

LAPORAN PENELITIAN

**STUDI METODE PROPAGASI MATRIKS PADA POTENSIAL
PENGHALANG PERSEGI PERIODIK SATU DIMENSI (MODEL KRONIG-
PENNEY)**



**DISUSUN OLEH:
RUSSELL ONG, M.S
NIP. 19930625 202012 1 010**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUMATERA UTARA
MEDAN
2022**

**JUDUL : STUDI METODE PROPAGASI MATRIKS PADA POTENSIAL
PENGHALANG PERSEGI PERIODIK SATU DIMENSI
(MODEL KRONIG-PENNEY)**

**NAMA : Russell Ong
NIP : 19930625 202012 1 010**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
PROGRAM STUDI FISIKA**

RUSSELL ONG

Studi Metode Propagasi Matriks pada Potensial Penghalang Persegi Periodik Satu Dimensi (Model Kronig-Penney)

viii + 50 halaman, 25 gambar, 6 lampiran

ABSTRAK

Model Kronig-Penney merupakan model paling sederhana untuk membuktikan teori pita energi secara teoritis. Model ini membahas perilaku elektron dalam potensial penghalang persegi periodik satu dimensi. Pada penelitian ini, peneliti menurunkan persamaan nilai eigen dari model tersebut menggunakan metode propagasi matriks dengan mengikutsertakan konsep massa efektif elektron. Selain itu, peneliti pula melakukan studi keadaan dimana potensial penghalang merupakan fungsi delta. Persamaan-persamaan yang telah diperoleh akan diplot menggunakan perangkat lunak MATLAB R2009a. Untuk mengamati keberadaan celah energi dengan jelas, peneliti mengatur besar potensial penghalang potensial penghalang $V_0 = 571,5 \text{ eV}$, lebar sumur $a = 2 \text{ \AA}$, lebar penghalang $b = 0,025 \text{ \AA}$, massa elektron di daerah penhalang $m_b = 0,09m$, massa elektron di daerah sumur $m_w = 0,07m$, rentang vektor gelombang di daerah sumur k_1 divariasikan dari $-\frac{6\pi}{a}$ sampai $\frac{6\pi}{a}$ dan vektor gelombang bloch k_2 divariasikan dari 0 sampai $\frac{3\pi}{(a+b)}$. Kemudian, penelitian dibatasi hanya untuk energi elektron yang lebih lemah dari potensial penghalang. Pada akhirnya, peneliti memperoleh persamaan nilai eigen yang sama persis dengan referensi yang ada. Persamaan nilai eigen tersebut lalu diplot untuk dibandingkan dengan persamaan yang tanpa memperhitungkan konsep massa efektif elektron. Hasil plot menunjukkan perbedaan yang tidak terlalu jauh. Keduanya sama-sama meramalkan kebenaran teori pita energi.

Kata kunci : Metode propagasi matriks, model Kronig-Penney, MATLAB, persamaan nilai eigen

**SCIENCE AND TECHNOLOGY FACULTY
DEPARTMENT OF PHYSICS**

RUSSELL ONG

The Study of Propagation Matrix Method on One-Dimensional Periodic Square Barrier Potential (Kronig-Penney Model)

viii + 50 pages, 25 figures, 6 attachments

ABSTRACT

The Kronig-Penney model is the simplest model to prove theoretically the energy band theory. This model discusses the behavior of electrons in a one-dimensional periodic rectangular barrier potential. In this study, the researchers derived the eigenvalue equation from the model using the matrix propagation method by including the concept of effective mass of electrons. In addition, the researchers also conducted a study of the situation where the barrier potential is a delta function. The equations that have been obtained will be plotted using the MATLAB R2009a software. To clearly observe the presence of an energy gap, the researchers set the potential barrier potential of the barrier $V_0 = 571.5$ eV, the width of the well = 2, the width of the barrier $b = 0.025\text{\AA}$, the mass of electrons in the barrier region $m_b = 0.009m$, the mass of electrons in the well area $m_w = 0.07m$, the range of wave vector in well area k_1 is varied from $-\frac{6\pi}{a}$ to $\frac{6\pi}{a}$ and Bloch wave vector is varied from 0 to $\frac{3\pi}{(a+b)}$. Then, the study was limited only to electron energies which were weaker than the barrier potential. In the end, the researcher obtained the eigenvalue equation that exactly matched the existing reference. The eigenvalue equations are then plotted to compare with equations that do not take into account the concept of effective mass of electrons. The results of the plot show that the difference is not too far. Both of them predicted the truth of the energy band theory.

Keywords : Propagation matrix method, Kronig-Penney model, MATLAB, eigen value equation

SURAT REKOMENDASI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa penelitian saudara:

Nama : Russell Ong, M.S
NIP : 19930625 202012 1 010
Tempat/Tanggal Lahir: Medan, 25 Juni 1993
Jenis Kelamin : Laki-laki
Agama : Islam
Pangkat/Gol : Penata Muda Tk.I (III/b)
Unit Kerja : Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sumatera Utara Medan
Judul Penelitian : Studi Metode Propagasi Matriks pada Potensial Penghalang Persegi Periodik Satu Dimensi (Model Kronig-Penney)

Telah memenuhi syarat sebagai suatu karya ilmiah, setelah membaca dan memberikan masukan serta saran-saran terlebih dahulu.

Demikian surat rekomendasi ini diberikan untuk dapat dipergunakan seperlunya.

Medan, 19 September 2022

Konsultan,



Dr. Abdul Halim Daulay, S.T. ,M.Si.

NIP. 19811106 200501 1 003

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji bagi Allah Azza wa Jalla atas segala rahmat, nikmat, anugerah, dan karunianya sehingga saya dapat menyelesaikan laporan penelitian yang berjudul “Studi Metode Propagasi Matriks pada Potensial Penghalang Persegi Periodik Satu Dimensi (Model Kronig-Penney)”. Semoga shalawat dan salam selalu senantiasa tercurahkan bagi Junjungan Baginda Nabi Muhammad Shalallahu'alaihi wa salam.

Laporan penelitian ini merupakan salah satu syarat pengangkatan pertama sebagai Asisten Ahli. Dalam proses penyusunannya, semua itu tidak terlepas dari bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, peneliti mengucapkan terima kasih kepada Bapak Wakil Dekan I Fakultas Sains dan Teknologi selaku konsultan yang memberi masukan-masukan positif untuk membuat laporan ini menjadi lebih baik. Penulis juga menyadari bahwa laporan penelitian ini masih kurang sempurna sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi kesempurnaan laporan penelitian ini. Akhirnya, Peneliti juga berharap semoga laporan penelitian ini dapat berguna bagi pembaca, peneliti dan pihak-pihak yang membutuhkan.

Medan, 19 September 2022
Peneliti,



Russell Ong, M.S
NIP. 19930625 202012 1 010

DAFTAR ISI

JUDUL.....	i
ABSTRAK.....	ii
ABSTRACT.....	iii
SURAT REKOMENDASI	iv
KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI.....	vi
DAFTAR GAMBAR	viii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	6
C. Batasan Masalah	6
D. Tujuan Penelitian	6
E. Manfaat Penelitian	7
Bab II TINJAUAN PUSTAKA	8
A. Dualisme Gelombang Partikel	8
B. Persamaan Schrodinger	12
C. Metode Propagasi Matriks	13
D. Sel Primitif Wigner-Seitz.....	16
E. Zona Brillouin	17
F. Difraksi Sinar-X.....	18
G. Teori Pita Zat Padat.....	21
H. Teorema Bloch	22
I. Model Kronig-Penney	23
J. Penerapan Propagasi Matriks pada Potensial Periodik.....	27
K. Massa Efektif Elektron.....	29
Bab III METODOLOGI PENELITIAN	31
A. Jenis dan Desain Penelitian	31
B. Lokasi dan Waktu Penelitian	31
C. Prosedur Penelitian	31
D. Diagram Alir Penelitian	32
Bab IV HASIL DAN PEMBAHASAN	34
A. Penurunan Persamaan Nilai Eigen.....	34
1. Tanpa Memperhitungkan Konsep Massa Efektif Elektron.....	34
2. Memperhitungkan Konsep Massa Efektif Elektron.....	35
B. Visualisasi Persamaan Nilai Eigen	37
1. Tanpa Memperhitungkan Konsep Massa Efektif Elektron.....	37
2. Memperhitungkan Konsep Massa Efektif Elektron.....	38
Bab V KESIMPULAN DAN SARAN	40
A. Kesimpulan	40

B. Saran	40
DAFTAR PUSTAKA	41
LAMPIRAN.....	44

DAFTAR GAMBAR

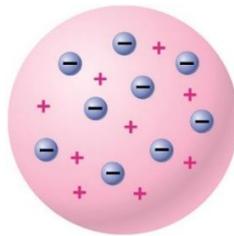
Gambar 1.1 Model atom roti kimis.....	1
Gambar 1.2 Model atom tata surya Rutherford	1
Gambar 1.3 Model atom hydrogen Menurut Bohr	1
Gambar 1.4 Perkembangan model atom dari waktu ke waktu: model atom Thomson, model atom Rutherford, model atom Bohr, dan model atom Schrodinger2	
Gambar 1.5 Model elektron bebas Drude	3
Gambar 2.1 Grafik $u(\lambda)$ versus λ pada berbagai keadaan temperature	9
Gambar 2.2 Desain eksperimen Davisson-Germer.....	11
Gambar 2.3 Skema Percobaan Clauss Jonsson.....	12
Gambar 2.4 Lintasan gelombang dari elektron.....	12
Gambar 2.5 Potensial penghalang ganda simetris	14
Gambar 2.6 Sketsa dari deretan potensial tangga satu dimensi	15
Gambar 2.7 Langkah-langkah menggambarkan sel primitif Wigner-Seitz dua dimensi	17
Gambar 2.8 Atas: kisi kristal di ruang real; Bawah: kisi kristal di ruang-k.	18
Gambar 2.9 Skema peralatan penghasil sinar katoda	19
Gambar 2.10 Skema peralatan penghasil sinar-X.....	19
Gambar 2.11 Pemantulan berkas sinar-X	20
Gambar 2.12 Bagan pita energi untuk logam, semikonduktor, dan insulator.....	21
Gambar 2.13 Energi potensial (garis merah) yang dihasilkan oleh ion-ion positif pada kisi satu dimensi	22
Gambar 2.14 Potensial penghalang periodik model Kronig-Penney.....	24
Gambar 2.15 Grafik $\left(\frac{P}{k_1 a}\right) \sin(k_1 a) + \cos(k_1 a)$ sebagai fungsi $k_1 a$ untuk $P = 3\pi/2$	26
Gambar 2.16 Susunan periodik dari potensial penghalang fungsi delta.....	27
Gambar 4.1 Grafik persamaan nilai eigen ketika $V_0 = 571,5 \text{ eV}$, $a = 2 \text{ \AA}$, dan $b =$ $0,025 \text{ \AA}$	37
Gambar 4.2 Grafik penyatuan persamaan nilai eigen pada dua kondisi.....	38
Gambar 4.3 Grafik persamaan nilai eigen yang telah diperhitungkan konsep massa efektif elektron.....	39
Gambar 4.5 Grafik persamaan nilai eigen pada limit fungsi delta	39

BAB I

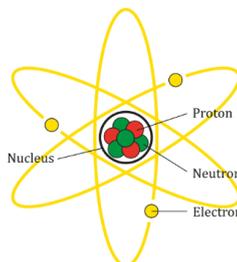
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pada tahun 1897, J.J. Thomson menemukan partikel elektron. Partikel ini bermuatan negatif yang besar muatannya ditemukan oleh Milikan pada tahun 1909. J.J. Thomson kemudian mengenalkan model atom yang diusulkannya, yakni model atom roti kismis. Model atom ini diperlihatkan dalam Gambar 1.1. dimana kismis-kismis diibaratkan sebagai elektron-elektron. Akan tetapi, model atom tersebut memiliki beberapa kelemahan sehingga model tersebut terpaksa digantikan oleh model atom Rutherford. Dalam Gambar 1.2 diperlihatkan model atom Rutherford yang juga dikenal sebagai model atom tata surya. Sejumlah kelemahan memaksa model atom ini harus direvisi juga. Seorang fisikawan bernama Niels Bohr mencetuskan model atom terbaru para tahun 1913. Model atom pengganti ini disebut sebagai model atom Bohr yang mungkin paling mudah diterangkan kepada orang awam. Sebagai contoh, Gambar 1.3 memperlihatkan model atom Bohr untuk atom hidrogen. Model atom Bohr menyatakan bahwa setiap atom mengandung inti atom yang dikelilingi oleh elektron-elektronnya. Elektron-elektron ini dibedakan menjadi dua macam, yaitu elektron terikat pada ikatan atom-atom dan elektron pada kulit terluar (elektron valensi)¹.



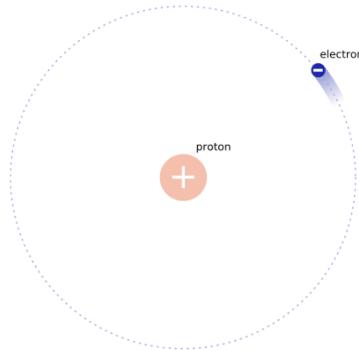
Gambar 1.1. Model atom roti kismis. Elektron diibaratkan sebagai kismis, sedangkan materi bermuatan positif diibaratkan sebagai roti²



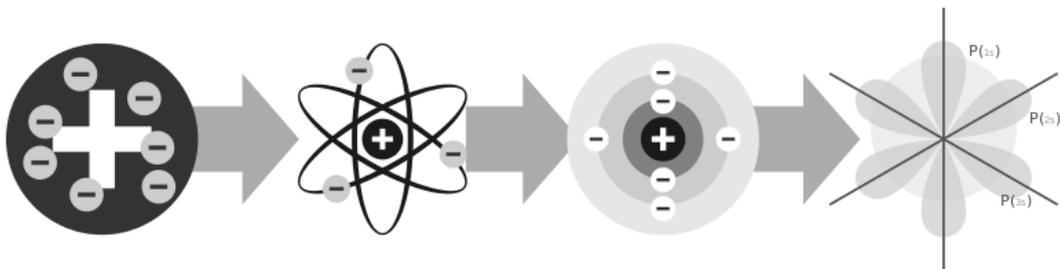
¹ Unggul Sudarmo, *Kimia 1 Untuk SMA/MA Kelas X*, ed. Bima Prasetya and Supriyana (Jakarta: Erlangga, 2013).

² Nimpasha, "Первая Модель Атома Пудинг с Изюмом," www.commonswiki.org, 2017, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Первая_модель_атома_Пудинг_с_изюмом.jpg.

Gambar 1.2 Model atom tata surya Rutherford³



Gambar 1.3 Model atom hidrogen menurut Bohr⁴



Gambar 1.4 Perkembangan model atom dari waktu ke waktu: model atom Thomson, model atom Rutherford, model atom Bohr, dan model atom Schrodinger. Model atom Schrodinger merupakan model atom terakhir yang paling sulit untuk dicerna oleh orang awam karena memerlukan samudra matematika murni⁵.

Melalui konsep elektron valensi, seorang fisikawan bernama Paul Drude membuat suatu teori pada tahun 1900 tentang pergerakan sekumpulan elektron dalam suatu logam yang dikenal sebagai teori elektron bebas atau model elektron bebas Drude. Beliau mempostulatkan bahwa logam terdiri pusat-pusat (*cores*) ion positif dengan elektron valensi yang bebas bergerak ke arah mana saja di antara pusat-pusat ion tersebut (lihat Gambar 1.5). Para elektron valensi bebas bergerak secara acak dalam logam; kecepatan elektron yang menumbuk pusat-pusat ion akan berubah arah gerakannya. Pusat-pusat ion yang tertumbuk oleh elektron valensi tidak terpengaruh apa-apa karena massanya jauh lebih besar dibandingkan massa elektron. Batas terjauh pergerakan elektron-elektron valensi adalah di dalam logam itu sendiri. Dengan kata lain, tidak ada satupun elektron valensi yang bisa keluar dari logam. Elektron valensi sering disebut sebagai elektron konduksi karena pergerakan elektron valensi menyebabkan terjadinya hantaran listrik pada logam.

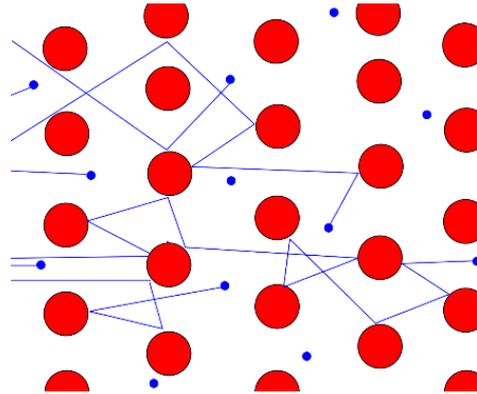
Kelakuan elektron-elektron valensi yang bergerak bebas dalam logam beranalogi dengan kelakuan atom-atom atau molekul-molekul gas ideal dalam termodinamika sehingga kumpulan elektron valensi ini sering disebut sebagai gas

³ AG Caesar, "Atom Diagram," www.commonswikimedia.org, 2018, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atom_Diagram.svg.

⁴ Snaily, "Hydrogen2," www.commonswikimedia.org, 2006, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hydrogen2.svg>.

⁵ Ville Takanen, "Evolution of Atomic Models Infographic," www.commonswikimedia.org, 2013, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Evolution_of_atomic_models_infographic.svg.

elektron bebas. Sebagaimana diketahui bahwa suku energi potensial tidak dilibatkan dalam pembahasan model gas ideal, teori elektron bebas juga sedemikian rupa sehingga energi potensial yang dirasakan oleh elektron konduksi adalah nol. Artinya, teori ini mengabaikan gaya tolak-menolak antara elektron dan mengabaikan interaksi suatu elektron konduksi dengan inti atom. Namun demikian, terdapat beberapa perbedaan dalam beberapa hal, antara lain: konsentrasi elektron gas bebas dalam suatu logam jauh lebih besar daripada konsentrasi atom/molekul dalam gas biasa dan gas elektron bebas bermuatan negatif, sedangkan atom-atom atau molekul-molekul gas ideal adalah netral⁶.



Gambar 1.5 Model elektron bebas Drude. Elektron (bulatan biru) bebas bergerak, sedangkan inti ion positif ditunjukkan oleh bulatan merah⁷

Teori elektron bebas diakui kesuksesannya dalam menjelaskan sifat-sifat termal dan kelistrikan serta sifat mekanis kristal. Salah satunya adalah mampu menjelaskan hubungan antara konduktivitas listrik dengan konduktivitas kalor pada zat padat yang diberikan oleh persamaan:

$$L \equiv \frac{K_e}{\sigma T} = 3 \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 \quad (1.1)$$

dimana K_e adalah konduktivitas panas, L adalah bilangan Lorentz, σ adalah konduktivitas listrik, k_B adalah konstanta Boltzmann, e adalah muatan listrik, dan T adalah suhu. Hubungan yang diperoleh ternyata sesuai dengan persamaan hukum Franz-Weidemann. Keberhasilan ini tidak luput dari postulat H. A. Lorentz yang menyatakan bahwa gas elektron bebas mematuhi prinsip statistik Maxwell-Boltzmann. Jadi, kedua postulat ini sering dipadukan dan disebut teori Drude-Lorentz. Selain itu, teori elektron bebas juga berhasil membuktikan keabsahan hukum Ohm dan menentukan nilai koefisien Hall secara teoritis⁸.

Walaupun teori elektron bebas berhasil dalam menjelaskan sifat-sifat fisis logam, penyederhanaan yang terlalu berlebihan seperti mengabaikan nilai energi potensial ternyata mengakibatkan munculnya sejumlah kekurangan. Beberapa pertanyaan yang tidak mampu dijawab oleh teori elektron bebas, antara lain:

- a) Mengapa nilai koefisien Hall untuk logam tertentu ada yang bernilai positif?

⁶ Yosaphat Sumardi, Kardiawarman, and Waloejo Loeksmanto, *Fisika Zat Padat*, 1st ed. (Jakarta: Universitas Terbuka, 2016).

⁷ Rafaelgarcia, "Electrona in Crystallo Fluentia," [www.commons.wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electrona_in_crystallo_fluentia.svg), 2007, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electrona_in_crystallo_fluentia.svg.

⁸ Abdul Hamid, *Pendahuluan Fisika Zat Padat*, ed. Abdul Hamid (Banda Aceh: Syiah Kuala University Press, 2019), <https://books.google.co.id/books?id=KvAvEAAAQBAJ>.

- b) Mengapa prediksi lintasan bebas rata-rata tidak sesuai dengan eksperimen?
- c) Apa penyebab nilai konduktivitas listrik tidak selalu linear terhadap nilai konsentrasi elektron?⁹

Selain tiga poin di atas, satu poin penting yang tidak mampu dijawab teori elektron bebas adalah mengapa beberapa material dapat bersifat sebagai konduktor listrik yang baik, sedangkan beberapa lainnya, menjadi konduktor listrik yang buruk (isolator), dan mengapa beberapa material, yang disebut semikonduktor, memiliki sifat-sifat penghantar yang berada di antara kedua material tersebut¹⁰.

