

DIKTAT

FISIKA KUANTUM

D
I
S
U
S
U
N

Oleh:

Russell Ong, M.S
NIP. 19930625 202012 1 010



**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS ISLAM
NEGERI SUMATERA UTARA
MEDAN
2022**

**LEMBAR PENGESAHAN
DIKTAT**

MATA KULIAH : FISIKA KUANTUM
SEMESTER : VI (ENAM)
PROGRAM STUDI : FISIKA
FAKULTAS : SAINS DAN TEKNOLOGI UIN SUMATERA UTARA

DISAHKAN OLEH
TANGGAL : 19 SEPTEMBER 2022
DI : MEDAN

MEDAN, 19 SEPTEMBER 2022

Mengetahui
Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kelembagaan
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sumatera Utara



Dr. Abdul Halim Daulay, S.T., M.Si
NIP. 19811106 200501 1 003

SURAT REKOMENDASI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	:	Dr. Abdul Halim Daulay, S.T., M.Si
NIP.	:	19811106 200501 1 003
Pangkat/ Gol.	:	Penata Tk. I (III/d)
Unit Kerja	:	Fakultas Sains dan Teknologi

menyatakan bahwa diktat saudara

Nama	:	Russell Ong, M.S
NIP	:	19930625 202012 1 010
Pangkat/ Gol.	:	Penata Muda Tk. I (III/b)
Unit Kerja	:	Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi UIN SU Medan
Judul Diktat	:	Fisika Kuantum

Telah memenuhi syarat sebagai suatu karya ilmiah (Diktat) dalam mata kuliah fisika kuantum pada Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sumatera Utara Medan.

Demikianlah rekomendasi ini diberikan untuk dapat dipergunakan seperlunya.

Medan, 19 September 2022
Konsultan,



Dr. Abdul Halim Daulay, S.T., M.Si
NIP. 19811106 200501 1 003

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alam, segala puji bagi Allah Azza wa Jalla atas segala rahmat, nikmat, anugerah, dan karunianya sehingga saya dapat menyelesaikan diktat yang berjudul “**Fisika Kuantum**”. Semoga shalawat dan salam selalu senantiasa tercurahkan bagi Junjungan Baginda Nabi Muhammad *Shalallu'alaihi wa salam*. Beliau adalah sosok yang telah mengeluarkan manusia dari gelap gulita kekafiran menuju cahaya kebenaran yang terang benderang.

Pada kurikulum program studi fisika atau program studi pendidikan fisika mana pun, fisika kuantum merupakan salah satu matakuliah wajib bagi mahasiswa jurusan fisika. Permasalahan yang dihadapi mahasiswa dalam mempelajari fisika kuantum adalah kurangnya buku-buku referensi yang mudah dipahami dengan bahasa para mahasiswa. Fakta ini menyebabkan banyak mahasiswa yang gagal memahami hal-hal yang esensial dari ilmu fisika kuantum. Jika seorang mahasiswa melanjutkan studi pascasarjana jurusan fisika, terutama di luar negeri, maka situasi ini tentu akan sangat menyulitkan. Selama menjalani perkuliahan S2 di Taiwan (Republic of China), penulis memiliki banyak teman orang Indonesia yang mengambil jurusan fisika. Beberapa dari mereka akhirnya mengundurkan diri karena tidak sanggup mengikuti matakuliah wajib yang berbau kuantum.

Penulisan diktat ini bertujuan untuk melengkapi persyaratan pengusulan pengangkatan pertama sebagai Asisten Ahli di Fakultas Sains dan Teknologi Program Fisika UIN Sumatera Utara, Medan. Di samping itu, diktat ini diharapkan sebagai karya ilmiah yang akan mendampingi mahasiswa selama mempelajari matakuliah fisika kuantum sampai matakuliah komputasi dan simulasi material. Mahasiswa yang mengambil matakuliah fisika modern juga dipersilahkan untuk membaca diktat ini sebagai tambahan karena matakuliah fisika kuantum sesungguhnya merupakan pendalaman dari matakuliah fisika modern.

Seperti sebuah pepatah, “Tak ada gading yang tak retak” tentu saja di dalam diktat yang sederhana ini akan terdapat banyak sekali lubang-lubang yang mungkin saja mengganggu, karena tujuan diktat ini memang dibatasi hanya untuk proses belajar-mengajar di dalam kelas. Saran dan kritik yang membangun dari teman-teman pembaca sangat penulis harapkan.

Medan, 19 September 2022
Penulis



Russell Ong, M.S
NIP. 19930625 202012 1 010

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN DIKTAT	i
SURAT REKOMENDASI	ii
KATA PENGANTAR	iii
DAFTAR ISI.....	iv
BAB I RADIASI BENDA HITAM.....	1
A. Eksperimen Hertz.....	1
B. Hipotesis Kuantum Planck.....	6
C. Hukum Radiasi Rayleigh-Jeans dan Hukum Radiasi Planck.....	8
Bab II EFEK FOTOLISTRIK DAN EFEK COMPTON	12
A. Efek Fotolistrik	12
B. Difraksi Sinar-X.....	15
C. Efek Compton	17
Bab III MODEL ATOM RUTHERFORD DAN MODEL ATOM BOHR.....	21
A. Model Atom Rutherford	21
B. Spektrum Atom Hidrogen.....	23
C. Model Atom Bohr	26
D. Percobaan Franck-Hertz	31
E. Prinsip Korespondensi Bohr atau Mengapa Momentum Anguler Terkuantisasi?	33
Bab IV DUALISME GELOMBANG PARTIKEL	35
A. Hipotesis de Broglie.....	35
B. Eksperimen Davisson-Germer	37
C. Mikroskop Elektron	39
D. Paket Gelombang.....	43
E. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg	48
Bab V PERSAMAAN SCHRODINGER DAN FUNGSI GELOMBANG	53
A. Konstruksi Persamaan Schrödinger	53
1. Persamaan Schrödinger untuk Partikel Bebas	53
2. Persamaan Schrödinger untuk Partikel dalam Potensial.....	55
3. Persamaan Schrödinger dalam Bentuk Operator	55
B. Solusi dari Persamaan Tak Gayut Waktu	55
C. Interpretasi Fisis dari $\psi^*\psi$	56
D. Kondisi untuk Fungsi Gelombang yang Diizinkan.....	57
E. Konservasi Probabilitas	58
F. Nilai Ekspektasi	60
G. Postulat-postulat Dasar	61
H. Evolusi Waktu dari Keadaan Stasioner	61
I. Kondisi untuk Transisi yang Diizinkan	63
J. Ortogonalitas Dua Keadaan	64
Bab VI OPERATOR, NILAI EIGEN, DAN FUNGSI EIGEN.....	66

A. Operator Linear	66
B. Operator Komut dan Nonkomut	68
C. Operator <i>Self-adjoint</i> dan Hermitian.....	70
Bab VII POTENSIAL SEDERHANA	72
A. Partikel Bebas	72
B. Partikel di Dalam Kotak.....	73
DAFTAR PUSTAKA	76

BAB I

RADIASI BENDA HITAM

Fisika klasik didominasi oleh mekanika klasik Newtonian dan teori gelombang elektromagnetik Maxwellian yang dinyatakan oleh empat persamaan Maxwell. Selain kedua pilar tersebut, terdapat dukungan kokoh ketiga untuk fisika pada tahun 1900, yaitu: termodinamika dan mekanika statistik. Termodinamika klasik adalah karya banyak orang (Carnot, Mayer, Helmholtz, Clausius, dan Lord Kelvin). Ini sangat penting karena dimulai dengan dua proposisi sederhana dan memberikan hasil yang solid dan konklusif terlepas dari detail mekanisme fisik. Mekanika statistik, didirikan oleh Maxwell, Clausius, Boltzmann, dan Gibbs, menggunakan metode teori probabilitas untuk menghitung rata-rata dan fluktuasi dari rata-rata untuk sistem yang mengandung banyak partikel atau moda getaran. Sangat menarik bahwa fisika kuantum tidak dimulai dengan pemecahan hukum Maxwell atau Newton yang diterapkan pada atom, tetapi dengan sebuah masalah mekanika statistik klasik, yaitu menghitung intensitas radiasi pada panjang gelombang tertentu dari rongga yang dipanaskan. Solusi putus asa untuk masalah radiasi ini ditemukan oleh ahli termodinamika klasik, Max Planck, pada tahun 1900. Memang, penting bahwa Planck dan Einstein kembali lagi dan lagi ke fondasi yang umum dan sederhana mengenai termodinamika dan mekanika statistik sebagai satu-satunya dasar tertentu untuk teori kuantum baru. Meskipun penulis tidak akan mengikuti argumen termodinamika asli sepenuhnya, kita akan melihat dalam bab ini bagaimana Planck sampai pada distribusi spektral yang benar untuk radiasi rongga dengan hanya mengizinkan energi tertentu untuk osilator pemancar radiasi di dinding rongga.

