos 150^\circ$

$\quad = 8 \cos (180^\circ - 30^\circ)$

$\quad = 8 (-\cos 30^\circ)$

$\quad = 8 (-\frac{1}{2}\sqrt{3})$

$\quad = -4\sqrt{3}$

$y = 8 \sin 150^\circ$
$= 8 \sin (180^\circ - 30^\circ)$
$= 8 (\sin 30^\circ)$
$= 8 (\frac{1}{2})$
$= 4$

Sehingga, koordinat kartesius titik R adalah $(-4\sqrt{3}, 4)$.

Contoh 4:

Koordinat kutub titik S adalah $(10, 250^\circ)$ maka koordinat kartesius titik T tersebut!

Jawab:

Diketahui S (10, 250) maka r = 10 dan $a^\circ = 250^\circ$. Titik S berada di kuadran III. Ingat kembali hubungan x = r cos a° dan y = r sin a°, diperoleh:

$x = 10 \cos 250^\circ$
$= 10 \cos (180^\circ + 70^\circ)$
$= 10 (-\cos 70^\circ)$
$= 10 (-0{,}342)$
$= -3{,}420$

$y = 10 \sin 250^\circ$
$= 10 \sin (180^\circ + 70^\circ)$
$= 10 (-\sin 70^\circ)$
$= 10 (-0{,}9396)$
$= -9{,}396$

Sehingga, koordinat kartesius titik S adalah $(-4{,}320;\ -9{,}396)$.

Contoh 5:

Koordinat kartesius titik A adalah (6,8). Tentukan koordinat kutub titik A.

Jawab :

Titik A (6, 8) maka x = 6 dan y = 8. Kedudukan titik A berada pada kuadran I.

Dengan menggunakan rumus: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan tan a° $= \frac{y}{x}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$

$r = \sqrt{36 + 64}$

$r = \sqrt{100}$

$r = 10$

tan a° $= \frac{y}{x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1{,}333$

Dengan menggunakan tabel trigonometri, diperoleh α = $53{,}1^0$

Jadi, koordinat kutub dari titik A (6,8) adalah (10; $53{,}1^0$).

Contoh 6:

Koordinat kartesius titik B adalah (-2,5). Tentukan koordinat kutub titik B.

Jawab :

Titik B (-2,5) maka x = -2 dan y = 5. Kedudukan titik B berada pada kuadran II.

Dengan menggunakan rumus: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan tan a° $= \frac{y}{x}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2}$

$r = \sqrt{4 + 25}$

$r = \sqrt{29}$

r = 5,385

tan a° $= \frac{y}{x} = \frac{5}{(-2)} = -2{,}5$

Dengan menggunakan tabel trigonometri, diperoleh α = $68{,}19^0$

Karena kedudukan titik B berada pada kuadran II, maka besar sudut α adalah : (180^0- $68{,}19^0$) = $111{,}81^0$

Jadi, koordinat kutub dari titik B (-2,5) adalah (5,385; $111{,}81^0$).

Contoh 7 :

Ubahlah persamaan berikut : $r^2 = 9\, sin2\theta$ ke dalam koordinat kartesius.

Jawab :

$$r^2 = 9\, sin2\theta$$
$$r^2 = 9\, (2sin\theta \cos\theta)$$
$$r^2 = 18\, (sin\theta \cos\theta)$$
$$r^2 = 18\, (\frac{y}{r})\, (\frac{x}{r})$$
$$r^2 = 18\, \frac{xy}{r^2}$$
$$r^4 = 18\, xy$$
$$(x^2 + y^2)^2 = 18xy$$

Contoh 8:

Ubahlah persamaan berikut x + y = 4 ke dalam koordinat kutub.

Jawab :

Karena $x = r \cos\theta$ dan $y = r \sin\theta$ maka :

$$x + y = 4$$
$$(r \cos\theta + r \sin\theta) = 4$$
$$r\, (\cos\theta + \sin\theta) = 4$$
$$r = \frac{4}{\cos\theta + \sin\theta}$$

LATIHAN

1. Carilah koordinat kutub dari titik-titik yang mempunyai koordinat kartesius berikut :
   a. (1,2)
   b. (-3,4)
   c. (-5,-5)
   d. $(-3, 3\sqrt{3})$
   e. (4, -5)
   f. (-1,-3)
   g. (3,3)
   h. (-2,0)
   i. (-1, $\sqrt{3}$)
   j. (-2, -3)

2. Carilah koordinat kartesius dari titik-titik jika diketahui koordinat kutubnya.
   a. $(8, \frac{3}{4}\pi)$
   b. (5$\sqrt{2}$, 315º)
   c. (8, 240°)
   d. (3, 45^0)
   e. (-2, $\frac{4}{3}\pi$)
   f. (-4, $\frac{\pi}{3}$)
   g. (-5, 210^0)
   h. (3, 270^0)
   i. $(-4\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$
   j. (-3, 293^0)

3. Carilah nilai yang tidak diketahui koordinat titik P dari :
   a. x = 2 , r = 3, titik P berada pada kuadran I
   b. x = -3, r = 5, titik P berada pada kuadran II
   c. y = -1, r = 3, titik P berada pada kuadran III
   d. x =2 , r = $\sqrt{5}$, titik P berada pada kuadran IV
   e. x = 3, r = 3, titik P berada pada kuadran I
   f. y = -2, r = 2, titik P berada di kuadaran III
   g. x = 0, r = 2, y bernilai positif
   h. y =0, r = 1, x bernilai negatif