Teori yang lebih baik, disebut teori pita energi, mampu menjawab mengapa suatu material dapat bersifat sebagai konduktor, isolator, dan semikonduktor. Terdapat dua cara untuk menerangkan asal dari pita energi. Cara pertama ialah melihat apa yang terjadi pada tingkat energi atom terisolasi ketika atom-atom itu didekatkan untuk membentuk zat padat. Cara kedua ialah melalui hamburan bragg satu dimensi dimana satu-satunya hamburan yang mungkin adalah pantulan 180° . Kedua cara tersebut berhasil menunjukkan kehadiran adanya celah energi. Nilai celah energi inilah yang berperan utama dalam menentukan apakah suatu material adalah konduktor, semikonduktor, atau isolator¹¹. Celah energi sangat penting dalam fisika terapan seperti menentukan semikonduktor apa yang paling mungkin menghasilkan efisiensi terbesar pada sel surya pewarna tersensitasi.

Ramalan teoritis bahwa celah energi benar-benar ada dapat dilakukan dengan pendekatan yang eksak. Pendekatan dilakukan pada energi potensial yang ditimbulkan oleh ion positif terhadap elektron konduksi. Pada teori elektron bebas, elektron konduksi dianggap tidak mengalami energi potensial sehingga elektron konduksi bebas bergerak dalam kristal dan hanya dibatasi oleh permukaan kristal itu sendiri. Penyederhaan ini dinilai terlalu berlebihan, padahal energi potensial adalah suatu keniscayaan yang tidak dapat diabaikan. Pada faktanya, Medan Coulomb menunjukkan bahwa besar energi potensial yang dirasakan oleh elektron konduksi bergantung terhadap fungsi posisi elektron itu sendiri. Artinya, nilai energi ini bergantung pada posisi elektron tersebut di dalam kristal diukur relatif terhadap inti atom. Di samping itu, energi potensial itu juga mungkin timbul akibat adanya elektron-elektron konduksi lainnya dalam kristal itu sehingga keadaan sebenarnya sangat kompleks. Karena kita hanya tertarik untuk memperlihatkan bagaimana pita-pita energi muncul, kita akan melakukan dua penyederhaan yang logis. Pertama, kita hanya akan meninjau persoalan satu dimensi. Kedua, kita menggantikan potensial Coulomb dengan potensial sumur persegi. Penggantian ini membantu kita untuk menyederhanakan perhitungan tanpa mengobarkan efek fisiknya. penyederhaan ini akhirnya menghasilkan suatu deretan sumur potensial persegi yang periodik¹². Penyelesaian persamaan Schrodinger untuk potensial periodik ini diselesaikan oleh R.

⁹ Asan Damanik, *Pengantar Fisika Zat Padat*, ed. Yoseph Yapi Taum (Yogyakarta: Sanata Dharma University Press, 2016), <https://books.google.co.id/books?id=V97SDwAAQBAJ>.

¹⁰ Ronald Gautreau and William Savin, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Modern Physics*, ed. H. Wibi Hardani, trans. Soni Astranto, 2nd ed., Schaum's Outline Series (Jakarta: Erlangga, 2006), <https://books.google.co.id/books?id=7mxvGduPeagC>.

¹¹ Arthur Beiser, *Konsep Fisika Modern*, ed. Carol Manik, trans. The Houw Liong, 3rd ed. (Jakarta: Erlangga, 1986).

¹² Kenneth Krane, *Fisika Modern*, trans. Hans J. Wospakrik (Jakarta: Universitas Indonesia, 2014).

de L. Kronig dan G. Penney pada tahun 1931 sehingga studi model potensial periodik yang pada prinsipnya berbentuk persegi dikenal sebagai model Kronig-Penney¹³

Model Kronig-Penney dapat memberikan kebenaran pita energi melalui pemikiran logika bahwa energi partikel selalu bersifat diskrit. Kita ambil satu contoh kasus—persoalan satu dimensi—partikel dalam sumur potensial tak berhingga. Pemecahan persamaan Schrodinger menyimpulkan bahwa hanya nilai-nilai diskrit sajalah yang diperkenankan. Pada kasus ini, akan kita dapati bahwa hanya pita-pita energi tertentu sajalah yang diperkenankan.

Pembahasan model Kronig-Penney dapat dibaca pada berbagai buku teks standar fisika zat padat¹⁴. Seseorang akan mendapati suatu persamaan nilai eigen sebagai berikut.

$$\cos(kL) = \cosh(k_2 b) \cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1 k_2} \sinh(k_2 b) \sin(k_1 a) \quad (1.2)$$

di mana k , k_1 , dan k_2 adalah vektor gelombang, b adalah lebar potensial penghalang, a adalah jarak antar penghalang, dan $L = a + b$ adalah periode dari potensial periodik. Perbedaan dari k_1 , k_2 , dan k_3 akan diterangkan lebih jelas di bab II. Persamaan (1.2) inilah yang membuktikan kebenaran pita energi. Namun, kita akan menjumpai proses yang sangat sulit untuk mendapatkan persamaan tersebut karena kita akan berhadapan dengan determinan matriks ordo 4 x 4. Determinan matriks diatas ordo 2 x 2 dapat diselesaikan dengan metode Sarrus atau metode minor-kofaktor. Kita boleh menguji metode Sarrus atau metode minor-kofaktor untuk menentukan determinan matriks ordo 4 x 4 yang seluruh elemen matriks berupa angka. Siapa pun pasti akan mengeluh bahwa proses penyelesaiannya sangat menjenuhkan, apalagi pada model Kronig-Penney yang seluruh elemen matriksnya berupa variabel. Untunglah seorang fisikawan jenius bernama Anthony J. Levi memperkenalkan metode lain yang lebih gampang, metode propagasi matriks, untuk memperoleh persamaan (1.2)¹⁵.

Persamaan nilai eigen di atas ternyata memiliki satu kekurangan karena tidak mencakup konsep massa efektif elektron. Ketika potensial periodik bernilai nol, kita mempunyai massa elektron bebas dengan massa m_0 . Tetapi, ketika potensial periodik tidak nol, elektron akan bergerak dengan massa yang berbeda yang dikenal sebagai massa efektif elektron. Massa efektif muncul ketika elektron mengalami gaya atau percepatan. Maksud elektron mengalami gaya atau percepatan akan dibahas dengan detail pada bab II. Persamaan nilai eigen yang sudah melibatkan konsep massa efektif elektron dapat dibaca pada buku teks fisika tingkat atas¹⁶.

Pada penelitian ini, penulis akan menurunkan persamaan (2.1) yang lengkap dengan metode propagasi matriks. Kemudian, penulis akan memplot persamaan nilai eigen menggunakan perangkat lunak MATLAB versi R2009a. Penulis pula melakukan studi terhadap potensial periodik yang kekuatannya dihampiri mendekati tak berhingga, sedangkan lebar potensialnya mendekati nol. Setiap hasil plot baik yang

¹³ Omar Manasreh, *Introduction to Nanomaterials and Devices*, 1st ed. (Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2012), <https://books.google.co.id/books?id=h5zJgIKd2GkC>.

¹⁴ Damanik, *Pengantar Fisika Zat Padat*.

¹⁵ A F J Levi, *Applied Quantum Mechanics* (Cambridge: Cambridge University Press, 2003), <https://books.google.co.id/books?id=40rRzNbuhpAC>.

¹⁶ Thomas P. Pearsall, *Quantum Photonics*, Graduate Texts in Physics (Cham: Springer International Publishing, 2017), <https://books.google.co.id/books?id=XmclDwAAQBAJ>.

melibatkan konsep massa efektif elektron ataupun yang tidak melibatkan konsep massa efektif elektron akan selalu dibandingkan dengan limit fungsi delta untuk diamati perbedaan dan persamaannya. Perbedaan mungkin akan terdapat pada posisi kurva ketika visualisasi dijalankan pada keadaan yang sama. Variabel-variabel komputasi, yaitu besar potensial, massa efektif elektron di sumur atau di penghalang, lebar penghalang, lebar sumur, dan sebagainya akan diperlihatkan lebih lanjut pada bab III.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, dapat dirumuskan permasalahan yaitu:

1. Bagaimana bentuk matriks *step-up* dan matriks *step-down* untuk elektron yang bergerak dalam sistem potensial penghalang persegi periodik (model Kronig-Penney)?
2. Apa perubahan yang ada pada grafik persamaan nilai eigen ketika konsep massa efektif elektron diperhitungkan?
3. Apa sajakah perbedaan yang terdapat pada grafik persamaan nilai eigen antara yang normal dengan yang telah dikenakan pendekatan fungsi delta?

C. Batasan Masalah

Untuk mendapatkan hasil penelitian dari permasalahan yang ditentukan, maka ada pembatasan masalah penelitian, yaitu sebagai berikut:

1. Energi elektron selalu lebih kecil dibandingkan dengan besar potensial penghalang.
2. Kekuatan potensial penghalang $V_0 = 571,5 \text{ eV}$, lebar sumur $a = 2 \text{ \AA}$, dan lebar penghalang $b = 0,025 \text{ \AA}$.
3. Massa efektif elektron diambil secara acak, yaitu mendekati massa efektif elektron di dalam kristal semikonduktor heterostruktur GaAs/Al_{0.3}Ga_{0.7}As.
4. Persamaan yang divisualisasikan adalah persamaan nilai eigen dengan rentang vektor gelombang di daerah sumur adalah $-\frac{6\pi}{a} - \frac{6\pi}{a}$ dan vektor gelombang bloch adalah $0 - \frac{3\pi}{(a+b)}$.

D. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk menurunkan persamaan nilai eigen untuk kasus perilaku elektron dalam potensial periodik model Kronig-Penney yang sudah memperhitungkan konsep massa efektif elektron menggunakan metode propagasi matriks.
2. Untuk mengamati pengaruh variabel massa elektron berdasarkan plot grafik persamaan nilai eigen

E. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini, yaitu:

1. Bagi peneliti, dapat menerapkan teori yang sudah ada ke dalam permasalahan yang sedikit lebih kompleks.
2. Bagi lembaga, dapat dijadikan referensi dalam kegiatan belajar mengajar di perkuliahan mengenai model Kronig-Penney

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Dualisme Gelombang Partikel

Pada masa lampau, terdapat dua pandangan mengenai sifat cahaya. Pandangan pertama yang dikenalkan oleh Newton, menganggap bahwa cahaya bersifat sebagai partikel. Pandangan kedua yang dipelopori oleh Huygen, menganggap cahaya sebagai gelombang. Sebagaimana kita ketahui, ciri utama gelombang ditunjukkan oleh panjang gelombangnya, sedangkan ciri utama partikel ditunjukkan oleh momentumnya. Perbedaan paling utama antara keduanya adalah gelombang menempati posisi ruang yang relatif besar, sedangkan partikel terlokalisasi.

Dalam fisika klasik, pandangan pertama tidak memperoleh dukungan sama sekali sehingga pandangan ini ditinggalkan oleh para ilmuwan. Hal ini karena semua eksperimen yang dilakukan untuk menentukan sifat cahaya selalu mendukung pandangan nomor dua. Beberapa eksperimen tersebut, antara lain: interferensi cahaya melalui celah ganda oleh Thomas Young, difraksi cahaya melalui celah tunggal oleh Fraunhofer, dan penemuan gelombang elektromagnetik oleh Hertz berdasarkan prediksi Maxwell.

Pandangan Newton tentang cahaya mulai dibangkitkan kembali pada awal abad ke-20. Perkembangan alat-alat eksperimen baru terus memicu para ilmuwan untuk terus meneliti. Satu alat baru pada masa akhir abad ke-19, spektrometer, akhirnya meruntuhkan pandangan fisikawan klasik. Alat itu memungkinkan fisikawan untuk memperoleh grafik spektrum radiasi dari sebuah benda radiasi. Ketika fisikawan mencoba mencari grafik spektrum radiasi untuk benda hitam. Kurva yang diperoleh ternyata sangat membingungkan karena tidak ada satu pun teori fisika klasik yang mampu mengungkapkannya. Wilhelm Wien, penemu hukum pergeseran Wien, menyerah pada akhirnya; Lord Rayleigh dan sir James Jeans juga mengalami nasib yang sama. Namun demikian, kita perlu apresiasi mereka karena persamaan hukum radiasi yang mereka turunkan memang cocok untuk rentang panjang gelombang tertentu. Seiring berjalannya waktu, grafik spektrum radiasi benda hitam yang gagal dijelaskan oleh hukum radiasi Rayleigh-Jeans dan hukum radiasi Wien ternyata berhasil diterangkan oleh hukum Radiasi Planck. Hukum ini diturunkan berdasarkan dua anggapan Planck mengenai osilator-osilator dalam dinding rongga benda hitam, yaitu

1. Radiasi yang dipancarkan oleh setiap osilator tidak kontinu, melainkan dalam paket-paket energi diskret, yang disebut kuantum (jamak disebut kuantum dan belakangan disebut foton). Besar energi tiap foton adalah $E = hf$ ¹⁷.
2. Sebaran energi osilator mengikuti distribusi Boltzmann, yaitu bahwa kemungkinan atau probabilitas suatu osilator mempunyai energi antara ε dan $\varepsilon + \Delta\varepsilon$.

¹⁷ Marthen Kanginan, *Fisika 3 Untuk SMA/MA Kelas XII*, ed. Supriyana, Syarifuddin, and Fachrizal Rian Pratama (Jakarta: Erlangga, 2013).

$$P(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}{k_B T} \Delta\varepsilon \quad (2.1)$$

Keterangan:

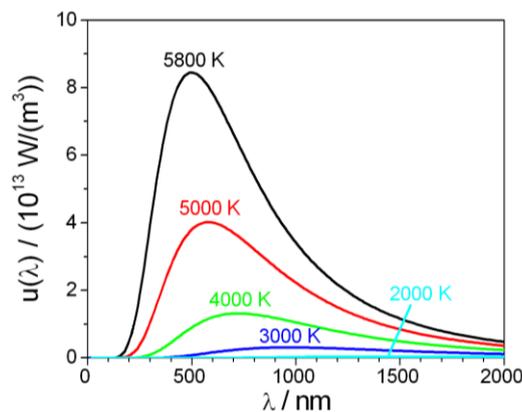
k_B = tetapan Boltzmann

T = Suhu dinding

Berdasarkan anggapan tersebut, kemudian penurunan matematiks yang rumit, Planck berhasil menyatukan hukum radiasi Wien dan hukum Radiasi Rayleigh-Jeans. Beliau menyatakan bahwa hukum radiasinya cocok untuk seluruh panjang gelombang. Hukum radiasi tersebut dinyatakan sebagai berikut.

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \quad (2.2)$$

dengan $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js adalah tetapan Planck, $c = 3,0 \times 10^8$ m/s adalah kecepatan cahaya, $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K adalah tetapan Boltzmann, dan T adalah suhu mutlak benda hitam¹⁸. Plot persamaan (2.2) ditampilkan pada Gambar 2.1. Persamaan ini diumumkan oleh Planck di Universitas Berlin pada 19 Oktober 1900. Seorang peserta seminar, Heinrich Rubens, membandingkan hasil eksperimennya dengan rumus Planck ini. Alangkah terkejutnya beliau bahwa ia menemukan kecocokan yang sempurna¹⁹.



Gambar 2.1 Grafik $u(\lambda)$ versus λ pada berbagai keadaan temperatur²⁰

Fisika klasik menyatakan bahwa radiasi yang dipancarkan oleh osilator-osilator adalah kontinu dan mereka gagal menjelaskan mengapa spektrum radiasi bisa sedemikian rupa. Planck malah mengemukakan postulat yang bertentangan terhadap fisika klasik, dengan menyatakan bahwa energi yang dipancarkan radiasi benda hitam adalah diskrit atau terkuantisasi. Pernyataan radikal ini menandai lahirnya teori kuantum. Teori fisika setelah tahun 1900 (diawali oleh gagasan Planck) disebut fisika modern.

Pandangan Newton ternyata mendapatkan dukungan secara efek domino setelah Max Planck menyampaikan gagasannya. Penjelasan peristiwa efek fotolistrik oleh Albert Einstein, penjelasan teoritis terkait adanya puncak kurva sinar-X yang

¹⁸ Ridwan Abdullah Sani and Muhammad Kadri, *Fisika Kuantum*, ed. Hastuti (Jakarta: Bumi Aksara, 2017).

¹⁹ Kanginan, *Fisika 3 Untuk SMA/MA Kelas XII*.

²⁰ Thomas-sk, "Planck Law Radiation," www.commonswikimedia.org, 2009, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Planck_law_radiation.PNG.

menjulang melalui teori kuantum Einstein, dan usulan Compton terhadap percobaan Efek Compton adalah tiga poin pendukung setelahnya. Dengan demikian, baik pandangan Huygen maupun pandangan Newton telah sama-sama memiliki landasan eksperimen yang mantap. Perlu diketahui bahwa meskipun cahaya memiliki sifat dualisme, tetapi hanya satu karakteristik yang bisa muncul pada satu waktu²¹.

Dualisme cahaya kemudian mengilhami Louis de Broglie untuk berpikir sebaliknya sebagai berikut.

“Jika cahaya dapat berperilaku sebagai partikel; apakah ada kemungkinan bahwa sebuah partikel juga dapat memiliki gejala yang dapat diterangkan dengan menganggap bahwa partikel itu berperilaku gelombang?”²²

De Broglie mencoba menerapkan paham dualisme untuk partikel, seperti elektron, proton, neutron, dan sebagainya. Beliau kemudian mengajukan postulat bahwa partikel apapun pasti memiliki sifat gelombang. Rumus untuk mencari panjang gelombang dinyatakan dalam persamaan:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2.3)$$

dengan λ adalah panjang gelombang de Broglie atau panjang gelombang partikel yang bergerak. Jika diperhatikan dengan saksama, rumus di atas tidak berlaku untuk sistem klasik karena kecilnya panjang gelombang yang diperoleh.

Pemikiran ini kemudian dijadikan sebagai penelitian untuk disertasi doktornya di Universitas Sorbonne. Isi disertasi pada awalnya memusingkan para panitia penguji pada tahun 1924. Oleh sebab itu, panitia penguji berkomunikasi dengan Einstein untuk mencari solusi. Einstein kemudian berhasil meyakinkan para penguji bahwa penelitian de Broglie akan menyingkap rahasia besar di masa mendatang. Para penguji akhirnya meluluskan de Broglie sehingga mendapatkan gelar Ph.D. Hanya dalam waktu tiga tahun, perkataan yang pernah dilontarkan oleh de Broglie kepada seorang penguji akhirnya menjadi kenyataan. De Broglie berspekulasi bahwa gejala gelombang mungkin bisa terlihat dalam percobaan seperti difraksi sinar-X oleh kristal, hanya saja bahan yang ditembakkan ke kristal adalah seberkas elektron²³.

C. J. Davisson dan L. H. Germer merupakan orang pertama yang melaksanakan perkiraan de Broglie. Eksperimen dilakukan dengan menembakkan elektron-elektron berenergi rendah (54 eV) pada kristal nikel dalam suatu ruang hampa. Apa yang tampak pada plat fotografi, ternyata sangat mengejutkan. Plat memperlihatkan pola difraksi, padahal gejala difraksi merupakan gejala yang hanya dimiliki oleh gelombang. Selain itu, perhitungan panjang gelombang melalui hukum Bragg ternyata bersesuaian dengan nilai yang diperoleh melalui persamaan gelombang de Broglie. Besaran fisika yang diketahui dalam percobaan aslinya adalah sudut hamburan senilai 65° dan jarak antar atom sebesar $0,91 \text{ \AA}$. jika diambil $n = 1$, lalu masukkan semua informasi yang diketahui ke rumus Bragg akan diperoleh:

$$\lambda = 2d \sin \theta = 2(0,91 \text{ \AA}) \sin 65^\circ = 1,65 \text{ \AA}$$

Sementara itu, perhitungan dengan rumus panjang gelombang de Broglie memberikan

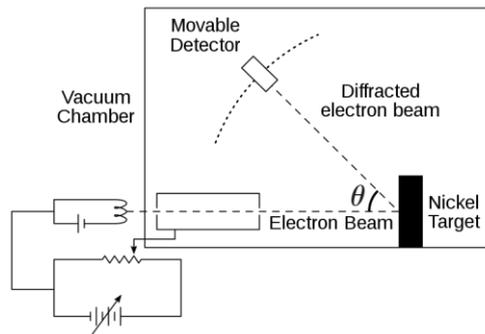
²¹ Kanginan, *Fisika 3 Untuk SMA/MA Kelas XII*.

²² Sani and Kadri, *Fisika Kuantum*.

²³ Okky Fajar Tri Maryana and Yuant Tiandho, *Fisika Kuantum: Sejarah Dan Kisah Inspiratif Para Tokohnya* (Bandung: Yrama Widya, 2019).