A. Eksperimen Hertz

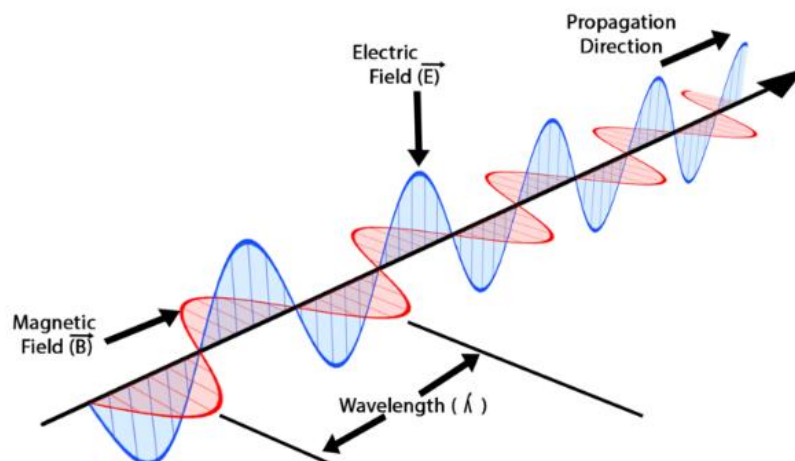
Sungguh ironis bahwa eksperimentalis yang sama yang dengan sangat hati-hati mengkonfirmasi bahwa Gelombang Maxwell yang “bermodel baru” benar-benar ada dan memiliki sifat yang sama dengan cahaya juga meruntuhkan teori gelombang elektromagnetik sebagai penjelasan lengkap tentang cahaya. Untuk memahami ironi ini, mari kita tinjau secara singkat teori elektromagnetisme yang dikembangkan oleh fisikawan besar Skotlandia James Clerk Maxwell antara tahun 1865 dan 1873.

Maxwell terutama tertarik pada efek osilasi arus listrik di kabel. Menurut teorinya, arus bolak-balik akan berfluktuasi medan listrik dan magnet di daerah sekitar gangguan asli. Apalagi gelombang ini diprediksi memiliki frekuensi yang sama dengan frekuensi dari osilasi saat ini. Selain itu, dan yang paling penting, teori Maxwell meramalkan bahwa gelombang yang dipancarkan akan berperilaku dalam segala hal seperti cahaya, yaitu: elektromagnetik. gelombang akan dipantulkan oleh cermin logam, akan dibiaskan oleh dielektrik seperti kaca, akan menunjukkan polarisasi dan interferensi, dan akan bergerak keluar dari kawat melalui ruang hampa dengan kecepatan $3,0 \times 10^8$ m/s. Secara alami ini menyebabkan dengan postulat pemersatu dan penyederhanaan bahwa cahaya juga merupakan tipe Maxwell gelombang atau gangguan elektromagnetik, yang diciptakan oleh osilator listrik frekuensi sangat tinggi dalam materi. Pada akhir abad ke-19 sifat yang tepat dari

osilator submikroskopik bermuatan ini tidak diketahui (Planck menyebutnya resonator), tetapi fisikawan berasumsi bahwa entah bagaimana mereka mampu memancarkan gelombang cahaya yang frekuensinya sama dengan frekuensi gerak osilator.

Bahkan saat ini, bagaimanapun, tampak bahwa model emisi cahaya ini tidak mampu untuk verifikasi eksperimental langsung, karena yang tertinggi frekuensi listrik yang dapat dicapai sekitar 10^9 Hz dan cahaya tampak diketahui memiliki frekuensi satu juta kali lebih tinggi. Tapi Heinrich Hertz melakukan hal terbaik berikutnya. Dalam serangkaian percobaan yang brilian dan menyeluruh, dia menunjukkan bahwa teori Maxwell benar dan Arus listrik memang memancarkan gelombang elektromagnetik yang memiliki setiap karakteristik cahaya kecuali panjang gelombang yang sama dengan cahaya. Menggunakan sederhana osilator celah percikan yang terdiri dari dua rintisan pendek yang diakhiri dengan logam kecil bola dipisahkan oleh celah udara sekitar setengah inci, dia menerapkan pulsa tegangan tinggi, yang menyebabkan percikan melompati celah dan menghasilkan osilasi listrik frekuensi tinggi sekitar 5×10^8 Hz. Osilasi ini, atau dering, terjadi saat celah udara tetap berjalan, dan muatan melonjak kembali dan antara bola sampai keseimbangan listrik tercapai. Menggunakan sebuah antenna loop sederhana dengan celah percikan kecil sebagai penerima, Hertz sangat cepat berhasil mendeteksi radiasi dari osilator celah percikannya, bahkan pada jarak beberapa ratus meter. Selain itu, ia menemukan radiasi yang terdeteksi memiliki panjang gelombang sekitar 60 cm, sesuai dengan frekuensi osilator 5×10^8 Hz. (Ingat bahwa $c = \lambda/f$, di mana λ adalah panjang gelombang dan f adalah frekuensi.)

Hertz selanjutnya melanjutkan untuk menunjukkan bahwa: gelombang elektromagnetik dapat dipantulkan, dibiaskan, difokuskan, terpolarisasi, dan dibuat untuk mengganggu. Secara singkat, dia meyakinkan fisikawan pada periode itu Gelombang Hertzian dan gelombang cahaya adalah satu dan sama. Model klasik untuk emisi cahaya adalah ide yang waktunya telah tiba. Itu menyebar seperti api. Itu Gagasan bahwa cahaya adalah gelombang elektromagnetik yang dipancarkan oleh muatan listrik submikroskopik berosilasi (sekarang dikenal sebagai elektron atom) diterapkan di suksepsi cepat untuk transmisi cahaya melalui padatan, untuk refleksi dari permukaan logam, dan efek Zeeman yang baru ditemukan.



Gambar 1.1 Cahaya atau gelombang radio yang jauh dari sumbernya menurut Maxwell dan Hertz

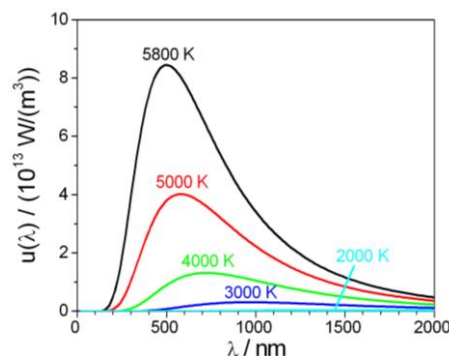
Sumber: www.commonswikimedia.org

Pada tahun 1896, Pieter Zeeman, seorang fisikawan Belanda, menemukan bahwa medan magnet yang kuat berubah frekuensi cahaya yang dipancarkan oleh gas bercahaya. Dalam kemenangan yang mengesankan untuk Maxwell, ditemukan bahwa persamaan Maxwell diprediksi dengan benar (dalam kebanyakan kasus) perubahan getaran osilator listrik dan karenanya, perubahan frekuensi cahaya yang dipancarkan. Maxwell, dengan Hertz di belakang takhta, berkuasa, karena dia telah menyatukan kerajaan listrik, magnet, dan cahaya yang sebelumnya independen! (lihat Gambar 1.1.)

Pernyataan singkat yang dibuat oleh Hertz mengakhiri diskusi kami tentang konfirmasinya tentang sifat gelombang elektromagnetik cahaya. Dalam menjelaskan pemancar celah percikannya, ia menekankan bahwa “permukaan kutub celah percikan harus sering dipoles ulang” untuk memastikan pengoperasian percikan yang andal. Rupanya hasil ini awalnya cukup misterius bagi Hertz. Dalam upaya untuk memecahkan misteri, ia kemudian menyelidiki efek samping ini dan menyimpulkan bahwa itu adalah sinar ultraviolet dari percikan awal yang bekerja pada permukaan logam yang bersih yang menyebabkan arus mengalir lebih bebas di antara kutub celah percikan. Di proses verifikasi teori gelombang elektromagnetik cahaya, Hertz telah menemukan efek fotolistrik, sebuah fenomena yang akan merusak prioritas teori gelombang cahaya dan menetapkan teori partikel cahaya pada pijakan yang setara.

B. Radiasi Benda Hitam

Keberhasilan luar biasa dari teori emisi cahaya Maxwell segera menyebabkan untuk mencoba menerapkannya pada teka-teki lama tentang radiasi yang disebut masalah "benda hitam". Masalahnya adalah untuk memprediksi intensitas radiasi pada panjang gelombang tertentu yang dipancarkan oleh padatan panas yang bersinar pada suhu tertentu. Alih-alih langsung meluncurkan solusi Planck untuk masalah ini, mari kami mengembangkan perasaan akan pentingnya fisika klasik dengan tinjauan singkat dari sejarahnya. Thomas Wedgwood, kerabat Charles Darwin dan pembuat Cina, tampaknya menjadi yang pertama mencatat karakter universal dari semua benda yang dipanaskan. Pada 1792, ia mengamati bahwa semua benda di ovennya, terlepas dari sifat kimia, ukuran, atau bentuknya, menjadi merah pada suhu yang sama. Pengamatan kasar ini sangat dipertajam oleh kemajuan keadaan spektroskopi, sehingga pada pertengahan 1800-an diketahui bahwa padatan bercahaya memancarkan spektrum kontinu daripada pita atau garis yang dipancarkan oleh pemanasan gas (lihat Gambar 1.2).



Gambar 1.2 Emisi dari padatan bercahaya

Sumber: www.commonswikimedia.org

Pada tahun 1859, Gustav Kirchhoff membuktikan teorema sebagai hal yang penting sebagai teorema loop sirkuitnya ketika dia menunjukkan dengan argumen

berdasarkan termodinamika bahwa untuk setiap benda dalam kesetimbangan termal dengan radiasi yang dipancarkan daya sebanding dengan daya yang diserap. Lebih spesifik,

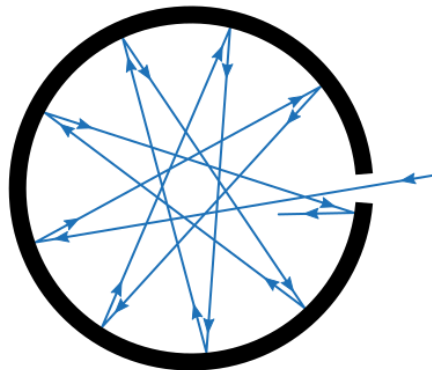
$$e_f = J(f, T)A_f \quad (1.1)$$

dimana e_f adalah daya yang dipancarkan per satuan luas per satuan frekuensi oleh benda yang dipanaskan, A_f adalah daya serap (fraksi dari daya datang yang diserap per satuan luas per satuan frekuensi oleh benda yang dipanaskan), dan $J(f, T)$ adalah fungsi universal (sama untuk semua benda) yang hanya bergantung pada f , cahaya frekuensi, dan T , suhu mutlak benda. Benda hitam didefinisikan sebagai benda yang menyerap semua radiasi elektromagnetik yang jatuh padanya dan akibatnya tampak hitam. Ini memiliki $A_f = 1$ untuk semua frekuensi dan teorema Kirchhoff untuk benda hitam menjadi

$$e_f = J(f, T) \quad (1.2)$$

Persamaan (1.2) menunjukkan bahwa daya yang dipancarkan per satuan luas per satuan frekuensi oleh benda hitam hanya bergantung pada suhu dan frekuensi cahaya dan bukan pada susunan fisik dan kimia benda hitam, sesuai dengan Pengamatan awal Wedgwood.