4. Tuliskan masing-masing persamaan berikut ke dalam koordinat kartesius :
   a. $r^2 = 9$
   b. $r = 6\, cos\theta$
   c. $r^2 = 4 \cos 2\theta$
   d. $r(cos\theta + sin\theta) = 3$
   e. $r^2 = 4$
   f. $r = 6\, sin\theta$
   g. $r^2 = 4\ \sin 2\theta$
   h. $r(cos\theta - sin\theta) = 2$

5. Tuliskan masing-masing persamaan berikut ke dalam koordinat kutub :
   a. x + y = 5
   b. $x^2 + y^2 = 4$
   c. $x^2 + y^2 = 6x$
   d. y = x
   e. x - y = 5
   f. $x^2 + y^2 = 9$
   g. $x^2 + y^2 = 4x$
   h. y = -x

DAFTAR PUSTAKA

Abrasom, J. (2015). *Algebra and Trigonometry*. Texas : OpenStax College.

Ayres, F. (1986). *Trigonometry: Schaum's Series Outline*. New York: McGraw-Hill.

Butler, S. (2002). *Notes from Trigonometry*. Brigham Young University.

Gelfand, I.M,. dan Saul, M. (2001). *Trigonometry*. USA : Birkhäuser Boston MA.

Kardianata, R. (2013). *Trigonometri Dasar*. Bandung : CV. Pustaka Setia.

Kristayulita. (2020). *Trigonometri*. Mataram : Sanabil.

McKeague. C.P., dan Turner, M.D. (2013). *Trigonometry Seventh Edition*. USA: Brooks/Cole.

Nurmeidina, N., dan Djamilah,S. (2019). Pelatihan Tips Dan Trik Trigonometri Mudah Untuk Siswa SMA. *Jurnal Pendidikan dan Pengabdian Masyarakat*. 2(3). 362-365.

Samin. (2014). Menentukan Nilai Perbandingan Trigonometri Dengan Media Sofwer Gambar Autocad. *Jurnal Maju : Jurnal Pendidikan Matematika*. 1(1). 1-17.

Stitz, C, dan Zeager, J. (2013). *College Trigonometry Version* $\lfloor\pi\rfloor$ *Corrected Edition*. Lorain County Community College.

Sullivan, M. (2012). *Algebra and Trigonometry ninth edition*. Boston: Pearson Education.

Sundstrom, T., dan Schliker, S. (2016). *Trigonometry*. Allendaly : Grand Valley State University.

Suryawati. (2017). *Trigonometri*. Banda Aceh : Syiah Kuala University Press.

Syahbana, A. (2015). *Trigonometri Dasar*. Yogyakarta : CV. Budi Utama.

Valentika, N., Aden., Isnurani, dan Rahman, A.R. (2020). *Trigonometri*. Pamulang : Unpam Press.

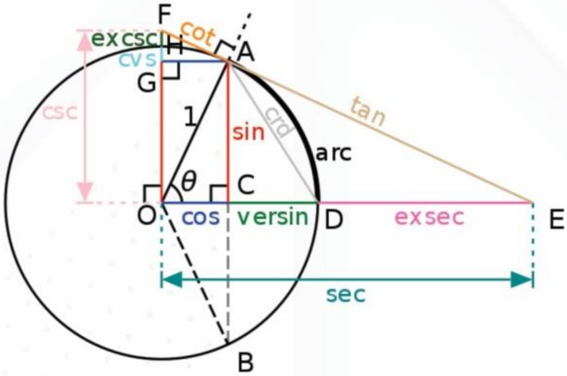
Wibowo, T. (2019). Trigonometri. Yogyakarta : Magnum.

Zen, F. (2018). *Trigonometri*. Bandung : Alfabeta.

PROFIL PENULIS

Nama	:	Tanti Jumaisyaroh Siregar, M.Pd.
Tempat/Tanggal Lahir	:	Medan, 25 November 1988
Alamat	:	Jalan Bunga Raya Gg. Mangga No.1 Asam Kumbang Medan.
Riwayat Pendidikan	:	1. S1 Pendidikan Matematika UNIMED lulus tahun 2011 2. S2 Pendidikan Matematika UNIMED lulus tahun 2014
Pekerjaan	:	Dosen Tetap Prodi Pendidikan Matematika FITK UIN Sumatera Utara Medan.
Alamat kantor	:	Jl. Williem Iskandar Psr V Medan Estate Kecamatan Percut Sei Tuan.

TRIGONOMETRI



Salah satu matakuliah yang wajib dipelajari mahasiswa prodi Pendidikan Matematika adalah trigonometri. Trigonometri adalah sebuah cabang dari ilmu matematika yang berkaitan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen. Trigonometri juga sebagai suatu metode perhitungan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perbandingan-perbandingan pada bangun geometri, khususnya dalam bangun yang berbentuk segitiga. Trigonometri dapat diaplikasikan pada berbagai disiplin ilmu lain seperti bidang teknik, astronomi, geografi, ekonomi, komputer serta disiplin ilmu lainnya. Buku ini membahas mengenai ukuran sudut, perbandingan trigonometri, koordinat kutub, identitas trigonometri, grafik fungsi trigonometri, dalil-dalil segitiga, penerapan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari, rumus-rumus trigonometri, persamaan dan pertidaksamaan trigonometri. Semoga buku ini dapat membantu mahasiswa dalam memahami konsep-konsep yang terdapat pada trigonometri.

Penerbit K-Media
Bantul, Yogyakarta
kmediacorp
kmedia.cv@gmail.com
www.kmedia.co.id

ISBN 978-623-316-979-0