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{6,65 \times 10^{-34} Js}{\sqrt{2 \times 9,1 \times 10^{-31} kg \times 1,6 \times 10^{-19} C \times 54V}} = 1,66 \text{ \AA}$$

Perbedaannya terjadi pada angka kedua dibelakang desimal. Asal-usul bagaimana sudut hamburan bisa 65° mempunyai kaitan yang sangat erat dengan sudut θ dalam gambar desain eksperimen Davisson-Germer. Pembaca dipersilahkan membaca buku teks fisika modern untuk memahaminya lebih lanjut.



Gambar 2.2 Desain eksperimen Davisson-Germer²⁴

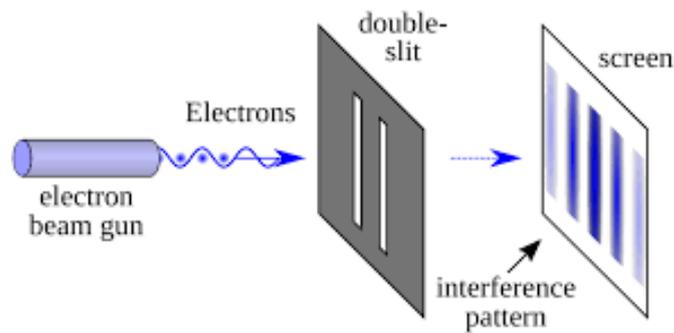
Pola difraksi dari suatu berkas elektron juga dibuktikan oleh G.P. Thomson (anak J. J. Thomson). Beliau menunjukkan bahwa berkas elektron yang ditembakkan ke suatu logam tipis akan menembus logam dan kemudian mengalami hamburan. Hamburan kemudian direkam pada plat fotografi. Pada akhirnya, pola difraksi akan diperoleh²⁵. Beliau dianugerahi hadiah nobel fisika pada tahun 1937 atas kerja kerasnya itu.

Selain pola difraksi, elektron ternyata juga bisa menampilkan gejala interferensi yang pertama kali dibuktikan oleh Clauss Jonsson melalui eksperimen celah ganda²⁶. Percobaan ini ditunjukkan oleh Gambar 2.3 dimana seberkas elektron ditembakkan ke dua celah. Eksperimen ini memang sekilas mirip dengan eksperimen dua-celah Young sehingga kita sudah bisa langsung memprediksi pola di layar yaitu pola interferensi. Namun, ada masalah yang paling menghebohkan para fisikawan sejagat raya ketika kita memasang detektor untuk mendeteksi mana celah yang dilewati oleh tiap elektron sehingga pola interferensi bisa terbentuk. Akal sehat menduga pola interferensi pasti akan tetap terbentuk dilayar, akan tetapi malah hanya satu garis kumpulan partikel yang terbentuk. Hal ini berarti elektron bersifat sebagai partikel sekarang, padahal mereka tetap dilewatkan ke dua-celah. Kita bisa mengatakan bahwa elektron seolah-olah memiliki “otak” sehingga mereka tahu kapan harus berkelakuan sebagai gelombang atau kapan harus tetap berkelakuan sebagai partikel. Sampai sekarang orang belum bisa menjelaskan misteri ini sepengetahuan peneliti. Para ahli hanya bisa menerima bahwa elektron (termasuk neutron, proton, dll) mempunyai sifat ganda (dualisme). Untuk pemahaman lebih detail, pembaca disarankan melihat video kartun tentang misteri ini melalui *link* di sini: https://www.youtube.com/watch?v=h_Dy7bZR Fak.

²⁴ Roshan, “Davisson-Germer Experiment,” www.commonswikimedia.org, 2012, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Davisson-Germer_experiment.svg.

²⁵ Sani and Kadri, *Fisika Kuantum*.

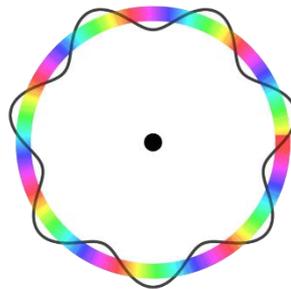
²⁶ Krane, *Fisika Modern*.



Gambar 2.3 Skema Percobaan Clauss Jonsson²⁷

B. Persamaan Schrodinger

Eksperimen Davisson-Germer, eksperimen G.P. Thomson, dan eksperimen Clauss Jonsson memberikan fakta bahwa elektron memang memiliki karakteristik dualisme. Hal ini kemudian menambahkan satu kelemahan bagi model atom Bohr karena sifat gelombang dari elektron dalam model tersebut tidak tampak sama sekali. De Broglie sendiri hanya memberi masukan bahwa lintasan elektron haruslah merupakan perkalian bilangan bulat dengan panjang gelombang (Gambar 2.4). Beliau tidak mengungkapkan sedikit pun tentang bagaimana bentuk dari gelombang bagi elektron yang mengelilingi inti atom. Apa bentuk matematis dari gelombangnya masih menjadi misteri. Tantangan ini kemudian dijawab oleh Erwin Schrodinger melalui persamaan yang diciptakannya sendiri, persamaan Schrodinger, pada tahun 1926. Melalui persamaannya, dia mengusulkan model atom atom terbaru (model atom mekanika kuantum) yang belum tergantikan sampai detik ini²⁸.



Gambar 2.4 Lintasan gelombang dari elektron²⁹

Persamaan Schrodinger merupakan persamaan diferensial orde dua yang diturunkan oleh Schrodinger melalui perkawinan persamaan gelombang klasik dengan konsep gelombang de Broglie. Persamaan tersebut dinyatakan sebagai berikut.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right) \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.4)$$

²⁷ Johannes Kalliauer, "Double-Slit," [www.commons.wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-slit.svg), 2017, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-slit.svg>.

²⁸ Maryana and Tiandho, *Fisika Kuantum: Sejarah Dan Kisah Inspiratif Para Tokohnya*.

²⁹ Pieter Kuiper, "Atom DeBroglie," [www.commons.wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atom_deBroglie.png), 2009, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atom_deBroglie.png.

Penyelesaian persamaan ini akan diperoleh fungsi gelombang $\psi(\mathbf{r}, t)$. Fungsi gelombang inilah yang mendeskripsikan keadaan suatu partikel karena partikel apapun pasti memiliki sifat sebagai gelombang. Fakta bahwa persamaan Schrodinger berorde satu dalam turunan waktu mengindikasikan bahwa fungsi gelombang berevolusi dari kondisi inisial tunggal.

Kita sekarang meninjau kasus khusus dari sistem tertutup di mana energi adalah kekal dan energi potensial tidak bergantung waktu $V = V(\mathbf{r})$. Untuk alasan dari penelitian ini, kita hanya fokus ke kasus satu dimensi. Karena keadaan sistem tertentu diterapkan, maka kita bisa memisahkan bagian waktu dan bagian spasial dari fungsi gelombang melalui metode pemisahan variabel. Jika kita mengasumsikan fungsi gelombang bisa dinyatakan sebagai $\psi(x, t) = \varphi(x)\phi(t)$, maka substitusi ke persamaan Schrodinger memberikan

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)\phi(t) + V(x)\varphi(x)\phi(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) \quad (2.5)$$

kita kemudian membagi kedua sisi dengan $\varphi(x)\phi(t)$ sehingga ruas kiri hanya merupakan fungsi x dan ruas kanan hanya merupakan fungsi t. Ini benar kalau kedua sisi sama dengan konstanta E. Perhatikan dua persamaan di bawah ini yang merupakan pemecahan persamaan (2.5).

$$E\phi(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) \quad (2.6)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \varphi(x) = E\varphi(x) \quad (2.7)$$

persamaan (2.6) adalah persamaan Schrodinger bergantung waktu, sedangkan persamaan (2.7) adalah persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu. Lalu, E ialah energi eigen dari partikel yang dideskripsikan oleh fungsi gelombang³⁰.

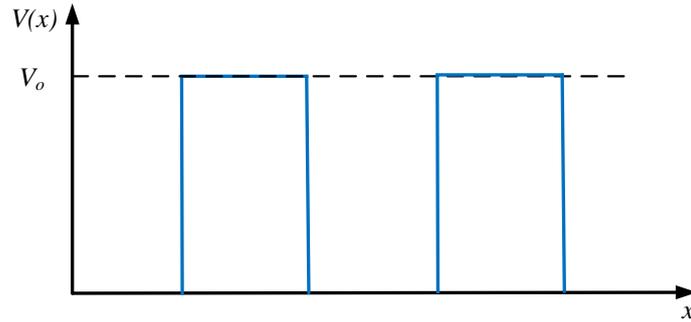
C. Metode Propagasi Matriks

Penentuan fungsi gelombang dapat dilakukan ketika fungsi potensial diketahui. Fungsi-fungsi potensial sederhana, seperti potensial tangga, potensial penghalang persegi terhitung, potensial osilator harmonik sederhana, dan potensial fungsi delta dapat diselesaikan secara analitik. Potensial-potensial demikian dapat ditelaah dalam buku teks standar fisika kuantum. Namun demikian, penyelesaian persamaan Schrodinger dapat menjadi rumit jika potensial-potensial di atas mendapatkan suatu modifikasi. Misalnya, kasus potensial penghalang persegi akan menjadi kompleks ketika kita menambahkan penghalang lebih dari satu buah. Peneliti yakin kita semua sudah merasakan betapa membosankan penjabaran tersebut kita menentukan persamaan koefisien transmisi atau koefisien refleksinya, apalagi ketika satu penghalang identik ditambahkan di samping kanan penghalang pertama seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2.5. Deych, seorang ahli fisika, menyatakan metode substitusi atau eliminasi tampaknya sudah tidak memungkinkan³¹. Oleh sebab itu, ahli fisika mencari solusi masalah ini menggunakan metode-metode lain: metode propagasi

³⁰ Levi, *Applied Quantum Mechanics*.

³¹ Lev I Deych, *Advanced Undergraduate Quantum Mechanics, Advanced Undergraduate Quantum Mechanics* (Cham: Springer International Publishing, 2018), <https://doi.org/10.1007/978-3-319-71550-6>.

matriks, metode transfer matriks, dan metode hamburan matriks³². Kita focus pada metode propagasi matriks dalam penelitian ini.



Gambar 2.5 Potensial penghalang ganda simetris³³.

Misalkan sebuah elektron dengan energi E dan massa m datang dari kiri menuju potensial penghalang $V(x)$. Seseorang bisa menggunakan metode propagasi matriks untuk menghitung peluang kemunculan elektron pada sisi kanan potensial penghalang. Metode ini mampu menghitung koefisien transmisi secara numerik dan memperoleh bentuk analitik dari koefisien transmisi. Proses mendapatkan koefisien transmisi menggunakan metode propagasi matriks dibagi ke dalam lima langkah sebagai berikut³⁴.

- a. Langkah pertama: menghitung propagasi matriks langkah \hat{p}_{step} untuk sebuah elektron yang mengenai sebuah potensial tangga tunggal. Ujung potensial tangga yang ditinjau berada pada posisi x_{j+1} seperti pada Gambar 2.6.

Pada daerah j , elektron mempunyai bilangan gelombang

$$k_j = \frac{(2m(E - V_j))^{1/2}}{\hbar} \quad (2.8)$$

di mana \hbar adalah konstanta planck dibagi 2π . Fungsi gelombang di daerah j dan $j + 1$ adalah

$$\psi_j = Ae^{ik_j x} + Be^{-ik_j x} \quad (2.9)$$

$$\psi_{j+1} = Ce^{ik_{j+1} x} + De^{-ik_{j+1} x} \quad (2.10)$$

Jika posisi $x_{j+1} = 0$ dan syarat kontinuitas diterapkan pada titik tersebut, maka diperoleh dua persamaan berikut.

$$A + B = C + D \quad (2.11)$$

$$A - B = \frac{k_{j+1}}{k_j} C - \frac{k_{j+1}}{k_j} D \quad (2.12)$$

Dengan mengubah persamaan (4) dan (5) menjadi persamaan matriks diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{k_{j+1}}{k_j} & -\frac{k_{j+1}}{k_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Namun demikian, ungkapan ini tidak dalam bentuk yang sangat berguna. Kita modifikasi ke bentuk sederhana, yaitu

³² David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2nd ed. (Upper Saddle River: Pearson Education, Inc., 2005).

³³ B Supriadi et al., "Analysis of the Relationship between the Distance Barriers GaAs and GaAs with the Transmission Coefficient and the Reflection Coefficient," *Journal of Physics: Conference Series* 1538, no. 1 (2020): 12039, <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1538/1/012039>.

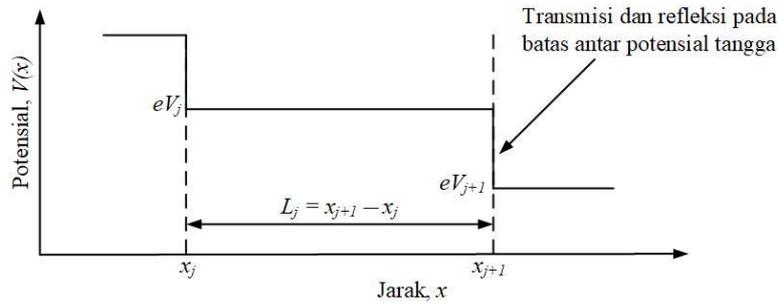
³⁴ Levi, *Applied Quantum Mechanics*.

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \hat{p}_{step} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

di mana \hat{p}_{step} adalah matriks 2 x 2 yang menerangkan propagasi gelombang pada suatu potensial tangga. Untuk memperoleh bentuk matematisnya, kita harus mengeliminasi matriks 2 x 2 pada sisi kiri persamaan (6). Penjabaran akan menghasilkan

$$\hat{p}_{step} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_{j+1}}{k_j} & 1 - \frac{k_{j+1}}{k_j} \\ 1 - \frac{k_{j+1}}{k_j} & 1 + \frac{k_{j+1}}{k_j} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Daerah, j Daerah, $j + 1$



Gambar 2.6 Sketsa dari deretan potensial tangga satu dimensi. Energy potensial di wilayah j adalah V_j , sedangkan energi potensial di wilayah $j+1$ adalah eV_{j+1} . Terkait dengan potensial tangga di daerah j dan jarak propagasi bebas $L_j = x_{j+1} - x_j$, akan terdapat matriks 2 x 2 yang membawa informasi mengenai fase³⁵

- b. Langkah kedua: menghitung propagasi antar dua potensial tangga yang dipisahkan oleh jarak L_j (lihat Gambar 2.6). Propagasi ini membawa fase informasi dalam bentuk matriks, yaitu

$$\hat{p}_{free} = \begin{bmatrix} e^{-ik_j L_j} & 0 \\ 0 & e^{ik_j L_j} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

- c. Langkah ketiga: menghitung propagasi matriks pada daerah ke- j . Propagasi ini diperoleh dengan mengalikan \hat{p}_{step} dan \hat{p}_{free} . Dengan demikian, propagasi pada daerah ke- j adalah sebagai berikut.

$$\hat{p}_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{k_{j+1}}{k_j}\right) e^{-ik_j L_j} & \left(1 - \frac{k_{j+1}}{k_j}\right) e^{-ik_j L_j} \\ \left(1 - \frac{k_{j+1}}{k_j}\right) e^{ik_j L_j} & \left(1 + \frac{k_{j+1}}{k_j}\right) e^{ik_j L_j} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Ketika konsep massa efektif elektron diperhitungkan, \hat{p}_j menjadi

$$\hat{p}_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{m_j}{m_{j+1}} \frac{k_{j+1}}{k_j}\right) e^{-ik_j L_j} & \left(1 - \frac{m_j}{m_{j+1}} \frac{k_{j+1}}{k_j}\right) e^{-ik_j L_j} \\ \left(1 - \frac{m_j}{m_{j+1}} \frac{k_{j+1}}{k_j}\right) e^{ik_j L_j} & \left(1 + \frac{m_j}{m_{j+1}} \frac{k_{j+1}}{k_j}\right) e^{ik_j L_j} \end{bmatrix} \quad (2.18)^{36}$$

³⁵ Russell Ong, "Perhitungan Koeffisien Transmisi Pada Struktur Superlattice Menggunakan Metode Propagasi Matriks," *Jurnal Ilmu Fisika Dan Teknologi* 6, no. 1 (2022): 30–39, <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.30821/fisitekfisitek.v6i1.11549>.

³⁶ R Karmakar et al., "Calculating Transmission Coefficient of Double Quantum Well Triple Barrier Structure Having Parabolic Geometry Using Propagation Matrix Method," *International Journal of Engineering and Advanced Technology* 1, no. 2 (2011): 37–41, <https://www.ijeat.org/portfolio-item/b0129111111/>.

- d. Langkah keempat: menghitung propagasi matriks total \hat{P} untuk seluruh potensial tangga dengan mengalikan propagasi matriks di setiap daerah. Misalkan ada N potensial tangga maka

$$\hat{P} = \hat{p}_1 \hat{p}_2 \hat{p}_3 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_N = \prod_{j=1}^{j=N} \hat{p}_j \quad (2.19)$$

- e. Langkah terakhir: memperoleh rumus untuk menghitung koefisien transmisi. Karena partikel datang dari sebelah kiri, maka $A = 1$, dan tidak ada pantulan dari kanan ke kiri, maka $D = 0$. Rumus koefisien transmisi pada akhirnya didapatkan sebagai berikut.

$$T = |C|^2 = \left| \frac{1}{p_{11}} \right|^2 \quad (2.20)$$

Peneliti melampirkan penerapan metode propagasi matriks untuk menentukan p_{11} pada kasus potensial penghalang persegi terhingga dan potensial penghalang fungsi delta pada bagian lampiran. Kajian hanya dilakukan pada keadaan $E < V_0$ dan rumus koefisien transmisi tidak ditampilkan mengingat tujuan akan penelitian ini.

D. Sel Primitif Wigner-Seitz

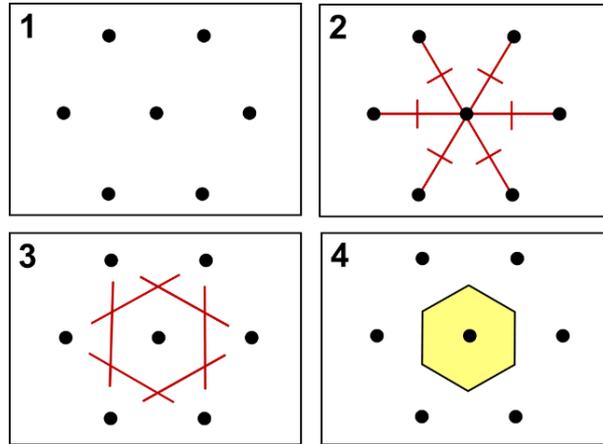
Menurut penulis, ada lima wujud zat yang dikenal pada masa kini, yaitu: zat padat, zat cair, gas, plasma, dan kondensat Bose-Einstein. Zat padat merupakan materi di alam semesta yang paling banyak dipelajari dalam ilmu fisika. Kajian yang dibahas adalah struktur dan berbagai sifat fisika dari zat padat. Zat padat terlihat sebagai benda tegar dan kontinu dalam kehidupan sehari-hari. Contoh kristal adalah batuan intan. Namun, zat padat akan tampak tersusun dari atom-atom jika dipandang dari sudut mikroskopik. Berdasarkan keteraturan dari atom-atom, zat padat dibedakan menjadi kristal dan amorf. Kristal merupakan zat padat yang susunan atom-atom atau molekul-molekulnya sangat teratur dan periodik serta memiliki translasi simetri; amorf merupakan kebalikkannya ditinjau dari sisi penyusunan atom-atom atau molekul-molekulnya. Fakta ini kemudian cenderung menarik para ahli untuk lebih mempelajari sifat kristal dibandingkan amorf.

Untuk mempermudah pemahaman dan analisis struktur kristal secara kuantitatif-matematis, diperkenalkan konsep kisi kristal dan basis. Kisi kristal adalah grup titik-titik yang tersusun secara periodik dan teratur di dalam ruang, sedangkan basis adalah kumpulan atom atau molekul. Ketika basis menempati titik-titik kisi, maka struktur suatu kristal akan terbentuk. Dengan kata lain, gabungan antara kisi dan basis akan membentuk struktur kristal.

Kita dapat menguraikan suatu kristal ke bagian terkecil yang disebut sel satuan. Bagian terkecil ini tentu memiliki pola berulang jadi masing-masing sel satuan yang kita pilih harus mempunyai ukuran, volume/luas, bentuk, dan kandungan yang sama. Sel satuan dikategorikan menjadi dua, yaitu sel satuan primitif dan sel satuan non-primitif. Perbedaan keduanya hanya terdapat pada jumlah titik kisi yang dicakup. Sel satuan primitif adalah sel satuan yang hanya mempunyai satu titik kisi. Hal ini berarti sel non-primitif merupakan kebalikkannya. Ada suatu sel primitif unik—sel yang menjadi fokus penelitian ini—yang disebut sel primitif Wigner-Seitz. Langkah-langkah untuk menggambarkan sel primitif tersebut adalah sebagai berikut³⁷.

³⁷ I Made Astra and Iwan Sugiarto, *Pengantar Fisika Zat Padat*, ed. Arryta Canty, 2nd ed. (Tangerang Selatan: Universitas Terbuka, 2015).