Karena penyerapan dan emisi dihubungkan oleh teorema Kirchhoff, kita lihat bahwa benda hitam atau penyerap sempurna juga merupakan radiator yang ideal. Dalam prakteknya, lubang kecil di rongga yang dipanaskan, seperti port di oven, berperilaku seperti benda hitam karena lubang seperti itu menjebak semua radiasi yang datang (Gambar 1.3). Jika arah radiasi dibalik pada Gambar 1.3, cahaya yang dipancarkan oleh a bukaan kecil berada dalam kesetimbangan termal dengan dinding, karena telah diserap dan dipancarkan kembali berkali-kali.



Gambar 1.3 Pembukaan ke rongga di dalam benda adalah pendekatan yang baik untuk benda hitam.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Perkembangan penting berikutnya dalam upaya memahami karakter universal radiasi yang dipancarkan oleh padatan bercahaya berasal dari Austria fisikawan Josef Stefan (1835-1893) pada tahun 1879. Dia menemukan secara eksperimental bahwa daya total per satuan luas yang dipancarkan pada semua frekuensi oleh padatan panas, etotal, adalah sebanding dengan pangkat empat suhu mutlaknya. Karena itu, Hukum Stefan dapat ditulis sebagai

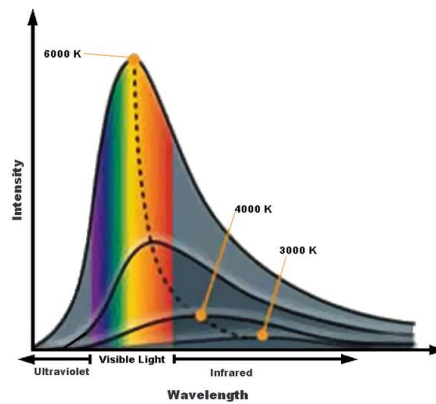
$$e_{total} = \int_0^{\infty} e_f df = \sigma T^4 \quad (1.3)$$

di mana e_{total} adalah daya per satuan luas yang dipancarkan pada permukaan benda hitam di semua frekuensi, e_f adalah daya per satuan luas per satuan frekuensi yang dipancarkan oleh benda hitam, T adalah suhu mutlak benda, dan adalah σ Konstanta Stefan-Boltzmann, diberikan oleh $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$. Sebuah tubuh yang bukan radiator ideal akan mematuhi hukum umum yang sama tetapi dengan koefisien, a , kurang dari 1:

$$e_{total} = a\sigma T^4 \quad (1.4)$$

Hanya lima tahun kemudian konfirmasi lain yang mengesankan dari teori elektromagnetik cahaya Maxwell terjadi ketika Boltzmann menurunkan hukum Stefan dari kombinasi termodinamika dan persamaan Maxwell.

Penemuan spektrometer memungkinkan para fisikawan untuk memperoleh data tentang bentuk kurva radiasi termal dari sumber radiasi. Bentuk kurva radiasi termal dari suatu benda hitam adalah sebagai berikut.



Gambar 1.4 Radiasi spektrum benda hitam pada beberapa suhu

Sumber: www.commonswikimedia.org

Seperti dapat dilihat pada Gambar 1.4, panjang gelombang menandai daya maksimum emisi benda hitam, λ_{maks} , bergeser ke arah panjang gelombang yang lebih pendek saat benda hitam menjadi lebih panas. Ini sesuai dengan pengamatan umum Wedgwood bahwa benda-benda di tempat pembakarannya berubah dari merah kusam menjadi oranye menjadi putih sebagai suhu dinaikkan. Efek sederhana dari $\lambda_{maks} \propto T^{-1}$ ini bukan pasti didirikan, namun, sampai sekitar 20 tahun setelah Kirchhoff's kertas mani telah memulai pencarian untuk menemukan bentuk universal fungsi $J(f, T)$. Pada tahun 1893, Wilhelm Wien mengusulkan bentuk umum untuk hukum distribusi benda hitam $J(f, T)$ yang memberikan eksperimen yang benar perilaku dari maksimal dengan suhu. Hukum ini disebut hukum perpindahan Wien dan dapat ditulis

$$\lambda_{maks} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ mK} \quad (1.5)$$

di mana λ_{maks} adalah panjang gelombang dalam meter yang sesuai dengan benda hitam intensitas maksimum dan T adalah suhu mutlak permukaan benda yang memancarkan radiasi. Dengan asumsi bahwa sensitivitas puncak dari mata manusia (yang terjadi pada sekitar 500 nm [cahaya biru-hijau]) bertepatan dengan λ_{maks} untuk Matahari (benda hitam), kita dapat memeriksa konsistensinya hukum perpindahan Wien dengan hukum Stefan dengan menghitung ulang Matahari suhu permukaan:

$$T = \frac{2,898 \times 10^{-3} \text{ mK}}{500 \times 10^{-9} \text{ m}} = 5800 \text{ K} \quad (1.6)$$

Jadi kita memiliki kesepakatan yang baik antara pengukuran yang dilakukan pada semua panjang gelombang dan pada panjang gelombang intensitas maksimum.

Sejauh ini, daya yang diradiasikan per satuan luas per satuan frekuensi oleh benda hitam, $J(f, T)$ telah dibahas. Namun, lebih nyaman untuk mempertimbangkan kerapatan energi spektral, atau energi per satuan volume per satuan frekuensi radiasi di dalam rongga benda hitam, $u(f, T)$. Untuk cahaya yang seimbang dengan dinding, daya yang dipancarkan per sentimeter persegi bukaan sebanding dengan kerapatan energi cahaya di dalam rongga. Karena radiasi rongga adalah isotropik dan tidak terpolarisasi, seseorang dapat meratakan arah untuk menunjukkan bahwa konstanta proporsionalitas antara $J(f, T)$ dan $u(f, T)$ adalah $c/4$, di mana c adalah kecepatan cahaya. Karena itu,

$$J(f, T) = u(f, T)c/4 \quad (1.7)$$

Tebakan penting untuk bentuk fungsi universal $u(f, T)$ adalah dibuat pada tahun 1893 oleh Wien dan berbentuk

$$u(f, T) = Af^3 e^{-\beta f/T} \quad (1.8)$$

dimana A dan β adalah konstanta. Hasil ini dikenal sebagai hukum eksponensial Wien; itu menyerupai dan secara longgar didasarkan pada distribusi kecepatan Maxwell untuk gas molekul. Dalam waktu satu tahun, spektroskopi besar Jerman Friedrich Paschen telah mengkonfirmasi tebakannya Wien dengan bekerja di kisaran inframerah yang sulit saat itu 1 hingga 4 m dan pada suhu 400 hingga 1600 K.

B. Hipotesis Kuantum Planck

Pada hari Minggu malam di awal Oktober 1900, Max Planck menemukan formula benda hitam yang terkenal, yang benar-benar mengantarkan teori kuantum. dia lalu mendengar dari Ruben kalau pengukuran terakhirnya menunjukkan bahwa $u(f, T)$, densitas energi spektral, sebanding dengan T untuk panjang gelombang panjang atau frekuensi rendah. Planck tahu bahwa hukum Wien setuju dengan data pada frekuensi tinggi dan memang berhasil sulit selama beberapa tahun untuk mendapatkan hukum eksponensial Wien dari prinsip-prinsip mekanika statistik dan hukum Maxwell. Menginterpolasi antara dua bentuk pembatas (hukum eksponensial Wien dan kerapatan energi yang sebanding dengan suhu), dia segera menemukan formula umum, yang dia kirim ke Rubens, pada kartu pos, pada malam yang sama. Formulanya adalah

$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} \right) \quad (1.9)$$

dimana h adalah konstanta Planck $= 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}$, dan k_B adalah konstanta Boltzmann $= 1,380 \times 10^{-23} \text{ J/K}$. Kita bisa melihat kalau persamaan (1.9) mempunyai limit perilaku yang benar pada frekuensi tinggi dan rendah dengan bantuan sedikit aproksimasi. Pada frekuensi tinggi, dimana $\frac{hf}{k_B T} \gg 1$,

$$\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} \approx e^{-hf/k_B T} \quad (1.10)$$

sehingga

$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} \right) \approx e^{-hf/k_B T} \quad (1.11)$$

dan kita memulihkan hukum eksponensial Wien, persamaan (1.8). Pada frekuensi rendah, dimana $\frac{hf}{k_B T} \ll 1$,

$$\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} = \frac{1}{1 + \frac{hf}{k_B T} + \dots - 1} \approx hf/k_B T \quad (1.12)$$

dan

$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} \right) \approx \frac{8\pi hf^2}{c^3} k_B T \quad (1.13)$$

Hasil ini menunjukkan bahwa kerapatan energi spektral sebanding dengan T dalam frekuensi rendah atau yang disebut wilayah klasik, seperti yang ditemukan Rubens.

Kita harus menekankan bahwa pekerjaan Planck memerlukan lebih dari sekadar pintar manipulasi matematika. Selama lebih dari enam tahun Planck bekerja untuk menemukan derivasi ketat dari kurva distribusi benda hitam. Dia didorong, di kata-katanya sendiri, dengan fakta bahwa masalah emisi "mewakili sesuatu" mutlak, dan karena saya selalu menganggap pencarian yang mutlak sebagai tujuan tertinggi dari semua kegiatan ilmiah, saya dengan bersemangat mulai bekerja." Pekerjaan ini adalah untuk menempati sebagian besar hidupnya saat ia berusaha untuk memberikan rumusnya interpretasi fisik yang lebih dalam dan untuk mendamaikan energi kuantum diskrit dengan teori klasik.

Pembenaran teoritis asli Planck dari Persamaan 1.9 agak abstrak karena melibatkan argumen berdasarkan entropi, mekanika statistik, dan beberapa teorema dibuktikan sebelumnya oleh Planck tentang materi dan radiasi dalam kesetimbangan. Kami akan memberikan argumen yang lebih mudah untuk memvisualisasikan secara fisik namun mencoba untuk menyampaikan semangat dan dampak revolusioner dari karya asli Planck.

Planck yakin bahwa radiasi benda hitam dihasilkan oleh getaran muatan listrik submikroskopik, yang disebutnya resonator. Dia berasumsi bahwa dinding rongga bercahaya terdiri dari miliaran ini resonator (yang sifat pastinya tidak diketahui pada saat itu), semua bergetar di frekuensi yang berbeda. Oleh karena itu, menurut Maxwell, setiap osilator harus memancarkan radiasi dengan frekuensi yang sesuai dengan frekuensi getarannya. Juga menurut teori Maxwellian klasik, osilator frekuensi f dapat memiliki nilai energi apa pun dan dapat mengubah amplitudonya secara terus-menerus karena memancarkan sebagian kecil energinya. Di sinilah Planck membuat usulan revolusionernya. Untuk mengamankan kesepakatan dengan eksperimen, Planck harus mengasumsikan bahwa energi total resonator dengan mekanik frekuensi f hanya bisa menjadi kelipatan integral dari hf atau

$$E_{\text{resonator}} = nhf; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.14)$$

di mana h adalah konstanta dasar fisika kuantum, $h = 6,626 \times 10^{-34}$ Js, dikenal sebagai konstanta Planck. Selain itu, ia menyimpulkan bahwa emisi radiasi frekuensi f terjadi ketika resonator turun ke energi terendah berikutnya negara. Dengan

demikian resonator dapat mengubah energinya hanya dengan perbedaan ΔE sesuai dengan

$$\Delta E = hf \quad (1.15)$$

Artinya, ia tidak dapat kehilangan sejumlah energi totalnya, tetapi hanya jumlah yang terbatas, hf , yang disebut kuantum energi.

Sampai sekarang kami telah berkonsentrasi pada sifat kuantum yang luar biasa dari osilator tunggal frekuensi f . Planck menjelaskan spektrum kontinu benda hitam dengan mengasumsikan bahwa dinding yang dipanaskan mengandung resonator bergetar pada banyak frekuensi yang berbeda, masing-masing memancarkan cahaya pada frekuensi yang sama dengan frekuensi getarannya. Dengan mempertimbangkan kondisi yang mengarah ke keseimbangan antara resonator dinding dan radiasi dalam benda hitam rongga, ia mampu menunjukkan bahwa kerapatan energi spektral $u(f, T)$ bisa menjadi dinyatakan sebagai produk dari jumlah osilator yang memiliki frekuensi antara f dan $f + df$, dilambangkan dengan $N(f)df$, dan energi rata-rata yang dipancarkan per osilator, $\bar{E}$. Jadi kita memiliki hasil yang penting

$$u(f, T)df = \bar{E}N(f)df \quad (1.16)$$

Selanjutnya, Planck menunjukkan bahwa jumlah osilator dengan frekuensi antara f dan $f + df$ sebanding dengan f^2 atau

$$N(f)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} df \quad (1.17)$$

Substitusi persamaan (1.17) ke persamaan (1.16) memberikan

$$u(f, T)df = \bar{E} \frac{8\pi f^2}{c^3} df \quad (1.18)$$

Hasil ini menunjukkan bahwa kerapatan energi spektral sebanding dengan produk dari frekuensi kuadrat dan energi osilator rata-rata. Juga, karena $u(f, T)$ mendekati nol pada frekuensi tinggi, pasti cenderung ke nol pada frekuensi tinggi lebih cepat dari $\frac{1}{f^2}$. Fakta bahwa osilator rata-rata energi harus menjadi sangat kecil ketika frekuensi menjadi tinggi membimbing Planck dalam pengembangan teorinya. Di bagian selanjutnya kita akan melihat bahwa kegagalan menjadi kecil pada frekuensi tinggi di klasik Teori Rayleigh-Jeans mengarah pada “bencana ultraviolet”. Artinya, prediksi kepadatan energi spektral tak terbatas pada frekuensi tinggi di wilayah ultraviolet.

C. Hukum Radiasi Rayleigh-Jeans dan Hukum Radiasi Planck

Baik hukum Planck maupun hukum Rayleigh-Jeans (teori klasik benda hitam radiasi dirumuskan oleh Lord Rayleigh, John William Strutt, 1842–1919, Inggris fisikawan, dan James Jeans, 1887–1946, astronom dan fisikawan Inggris) mungkin diturunkan menggunakan gagasan bahwa energi radiasi benda hitam per satuan volume dengan frekuensi antara f dan $f + df$ dapat dinyatakan sebagai produk dari jumlah osilator per satuan volume dalam rentang frekuensi ini dan energi rata-rata per osilator:

$$u(f, T)df = \bar{E}N(f)df \quad (1.19)$$

Adalah instruktif untuk melakukan perhitungan Rayleigh-Jeans dan Planck untuk melihat efek pada $u(f, T)$ penghitungan dari distribusi kontinu klasik energi osilator (Rayleigh-Jeans) sebagai lawan dari satu set diskrit energi osilator kuantum (Planck). Kami membahas turunan Lord Rayleigh terlebih dahulu karena itu adalah perhitungan klasik yang lebih langsung.

Sementara Planck berkonsentrasi pada kesetimbangan termal radiasi rongga dengan berosilasi muatan listrik di dinding rongga, Rayleigh berkonsentrasi langsung pada gelombang elektromagnetik di dalam rongga. Rayleigh dan Jeans beralasan bahwa gelombang elektromagnetik berdiri di rongga dapat dianggap memiliki suhu T , karena mereka terus-menerus bertukar energi dengan dinding dan menyebabkan termometer di dalam rongga mencapai suhu yang sama dengan dinding. Selanjutnya, mereka menganggap berdiri terpolarisasi gelombang elektromagnetik setara dengan osilator satu dimensi. Menggunakan ide umum yang sama seperti Planck, mereka menyatakan kerapatan energi sebagai produk dari jumlah gelombang berdiri (osilator) dan energi rata-rata per osilator. Mereka menemukan energi osilator rata-rata $\bar{E}$ tidak tergantung pada frekuensi dan sama dengan $\bar{E}$ dari hukum distribusi Maxwell-Boltzmann. Menurut hukum distribusi ini, peluang P untuk menemukan sistem individual (seperti molekul atau osilator atom) dengan energi E di atas beberapa minimum energi, E_0 , dalam kelompok besar sistem pada suhu T adalah

$$P(E) = P_0 e^{-(E-E_0)/k_B T} \quad (1.20)$$

di mana P_0 adalah probabilitas bahwa suatu sistem memiliki energi minimum. Dalam kasus himpunan diskrit dari energi yang diizinkan, energi rata-rata, $\bar{E}$, diberikan oleh

$$\bar{E} = \frac{\sum E P(E)}{\sum P(E)} \quad (1.21)$$

di mana pembagian dengan jumlah dalam penyebut berfungsi untuk menormalkan total probabilitas ke 1. Dalam kasus klasik yang dipertimbangkan oleh Rayleigh, sebuah osilator dapat memiliki energi E dalam rentang kontinu dari 0 hingga ∞ . Jadi, jumlah dalam Persamaan (1.21) harus diganti dengan integral, dan ekspresi untuk $\bar{E}$ menjadi

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^\infty e^{-E/k_B T} dE} = k_B T \quad (1.22)$$

Perhitungan $N(f)$ sedikit lebih rumit tetapi penting di sini sebagai serta dalam model elektron bebas logam. Jadi, proses penurunan densitas moda $N(f)df$ tidak akan disertakan disini, tetapi dijelaskan secara langsung di dalam kelas. Seseorang akan memperoleh

$$N(f)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} df \quad (1.23)$$

atau dalam variabel panjang gelombang,

$$N(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad (1.24)$$

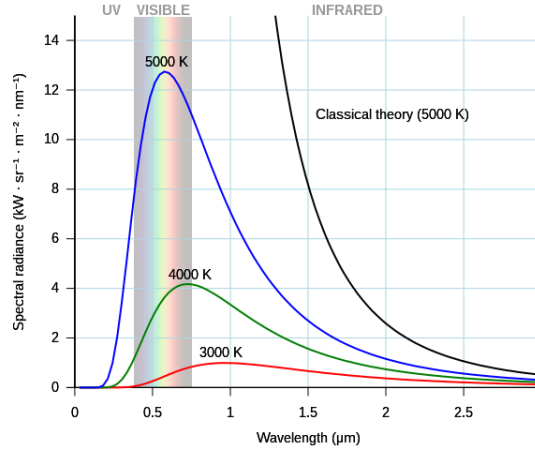
Densitas energi spectral secara sederhana adalah densitas moda dikalikan $k_B T$, atau

$$u(f, T)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} k_B T df \quad (1.25)$$

Dalam variabel panjang gelombang,

$$u(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T d\lambda \quad (1.26)$$

Namun, seperti yang dapat dilihat dari Gambar 1.5, ekspresi klasik ini, yang dikenal sebagai hukum Rayleigh-Jeans, tidak setuju dengan hasil eksperimen secara singkat daerah panjang gelombang. Persamaan (1.26) menyeleweng ketika $\lambda \rightarrow 0$, memprediksi energi tak terbatas emisi di wilayah ultraviolet, yang dijuluki "bencana ultraviolet." Seseorang dipaksa untuk menyimpulkan bahwa teori klasik gagal untuk menjelaskannya radiasi benda hitam.