1. Pilihlah salah satu titik kisi sesuai kehendak kita sebagai acuan (biasanya di tengah).
 2. Gambarkan garis lurus dengan setiap titik kisi terdekatnya.
 3. Di setiap tengah garis lurus tadi, buatlah garis tegak lurus di tengahnya.
 4. Luas (dua dimensi) atau volume (tiga dimensi) yang dihasilkan disebut sebagai sel primitif Wigner-Seitz.
- Keempat langkah di atas ditampilkan dalam gambar di bawah ini.



Gambar 2.7 Langkah-langkah menggambarkan sel primitif Wigner-Seitz dua dimensi³⁸

E. Zona Brillouin

Sebelum membahas tentang zona Brillouin, kita terlebih dahulu membahas gas elektron bebas dalam tiga dimensi karena topik ini sangat penting untuk menentukan titik koordinat dari ruang-k. Misalkan satu elektron diletakkan dalam sebuah kubus dengan rusuk sebesar L . Persamaan Schrodinger untuk elektron ini adalah:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (2.21)$$

persamaan (2.21) sebenarnya adalah pengembangan elektron dalam kotak potensial satu dimensi ke tiga dimensi. Melalui metode pemisahan variabel, kita akan memperoleh fungsi gelombang sebagai berikut.

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = A \sin\left(\frac{\pi n_x x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n_y y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n_z z}{L}\right) \quad (2.22)$$

dengan n_x , n_y , dan n_z adalah bilangan kuantum utama dan $A = (2/L)^{3/2}$. Tiap elektron dalam kisi kristal dideskripsikan oleh fungsi gelombang ini. Di samping itu, fungsi gelombang ini juga mematuhi sifat periodik dari kisi, yang dapat ditunjukkan jika, sebagai contoh, kita tinjau salah satu koordinat, $\psi(x + L, y, z) = \psi(x, y, z)$. Dalam hal ini, melihat satu-satunya bagian yang terpengaruh pada fungsi gelombang, $\sin\left(\frac{n_x \pi x}{L} + n_x \pi\right) = \sin(n_x \pi x/L) \cos(n_x \pi) + \cos(n_x \pi x/L) \sin(n_x \pi) = \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right)$, jika n_x adalah bilangan bulat genap pada contoh ini. Fungsi gelombang lain yang memenuhi persamaan (2.21) dan mampu menjamin sifat periodisitas adalah berbentuk gelombang berjalan sebagai berikut:

³⁸ JoaoXP, "Construcao Da Celula de Wigner-Seitz," www.commonswikimedia.org, 2011, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Construcao_da_celula_de_wigner-seitz.png.

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.23)$$

dengan $\mathbf{k} = k_x\mathbf{i} + k_y\mathbf{j} + k_z\mathbf{k}$ dan $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Persamaan (2.23) sudah memenuhi persamaan (2.21) karena

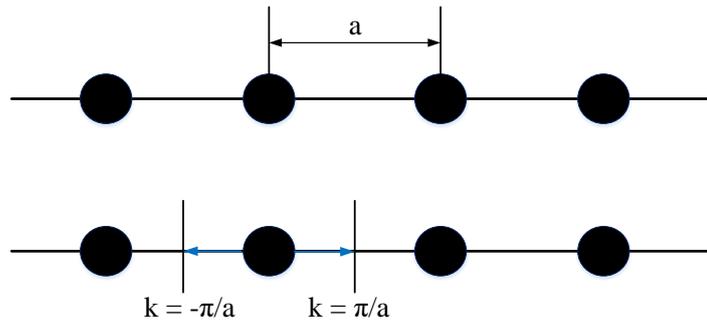
$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)k^2\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

dimana $E_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)k^2$ dengan $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Agar solusi gelombang memiliki keperiodikan, kita bisa melakukan sebuah contoh perpindahan yang sederhana sepanjang sumbu x dengan menuliskan

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{i}L) = e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} + \mathbf{i}L)} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{ik_xL} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.25)$$

dimana kita sudah mengambil $e^{ik_xL} = 1$ sehingga $k_xL = 2n_x\pi$ atau $k_x = 2n_x\pi/L$. Demikian pula, kita bisa mendapatkan $k_y = 2n_y\pi/L$ dan $k_z = 2n_z\pi/L$ dengan $n_x, n_y,$ dan n_z adalah bilangan bulat. Melalui definisi ini, kita mengetahui bahwa jarak antar titik koordinat terdekat dari setiap sumbu dalam ruang-k adalah $2\pi/L$ ³⁹.

Zona Brillouin secara singkat sebenarnya adalah sel primitif Wigner-Seitz dalam ruang-k. Untuk alasan tujuan laporan penelitian, peneliti hanya menampilkan kisi kristal di ruang real dan ruang-k berdimensi satu pada Gambar 2.8. Jika jarak antar atom adalah a , maka batas zona Brillouin I adalah pada $k = \pm\pi/a$.



Gambar 2.8 Atas: kisi kristal di ruang real; Bawah: kisi kristal di ruang-k. Zona Brillouin I di ruang-k kristal satu dimensi dibatasi oleh $k = \pm\pi/a$ ⁴⁰

F. Difraksi Sinar-X

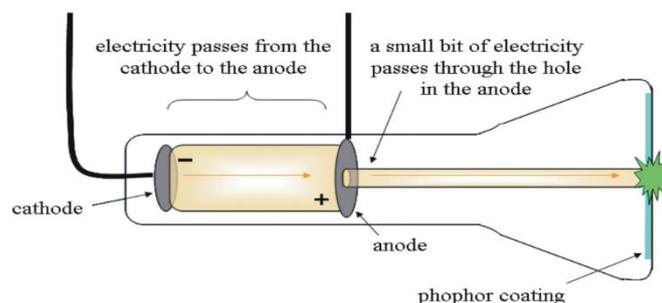
Pada paruh abad ke-17, Otto van Guerich mencoba membuat tabung hampa udara. Beliau berusaha memompa keluar seluruh udara yang ada di dalam tabung dengan cara yang primitif. Alhasil, tabung vakum buatannya tidak sepenuhnya vakum udara. Pada tahun 1855, tabung vakum Guerich disempurnakan oleh seorang fisikawan Jerman yang bernama Heinrich Geissler. Tabung vakum yang didesain bisa dikatakan sempurna karena 99,9 % udara dalam tabung terpompa keluar sehingga sisa tekanan udara dalam tabung menjadi 0,01 % dari tekanan udara normal. Tabung vakum ini kemudian menjadi salah satu bahan pembuatan tabung sinar katoda.

³⁹ Javier E Hasbun and Trinanjan Datta, *Introductory Solid State Physics with MATLAB® Applications, Introductory Solid State Physics with MATLAB® Applications* (Boca Raton: CRC Press, 2019), <https://doi.org/10.1201/9780429086601>.

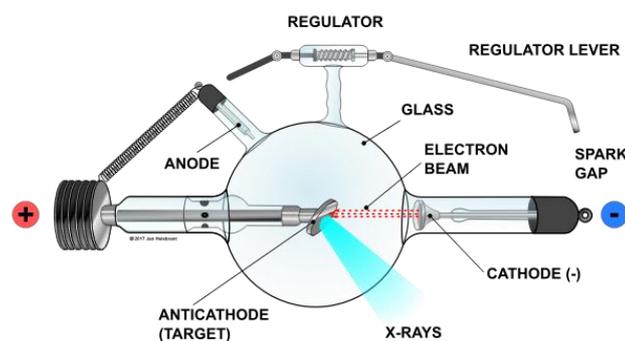
⁴⁰ Damanik, *Pengantar Fisika Zat Padat*.

Ketika tabung vakum dialiri oleh arus listrik bertegangan tinggi, maka sinar katoda akan tercipta di dalam tabung. Cikal bakal sinar katoda ditemukan pertama kali oleh Michael Faraday pada tahun 1838, yang kemudian disempurnakan kembali oleh Sir William Crookes—seorang fisikawan Inggris—pada tahun 1875. Tabung sinar katoda yang telah sempurna inilah yang kemudian dipakai oleh J. J. Thomson untuk menemukan partikel elektron. Beliau menemukan bahwa elektron mengalir dari elektroda negatif/katode ke elektroda positif anoda. Atas alasan tersebut, orang-orang kadang menyebut sinar katoda dengan sebutan sinar lucutan elektron.

Tabung sinar katoda memang menarik perhatian pada masa itu. Selain J. J. Thomson, seorang fisikawan Jerman—Wilhelm Conrad Rontgen—menemukan sinar Rontgen (kemudian dinamai sebagai sinar-X) dengan sedikit memodifikasi tabung sinar katoda. Anoda, target tujuan elektron, diganti menjadi anti anoda (logam). Perhatikan skema rangkaian peralatan sinar-X dalam Gambar 2.9 dan bandingkan dengan skema rangkaian peralatan sinar katoda dalam Gambar 2.10. Filamen mula-mula dipanaskan dengan mengalirkan arus listrik sampai terbentuk awan-awan elektron di sekitar filament tersebut. Sinar katoda kemudian ditembakkan ke antianoda dengan kecepatan tinggi sehingga elektron akan melakukan pengereman mendadak ketika elektron tepat akan menumbuk target logam. Pada momen ini, sinar katoda seperti dihalang-halangi oleh antianoda. Pengereman yang mendadak mengurangi energi kinetik dan energi kinetik yang hilang tadi dilepaskan dalam bentuk radiasi atau pancaran sinar. Rontgen menamai sinar baru ini sesuai namanya (belakangan disebut sebagai sinar-X). Proses pengereman pencipta sinar-X ini disebut sinar-X Bremstahlung (pengereman)⁴¹.



Gambar 2.9 Skema peralatan penghasil sinar katoda⁴²



⁴¹ Vani Sugiyono, *Mekanika Kuantum*, ed. Tri Admojo (Jakarta: Buku Seru, 2016).

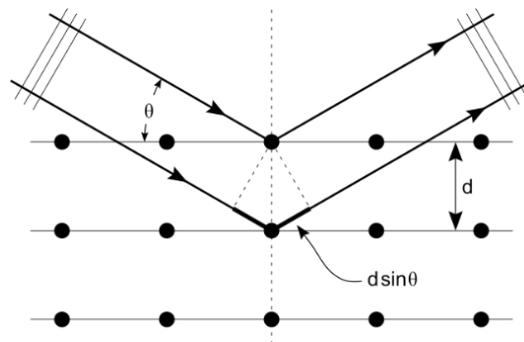
⁴² Sharon Bewick, "Cathode Ray Tube Title," www.commons.wikimedia.org, 2010, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cathode_ray_tube.png.

Gambar 2.10 Skema peralatan penghasil sinar-X

Penemuan sinar-X lalu menginspirasi Von Laue untuk berpendapat bahwa gejala difraksi dapat juga diamati ketika sinar-X ditembakkan ke suatu material kristalin pada tahun 1912. Cahaya analog dengan sinar-X; celah tunggal analog dengan jarak antara atom-atom. Dengan demikian, jika jarak antar atom dari kristal yang dipakai seorde dengan panjang gelombang sinar X, maka peristiwa difraksi sinar-X mungkin terjadi menurutnya. Melalui hipotesis ini, Laue menggunakan kristal tembaga sulfat dan meletakkannya di antara sumber penghasil sinar-X dan lempeng fotografi. Hasil eksperimen pada akhirnya cukup memuaskan dengan memperlihatkan pola difraksi dan membuktikan keperiodikan susunan atom dari suatu kristal. Pola difraksi yang dihasilkan berbeda-beda sesuai dengan susunan atom dalam kristal tersebut.

Penelitian difraksi sinar-X lalu dilanjutkan oleh dua fisikawan Inggris, W.L. Bragg dan putranya W. H. Bragg. Keunggulan mereka dibandingkan Laue ialah mampu menjelaskan secara matematis sehingga publikasi mereka lebih mudah ditangkap oleh orang awam. Penurunan hukum Bragg didasarkan pada Gambar 2.11. Bragg memandang kristal terdiri dari bidang-bidang datar yang masing-masing berfungsi sebagai cermin semi transparan. Jika sinar-X yang ditembakkan ke permukaan kristal mempunyai sudut datang θ , maka sinar-X yang dipantulkan juga akan mempunyai sudut pantul yang sama. Perlu diketahui bahwa hanya sebagian yang dipantulkan, sedangkan sebagian lagi diteruskan menembus bidang. Sebagaimana kita pelajari dalam pelajaran optika, interferensi konstruktif terjadi ketika beda lintasan antara dua berkas sinar sama dengan kelipatan bilangan bulat positif panjang gelombang atau secara matematis sebagai berikut.

$$\text{beda lintasan} = n\lambda; n = 1,2,3, \dots \quad (2.26)$$



Gambar 2.11 Pemantulan berkas sinar-X⁴³

Dari Gambar 2.11, terlihat bahwa beda lintasan antara sinar 1 dengan sinar 2 adalah sebesar $2d \sin \theta$. Dengan menyamakannya dengan persamaan (2.26), maka akan diperoleh:

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (2.27)$$

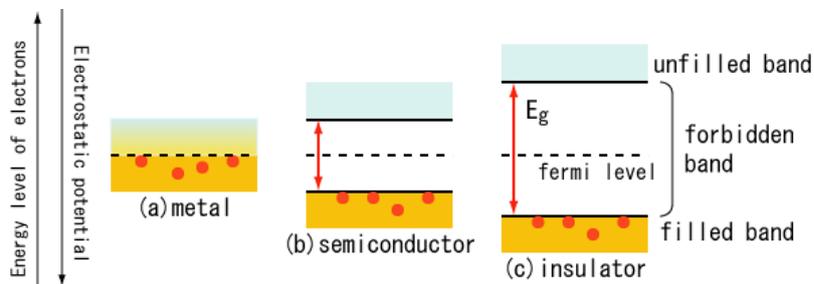
yang dikenal sebagai hukum Bragg. Jadi, kita bisa mengukur jarak antar bidang kristal dengan memasukkan nilai θ dan nilai λ ⁴⁴. Pada masa kini, pakar material menentukan apakah struktur kristal merupakan kubus sederhana, kubus berpusat badan, kubus berpusat muka, atau yang lainnya berdasarkan data eksperimen difraksi sinar-X.

⁴³ Hydrargyrum, "Bragg Diffraction 2," www.commonswikimedia.org, 2011.

⁴⁴ Damanik, *Pengantar Fisika Zat Padat*.

G. Teori Pita Zat Padat

Konfigurasi elektron menunjukkan bahwa atom natrium bernomor atom 11 mempunyai satu elektron valensi. Elektron valensi ini menempati kulit 3s dan mempunyai energi kulit 3s, yaitu E_{3s} . Apabila dua atom natrium didekatkan, maka tingkat energi keduanya akan saling tumpang tindih sehingga terbentuk dua tingkat 3s. Elektron valensi atom natrium pertama berinteraksi dengan elektron valensi natrium kedua. Konsekuensinya adalah energi mereka bukan lagi merupakan E_{3s} . Energi elektron terbagi menjadi dua. Lebih lanjut, jika lima atom natrium didekatkan, maka elektron valensi akan terpecah menjadi lima. Jadi, jika ada 10^{22} atom natrium didekatkan (misalnya pada sekeping logam natrium), jumlah tingkat energi menjadi sangat banyak. Jarak antar tingkat energi sudah menjadi saling bertumpang-tindih, kontinu atau rapat sekali seperti membentuk semacam pita energi. Pita energi hasil gabungan banyak sekali tingkat 3s dinamakan pita 3s karena pita ini sesungguhnya berasal dari tingkat 3s atom natrium. Energi di bawah tingkat 3s juga membentuk pita energi, yakni: pita 1s, pita 2s, dan pita 2p yang masing-masing berisi penuh elektron. Pita-pita ini dinamakan pita penuh, sedangkan pita 3s dinamakan pita setengah penuh (hanya setengah pita yang terisi). Jarak antara pita-pita ini dinamakan sebagai celah energi. Karena pita 3s tidak penuh, maka elektron mampu melompat dari bagian yang penuh ke bagian yang kosong di atasnya kalau diberi potensial listrik⁴⁵. Hal ini membuktikan bahwa teori pita zat padat memberi penjelasan mengapa natrium tergolong sebagai bahan konduktor. Gambar 2.12 memberi penjelasan secara eksplisit kapan suatu material tergolong konduktor, isolator, atau semikonduktor.



Gambar 2.12 Bagan pita energi untuk logam, semikonduktor, dan insulator⁴⁶

Pada Gambar 2.12, Nilai celah energi tampak sebagai kunci pembeda antara semikonduktor dan insulator. Keberadaan celah energi dapat juga dibuktikan melalui persamaan hukum Bragg. Mula mula kita tafsirkan gerak elektron dalam zat padat sebagai rambatan gelombang deBroglie melalui zat padat. Kemudian, kita batasi gelombang hanya bisa merambat dalam satu dimensi agar kita bisa mengetahui apa yang terjadi sepanjang arah rambat gelombang. Selanjutnya kita bayangkan bahwa gelombang tersebut adalah radiasi sinar-X. Karena kita telah membatasi hanya untuk satu dimensi, maka hanya satu arah pantul yang dapat terjadi, yaitu gelombang radiasi sinar-X terpantul kembali sepanjang arah rambat awalnya. Misalkan jarak antar titik kisi sekarang adalah a , jadi hukum Bragg menghasilkan:

$$2a \sin 90^\circ = n\lambda \quad (2.28)$$

⁴⁵ Yohanes Surya, *Fisika Modern* (Tangerang: Kandel, 2009).

⁴⁶ S-kei, "BandGap-Comparison-Withfermi-E," www.commonswikimedia.org, 2006, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BandGap-Comparison-withfermi-E.PNG>.

dan menggunakan $k = 2\pi/\lambda$, kita peroleh

$$k = n \frac{\pi}{a} \quad (2.29)$$

Dengan demikian, pada saat bilangan gelombang seperti (2.29), gelombangnya tidak terpantulkan atau boleh dikatakan tidak melihat kisi dan merambat secara bebas. Apabila bilangan gelombangnya memenuhi (2.29), celah energi akan terbentuk. Hal ini dikarenakan gelombang dipantulkan kembali ke dirinya sendiri dan terjadilah sebuah gelombang berdiri. Menurut Krane, salah satu gelombang berdiri berbentuk $\psi_1 \sim \sin(\frac{n\pi x}{a})$ dan yang lainnya berbentuk $\psi_2 \sim \cos(\frac{n\pi x}{a})$. Kedua fungsi gelombang tersebut mengakibatkan elektron tertumpuk di dua tempat yang berbeda dengan energi potensial yang berbeda tentunya. Inilah asal mula adanya celah energi⁴⁷.

H. Teorema Bloch

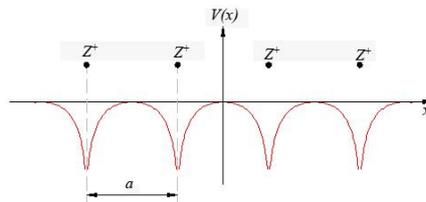
Fungsi gelombang sebuah elektron tunggal dalam suatu potensial periodik merupakan tugas yang sulit. Contoh paling dekat adalah elektron bebas dalam kristal padatan tunggal. Elektron bebas di sini artinya hanya ada satu elektron berada di dalam pita konduksi kristal. Contoh kesederhanaan ini memerlukan atom-atom dari kristal tunggal tersusun secara sempurna dalam kisi tunggal dan interaksi antar elektron diabaikan. Pendekatan sedemikian itu dikenal sebagai pendekatan satu elektron kristal tunggal. Pendekatan ini mengarah ke deskripsi tingkat energi elektronik yang diizinkan dalam kristal di bawah prinsip eksklusi Pauli dan statistik Fermi-Dirac. Pendekatan ini sebenarnya adalah landasan dari kebanyakan analisis teoritis untuk padatan kristal. Berdasarkan landasan ini, ada pendekatan lain, seperti tidak adanya ketidaksempurnaan dalam kristal tunggal, metode ikatan kuat, dan pendekatan massa efektif. Agar pendekatan satu elektron kristal tunggal bekerja, potensial periodik harus memenuhi relasi berikut yang mengasumsikan sebuah kristal satu dimensi

$$V(x) = V(x + L) \quad (2.30)$$

dimana L adalah periode dari potensial. Potensial periodik bisa berbentuk persegi, fungsi delta, atau bentuk tak tentu apapun yang terpenging mereka mengulang secara periodik dan mempunyai keperiodikkan yang sama pada kisi. Persamaan Schrodinger dari satu elektron kristal tunggal dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} (E_n - V(x)) \right] \psi(x) = 0 \quad (2.31)$$

jika $V(x)$ periodik, maka $\frac{2m}{\hbar^2} (E_n - V(x))$ harus periodik. Potensial berperiode merupakan kosekuensi dari barisan atom-atom sepanjang garis lurus dalam sebuah kristal yang ditampilkan di Gambar 2.13.



⁴⁷ Krane, *Fisika Modern*.