Gambar 1.5 Kegagalan teori klasik untuk menyesuaikan spektrum yang diamati dari benda hitam yang dipanaskan hingga 5000 K.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Seperti disebutkan sebelumnya, Planck berkonsentrasi pada keadaan energi resonator di dinding rongga dan menggunakan kondisi bahwa resonator dan radiasi rongga tidak seimbang untuk menentukan kualitas spektral radiasi. Secara penalaran termodinamika (dan tampaknya tidak menyadari derivasi Rayleigh), dia sampai pada hal yang sama ekspresi untuk $N(f)$ sebagai Rayleigh. Namun, Planck tiba di bentuk yang berbeda untuk dengan hanya mengizinkan nilai energi diskrit untuk resonatornya. Dia menemukan, menggunakan hukum distribusi Maxwell-Boltzmann,

$$\bar{E} = \frac{hf}{e^{hf/k_B T} - 1} \quad (1.27)$$

(perhatikan penjelasan di dalam kelas untuk membuktikan persamaan di atas)

Mengalikan $\bar{E}$ dengan $N(f)$ memberikan formula distribusi Planck:

$$u(f, T)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} \left(\frac{hf}{e^{hf/k_B T} - 1} \right) df \quad (1.28)$$

atau dalam variabel panjang gelombang, λ ,

$$u(f, T)df = \frac{8\pi hc d\lambda}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)} \quad (1.29)$$

Persamaan (1.28) menunjukkan bahwa bencana ultraviolet dihindari karena suku $\bar{E}$ mendominasi suku f^2 pada frekuensi tinggi. Seseorang dapat secara kualitatif memahami mengapa $\bar{E}$ cenderung nol pada frekuensi tinggi dengan mencatat bahwa level osilator pertama yang diizinkan (hf) sangat besar untuk f besar dibandingkan

dengan energi panas rata-rata yang tersedia ($k_B T$) di mana hukum Boltzmann memprediksi hampir nol probabilitas bahwa keadaan tereksitasi pertama ditempati.

Singkatnya, Planck sampai pada formula benda hitamnya dengan membuat dua asumsi yang mengejutkan: (1) energi osilator bermuatan frekuensi f terbatas pada nilai diskrit nhf dan (2) selama emisi atau penyerapan cahaya, perubahan energi osilator adalah hf . Dari sebagian besar korespondensi awal Planck, orang mendapat kesan bahwa konsep kuantisasi energinya benar-benar alat kalkulasi yang putus asa, dan terlebih lagi perangkat yang hanya diterapkan dalam kasus radiasi benda hitam. Ia tersisa untuk Albert Einstein yang hebat, ikon fisika populer di abad ke-20, untuk meningkatkan kuantisasi ke tingkat fenomena universal dengan menunjukkan bahwa cahaya itu sendiri terkuantisasi.

Soal-soal

1. Anggapan radikal apakah yang diusulkan oleh Max Planck untuk merumuskan suatu rumus radiasi yang mampu menyatukan rumus radiasi Wien dan rumus radiasi Rayleigh-Jeans?
2. Menurut Anda, manakah yang memiliki energi lebih besar, sebuah foton cahaya kuning atau sebuah foton radiasi ultraviolet?
3. Ketika kita belajar radiasi benda hitam, kita selalu diajarkan bahwa suatu benda hitam selalu dicontohkan oleh suatu lubang kecil dalam rongga tertutup apa saja. Jelaskan pernyataan ini.
4. Beberapa bintang diamati bercahaya kemerah-merahan dan beberapa bercahaya biru seperti gambar dibawah ini.



Gambar 1.6 Katai merah, matahari, bintang deret utama tipe-B, dan R136a1

Sumber: www.commonswikimedia.org

Menurut Anda, bintang manakah yang memiliki suhu permukaan lebih tinggi? Jelaskan.

5. Setiap benda meradiasikan panas. Jika demikian, mengapa kita tidak dapat melihat gawai pintar yang di-charge dalam ruang gelap?

BAB II

EFEK FOTOLISTRIK DAN EFEK COMPTON

A. Efek Fotolistrik

Kita sekarang beralih ke tahun 1905, di mana perkembangan besar berikutnya di teori kuantum terjadi. Pada tahun ini Einstein menghasilkan tiga makalah abadi tentang tiga topik berbeda, masing-masing revolusioner dan masing-masing layak mendapatkan hadiah Nobel. Ketiga kertas berisi seimbang, simetris, dan menyatukan hasil baru yang dicapai dengan logika cadangan dan bersih dan matematika sederhana. Karya pertama berjudul "*A Heuristic Point of View About the Generation and Transformation of Light*" merumuskan teori kuantum cahaya dan menjelaskan efek fotolistrik. Makalah kedua berjudul "*On the Motion of Particles Suspended in Liquids as Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat*". Ini menjelaskan gerak Brown dan memberikan bukti kuat tentang realitas atom. Makalah ketiga, yang mungkin yang paling terkenal, berisi penemuan teori khusus relativitas dan berjudul "*On the Electrodynamics of Moving Bodies*". Menarik untuk dicatat bahwa ketika Einstein dianugerahi hadiah Nobel di 1922, Akademi Swedia menilai kontribusi terbesarnya pada fisika adalah teori efek fotolistrik. Mereka sama sekali tidak menyebutkan teori relativitasnya!

Mari kita beralih ke makalah tentang kuantum cahaya, di mana Einstein bersilang pedang dengan Maxwell dan menantang yang tidak memenuhi syarat keberhasilan teori gelombang klasik cahaya. Einstein mengenali ketidakkonsistenan antara kuantisasi Planck dari osilator di dinding benda hitam dan desakan Planck bahwa radiasi rongga terdiri dari gelombang elektromagnetik klasik. Dengan menunjukkan bahwa perubahan entropi radiasi benda hitam seperti perubahan entropi gas ideal yang terdiri dari partikel independen, Einstein mencapai kesimpulan bahwa cahaya itu sendiri adalah terdiri dari "biji-bijian," jumlah terbatas yang tidak dapat direduksi, atau kuantum energi. Lebih jauh, dia menegaskan bahwa cahaya yang berinteraksi dengan materi juga terdiri dari kuantum, dan dia mengerjakan implikasi untuk proses fotolistrik dan fotokimia. Penjelasanannya tentang efek fotolistrik menawarkan seperti bukti meyakinkan bahwa cahaya terdiri dari paket energi yang akan kami jelaskan itu secara lebih rinci. Namun, pertama-tama, kita perlu mempertimbangkan fitur utama eksperimen efek fotolistrik dan kegagalan teori klasik untuk menjelaskan efek ini.

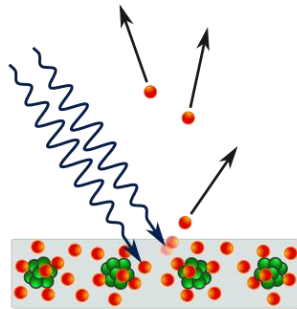
Seperti disebutkan sebelumnya, Hertz pertama kali menetapkan bahwa permukaan logam yang bersih memancarkan muatan ketika terkena sinar ultraviolet. Pada tahun 1888 Hallwachs menemukan bahwa muatan yang dipancarkan adalah negatif, dan pada tahun 1899 J. J. Thomson menunjukkan bahwa muatan yang dipancarkan adalah elektron, yang sekarang disebut fotoelektron. Dia melakukan ini dengan mengukur rasio muatan terhadap massa partikel yang dihasilkan oleh ultraviolet ringan dan bahkan berhasil mengukur e secara terpisah oleh ruang awan teknik.

Penemuan penting terakhir sebelum penjelasan Einstein dibuat pada tahun 1902 oleh Philip Lenard, yang mempelajari efek fotolistrik dengan intens sumber cahaya

busur karbon. Dia menemukan bahwa elektron dipancarkan dari logam dengan kisaran kecepatan dan energi kinetik maksimum fotoelektron, K_{maks} , tidak bergantung pada intensitas cahaya yang menggairahkan. Meskipun dia tidak dapat membangun hubungan yang tepat, Lenard juga menunjukkan bahwa K_{maks} meningkat dengan frekuensi cahaya. Peristiwa efek fotolistrik ditunjukkan pada gambar 2.1. K_{maks} adalah mudah diukur dengan menerapkan volume dan secara bertahap meningkatkannya sampai elektron yang paling energik dihentikan dan arus foto menjadi tidak. Pada saat ini,

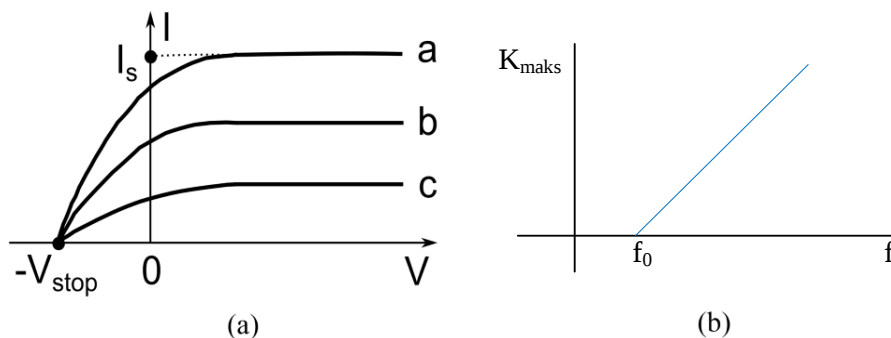
$$K_{maks} = \frac{1}{2}mv_{maks}^2 = eV_{stop} \quad (2.1)$$

dimana m adalah massa elektron, v_{maks} adalah elektron maksimum kecepatan, e adalah muatan elektronik, dan V_{stop} adalah tegangan henti. Sebuah jalan cerita dari jenis yang ditemukan oleh Lenard ditunjukkan pada Gambar 2.2(a); itu menggambarkan bahwa K_{maks} atau V_{stop} tidak tergantung pada intensitas cahaya I . Peningkatan arus (atau jumlah elektron per detik) dengan meningkatnya intensitas cahaya ditunjukkan pada Gambar 2.2(a) diharapkan dan dapat dijelaskan secara klasik. Namun, hasil bahwa K_{maks} tidak bergantung pada intensitas sepenuhnya tidak terduga.



Gambar 2.1 Peristiwa efek fotolistrik

Sumber: www.commonswikimedia.org



Gambar 2.2 (a) Plot arus foto versus tegangan yang diterapkan. Grafik tersebut menunjukkan bahwa K_{maks} tidak tergantung pada intensitas cahaya I untuk cahaya frekuensi tetap. (b) Grafik yang menunjukkan ketergantungan K_{maks} pada frekuensi cahaya.

Sumber: (a) www.commonswikimedia.org

Dua hasil eksperimen lainnya benar-benar tidak terduga secara klasik sedemikian rupa. Salah satunya adalah ketergantungan linier K_{maks} pada frekuensi cahaya, yang ditunjukkan pada Gambar 2.2(b). Perhatikan bahwa Gambar 2.2(b) juga menunjukkan adanya ambang batas frekuensi, f_0 , di bawahnya tidak ada fotoelektron

yang dipancarkan. (Sebenarnya, energi ambang yang disebut fungsi kerja, ϕ , dikaitkan dengan ikatan energi elektron dalam logam dan diharapkan secara klasik. Bahwa ada penghalang energi yang menahan elektron dalam padatan terbukti dari fakta bahwa elektron tidak secara spontan dipancarkan dari logam dalam ruang hampa, tetapi membutuhkan suhu tinggi atau cahaya insiden untuk menyediakan energi dan menyebabkan emisi). Hasil menarik lainnya tidak mungkin dijelaskan klasik adalah bahwa tidak ada jeda waktu antara awal iluminasi dan awal dari arus foto. Pengukuran telah menunjukkan bahwa jika ada jeda waktu, itu kurang dari 10^{-9} s. Singkatnya, seperti yang ditunjukkan secara rinci di contoh berikut, teori elektromagnetik klasik memiliki kesulitan besar menjelaskan independensi K_{maks} dan intensitas cahaya, linear ketergantungan K_{maks} pada frekuensi cahaya, dan respon sesaat dari arus foto.

Penjelasan Einstein tentang efek fotolistrik yang membingungkan sama briliannya untuk apa fokusnya dan apa yang dihilangkan. Misalnya, dia menekankan bahwa Teori klasik Maxwell sangat berhasil dalam menggambarkan kemajuan cahaya melalui ruang selama interval waktu yang lama tetapi itu berbeda teori mungkin diperlukan untuk menggambarkan interaksi sesaat cahaya dan materi, seperti dalam emisi cahaya oleh osilator atau transformasi energi cahaya energi kinetik elektron dalam efek fotolistrik. Dia juga fokus hanya pada aspek energi cahaya dan model atau mekanisme yang dihindari tentang konversi kuantum energi cahaya menjadi energi kinetik dari elektron. Singkatnya, dia hanya memperkenalkan ide-ide yang diperlukan untuk menjelaskan efek fotolistrik. Dia berpendapat bahwa energi cahaya tidak terdistribusi secara merata pada muka gelombang klasik, tetapi terkonsentrasi di daerah diskrit (atau dalam "bundel"), yang disebut kuantum, masing-masing mengandung energi, hf . Gambar Einstein adalah bahwa kuantum cahaya begitu terlokalisasi bahwa ia memberikan semua energinya, hf , langsung ke satu elektron di logam. Oleh karena itu, menurut Einstein, energi kinetik maksimum untuk elektron yang dipancarkan adalah

$$K_{maks} = hf - \phi \quad (2.2)$$

di mana ϕ adalah fungsi kerja logam, yang sesuai dengan minimum energi yang mengikat elektron dalam logam. Tabel 2.1 mencantumkan nilai dari fungsi kerja diukur untuk logam yang berbeda.

Tabel 2.1 Fungsi Kerja untuk Beberapa Logam

Logam	Fungsi kerja (eV)
Na	2,28
Al	4,08
Cu	4,70
Zn	4,31
Ag	4,73
Pt	6,35
Pb	4,14
Fe	4,50

Persamaan (2.2) dengan indah menjelaskan independensi yang membingungkan dari K_{maks} dan intensitas yang ditemukan oleh Lenard. Untuk frekuensi cahaya tetap f , peningkatan intensitas cahaya berarti lebih banyak foton dan lebih banyak fotoelektron

per detik, meskipun K_{maks} tetap tidak berubah menurut Persamaan (2.2). Sebagai tambahan, Persamaan (2.2) menjelaskan fenomena frekuensi ambang. Cahaya dari frekuensi ambang f_0 , yang memiliki energi yang cukup untuk menjatuhkan elektron permukaan logam, menyebabkan elektron dilepaskan dengan kinetik nol energi. Menetapkan $K_{maks} = 0$ dalam Persamaan (2.2) memberikan

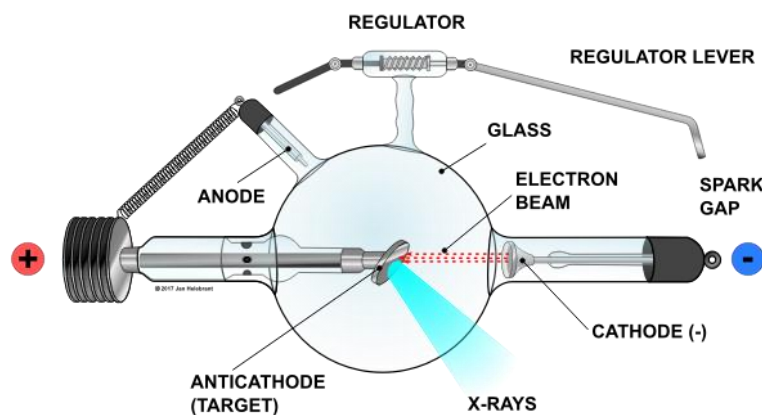
$$f_0 = \frac{\phi}{h} \quad (2.3)$$

Jadi variasi frekuensi ambang untuk logam yang berbeda dihasilkan dengan variasi fungsi kerja. Perhatikan bahwa cahaya dengan $f < f_0$ memiliki energi yang cukup untuk membebaskan elektron. Akibatnya, arus foto adalah nol untuk $f < f_0$.

Dengan teori apa pun, seseorang tidak hanya mencari penjelasan dari yang diamati sebelumnya hasil tetapi juga untuk prediksi baru. Ini memang terjadi di sini, karena Persamaan (2.3) meramalkan hasil (baru pada tahun 1905) bahwa K_{maks} harus bervariasi secara linier dengan f untuk bahan apa pun dan bahwa kemiringan plot K_{maks} versus f harus menghasilkan konstanta universal h . Pada tahun 1916, fisikawan Amerika Robert Millikan (1868–1953) melaporkan data pengukuran fotolistrik, dari mana dia membuktikan hubungan linier antara K_{maks} dan f dan ditentukan h dengan presisi sekitar 0,5%.

B. Difraksi Sinar-X

Sinar-X ditemukan pada tahun 1895 oleh fisikawan Jerman Wilhelm Roentgen. Dia menemukan bahwa seberkas elektron berkecepatan tinggi yang menabrak target logam menghasilkan jenis radiasi baru dan sangat menembus (Gambar 2.3). Di dalam bulan penemuan Roentgen gambar x-ray medis pertama diambil, dan dalam beberapa tahun menjadi jelas bahwa sinar-x adalah elektromagnetik getaran yang mirip dengan cahaya tetapi dengan panjang gelombang yang sangat pendek dan daya tembus yang besar (lihat Gambar 2.4).



Gambar 2.3 Sinar-X dihasilkan dengan membombardir target logam (tembaga, tungsten, dan molibdenum umum) dengan elektron energik yang memiliki energi 50 hingga 100 keV.

Sumber: www.freesvg.org



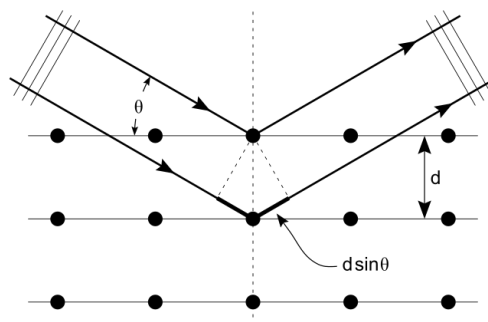
Gambar 2.4 Salah satu gambar pertama yang dibuat oleh Roentgen menggunakan sinar-x

Sumber: www.commonswikimedia.org

Perkiraan kasar diperoleh dari difraksi sinar x oleh celah sempit menunjukkan panjang gelombang sinar-x sekitar 10^{-10} m, yang memiliki urutan yang sama besarnya dengan jarak atom dalam kristal. Karena kisi-kisi yang diatur secara artifisial terbaik saat itu memiliki jarak 10^{-7} m, Max von Laue di Jerman dan William Henry Bragg dan William Lawrence Bragg (tim ayah dan anak) di Inggris menyarankan menggunakan kristal tunggal seperti kalsit sebagai kisi tiga dimensi alami, susunan atom periodik dalam kristal yang membentuk kisi-kisi putusan.