Gambar 2.13 Energi potensial (garis merah) yang dihasilkan oleh ion-ion positif pada kisi satu dimensi⁴⁸

Elektron bebas dalam padatan kristalin yang masing-masing mematuhi persamaan Schrodinger satu dimensi beserta potensial periodik secara umum disebut elektron Bloch. Elektron Bloch tereduksi menjadi elektron bebas sewaktu potensial periodik ditiadakan. Pada subbab berikutnya, kita akan membenarkan teori pita energi melalui pendekatan terhadap bentuk potensial periodik. Model paling simple ini yang diketahui sebagai model Kronig-Penney. Pemecahan persamaan Schrodinger dari model tersebut menyatakan bahwa hanya pita-pita energi tertentu sajalah yang diperkenankan.

Teorema Bloch diturunkan pada tahun 1928, yang didasarkan pada hasil abad kesembilan belas dari Floquet. Teorema ini menyatakan bahwa keadaan eigen dari Hamiltonian satu elektron dalam satu dimensi boleh dituliskan sebagai $H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(x)$, dimana $V(x + L) = V(x)$ dan L adalah periode dari potensial periodik. Fungsi gelombang dapat dipilih untuk memiliki bentuk gelombang bidang, e^{-ikx} , kali fungsi periodisitas, $\varphi_k(x)$, dari sel kisi primitif sedemikian rupa sehingga

$$\psi_k(x) = e^{ikx} \varphi_k(x) \quad (2.32)$$

dimana $\varphi_k(x)$ memenuhi kondisi berikut.

$$\varphi_k(x + L) = \varphi_k(x) \quad (2.33)$$

Vektor gelombang satu dimensi, \mathbf{k} , dikenalkan sebagai subskrip. Setiap \mathbf{k} mungkin mempunyai beberapa nilai eigen. Untuk kasus tiga dimensi, x ditukar oleh \mathbf{r} . Dengan mengkombinasikan persamaan (2.32) dan (2.33), kita peroleh:

$$\psi_k(x + L) = e^{ikL} \psi_k(x) \quad (2.34)$$

Persamaan ini menyatakan bahwa keadaan eigen H bisa dipilih sedemikian sehingga yang terkait dengan tiap ψ adalah vektor gelombang \mathbf{k} supaya kondisi berikut memenuhi

$$\psi(x + L) = e^{ikL} \psi(x) \quad (2.35)$$

untuk setiap L dalam kisi⁴⁹.

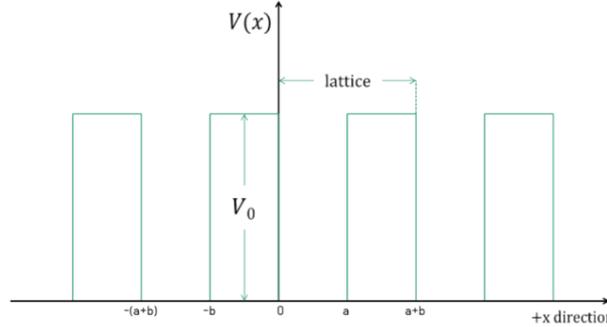
I. Model Kronig-Penney

Model Kronig-Penney merupakan pendekatan paling kasar dan sederhana untuk potensial periodik. Walaupun model ini tidak realistis, ilmuan tidak begitu mengacuhkannya karena fokus utama adalah meramalkan kehadiran celah energi. Setiap potensial diasumsikan berbentuk persegi panjang seperti pada Gambar 2.14. Ia mengilustrasikan secara eksplisit kebanyakan karakteristik penting dari perilaku kuantum elektron di dalam padatan kristal nyata seperti semikonduktor. Menggunakan pendekatan satu elektron, fungsi gelombang dari persamaan Schrodinger bisa diperoleh dengan menganggap gaya netto yang bekerja pada elektron dianggap sebagai turunan dari potensial periodik, yang memiliki bentuk serupa dengan persamaan (2.31). Potensial periodik pada persamaan ini memenuhi kondisi: $V(x) = 0$ untuk $0 < x < a$ dan $V(x) = V_0$ untuk $-b < x < 0$. Oleh karena itu, konstanta kisi bisa

⁴⁸ LMB, "Potential-Actual," www.commonswikimedia.org, 2006, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Potential-actual.PNG>.

⁴⁹ Manasreh, *Introduction to Nanomaterials and Devices*.

dipertimbangkan sebagai $L = a + b$ dengan L merupakan periode potensial. Penyelesaian persamaan Schrodinger dapat dilakukan melalui dua jalan, yaitu: 1) fungsi Bloch langsung disubstitusikan ke persamaan Schrodinger, sesudah itu baru dicari fungsi gelombangnya⁵⁰, 2) Teorema Bloch ditetapkan sesudah kita memperoleh fungsi gelombang di sumur dan di penghalang⁵¹. Menurut peneliti, jalan kedua lebih cepat untuk memperoleh persamaan nilai eigen sehingga paragraph selanjutnya akan membahas sedikit proses penjabarannya.



Gambar 2.14 Potensial penghalang periodik model Kronig-Penney⁵²

Kita tulis dulu persamaan Schrodinger satu dimensi untuk model ini, yaitu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.36)$$

dengan $V(x)$ adalah energi potensial periodik dan E adalah nilai eigen energi. Dalam daerah $0 < x < a$:

$$\psi_I(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad (2.37)$$

dengan

$$k_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2} \quad (2.38)$$

Di daerah $-b < x < 0$ terdapat potensial, maka fungsi gelombang di sana adalah

$$\psi_{II}(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}; \quad k_2 = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2} \quad (2.39)$$

Karena kristal itu periodik, solusi di daerah $a < x < a + b$ berkaitan dengan solusi di daerah $-b < x < 0$ melalui teorema Bloch, yaitu:

$$\psi_{III}(x) = \psi(a < x < a + b) = \psi(-b < x < 0)e^{ik(a+b)} = \psi_{II}(x)e^{ik(a+b)} \quad (2.40)$$

k di sini akan ditentukan kemudian. Pada titik ini, semua bahan untuk menyelesaikan masalah telah dinyatakan. agar fungsi gelombang kontinu di titik $x = 0$ dan titik $x = a$, harus berlaku syarat kontinuitas. Syarat kontinuitas di titik $x = 0$ memberikan

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A + B = C + D \quad (2.41a)$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \Rightarrow ik_1A - ik_2B = k_2C - k_3D \quad (2.41b)$$

Selanjutnya, kontinuitas di titik $x = a$ menghasilkan:

$$\psi_I(a) = \psi_{III}(a) \Rightarrow Ae^{ik_1a} + Be^{-ik_1a} = Ce^{-k_2b} + De^{k_2b}e^{ik(a+b)} \quad (2.41c)$$

$$\psi'_I(a) = \psi'_{III}(a) \Rightarrow ik_1(Ae^{ik_1a} + Be^{-ik_1a}) = k_2(Ce^{-k_2b} + De^{k_2b})e^{ik(a+b)} \quad (2.41d)$$

⁵⁰ Manasreh.

⁵¹ Astra and Sugiarto, *Pengantar Fisika Zat Padat*.

⁵² Potoak, "Kronigpenneymodel," www.commonswikimedia.org, 2018, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kronigpenneymodel.png>.

dimana kita sudah menggunakan $\psi_{III}(x = a) = \psi_{II}(x = -b) \exp[ik'(a + b)]$ dan memperlakukan hal yang serupa kepada turunannya. Persamaan (2.41) bisa disusun dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ ik_1 & -ik_1 & -k_2 & k_2 \\ e^{ik_1 a} & e^{-ik_1 a} & -e^{-k_2 b} e^{ik(a+b)} & -e^{k_2 b} e^{ik(a+b)} \\ ik_1 e^{ik_1 a} & -ik_1 e^{ik_1 a} & -k_2 e^{-k_2 b} e^{ik(a+b)} & k_2 e^{-k_2 b} e^{ik(a+b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Solusi persamaan matriks ini ada kalau determinan dari koefisien matriks pada ruas kiri juga hilang. Determinan yang hilang menyediakan sebuah kondisi untuk nilai k yang diizinkan yang pada gilirannya berhubungan dengan nilai E yang diizinkan. Pemisahan bagian real dan bagian imajiner serta mengatur setiap bagian ke nol mengarah ke persamaan nilai eigen

$$\cos(k(a + b)) = \cosh(k_2 b) \cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1 k_2} \sinh(k_2 b) \sin(k_1 a) \quad (2.43)$$

Ketika energi partikel lebih besar lebih besar potensial, kita bisa memperoleh persamaan nilai eigen berikut.

$$\cos(k(a + b)) = \cos(k_2 b) \cos(k_1 a) - \frac{(k_2^2 + k_1^2)}{2k_1 k_2} \sin(k_2 b) \sin(k_1 a) \quad (2.44)^{53}$$

Catatan: Untuk menghitung determinan matriks ordo 4 x 4 (persamaan [2.42]), seseorang bisa menggunakan metode Sarrus atau metode kofaktor minor. Namun, proses penjabarannya sangat menjenuhkan. Pada subbab berikutnya akan ditunjukkan bahwa proses penurunan persamaan nilai eigen tersebut lebih mudah dicari dengan menggunakan metode propagasi matriks.

Paragraf sebelumnya telah memaparkan bahwa tujuan utama model Kronig-Penney adalah untuk meramalkan adanya celah energi. Oleh karena itu, Kronig dan Penney menyederhanakan persamaan (2.43) dengan memilih kasus dimana potensial penghalang persegi sebelumnya diubah menjadi potensial penghalang fungsi delta. Fungsi delta artinya nilai V_0 cenderung menuju tak hingga, tetapi nilai b menuju nol. Perlu diketahui bahwa keadaan ini tetap membuat hasil kali $V_0 b$ berhingga. Ilustrasi potensial penghalang fungsi delta periodik ditampilkan pada gambar 2.15.

Pada saat $b \rightarrow 0$, $\sinh(k_2 b) \rightarrow k_2 b$, $\cosh(k_2 b) \rightarrow 1$, $\cos(k(a + b)) \rightarrow \cos(ka)$. Di samping itu, dari persamaan (2.38) dan persamaan (2.39) jika kita menjumlahkan k_1^2 dan k_2^2 kemudian membaginya dengan $2k_1 k_2$, maka akan diperoleh:

$$\frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1 k_2} = \frac{mV_0}{k_1 k_2 \hbar^2} \quad (2.45)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.45) ini dan kondisi dimana saat $b \rightarrow 0$, $\sinh(k_2 b) \rightarrow k_2 b$, dan $\cosh(k_2 b) \rightarrow 1$, kita akan dapat menulis persamaan (2.43) menjadi

$$\cos(ka) = \cos(k_1 a) + \left(\frac{mV_0}{k_1 k_2 \hbar^2} \right) k_2 b \sin(k_1 a) \quad (2.46)$$

$$\cos(ka) = \cos(k_1 a) + \left(\frac{mV_0 b}{k_1 \hbar^2} \right) \sin(k_1 a) \quad (2.47)$$

Jika kita misalkan variabel $P = \left(\frac{mV_0 b a}{\hbar^2} \right)$, maka

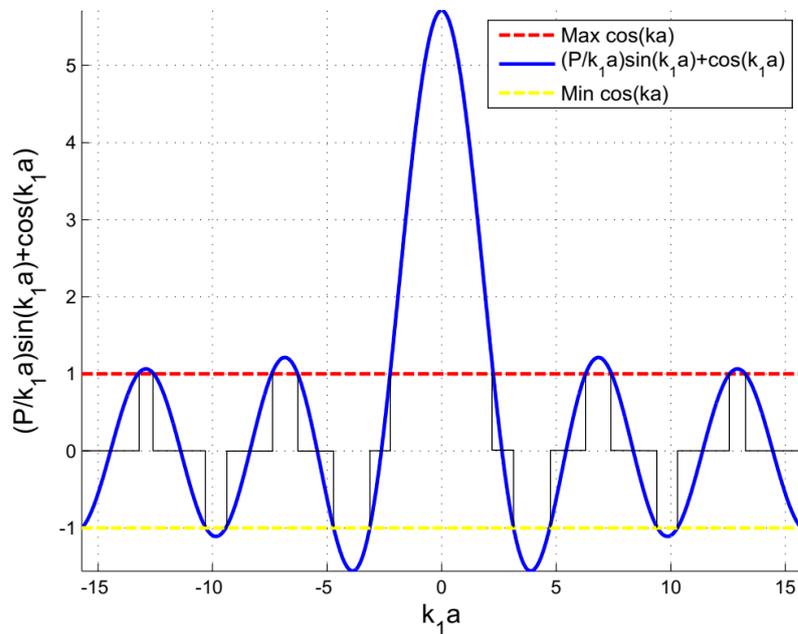
⁵³ Hasbun and Datta, *Introd. Solid State Phys. with MATLAB® Appl.*

$$\frac{P}{k_1 a} = \frac{mV_0 b}{k_1 \hbar^2} \quad (2.48)$$

Nilai P ini sebanding dengan luas energi potensial penghalang $V_0 b$. Jadi, jika kita memperkuat nilai P berarti elektron akan semakin terikat pada sebuah sumur tertentu. Selanjutnya, mari kita substitusikan persamaan (2.48) ini ke dalam persamaan (2.47). Hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\left(\frac{P}{k_1 a}\right) \sin(k_1 a) + \cos(k_1 a) = \cos(ka) \quad (2.49)$$

Persamaan (2.49) menyampaikan syarat agar solusi untuk persamaan nilai eigen itu ada. Seperti kita ketahui bersama bahwa nilai $\cos(ka)$ hanya berada dalam interval -1 s.d. 1 . Sehingga ruas kiri juga harus sedemikian rupa. Untuk nilai $P = 3\pi/2$, nilai-nilai $k_1 a$ yang menghasilkan nilai $\left(\frac{P}{k_1 a}\right) \sin(k_1 a) + \cos(k_1 a)$ berada dalam interval -1 s.d. 1 diperlihatkan pada gambar di bawah ini. Perlu diketahui bahwa sumbu horizontal secara tidak langsung menyatakan sumbu energi karena k_1^2 sebanding dengan energi.



Gambar 2.15 Grafik $\left(\frac{P}{k_1 a}\right) \sin(k_1 a) + \cos(k_1 a)$ sebagai fungsi $k_1 a$ untuk $P = 3\pi/2$. Nilai-nilai $k_1 a$ yang menghasilkan $\left(\frac{P}{k_1 a}\right) \sin(k_1 a) + \cos(k_1 a)$ berada dalam rentang -1 dan $+1$ ditunjukkan oleh potongan (segmen) garis-garis tipis dalam sumbu $k_1 a$ ⁵⁴

Dari gambar di atas, kita dapat melihat bahwa sumbu energi (sumbu $k_1 a$) dibagi menjadi daerah-daerah terlarang dan daerah-daerah yang diizinkan untuk elektron. Daerah terlarang untuk elektron adalah daerah di antara ujung-ujung dua garis tipis; daerah yang diizinkan adalah sepanjang garis tipis. Panjang segmen garis tipis yang horizontal sebanding dengan nilai $k_1 a$. Jadi, makin besar nilai $k_1 a$, makin panjang rentang energi yang diizinkan. Oleh sebab itu, dengan merujuk pada gambar 2.15, kita dapat menarik tiga kesimpulan berikut.

⁵⁴ Sumardi, Kardiawarman, and Loeksmanto, *Fisika Zat Padat*.

- a. Spektrum energi elektron terdiri atas pita-pita energi yang terlarang dan pita-pita energi yang diizinkan.
- b. Lebar pita energi yang diperkenankan sebanding dengan nilai $k_1 a$, artinya makin meingkat nilai $k_1 a$, makin lebar pula pita energi.
- c. Lebar suatu pita energi yang diperkenankan berbanding terbalik dengan nilai P .

Jika P menuju nol, persamaan (2.49) menjadi

$$\cos(k_1 a) = \cos(ka) \quad (2.50)$$

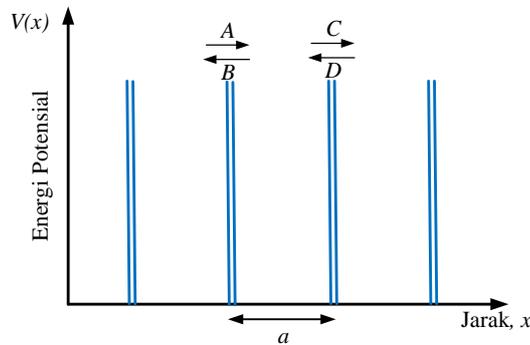
dan $k_1 = k$ sehingga dengan menggunakan persamaan (2.38) dan (2.50), energi elektron menjadi

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.51)$$

Persamaan (2.51) tidak disangka-sangka merupakan energi dari elektron bebas. Hasil ini bersesuaian dengan ekspektasi kita bahwa jika P menuju nol, elektron memang menjadi bebas.

J. Penerapan Propagasi Matriks pada Potensial Periodik

Pada subbab berikut, akan diulas pekerjaan Levi (2003) dalam menurunkan persamaan nilai eigen (persamaan [2.49]) berdasarkan metode propagasi matriks. Penurunan akan dimulai dengan mengacu pada gambar 2.16 untuk kemudahan. Peneliti juga sengaja mengkaji potensial penghalang fungsi delta sebelum mengkaji penghalang persegi. Anda akan melihat pada akhirnya kasus kedua adalah *straightforward* dari kasus pertama.



Gambar 2.16 Susunan periodik dari potensial penghalang fungsi delta. Jarak a mendefinisikan sel satuan dari potensial periodik; Koefisien A , B , C , dan D menyatakan amplitudo gelombang untuk elektron yang terhambur masuk atau keluar dari sel⁵⁵

Teorema Bloch menghubungkan keempat amplitudo gelombang melalui faktor fasa ka sebagai berikut.

$$C = Ae^{ika} \quad (2.52a)$$

$$D = Be^{ika} \quad (2.52b)$$

dimana k adalah vektor gelombang Bloch. Persamaan (2.52) bisa diekspresikan dalam bentuk matriks sebagai berikut.

⁵⁵ Levi, *Applied Quantum Mechanics*.

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = e^{-ika} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \hat{p} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} p_{11} - e^{-ika} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} - e^{-ika} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = 0 \quad (2.54)$$

Terdapat solusi yang menarik pada persamaan homogen linear ini jika determinan dari matriks ordo 2 x 2 di persamaan (2.54) lenyap, yakni:

$$(p_{11} - e^{-ika})(p_{22} - e^{-ika}) - p_{12}p_{21} = 0 \quad (2.55)$$

$$p_{11}p_{22} + e^{-2ika} - p_{22}e^{-ika} - p_{11}e^{-ika} - p_{12}p_{21} = 0 \quad (2.56)$$

karena $p_{11} = p_{22}^*$ dan $p_{12} = p_{21}^*$, ini bisa ditulis kembali sebagai

$$e^{-2ika} - 2p_{11}e^{-ika} = -p_{11}p_{22} + p_{12}p_{21} = -\det(\hat{p}) \quad (2.57)$$

Dari konsep kontinuitas arus, $\det(\hat{p}) = 1$ untuk k real. Kita sekarang mengambil bagian real dari kedua sisi untuk suku dalam p :

$$e^{-2ika} - 2\text{Re}(p_{11})e^{-ika} = -1 \quad (2.58)$$

Catat bahwa $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ mengizinkan kita untuk menulis

$$\cos(2ka) - i\sin(2ka) - 2\text{Re}(p_{11})(\cos(ka) - i\sin(ka)) = -1 \quad (2.59)$$

Mengambil bagian imajiner dari persamaan di atas memberikan

$$\sin(2ka) - 2\text{Re}(p_{11})\sin(ka) = 0 \quad (2.60)$$

dan, catat bahwa $2\sin(x)\cos(y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$, jika $x = y$ kita bisa menuliskan $2\sin x \cos x = \sin(2x)$. Persamaan (2.60) lalu menjadi

$$2\sin(ka)(\cos(ka) - \text{Re}(p_{11})) = 0 \quad (2.61)$$

Persamaan (2.60) dan (2.61) menghendaki $\cos(ka) = \text{Re}(p_{11})$ sehingga k hanya bisa real jika

$$|\text{Re}(p_{11})| \leq 1 \quad (2.62)$$

secara umum, ini menimbulkan pita nilai nyata yang diizinkan dari bilangan gelombang Bloch k .

Pada limit fungsi delta kita mempunyai untuk sebuah penghalang tunggal, $p_{11} = 1 + i\frac{k_o}{k_1}$ (lihat lampiran A), dimana $k_o = \frac{mV_o a}{\hbar^2}$ dan k_1 adalah vektor gelombang diluar penghalang fungsi delta.

Pada model Kronig-Penney dari potensial periodik, kita mempunyai penghalang fungsi delta yang dipisahkan oleh daerah propagasi bebas sepanjang a . Propagasi matriks total untuk sebuah sel dengan jarak a menjadi

$$\hat{P} = \hat{p}_{\delta\text{-barrier}}\hat{p}_{\text{free}} = \begin{bmatrix} 1 + i\frac{k_o}{k_1} & i\frac{k_o}{k_1} \\ -i\frac{k_o}{k_1} & 1 + i\frac{k_o}{k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ik_1 a} & 0 \\ 0 & e^{ik_1 a} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Jadi, p_{11} yang baru untuk sel adalah

$$p_{11} = \left(1 + i\frac{k_o}{k_1}\right) e^{-ik_1 a} \quad (2.64)$$

Kita catat bahwa $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$ sehingga

$$p_{11} = \cos(k_1 a) - i\sin(k_1 a) + i\frac{k_o}{k_1} \cos(k_1 a) + \frac{k_o}{k_1} \sin(k_1 a) \quad (2.65)$$

Mengambil bagian real memberikan

$$\text{Re}(p_{11}) = \cos(k_1 a) + \frac{k_o a}{k_1 a} \sin(k_1 a) \quad (2.66)$$

Untuk model Kronig-Penney, p_{11} diberikan oleh persamaan (2.65), dan bagian real dari p_{11} diberikan oleh persamaan (2.66) sehingga untuk k_1 real seseorang bisa mengaitkan k ke k_1 menggunakan persamaan

$$\cos(ka) = \cos(k_1a) + \frac{k_0a}{k_1a} \cdot \sin(k_1a) \quad (2.67)$$

$$\cos(ka) = \cos(k_1a) + \frac{k_0}{k_1} \cdot \sin(k_1a) \quad (2.68)$$

Substitusikan k_0 dari lampiran B, maka akan diperoleh:

$$\cos(ka) = \cos(k_1a) + \frac{mV_0b}{\hbar^2k_1} \cdot \sin(k_1a) \quad (2.70)^{56}$$

Catatan: k_0 yang disubstitusi ke persamaan (2.69) ada sedikit berbeda dengan yang di lampiran B karena lebar penghalang kita disini adalah b . Persamaan (2.70) sama persis dengan persamaan (2.47). Artinya, kita telah menurunkan persamaan nilai eigen tanpa harus berhadapan dengan determinan matriks ordo 4 x 4 yang super rumit.

K. Massa Efektif Elektron

Ketika potensial periodik absen, kita mempunyai elektron yang massanya seperti massa elektron bebas. Namun, ketika periodik potensial hadir, elektron akan bergerak di dalam kristal dengan massa yang berbeda yang dikenal sebagai massa efektif elektron. Massa efektif elektron dilambangkan dengan m^* . Untuk memperoleh sebuah ungkapan untuk massa efektif, kita bisa mulai dari kasus elektron bebas dan bekerja pada masalah dengan memberikan gaya kepada elektron. Kita tahu dari bahasan sebelumnya bahwa energi elektron bebas bisa dituliskan sebagai $E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$. Dengan menggunakan konsep dualitas, paket gelombang elektron diasumsikan bergerak dengan kecepatan grup $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$. Ketika sebuah gaya, F , diterapkan pada elektron, elektron akan dipercepat dan gerak elektron diberikan oleh relasi klasik

$$\frac{\partial E}{\partial t} = F \cdot v_g \quad (2.71)$$

Di samping itu, jika pita energi elektron $E(\mathbf{k})$ memuncak pada \mathbf{k}_0 , kita bisa mengekspansi $E(\mathbf{k})$ di sekitar \mathbf{k}_0 dengan mengasumsikan kalau \mathbf{k} sangat dekat dengan \mathbf{k}_0 . Suku yang linear dalam $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ menghilang di $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$, dan suku kuadrat akan proporsional dengan $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2$ menurut relasi berikut, dimana \mathbf{k}_0 diasumsikan sebagai titik simetri tinggi:

$$E(\mathbf{k}) \approx E(\mathbf{k}_0) + A(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 \quad (2.72)$$

dimana A adalah kuantitas positif karena E maksimum pada \mathbf{k}_0 . Jelas bahwa kita bisa dengan mudah menebak kalau $A = \frac{\hbar^2}{2m}$. Terlebih lagi, untuk tingkat energi dengan vektor gelombang dekat \mathbf{k}_0 , kita punya

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} \approx \frac{\hbar(k - k_0)}{m^*} \quad (2.73)$$

Percepatan, a , dari elektron pada gaya yang diterapkan dengan demikian diberikan oleh

$$a = \frac{\partial v_g}{\partial t} = \frac{\hbar}{m^*} \frac{dk}{dt} = \frac{1}{m^*} \frac{d\hbar k}{dt} = \frac{1}{m^*} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{m^*} F \quad (2.74)$$

⁵⁶ Levi.

Terlebih lagi, turunan pertama dari kecepatan grup terhadap waktu bisa diekspresikan sebagai

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial t} F \cdot v_g = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{k}^2} F \quad (2.75)$$

Dengan menyamakan persamaan (2.74) dan (2.75), kira bisa menemukan bahwa

$$m^* = \left[\frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{k}^2} \right]^{-1} \quad (2.76)^{57}$$

Di samping secara teoritis, massa efektif elektron juga dapat diukur secara eksperimen menggunakan eksperimen resonansi siklotron⁵⁸. Pada masa kini, massa efektif elektron dalam berbagai macam kristal semikonduktor telah banyak ditemukan. Peneliti dapat memperolehnya di buku bacaan semikonduktor.

⁵⁷ Manasreh, *Introduction to Nanomaterials and Devices*.

⁵⁸ Damanik, *Pengantar Fisika Zat Padat*.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

A. Jenis dan Desain Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian eksperimen teoritis dan komputasi. Pada eksperimen teoritis, peneliti menurunkan persamaan nilai eigen untuk perilaku elektron pada potensial periodik model Kronig-Penney menggunakan metode propagasi matriks. Walaupun metode ini sebenarnya telah digunakan oleh Levi untuk mendapatkan persamaan nilai eigen, Levi belum menerapkannya sampai ke kasus ketika massa efektif elektron diperhitungkan. Selain itu, peneliti juga menggunakan sedikit jalan yang berbeda dengan Levi dimana persamaan vektor gelombang disesuaikan dengan daerahnya, artinya tidak melulu $k_j = \frac{(2m(E-V_j))^{1/2}}{\hbar}$. Pada eksperimen komputasi, peneliti memplot persamaan nilai eigen menggunakan perangkat lunak MATLAB R2009a. Kedua plot tersebut akan dibandingkan pada akhirnya.

B. Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di perpustakaan Fakultas Sains dan Teknologi dan kantor Prodi Fisika Kampus IV Universitas Islam Negeri Sumatera Utara pada bulan Mei sampai bulan Juli 2022.

C. Prosedur Penelitian

1. Alat dan Bahan

Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan alat: pensil, kertas, dan laptop dengan spesifikasi sebagai berikut.

- a. Merek : HP
- b. Processor : Intel(R) Core(TM) i3-6006U CPU @ 2.00GHz
- c. RAM : 4,00 GB
- d. Tipe sistem : 64-bit
- e. Versi Windows : Windows 10

Perangkat lunak yang digunakan adalah MATLAB 2009a.

2. Prosedur Kerja

a. Studi Literatur

Penulis mengkaji berbagai buku dasar dan buku teks internasional serta jurnal nasional untuk memperoleh informasi terkait dengan model Kronig-Penney dan metode propagasi matriks.

b. Penurunan

Proses penurunan persamaan nilai eigen menggunakan metode propagasi matriks.

c. Variabel Komputasi

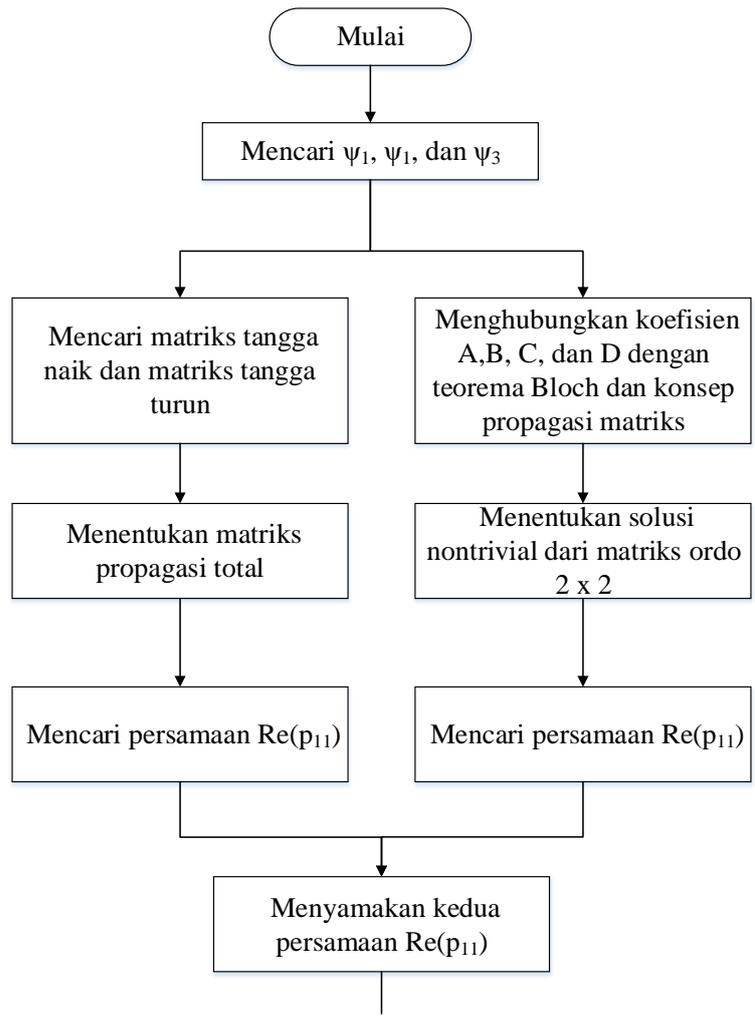
Peneliti mengkaji model Kronig-Penney yang dibentuk dari suatu struktur *superlattice* dengan variabel kontrol dan variabel bebas mengikuti pekerjaan Hasbun dan Datta. Variabel kontrol: potensial penghalang $V_0 = 571,5 \text{ eV}$, lebar sumur $a = 2 \text{ \AA}$, dan lebar penghalang $b = 0,025 \text{ \AA}$; Variabel bebas: vektor gelombang di daerah sumur $k_1 = -\frac{6\pi}{a} - \frac{6\pi}{a}$ dan vektor gelombang Bloch $k = 0 - \frac{3\pi}{(a+b)}$. Kemudian, untuk massa efektif elektron di sumur dan penghalang masing-masing diambil sebesar $m_w = 0,07m$ dan $m_b = 0,09m$. Data ini sengaja dipilih peneliti karena semikonduktor heterostruktur paling sering diteliti adalah heterostruktur GaAs/Al_xGa_{1-x}As dimana massa efektif elektron di heterostruktur tersebut adalah mendekati nilai yang peneliti pilih di atas.

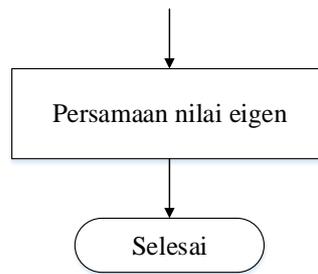
d. Visualisasi

Visualisasi persamaan nilai eigen menggunakan perangkat lunak MATLAB 2009a.

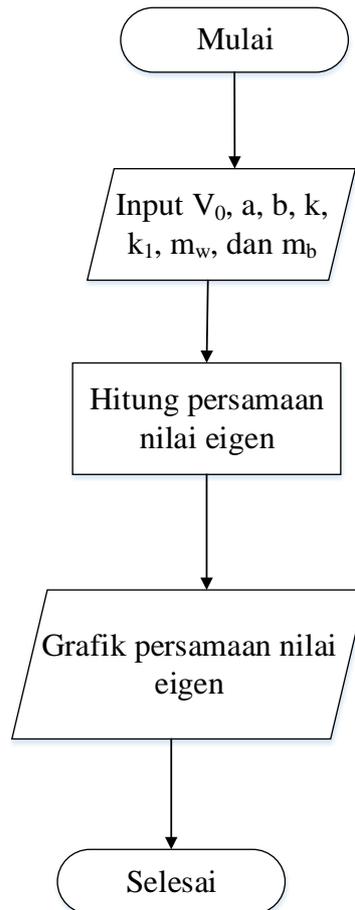
D. Diagram Alir Penelitian

1. Diagram alir penelitian eksperimen teoritis:





2. Diagram alir penelitian eksperimen komputasi:



BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Penurunan Persamaan Nilai Eigen

1. Tanpa Memperhitungkan Konsep Massa Efektif Elektron

Pekerjaan ini sebenarnya telah dikerjakan oleh Levi di dalam bukunya, tetapi kita akan mengulanginya kembali dengan matriks tangga naik dan tangga turun yang sedikit berbeda. Hal ini dikarenakan Levi menggunakan vektor gelombang $k_j = \frac{(2m(E-V_j))^{1/2}}{\hbar}$ untuk setiap daerah, sedangkan peneliti menyesuaikannya dengan daerah yang dikaji. Proses penurunan hampir sama dengan subbab H di bab II. Seperti sebelumnya, hal yang pertama perlu dilakukan adalah menentukan matriks propagasi total \hat{P} . Matriks ini dapat dicari dengan meniru proses yang ada pada lampiran A (lihat persamaan [A.21]), tetapi dengan ekstra matriks ordo 2 x 2 untuk mendeskripsikan propagasi bebas di dalam potensial sumur. Dengan demikian, matriks ini dapat diketahui secara langsung merupakan perkalian dari $\hat{p}_{step-up}$, \hat{p}_{free} , dan $\hat{p}_{step-down}$ berikut.

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} e^{-k_1 a} & 0 \\ 0 & e^{k_1 a} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_2}{ik_1} & 1 - \frac{k_2}{ik_1} \\ 1 - \frac{k_2}{ik_1} & 1 + \frac{k_2}{ik_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-k_2 b} & 0 \\ 0 & e^{k_2 b} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{ik_1}{k_2} & 1 - \frac{ik_1}{k_2} \\ 1 - \frac{ik_1}{k_2} & 1 + \frac{ik_1}{k_2} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Ingat bahwa penulisan persamaan (4.1) mengacu pada Gambar 2.14 yang lebar sumur potensial penghalang (sumur) adalah b (a). Dengan membandingkan Persamaan (4.1) dan tulisan Levi, kita akan mendapati kalau $\hat{p}_{step-up}$, \hat{p}_{free} , dan $\hat{p}_{step-down}$ di sini berbeda sedikit dengannya. Kemudian, melalui persamaan (A.29), kita secara langsung dapat menebak dengan benar bahwa p_{11} adalah:

$$p_{11} = \left(\frac{1}{2ik_1k_2} [2ik_1k_2 \cosh(k_2b) + (k_1^2 - k_2^2) \sinh(k_2b)] \right) e^{-k_1 a} \quad (4.2)$$

$$p_{11} = \left(\cosh(k_2b) + \frac{(k_1^2 - k_2^2)}{2ik_1k_2} \sinh(k_2b) \right) e^{-k_1 a} \quad (4.3)$$

$$p_{11} = \left(\cosh(k_2b) + i \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1k_2} \sinh(k_2b) \right) e^{-k_1 a} \quad (4.4)$$

dan karena $e^{-k_2 a} = \cos(k_2 a) - i \sin(k_2 a)$, maka

$$p_{11} = \left(\cosh(k_2b) + i \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1k_2} \sinh(k_2b) \right) \cos(k_1 a) - i \sin(k_1 a) \quad (4.5)$$

Bagian real untuk p_{11} adalah:

$$Re(p_{11}) = \cosh(k_2b) \cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1k_2} \sinh(k_2b) \sin(k_1 a) \quad (4.6)$$

Pada subbab H, telah diketahui bahwa $\cos(ka) = Re(p_{11})$, tetapi sel kita di sini berjarak $a + b$. Jadi,

$$Re(p_{11}) = \cos(k(a + b)) \quad (4.7)$$

Menyamakan persamaan (4.7) dan (4.6) menghasilkan:

$$\cosh(k_2b) \cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1k_2} \sinh(k_2b) \sin(k_1 a) = \cos(k(a + b)) \quad (4.8)$$

Persamaan (4.8) adalah persamaan nilai eigen yang sangat terkenal dalam pembahasan model Kronig-Penney (lihat bab I dan bab II). Jelas terlihat bahwa kita berhasil memperolehnya tanpa harus berhadapan dengan determinan matriks ordo 4 x 4. Walaupun metode propagasi matriks berisi konsep baru antara lain: (i) matriks propagasi bebas, (ii) matriks tangga naik, dan (iii) matriks tangga turun, pemahaman konsep-konsep tersebut tidak terlalu sulit menurut peneliti. Peneliti yakin mayoritas para pembaca akan memilih menggunakan metode propagasi matriks dibandingkan dengan determinan matriks ordo 4 x 4 jika penjabaran dilakukan secara manual (tanpa melibatkan perangkat lunak semacam Wolfram Mathematica atau Maple). Selain itu, aplikasi metode propagasi matriks tidak hanya terbatas pada masalah potensial penghalang, namun juga diaplikasikan pada berbagai masalah teknik. Sebagai contoh, Levi memaparkan penerapannya pada propagasi gelombang elektromagnetik melewati media dielektrik tidak homogen di dalam bukunya.

2. Memperhitungkan Konsep Massa Efektif Elektron

Persamaan ini sebenarnya telah ditemukan oleh orang dan dapat dibaca pada buku fisika zat padat tingkat tinggi. Namun, peneliti akan menurunkannya kembali dengan metode yang berbeda, yaitu metode propagasi matriks. Proses penurunan mencontoh langkah-langkah yang telah kita lakukan di subbab A. Propagasi matriks total untuk dinamika elektron yang memperhitungkan massa efektif elektron sama dengan 4.1, hanya saja seluruh elemen matriks tangga naik dan tangga turun harus ditukar dengan persamaan (2.18). Jadi,

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} e^{-k_1 a} & 0 \\ 0 & e^{k_1 a} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \frac{m_w k_2}{m_b i k_1} & 1 - \frac{m_w k_2}{m_b i k_1} \\ 1 - \frac{m_w k_2}{m_b i k_1} & 1 + \frac{m_w k_2}{m_b i k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-k_2 b} & 0 \\ 0 & e^{k_2 b} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 + \frac{m_b i k_1}{m_w k_2} & 1 - \frac{m_b i k_1}{m_w k_2} \\ 1 - \frac{m_b i k_1}{m_w k_2} & 1 + \frac{m_b i k_1}{m_w k_2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

dimana m_b adalah massa efektif elektron di potensial penghalang, sedangkan m_w adalah massa efektif elektron di potensial sumur. Lambang massa efektif elektron di sini tidak diberi tanda * karena lambang penulisan ini juga diakui dalam tulisan-tulisan internasional fisika. w sebagai subscip m_w menandakan *well* (sumur); b sebagai subscip m_b menandakan *barrier*(penghalang).