Metode yang sangat sederhana untuk menganalisis hamburan sinar-X dari bidang kristal paralel diusulkan oleh W. L. Bragg pada tahun 1912. Pertimbangkan dua bidang atom berurutan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.5. Jika berkas sinar-X datang dengan sudut θ maka berkas sinar-X tersebut juga akan dipantulkan dengan sudut θ juga. Sebagaimana kita pelajari dalam optika fisis, interferensi konstruktif terjadi ketika beda lintasan antar berkas sinar adalah kelipatan bulat dari panjang gelombang sinar atau dalam bentuk matematis sebagai berikut.

$$\text{beda lintasan} = n\lambda; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$



Gambar 2.5 Hamburan Bragg sinar-x dari bidang atom yang berurutan. Konstruktif interferensi terjadi untuk kelipatan bilangan bulat panjang gelombang.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Dari gambar 2.5 terlihat bahwa beda lintasan sinar (garis tebal) adalah sebesar:

$$2d\sin\theta \quad (2.4)$$

dengan d adalah jarak antar bidang deretan atom. Dari persamaan (2.3) dan (2.4), interferensi konstruktif yang memicu terjadinya difraksi sinar-X diberikan oleh:

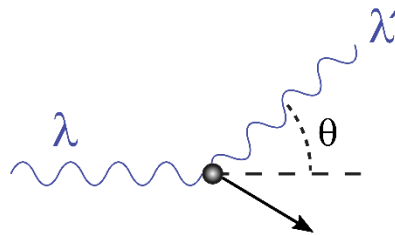
$$n\lambda = 2d\sin\theta \quad (2.5)$$

yang dikenal sebagai hukum Bragg. Persamaan (2.5) digunakan dengan sukses besar oleh Bragg untuk menentukan posisi atom dalam kristal.

C. Efek Compton

Mari kita beralih ke tahun 1922 dan konfirmasi eksperimental oleh Arthur Holly Compton bahwa foton sinar-x berperilaku seperti partikel dengan momentum hf/c . Untuk beberapa waktu sebelum tahun 1922, Compton dan rekan kerjanya telah mengumpulkan bukti yang menunjukkan bahwa teori gelombang klasik gagal menjelaskan hamburan sinar-x dari elektron bebas. Secara khusus, teori klasik meramalkan bahwa radiasi insiden frekuensi f_0 harus mempercepat elektron dalam arah propagasi radiasi insiden, dan bahwa itu harus menyebabkan osilasi paksa elektron dan reradiasi pada frekuensi f' , di mana $f' \leq f_0$. Juga, menurut teori klasik, frekuensi or panjang gelombang radiasi yang tersebar harus bergantung pada lamanya waktu elektron terkena radiasi insiden serta pada intensitas radiasi insiden.

Bayangkan betapa mengejutannya ketika Compton menunjukkan secara eksperimental bahwa pergeseran panjang gelombang sinar-X yang dihamburkan pada sudut tertentu benar-benar tidak tergantung pada intensitas radiasi dan lamanya paparan, dan hanya bergantung pada sudut hamburan. Gambar 2.6 menunjukkan ilustrasi hamburan Compton.



Gambar 2.6 Diagram Hamburan Compton. Foton datang dengan panjang gelombang λ dan elektron mula-mula diam. Foton yang terhambur memiliki panjang gelombang lebih panjang λ' serta membentuk sudut θ terhadap arah foton datang.

Sumber: www.commons.wikimedia.org

Dalam percobaan asli, Compton mengukur ketergantungan intensitas sinar-X hamburan pada panjang gelombang pada tiga sudut hamburan yang berbeda, yaitu: 45° , 90° , dan 135° . Panjang gelombang diukur dengan kristal berputar spektrometer, dan intensitasnya ditentukan oleh ruang ionisasi yang menghasilkan arus yang sebanding dengan intensitas sinar-X. Sinar-X monokromatik dengan panjang gelombang $\lambda = 0,71 \text{ \AA}$ merupakan sinar datang. Target karbon dengan nomor atom rendah, $Z = 12$, digunakan karena atom dengan Z kecil memiliki persentase yang lebih tinggi dari elektron terikat longgar. Mereka menunjukkan dua puncak, satu di λ dan pergeseran puncak pada panjang gelombang yang lebih panjang λ' . Pergeseran puncak di disebabkan oleh hamburan sinar-x dari elektron yang hampir bebas. Dengan asumsi bahwa sinar-x berperilaku seperti partikel, λ' diprediksi oleh Compton bergantung pada sudut hamburan sebagai

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (2.6)$$

dimana m = massa elektron; kombinasi konstanta $\frac{h}{mc}$ disebut panjang gelombang Compton elektron dan saat ini diterima nilainya sebagai berikut.

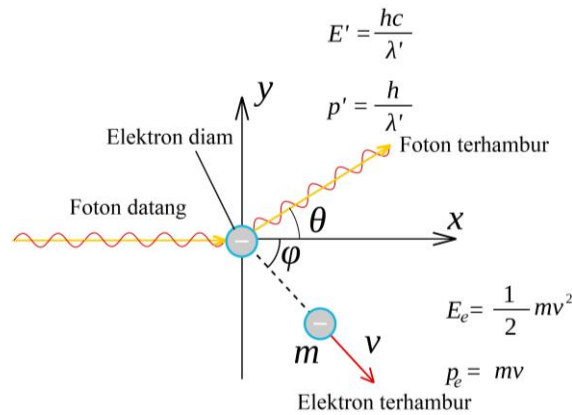
$$\frac{h}{mc} = 0,0243 \text{ \AA} = 0,00243 \text{ nm}$$

Pengukuran hati-hati Compton sepenuhnya mengkonfirmasi ketergantungan λ' pada sudut hamburan θ dan menentukan panjang gelombang Compton dari elektron menjadi $0,0242 \text{ \AA}$, sangat sesuai dengan nilai yang diterima saat ini. Adalah adil untuk mengatakan bahwa hasil ini adalah yang pertama benar-benar meyakinkan sebagian besar Fisikawan Amerika tentang validitas dasar teori kuantum!

Mari kita beralih ke derivasi Persamaan (2.6) dengan asumsi bahwa foton menunjukkan perilaku seperti partikel dan bertabrakan secara elastis seperti bola bilyar dengan elektron bebas yang awalnya diam. Gambar 2.7 menunjukkan foton-elektron tumbukan yang energi dan momentumnya kekal. Karena elektron biasanya terpentak dengan kecepatan tinggi, kita memperlakukan tumbukan secara relativistik. Ekspresi untuk konservasi energi memberikan

$$E + mc^2 = E' + E_e \quad (2.7)$$

di mana E adalah energi foton datang, E' adalah energi hamburan foton, mc^2 adalah energi diam elektron, dan E_e adalah relativistik total energi elektron setelah tumbukan.



Gambar 2.7 Diagram yang menunjukkan hamburan Compton dari foton oleh sebuah elektron. Foton yang dihamburkan memiliki energi yang lebih kecil (atau panjang gelombang yang lebih panjang) daripada foton datang.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Demikian juga, dari kekekalan momentum yang kita miliki

$$p = p' \cos \theta + p_e \cos \varphi \quad (2.8)$$

$$p' \sin \theta = p_e \sin \varphi \quad (2.9)$$

dimana p adalah momentum dari foton datang, p' adalah momentum dari foton terhambur, dan p_e adalah momentum dari elektron terpentak. Persamaan (2.8) dan (2.9) dapat diselesaikan secara simultan untuk mengeliminasi φ , sudut elektron terhambur, untuk memberikan bagi p_e^2 :

$$p_e^2 = (p')^2 + p^2 - 2pp' \cos \theta \quad (2.10)$$

Pada titik ini perlu, secara paradoks, untuk menggunakan sifat gelombang dari cahaya untuk menjelaskan perilaku seperti partikel foton. Kita sudah terlihat bahwa energi foton dan frekuensi yang terkait gelombang cahaya dihubungkan oleh $E = hf$. Jika kita berasumsi bahwa sebuah foton mematuhi ekspresi relativistik $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ dan bahwa sebuah foton memiliki massa nol, kita punya

$$p_{foton} = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (2.11)$$

Di sini sekali lagi kita memiliki situasi paradoks; properti partikel, foton momentum, diberikan dalam hal properti gelombang, λ , dari gelombang cahaya terkait. Jika relasi $E = hf$ dan $p = hf/c$ disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.7) dan (2.10), ini masing-masing menjadi

$$E_e = hf - hf' + mc^2 \quad (2.12)$$

dan

$$p_e^2 = \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf}{c}\right)^2 - \frac{2h^2 ff'}{c^2} \cos \theta \quad (2.13)$$

Karena pengukuran Compton tidak menyangkut energi total dan momentum elektron, kita eliminasi E_e dan p_e dengan mensubstitusi Persamaan (2.12) dan (2.13) ke dalam ekspresi energi elektron relativistik,

$$E_e^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 \quad (2.14)$$

Setelah melewati serangkaian aljabar, seseorang memperoleh hasil Compton untuk panjang gelombang foton terhambur dengan sudut θ :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (2.15)$$

Soal-soal

1. Ketika sebuah sumber cahaya merah suram diarahkan pada suatu permukaan logam, tidak ada satu pun elektron yang dikeluarkan. Kemudian, intensitas sumber cahaya merah ditingkatkan 100 kali semula. Apakah sekarang memungkinkan untuk efek fotolistrik terjadi, yaitu keluarnya elektron-elektron dari logam? Jelaskan mengapa mungkin atau tidak mungkin.
2. Foton dengan energi 35 keV menumbuk electron sehingga foton itu terhambur dengan sudut 90° .
 - a. Tentukan panjang gelombang foton yang dihamburkan.
 - b. Berapa besar pertambahan panjang gelombangnya?
 - c. Berapa persen kenaikan panjang gelombang foton?
3. Dalam eksperimen efek Compton, apakah panjang gelombang foton sinar-X yang terhambur setelah menumbuk electron selalu lebih besar dari panjang gelombang mula-mula (panjang gelombang foton sebelum menumbuk elektron)? Jelaskan alasan dari jawaban Anda.