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} e^{-k_1 a} & 0 \\ 0 & e^{k_1 a} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \frac{m_w k_2}{m_b i k_1} & 1 - \frac{m_w k_2}{m_b i k_1} \\ 1 - \frac{m_w k_2}{m_b i k_1} & 1 + \frac{m_w k_2}{m_b i k_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{m_b i k_1}{m_w k_2}\right) e^{-k_2 b} & \left(1 - \frac{m_b i k_1}{m_w k_2}\right) e^{-k_2 b} \\ \left(1 - \frac{m_b i k_1}{m_w k_2}\right) e^{k_2 b} & \left(1 + \frac{m_b i k_1}{m_w k_2}\right) e^{k_2 b} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$p_{11} = \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{m_w k_2}{m_b i k_1}\right) \left(1 + \frac{m_b i k_1}{m_w k_2}\right) e^{-k_2 b} + \left(1 - \frac{m_w k_2}{m_b i k_1}\right) \left(1 - \frac{m_b i k_1}{m_w k_2}\right) e^{k_2 b} \right]$$

$$x(e^{-k_1 a}) \quad (4.11)$$

$$p_{11} = \frac{1}{4ik_1 k_2 m_b m_w} [(2ik_1 k_2 m_b m_w - (k_1^2 m_b^2 - k_2^2 m_w^2)) e^{-k_2 b} + (2ik_1 k_2 m_b m_w + (k_1^2 m_b^2 - k_2^2 m_w^2)) e^{k_2 b}] (e^{-k_1 a}) \quad (4.12)$$

$$p_{11} = \frac{1}{4ik_1 k_2 m_b m_w} [2ik_1 k_2 m_b m_w (e^{-k_2 b} + e^{k_2 b}) + (k_1^2 m_b^2 - k_2^2 m_w^2) (e^{k_2 b} - e^{-k_2 b})] (e^{-k_1 a}) \quad (4.13)$$

$$p_{11} = \frac{1}{4ik_1 k_2 m_b m_w} [2ik_1 k_2 m_b m_w \cosh(k_2 b) + (k_1^2 m_b^2 - k_2^2 m_w^2) 2 \sinh(k_2 b)] (e^{-k_1 a}) \quad (4.14)$$

$$p_{11} = \frac{1}{2ik_1 k_2 m_b m_w} [2ik_1 k_2 m_b m_w \cosh(k_2 b) + (k_1^2 m_b^2 - k_2^2 m_w^2) \sinh(k_2 b)] (e^{-k_1 a}) \quad (4.15)$$

dan karena $e^{-k_2 a} = \cos(k_2 a) - i \sin(k_2 a)$, maka

$$p_{11} = \frac{1}{2ik_1 k_2 m_b m_w} [2ik_1 k_2 m_b m_w \cosh(k_2 b) + (k_1^2 m_b^2 - k_2^2 m_w^2) \sinh(k_2 b)] (\cos(k_1 a) - i \sin(k_1 a)) \quad (4.16)$$

$$p_{11} = \frac{1}{2ik_1 k_2 m_b m_w} [2ik_1 k_2 m_b m_w \cosh(k_2 b) (\cos(k_1 a) - i \sin(k_1 a)) + (k_1^2 m_b^2 - k_2^2 m_w^2) \sinh(k_2 b) (\cos(k_1 a) - i \sin(k_1 a))] \quad (4.17)$$

$$p_{11} = \frac{1}{2ik_1 k_2 m_b m_w} [2ik_1 k_2 m_b m_w \cosh(k_2 b) \cos(k_1 a) + 2k_1 k_2 m_b m_w \cosh(k_2 b) \sin(k_1 a) + (k_1^2 m_b^2 - k_2^2 m_w^2) \sinh(k_2 b) \cos(k_1 a) - (k_1^2 m_b^2 - k_2^2 m_w^2) \sinh(k_2 b) i \sin(k_1 a)] \quad (4.18)$$

Bagian real untuk p_{11} adalah:

$$Re(p_{11}) = \cosh(k_2 b) \cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 m_w^2 - k_1^2 m_b^2)}{2k_1 k_2 m_b m_w} \sinh(k_2 b) \sin(k_1 a) \quad (4.19)$$

Menyamakan persamaan (4.7) dan (4.19) menghasilkan:

$$\cosh(k_2 b) \cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 m_w^2 - k_1^2 m_b^2)}{2k_1 k_2 m_b m_w} \sinh(k_2 b) \sin(k_1 a) = \cos(k(a + b)) \quad (4.20)$$

Pada akhirnya, persamaan nilai eigen yang lengkap diperoleh. Hasil ini sama persis dengan yang ada di dalam tulisan Fujiwara.⁵⁹

Sebagai tambahan dan berdasarkan persamaan (2.44), peneliti memprediksi persamaan (4.20) berubah menjadi

$$\cos(k_2 b) \cos(k_1 a) - \frac{(k_2^2 m_w^2 + k_1^2 m_b^2)}{2k_1 k_2 m_b m_w} \sin(k_2 b) \sin(k_1 a) = \cos(k(a + b)) \quad (4.21)$$

ketika energi elektron lebih kuat dari besar potensial penghalang.

Ketika limit fungsi delta dikenakan pada model Kronig-Penney, maka persamaan (4.20) menjadi

⁵⁹ Kenzo Fujiwara, "Growth and Characterization," in *Semiconductor Superlattices: Growth and Electronic Properties*, ed. H T Grahn (Berlin: World Scientific, 1994), 1–27.

$$\cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 m_w^2 - k_1^2 m_b^2)}{2k_1 k_2 m_b m_w} k_2 b \sin(k_1 a) = \cos(ka) \quad (4.22)$$

Mengikuti jejak subbab G, $k_2 \gg k_1$, kita peroleh:

$$\cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 m_w^2)}{2k_1 k_2 m_b m_w} k_2 b \sin(k_1 a) = \cos(ka) \quad (4.23)$$

$$\cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2) m_w}{2k_1 m_b} b \sin(k_1 a) = \cos(ka) \quad (4.24)$$

Karena $V_0 \rightarrow \infty$, tentu $k_2 \simeq \sqrt{\frac{2m_b V_0}{\hbar^2}}$ atau $k_2^2 b = \frac{2m_b V_0 b}{\hbar^2}$. Jadi,

$$\cos(k_1 a) + \frac{m_b V_0 b}{\hbar^2} \frac{m_w}{k_1 m_b} \sin(k_1 a) = \cos(ka) \quad (4.25)$$

Jika kita misalkan variabel $P = \left(\frac{m_b V_0 b a}{\hbar^2}\right)$, maka

$$\frac{P}{k_1 a} = \frac{m_b V_0 b}{k_1 \hbar^2} \quad (4.26)$$

Dengan demikian, persamaan (4.25) menjadi:

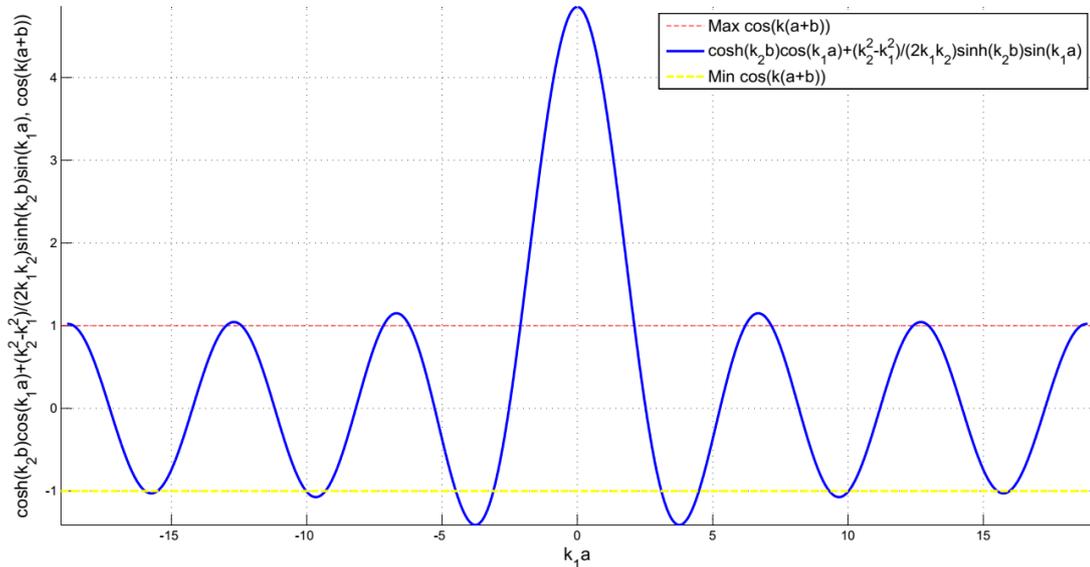
$$\frac{P}{k_1 a} \frac{m_w}{m_b} \sin(k_1 a) + \cos(k_1 a) = \cos(ka) \quad (4.27)$$

Persamaan (4.26) sangat mirip dengan persamaan (2.49), kecuali suku pertamanya, yaitu P didefinisikan sedikit berbeda dan ada variabel massa efektif elektron.

B. Visualisasi Persamaan Nilai Eigen

1. Tanpa Memperhitungkan Konsep Massa Efektif Elektron

Visualisasi persamaan (4.8) ditampilkan pada gambar berikut ini.

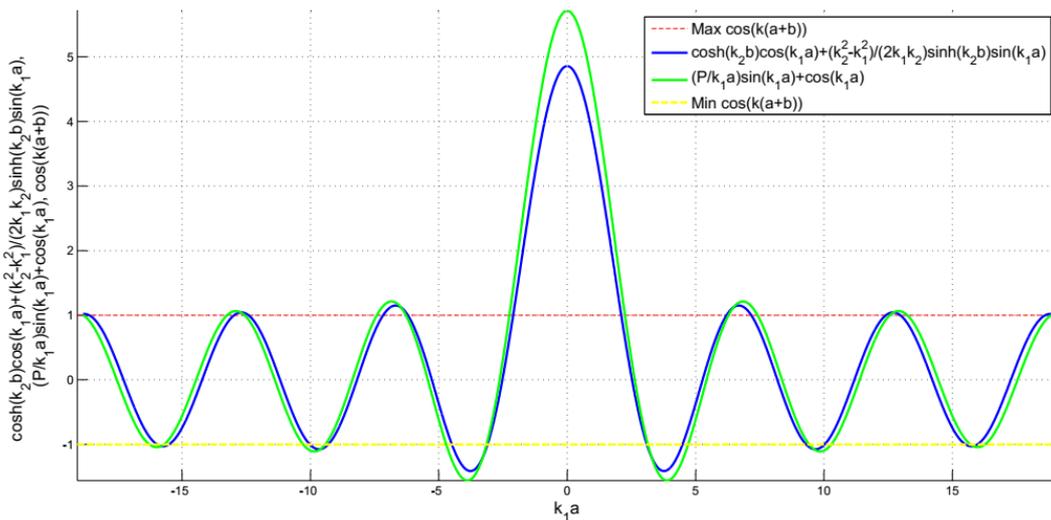


Gambar 4.1 Grafik persamaan nilai eigen ketika $V_0 = 571,5 \text{ eV}$, $a = 2 \text{ \AA}$, dan $b = 0,025 \text{ \AA}$. Pita energi yang diizinkan bergantung pada persamaan $\cosh(k_2 b) \cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1 k_2} \sinh(k_2 b) \sin(k_1 a)$ yang mana kurvanya terletak di antara ∓ 1

Selanjutnya, mari kita satukan kurva persamaan $\cosh(k_2 b) \cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1 k_2} \sinh(k_2 b) \sin(k_1 a)$ dengan kurva limit fungsi deltanya (Gambar 2.15) dalam satu gambar untuk mengamati perbedaan keduanya dengan jelas. Kita dapat melihat dengan jelas bahwa kedua kondisi tersebut sama-sama meramalkan kebenaran teori pita energi. Berdasarkan pengamatan kurva biru dan hijau, peneliti menduga kondisi $V_0 = 571,5 \text{ eV}$, $a = 2 \text{ \AA}$, dan $b = 0,025 \text{ \AA}$ memang sengaja diatur oleh Hasbun dan Datta untuk alasan-alasan berikut:

- Memudahkan kita untuk mengamati keberadaan celah energi dengan jelas di *figure window* MATLAB.
- Posisi kurva yang terbentuk hampir sama dengan kurva kondisi limit fungsi delta ketika $P = 3\pi/2$ yang mana telah tertera pada berbagai referensi pada umumnya.

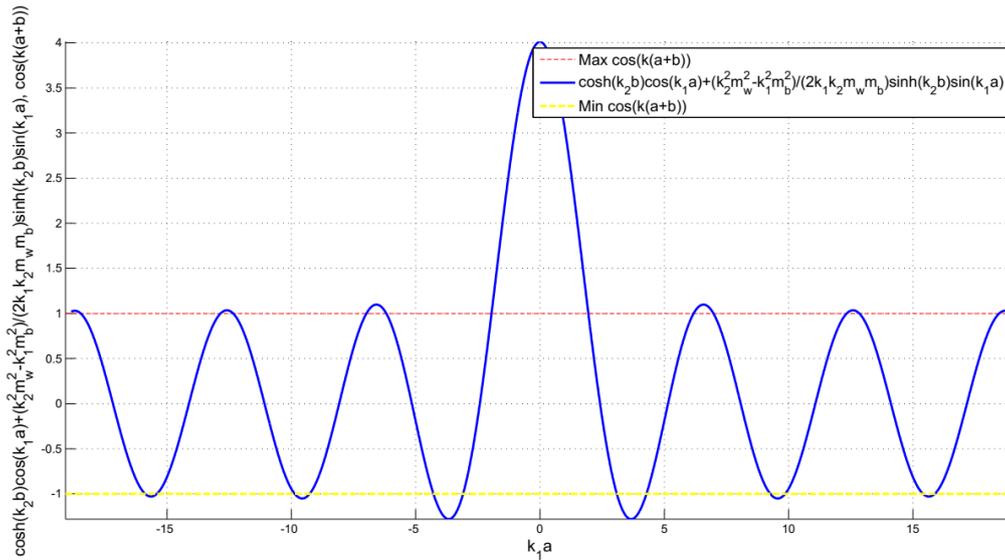
Pada nilai $k_1 a$ berapakah saja kurva persamaan $\cosh(k_2 b) \cos(k_1 a) + \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2k_1 k_2} \sinh(k_2 b) \sin(k_1 a)$ berada di luar ∓ 1 akan dianalisis di masa mendatang.



Gambar 4.2 Grafik penyatuan persamaan nilai eigen pada dua kondisi. Kondisi sebelumnya: kurva biru; kondisi limit fungsi delta: kurva hijau.

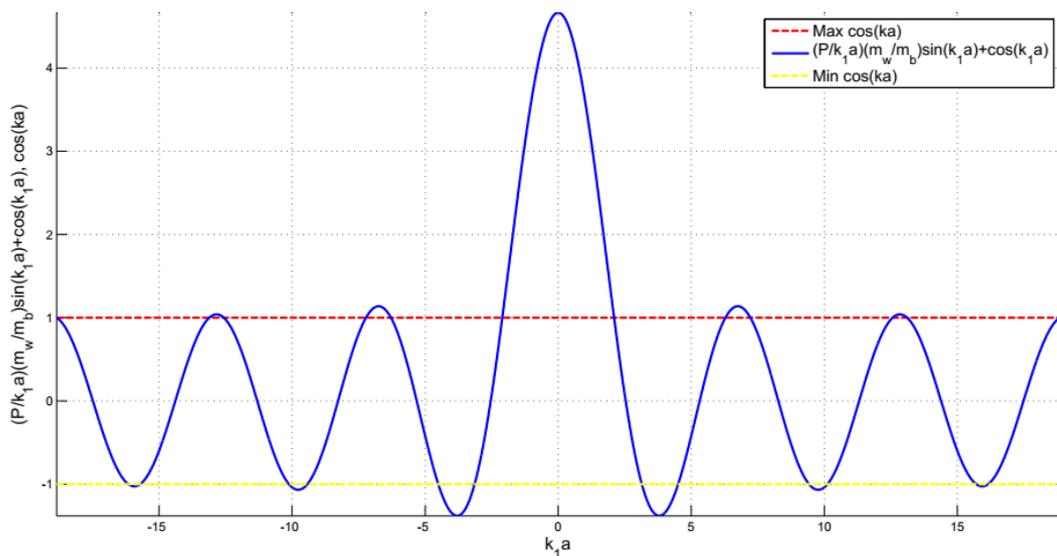
2. Memperhitungkan Konsep Massa Efektif Elektron

Peneliti menunjukkan plot persamaan (4.20) pada gambar berikut.



Gambar 4.3 Grafik persamaan nilai eigen yang telah diperhitungkan konsep massa efektif elektron

Selanjutnya, Grafik persamaan nilai eigen yang telah dikenakan limit fungsi delta diperlihatkan pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Grafik persamaan nilai eigen pada limit fungsi delta. Nilai P diambil sama seperti sebelumnya, yakni $3\pi/2$.

Pada nilai k_1a berapakah saja kurva persamaan $\frac{P}{k_1a} \frac{m_w}{m_b} \sin(k_1a) + \cos(k_1a)$ atau kurva persamaan $\cosh(k_2b) \cos(k_1a) + \frac{(k_2^2 m_w^2 - k_1^2 m_b^2)}{2k_1 k_2 m_b m_w} \sinh(k_2b) \sin(k_1a)$ berada di luar ∓ 1 akan diteliti di masa depan.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

1. Persamaan nilai eigen untuk tingkah laku elektron dalam potensial periodik model Kronig-Penney yang memperhitungkan konsep massa efektif telah diturunkan dengan menggunakan metode propagasi matriks, yaitu

$$\cosh(k_2b) \cos(k_1a) + \frac{(k_2^2 m_w^2 - k_1^2 m_b^2)}{2k_1 k_2 m_b m_w} \sinh(k_2b) \sin(k_1a) = \cos(k(a+b))$$

di mana persamaan ini sama persis yang tercatat dalam referensi. Kemudian, persamaan tersebut berubah menjadi

$$\cos(k_1a) + \frac{m_b V_0 b}{\hbar^2} \frac{m_w}{k_1 m_b} \sin(k_1a) = \cos(ka)$$

saat pendekatan fungsi delta dikenakan pada potensial penghalang.

2. Hasil plot grafik persamaan nilai eigen yang melibatkan konsep massa efektif elektron menunjukkan perbedaan yang tidak terlalu jauh dengan yang tanpa melibatkan konsep massa efektif elektron. Keduanya sama-sama meramalkan kebenaran teori pita energi.

B. Saran

Adapun saran dari penelitian ini sebagai acuan perkembangan riset selanjutnya adalah:

1. Peneliti selanjutnya dapat menguji variabel kontrol dan variabel bebas dengan nilai yang berbeda dari penelitian ini.
2. Peneliti selanjutnya dapat menghitung pada nilai k_1a berapa sajakah kurva persamaan nilai eigen berada di luar ∓ 1 .
3. Peneliti selanjutnya dapat melakukan komputasi lanjutan untuk plot kurva E terhadap k di zona Brillouin diperluas bagi kasus yang memperhitungkan massa efektif elektron.
4. Peneliti selanjutnya dapat menganalisis perilaku elektron dalam potensial periodik model Kronig-Penney yang energinya lebih besar dari kekuatan potensial penghalang.
5. Peneliti selanjutnya dapat menganalisis perilaku elektron dalam potensial periodik di luar model kronig-Penney.

DAFTAR PUSTAKA

- Astra, I Made, and Iwan Sugiarto. *Pengantar Fisika Zat Padat*. Edited by Arryta Canty. 2nd ed. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka, 2015.
- Beiser, Arthur. *Konsep Fisika Modern*. Edited by Carol Manik. Translated by The Houw Liong. 3rd ed. Jakarta: Erlangga, 1986.
- Bewick, Sharon. "Cathode Ray Tube Title." www.commons.wikimedia.org, 2010. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cathode_ray_tube.png.
- Caesar, AG. "Atom Diagram." www.commons.wikimedia.org, 2018. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atom_Diagram.svg.
- Damanik, Asan. *Pengantar Fisika Zat Padat*. Edited by Yoseph Yapi Taum. Yogyakarta: Sanata Dharma University Press, 2016. <https://books.google.co.id/books?id=V97SDwAAQBAJ>.
- Deych, Lev I. *Advanced Undergraduate Quantum Mechanics. Advanced Undergraduate Quantum Mechanics*. Cham: Springer International Publishing, 2018. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-71550-6>.
- Fujiwara, Kenzo. "Growth and Characterization." In *Semiconductor Superlattices: Growth and Electronic Properties*, edited by H T Grahn, 1–27. Berlin: World Scientific, 1994.
- Gautreau, Ronald, and William Savin. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Modern Physics*. Edited by H. Wibi Hardani. Translated by Soni Astranto. 2nd ed. Schaum's Outline Series. Jakarta: Erlangga, 2006. <https://books.google.co.id/books?id=7mxvGduPeagC>.
- Griffiths, David J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2nd ed. Upper Saddle River: Pearson Education, Inc., 2005.
- Hamid, Abdul. *Pendahuluan Fisika Zat Padat*. Edited by Abdul Hamid. Banda Aceh: Syiah Kuala University Press, 2019. <https://books.google.co.id/books?id=KvAvEAAAQBAJ>.
- Hasbun, Javier E, and Trinanjan Datta. *Introductory Solid State Physics with MATLAB® Applications. Introductory Solid State Physics with MATLAB® Applications*. Boca Raton: CRC Press, 2019. <https://doi.org/10.1201/9780429086601>.
- Hydrargyrum. "Bragg Diffraction 2." www.commons.wikimedia.org, 2011.
- JoaoXP. "Construcao Da Celula de Wigner-Seitz." www.commons.wikimedia.org, 2011. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Construcao_da_celula_de_wigner-seitz.png.
- Kalliauer, Johannes. "Double-Slit." www.commons.wikimedia.org, 2017. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-slit.svg>.
- Kanginan, Marthen. *Fisika 3 Untuk SMA/MA Kelas XII*. Edited by Supriyana,

- Syarifuddin, and Fachrizal Rian Pratama. Jakarta: Erlangga, 2013.
- Karmakar, R, A Biswas, S Mukherjee, and A Deyasi. "Calculating Transmission Coefficient of Double Quantum Well Triple Barrier Structure Having Parabolic Geometry Using Propagation Matrix Method." *International Journal of Engineering and Advanced Technology* 1, no. 2 (2011): 37–41. <https://www.ijeat.org/portfolio-item/b0129111111/>.
- Krane, Kenneth. *Fisika Modern*. Translated by Hans J. Wospakrik. Jakarta: Universitas Indonesia, 2014.
- Kuiper, Pieter. "Atom DeBroglie." www.commons.wikimedia.org, 2009. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atom_deBroglie.png.
- Levi, A F J. *Applied Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. <https://books.google.co.id/books?id=40rRzNbuhpAC>.
- LMB. "Potential-Actual." www.commons.wikimedia.org, 2006. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Potential-actual.PNG>.
- Manasreh, Omar. *Introduction to Nanomaterials and Devices*. 1st ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2012. <https://books.google.co.id/books?id=h5zJgIKd2GkC>.
- Maryana, Okky Fajar Tri, and Yuant Tiandho. *Fisika Kuantum: Sejarah Dan Kisah Inspiratif Para Tokohnya*. Bandung: Yrama Widya, 2019.
- Nimpasha. "Первая Модель Атома Пудинг с Изюмом." www.commons.wikimedia.org, 2017. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Первая_модель_атома_Пудинг_с_изюмом.jpg.
- Ong, Russell. "Perhitungan Koeffisien Transmisi Pada Struktur Superlattice Menggunakan Metode Propagasi Matriks." *Jurnal Ilmu Fisika Dan Teknologi* 6, no. 1 (2022): 30–39. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.30821/fisitekfisitek.v6i1.11549>.
- Pearsall, Thomas P. *Quantum Photonics*. Graduate Texts in Physics. Cham: Springer International Publishing, 2017. <https://books.google.co.id/books?id=XmclDwAAQBAJ>.
- Potoak. "Kronigpenneymodel." www.commons.wikimedia.org, 2018. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kronigpenneymodel.png>.
- Rafaelgarcia. "Electrona in Crystallo Fluentia." www.commons.wikimedia.org, 2007. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electrona_in_crystallo_fluentia.svg.
- Roshan. "Davisson-Germer Experiment." www.commons.wikimedia.org, 2012. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Davisson-Germer_experiment.svg.
- S-kei. "BandGap-Comparison-Withfermi-E." www.commons.wikimedia.org, 2006. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BandGap-Comparison-withfermi-E.PNG>.
- Sani, Ridwan Abdullah, and Muhammad Kadri. *Fisika Kuantum*. Edited by Hastuti. Jakarta: Bumi Aksara, 2017.
- Snaily. "Hydrogen2." www.commons.wikimedia.org, 2006.

- <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hydrogen2.svg>.
- Sudarmo, Unggul. *Kimia 1 Untuk SMA/MA Kelas X*. Edited by Bima Prasetya and Supriyana. Jakarta: Erlangga, 2013.
- Sugiyono, Vani. *Mekanika Kuantum*. Edited by Tri Admojo. Jakarta: Buku Seru, 2016.
- Sumardi, Yosaphat, Kardiawarman, and Waloejo Loeksmanto. *Fisika Zat Padat*. 1st ed. Jakarta: Universitas Terbuka, 2016.
- Supriadi, B, N Rizky, Yushardi, N C Agustin, S Epiningtiyas, and M S Makmun. "Analysis of the Relationship between the Distance Barriers GaAs and GaAs with the Transmission Coefficient and the Reflection Coefficient." *Journal of Physics: Conference Series* 1538, no. 1 (2020): 12039. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1538/1/012039>.
- Surya, Yohanes. *Fisika Modern*. Tangerang: Kandel, 2009.
- Takanen, Ville. "Evolution of Atomic Models Infographic." www.commonswikimedia.org, 2013. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Evolution_of_atomic_models_infographic.svg.
- Thomas-sk. "Planck Law Radiation." www.commonswikimedia.org, 2009. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Planck_law_radiation.PNG.
- Ulya, Ishmah. "Analisis Koefisien Transmisi InN/GaN Penghalang Tunggal Hingga Penghalang Rangkap Lima Dengan Metode Propagasi Dan Matriks Transfer." Universitas Sumatera Utara, 2022.

LAMPIRAN

A. Penentuan p_{II} dan p_{I2} pada Kasus Potensial Penghalang Persegi Terhingga

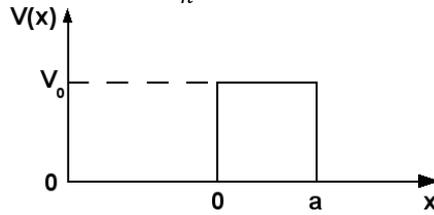
Pada keadaan $E < V_0$, fungsi gelombang pada tiap-tiap daerah berdasarkan pada Gambar A.1 yaitu

$$\psi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad (\text{A.1})$$

$$\psi_{II} = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} \quad (\text{A.2})$$

$$\psi_{III} = Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x} \quad (\text{A.3})$$

dengan $k_1 = \frac{(2mE)^{1/2}}{\hbar}$ dan $k_2 = \frac{(2m(V_0-E))^{1/2}}{\hbar}$



Gambar A.1 Potensial Penghalang Persegi Terhingga

Agar fungsi gelombang kontinu di $x = 0$, harus berlaku syarat kontinuitas:

$$\psi_I|_{x=0} = \psi_{II}|_{x=0} \quad (\text{A.4})$$

$$A + B = C + D \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d\psi_I}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{d\psi_{II}}{dx}\bigg|_{x=0} \quad (\text{A.6})$$

$$ik_1(A - B) = k_2(C - D) \quad (\text{A.7})$$

Persamaan (A.5) dan (A.7) diubah dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik_1 & -ik_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik_1 & -ik_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_2}{ik_1} & 1 - \frac{k_2}{ik_1} \\ 1 - \frac{k_2}{ik_1} & 1 + \frac{k_2}{ik_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \hat{p}_{step-up} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{p}_{step-up} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_2}{ik_1} & 1 - \frac{k_2}{ik_1} \\ 1 - \frac{k_2}{ik_1} & 1 + \frac{k_2}{ik_1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Sesudah itu, langkah selanjutnya adalah mencari matriks propagasi \hat{p}_{free} untuk propagasi gelombang di antara bidang batas $x = 0$ dan $x = a$ dengan lebar penghalang sebesar a .

$$Ce^{k_2a} = F \quad (\text{A.13})$$

$$De^{-k_2a} = G \quad (\text{A.14})$$

Persamaan (A.13) dan (A.14) dibuat ke dalam bentuk matriks sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} e^{k_2 a} & 0 \\ 0 & e^{-k_2 a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-k_2 a} & 0 \\ 0 & e^{k_2 a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \hat{p}_{free} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{p}_{free} = \begin{bmatrix} e^{-k_2 a} & 0 \\ 0 & e^{k_2 a} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Tahap berikutnya adalah menentukan matriks propagasi untuk daerah pada bidang batas $x = a$ ($\hat{p}_{step-down}$). Partikel yang keluar dari penghalang beranalogi dengan keadaan ketika partikel menembus penghalang sehingga untuk mendapatkan matriks tangga turun (*step-down*) pada bidang batas $x = a$ dapat ditinjau kembali sebagai tinjauan awal ketika menentukan matriks $\hat{p}_{step-up}$ di $x = 0$. Namun demikian, sedikit perbedaan mengharuskan vektor gelombang yang terdapat pada elemen matriks matriks $\hat{p}_{step-up}$, yaitu k_2 menjadi ik_1 . Maka, matriks $\hat{p}_{step-down}$

$$\hat{p}_{step-down} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{ik_1}{k_2} & 1 - \frac{ik_1}{k_2} \\ 1 - \frac{ik_1}{k_2} & 1 + \frac{ik_1}{k_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Berdasarkan dari persamaan (A.12), (A.18), dan (A.19), maka propagasi matriks untuk satu unit penghalang \hat{P} dapat ditentukan.

$$\hat{P} = \hat{p}_{step-up} \hat{p}_{free} \hat{p}_{step-down} \quad (\text{A.20})$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_2}{ik_1} & 1 - \frac{k_2}{ik_1} \\ 1 - \frac{k_2}{ik_1} & 1 + \frac{k_2}{ik_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-k_2 a} & 0 \\ 0 & e^{k_2 a} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{ik_1}{k_2} & 1 - \frac{ik_1}{k_2} \\ 1 - \frac{ik_1}{k_2} & 1 + \frac{ik_1}{k_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_2}{ik_1} & 1 - \frac{k_2}{ik_1} \\ 1 - \frac{k_2}{ik_1} & 1 + \frac{k_2}{ik_1} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \frac{ik_1}{k_2})e^{-k_2 a} & (1 - \frac{ik_1}{k_2})e^{-k_2 a} \\ (1 - \frac{ik_1}{k_2})e^{k_2 a} & (1 + \frac{ik_1}{k_2})e^{k_2 a} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\hat{P} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_2}{ik_1} & 1 - \frac{k_2}{ik_1} \\ 1 - \frac{k_2}{ik_1} & 1 + \frac{k_2}{ik_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 + \frac{ik_1}{k_2})e^{-k_2 a} & (1 - \frac{ik_1}{k_2})e^{-k_2 a} \\ (1 - \frac{ik_1}{k_2})e^{k_2 a} & (1 + \frac{ik_1}{k_2})e^{k_2 a} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Kita misalkan elemen-elemen matriks dari propagasi matriks adalah

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

jadi elemen matriks p_{11} adalah

$$p_{11} = \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{k_2}{ik_1}\right) \left(1 + \frac{ik_1}{k_2}\right) e^{-k_2 a} + \left(1 - \frac{k_2}{ik_1}\right) \left(1 - \frac{ik_1}{k_2}\right) e^{k_2 a} \right] \quad (\text{A.26})$$

$$p_{11} = \frac{1}{4ik_1 k_2} \left[2ik_1 k_2 (e^{-k_2 a} + e^{k_2 a}) + (k_1^2 - k_2^2) (e^{k_2 a} - e^{-k_2 a}) \right] \quad (\text{A.27})$$

$$p_{11} = \frac{1}{4ik_1 k_2} \left[2ik_1 k_2 2 \cosh(k_2 a) + (k_1^2 - k_2^2) 2 \sinh(k_2 a) \right] \quad (\text{A.28})$$

$$p_{11} = \frac{1}{2ik_1 k_2} \left[2ik_1 k_2 \cosh(k_2 a) + (k_1^2 - k_2^2) \sinh(k_2 a) \right] \quad (\text{A.29})$$

Sebagai tambahan, bagaimana persamaan p_{11} pada saat keadaan sebaliknya ($E > V_0$)?. Jawabannya dapat diperoleh dengan hanya menukar $k_2 \rightarrow k_2/i$. Jadi, p_{11} yang diperoleh adalah:

$$p_{11} = -i \frac{(k_2^2 + k_1^2)}{2k_1 k_2} \sin(k_2 a) + \cos(k_2 a) \quad (\text{A.30})$$

Selanjutnya, p_{22} dapat diperoleh dengan mudah melalui persamaan (A.24). p_{22} adalah

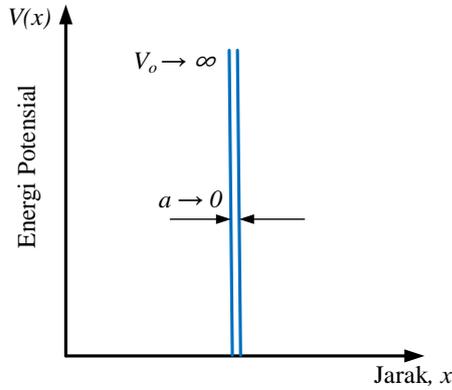
$$p_{22} = \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{k_2}{ik_1}\right) \left(1 - \frac{ik_1}{k_2}\right) e^{-k_2 a} + \left(1 - \frac{k_2}{ik_1}\right) \left(1 + \frac{ik_1}{k_2}\right) e^{k_2 a} \right] \quad (\text{A.31})$$

$$p_{22} = \frac{1}{4} \left[\left(-i \frac{k_1}{k_2}\right) (e^{-k_2 a} + e^{k_2 a}) + i \left(\frac{k_2}{k_1}\right) (e^{k_2 a} - e^{-k_2 a}) \right] \quad (\text{A.32})$$

$$p_{22} = \frac{i}{2k_1 k_2} [k_2^2 \sinh(k_2 a) - k_1^2 \cosh(k_2 a)] \quad (\text{A.33})^{60}$$

B. Penentuan p_{11} dan p_{22} pada Kasus Potensial Penghalang Fungsi Delta

Satu jalan untuk memperoleh potensial penghalang dalam limit fungsi delta adalah meninjau potensial penghalang persegi dengan energi V_0 dan lebar L yang sudah kita analisis di lampiran A. Limit fungsi delta bisa dicapai jika kita memperbolehkan $V_0 \rightarrow \infty$ sementara $a \rightarrow 0$. Ide ini diilustrasikan di Gambar B.1.



Gambar B.1 Potensial penghalang fungsi delta

Sekarang, k_2 pada lampiran A menjadi $k_2 = \frac{(2mV_0)^{1/2}}{\hbar}$ atau

$$k_2^2 a = \frac{2mV_0 a}{\hbar^2} \quad (\text{B.1})$$

Karena keadaan dari limit fungsi delta, fungsi hiperbolik $\cosh(k_2 a) \rightarrow 1$ dan $\sinh(k_2 a) \rightarrow k_2 a$ sehingga

$$p_{11} = \frac{1}{2ik_1 k_2} [2ik_1 k_2 + (k_1^2 - k_2^2) k_2 a] \quad (\text{B.2})$$

$$p_{11} = 1 + \frac{-k_2^2 k_2 a}{2ik_1 k_2} = 1 + i \frac{k_2^2 a}{2k_1} \quad (\text{B.3})$$

Substitusi persamaan (B.1) ke (B.3) menghasilkan:

$$p_{11} = 1 + i \frac{mV_0 a}{k_1 \hbar^2} \quad (\text{B.4})$$

$$p_{11} = 1 + i \frac{k_0}{k_1} \quad (\text{B.5})$$

dimana $k_0 = \frac{mV_0 a}{\hbar^2}$ adalah sebuah konstanta.

Selanjutnya, kita meniru metode di atas untuk memperoleh p_{22} . Kondisi $V_0 \rightarrow \infty$ dan $a \rightarrow 0$ membuat p_{22} pada persamaan (A.33) menjadi

$$p_{22} = \frac{i}{2k_1 k_2} [k_2^2 k_2 a - k_1^2] \quad (\text{B.6})$$

⁶⁰ Ishmah Ulya, "Analisis Koefisien Transmisi InN/GaN Penghalang Tunggal Hingga Penghalang Rangkap Lima Dengan Metode Propagasi Dan Matriks Transfer" (Universitas Sumatera Utara, 2022).

$$p_{22} \simeq \frac{i}{2k_1 k_2} [k_2^2 k_2 a] = \frac{i}{2k_1} [k_2^2 a] \quad (\text{B.7})$$

$$p_{22} = \frac{2imV_0 a}{2k_1 \hbar^2} \quad (\text{B.8})$$

$$p_{22} = i \frac{k_0}{k_1} \quad (\text{B.9})^{61}$$

C. Kode Program untuk Memvisualisasi Gambar 4.1

```
clear all
clc

global fL fR u0 a b
u0=150;
a=2; b=0.025;
kp=(0:0.005:3.0)*pi/(a+b);
k=(-6:0.005:6)*pi/a;
fR=@(kv,a,b) cos(kv*(a+b));
fL=@(E,u0,a,b) ((u0-2*E)/(2*sqrt(u0-E).*sqrt(E)).*...
sinh(sqrt(u0-E)*b).*sin(sqrt(E)*a)+cosh(sqrt(u0-
E)*b).* ...
cos(sqrt(E)*a);
yR=fR(kp,a,b);
yL=fL(k.^2,u0,a,b);
line([min(k*(a+b)) max(k*(a+b))],[max(yR),
max(yR)], 'Color','r',...
'LineStyle','--')
hold on
plot(k*a,yL,'b','linewidth',2)
line([min(k*(a+b)) max(k*(a+b))],[min(yR),
min(yR)], 'Color','y','linewidth',2,'LineStyle','--')
xlabel('k_1a','FontSize',14)
ylabel('cosh(k_2b)cos(k_1a)+(k_2^2-
k_1^2)/(2k_1k_2)sinh(k_2b)sin(k_1a),
cos(k(a+b))','FontSize',14)
axis tight
lgd=legend('Max cos(k(a+b))','cosh(k_2b)cos(k_1a)+(k_2^2-
k_1^2)/(2k_1k_2)sinh(k_2b)sin(k_1a)',...
'Min cos(k(a+b))',1)
set(lgd,'FontSize',13);
grid on
hold off
```

D. Kode Program untuk Memvisualisasi Gambar 4.2

```
clear all
clc
```

⁶¹ Levi, *Applied Quantum Mechanics*.

```

global fL fR u0 a b
u0=150;
a=2; b=0.025;
kp=(0:0.005:3.0)*pi/(a+b);
k=(-6:0.005:6)*pi/a;
fR=@(kv,a,b) cos(kv*(a+b));
fL=@(E,u0,a,b) ((u0-2*E)/(2*sqrt(u0-E).*sqrt(E)).*...
sinh(sqrt(u0-E)*b).*sin(sqrt(E)*a)+cosh(sqrt(u0-
E)*b).* ...
cos(sqrt(E)*a);
fLL=@(E,a) ((3*pi/2)/(a.*sqrt(E)).*sin(sqrt(E)*a)+
cos(sqrt(E)*a);
yR=fR(kp,a,b);
yL=fL(k.^2,u0,a,b);
yLL=fLL(k.^2,a);
line([min(k*(a+b)) max(k*(a+b))],[max(yR),
max(yR)], 'Color','r',...
'LineStyle','--')
hold on
plot(k*a,yL,'b','linewidth',2)
plot(k*a,yLL,'g','linewidth',2)
line([min(k*(a+b)) max(k*(a+b))],[min(yR),
min(yR)], 'Color','y','linewidth',2,'LineStyle','--')
xlabel('k_1a','FontSize',14)
ylabel('cosh(k_2b)cos(k_1a)+(k_2^2-
k_1^2)/(2k_1k_2)sinh(k_2b)sin(k_1a),
(P/k_1a)sin(k_1a)+cos(k_1a), cos(k(a+b))','FontSize',14)
axis tight
lgd=legend('Max cos(k(a+b))','cosh(k_2b)cos(k_1a)+(k_2^2-
k_1^2)/(2k_1k_2)sinh(k_2b)sin(k_1a)',...
'(P/k_1a)sin(k_1a)+cos(k_1a)','Min cos(k(a+b))',1)
set(lgd,'FontSize',13);
grid on
hold off

```

E. Kode Program untuk Memvisualisasi Gambar 4.3

```

clear all
clc

global fL fR u0 a b
u0=150;
a=2; b=0.025;
kp=(0:0.005:3.0)*pi/(a+b);
k=(-6:0.005:6)*pi/a;
fR=@(kv,a,b) cos(kv*(a+b));

```

```

fL=@(E,u0,a,b) ((u0*0.07^2-
2*E*0.09^2)./(2*sqrt(u0-
E).*sqrt(E)*0.07*0.09)).*...
sinh(sqrt(u0-E)*b).*sin(sqrt(E)*a)+cosh(sqrt(u0-
E)*b).* ...
cos(sqrt(E)*a);
yR=fR(kp,a,b);
yL=fL(k.^2,u0,a,b);
line([min(k*(a+b)) max(k*(a+b))],[max(yR),
max(yR)], 'Color','r',...
'LineStyle','--')
hold on
plot(k*a,yL,'b','linewidth',2)
line([min(k*(a+b)) max(k*(a+b))],[min(yR),
min(yR)], 'Color','y','linewidth',2,'LineStyle','
--')
xlabel('k_1a','FontSize',14)
ylabel('cosh(k_2b)cos(k_1a)+(k_2^2m_w^2-
k_1^2m_b^2)/(2k_1k_2m_wm_b)sinh(k_2b)sin(k_1a),
cos(k(a+b))','FontSize',14)
axis tight
lgd=legend('Max
cos(k(a+b))','cosh(k_2b)cos(k_1a)+(k_2^2m_w^2-
k_1^2m_b^2)/(2k_1k_2m_wm_b)sinh(k_2b)sin(k_1a)',
...
'Min cos(k(a+b))',1)
set(lgd,'FontSize',13);
grid on
hold off

```

F. Kode Program untuk Memvisualisasi Gambar 4.4

```

clear
global fL fR a
a=3; % well, barrier widths in
ab units
kp=(0:0.005:3.0)*pi/a; %vary k'
k=(-6:0.005:6)*pi/a; %vary k (associated
with energy)
%right hand side of energy equation (x=a, y=b)
fR=@(kv,a) cos(kv*a);
%left hand side of energy equation (x=a, y=b)

```

```

fL=@(E,a)
((3*pi/2)./(a.*sqrt(E))).*sin(sqrt(E)*a)*(0.07/0
.09)+ cos(sqrt(E)*a);
%Evaluation and plotting (yR=RHS, yL=LHS)
yR=fR(kp,a);
yL=fL(k.^2,a); %Note: in dimensionless units
energy=k^2
line([min(k*a) max(k*a)], [max(yR),
max(yR)], 'Color', 'r', 'linewidth', 2, 'LineStyle', '
--') %min(RHS)
hold on
plot(k*a, yL, 'b', 'linewidth', 2) %LHS
line([min(k*a) max(k*a)], [min(yR),
min(yR)], 'Color', 'y', 'linewidth', 2, 'LineStyle', '
--') %max(RHS)
xlabel('k_1a', 'FontSize', 14)
ylabel('(P/k_1a) (m_w/m_b) sin(k_1a)+cos(k_1a),
cos(ka)', 'FontSize', 14)
axis tight
lgd=legend('Max
cos(ka)', '(P/k_1a) (m_w/m_b) sin(k_1a)+cos(k_1a)',
'Min cos(ka)', 1)
set(lgd, 'FontSize', 13);
grid on
hold off

```