4. Suatu permukaan logam natrium didatangi oleh cahaya dengan panjang gelombang 300 nm. Fungsi kerja logam natrium adalah 2,46 eV.
 - a. Berapakah energi kinetik maksimum electron-elektron yang dipancarkan?
 - b. Berapakah panjang gelombang ambang bagi natrium?
5. Fungsi kerja bagi logam tungsten adalah 4,52 eV. Tentukan:
 - a. panjang gelombang ambang tungsten,
 - b. energi kinetik maksimum electron-elektron yang dipancarkan apabila digunakan radiasi dengan panjang gelombang 200 nm, dan
 - c. potensial henti untuk kasus b.

BAB III

MODEL ATOM RUTHERFORD DAN MODEL ATOM BOHR

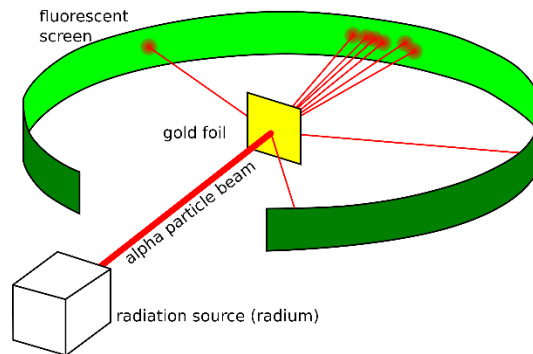
Tahun-tahun awal abad ke-20 umumnya merupakan periode yang luar biasa fermentasi dan perubahan dalam fisika, termasuk munculnya relativitas, kuantum teori, dan fisika atom dan subatom. Hampir tidak memiliki realitas murni, atom tak terpisahkan telah didirikan ("Mereka adalah satu-satunya hal material yang masih tetap dalam kondisi yang tepat di mana mereka pertama kali mulai ada" tulis Maxwell pada tahun 1872), ketika Thomson mengumumkan keterbagian mereka pada tahun 1899: "Elektrifikasi pada dasarnya melibatkan pemisahan atom, bagian dari massa atom semakin bebas dan terlepas dari atom aslinya." Serangan berani lebih lanjut pada atom kimia yang tidak dapat dibagi datang dari karya eksperimental radioaktivitas oleh Marie Curie (1867–1934, fisikawan-kimiawan Polandia), dan oleh Ernest Rutherford (1871–1937, fisikawan Selandia Baru), dan Frederick Soddy, seorang fisikawan Inggris, yang menjelaskan transformasi radioaktif unsur dalam hal emisi partikel subatom. Porositas atom juga dikenal sebelum 1910 dari eksperimen Lenard, yang menunjukkan bahwa elektron mudah ditransmisikan melalui logam tipis dan foil mika. Semua penemuan ini, ditambah kecurigaan bahwa garis spektrum atom yang rumit (cahaya yang dipancarkan pada satu set karakteristik frekuensi diskrit dari setiap elemen) harus dihasilkan oleh muatan yang berderak di dalam atom, menyebabkan berbagai proposal tentang struktur internal atom. Yang paling terkenal dari model atom awal ini adalah model "roti kimis" Thomson (1898). Proposal ini memandang atom sebagai bola homogen dengan massa yang terdistribusi secara merata dan muatan positif yang tertanam, seperti kismis dalam buah prem. Puding, elektron bermuatan negatif, yang hanya menyeimbangkan muatan positif menghasilkan atom-atom yang netral secara elektrik. Meskipun model seperti itu memiliki stabilitas listrik terhadap keruntuhan atau ledakan atom, mereka gagal menjelaskan spektrum garis yang kaya bahkan dari atom yang paling sederhana, hidrogen.

A. Model Atom Rutherford

Kunci untuk memahami spektrum garis misterius dan benar model atom keduanya dilengkapi oleh Ernest Rutherford dan murid-muridnya Hans Geiger (1882–1945, fisikawan Jerman) dan Ernest Marsden (1899–1970, fisikawan Inggris) melalui serangkaian eksperimen yang dilakukan dari tahun 1909 hingga 1914. Memperhatikan bahwa seberkas partikel terkolimasi melebar saat melewati foil logam namun dengan mudah menembus film tipis logam, mereka memulai eksperimen untuk menyelidiki distribusi massa di dalam atom dengan mengamati secara rinci hamburan partikel dari foil. Ini eksperimen akhirnya membawa Rutherford pada penemuan bahwa sebagian besar massa atom dan semua muatan positif terletak pada inti pusat dari atom.

Wawasan dasar Rutherford adalah karena massa dan energi kinetik dari partikel alfa yang besar, bahkan tabrakan hampir langsung dengan partikel bermassa atom hidrogen akan membelokkan partikel alfa hanya sedikit dan mengetuk atom hidrogen lurus ke depan. Beberapa hamburan partikel di foil menyumbang pelebaran kecil (sekitar 1°) yang awalnya diamati oleh Rutherford, tapi itu tidak bisa menjelaskan

defleksi skala besar sesekali. Di sisi lain, jika semua muatan positif dalam sebuah atom diasumsikan terkonsentrasi pada satu titik pusat dan tidak menyebar ke seluruh atom, gaya tolak-menolak listrik yang dialami oleh partikel yang datang dalam tumbukan langsung menjadi jauh lebih besar. Karena muatan dan massa emas atom terkonsentrasi pada nukleus, defleksi partikel yang besar dapat dialami dalam satu tumbukan dengan inti masif. Situasi ini adalah ditunjukkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Penghamburan partikel oleh inti padat bermuatan positif

Sumber: www.commonswikimedia.org

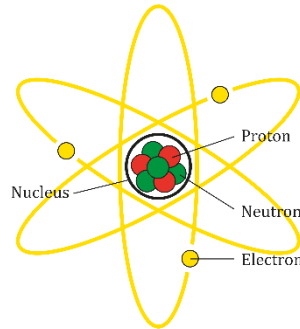
Keberhasilan keseluruhan model nuklir Rutherford sangat mencolok. Rutherford dan murid-muridnya telah menunjukkan bahwa semua massa dan muatan positif Ze terkonsentrasi dalam inti atom meniti berdiameter 10^{-14} m dan bahwa elektron Z harus mengelilingi nukleus dengan cara tertentu. Seperti semua yang hebat penemuan, bagaimanapun, ide atom nuklir menimbulkan segerombolan pertanyaan pada tingkat yang lebih dalam berikutnya: (1) Jika hanya ada proton Z di dalam inti, apa yang menyusun separuh massa nuklir lainnya? (2) Apa yang menyediakan gaya kohesif untuk menahan banyak proton dalam jarak yang sangat kecil dari 10^{-14} m? (3) Bagaimana elektron bergerak di sekitar nukleus untuk membentuk atom yang stabil, dan bagaimana gerakannya menjelaskan garis spektral yang diamati?

Rutherford tidak memiliki jawaban yang tepat untuk pertanyaan pertama. Dia berspekulasi bahwa perbedaan antara massa proton Z dan massa inti total dapat diperhitungkan dengan pengelompokan tambahan partikel netral, masing-masing terdiri dari: dari pasangan elektron-proton terikat. Dugaan ini tampaknya sangat memuaskan karena itu membangun atom dari partikel paling mendasar yang kemudian dikenal ada.

Sebagai jawaban atas pertanyaan kedua, Rutherford dengan hati-hati memegang bahwa listrik kekuatan yang disediakan semen untuk menahan inti bersama-sama. Rutherford (1921) menuliskan, "*The nucleus, though of minute dimensions, is in itself a very complex system consisting of positively and negatively charged bodies bound closely together by intense electrical forces.*" Faktanya, baru pada tahun 1921 diketahui dengan jelas bahwa gaya Coulomb tidak menahan inti bersama-sama dan bahwa jenis gaya yang sama sekali baru dan sangat kuat mengikat proton bersama-sama. Menariknya adalah James Chadwick, penemu neutron, yang pertama kali menyadari bahwa gaya baru yang lebih besar dari intensitas listrik sedang bekerja di bumi. nukleus. Mungkin pencapaian luar biasa Rutherford dalam menjelaskan berhamburan dengan hukum Coulomb membutakannya pada kemungkinan bahwa ini adalah bukan hukum pamungkas yang bekerja di dalam nukleus.

Jawaban atas pertanyaan ketiga tidak diberikan oleh Rutherford. Itu adalah karya agung Niels Bohr. Meski begitu, dengan karakteristik wawasan, Rutherford

menyebutkan model planet atom atau, lebih tepatnya, muatan negatif itu berputar di sekitar inti positif padat sebagai planet-planet berputar mengelilingi Matahari (Gambar 3.2).



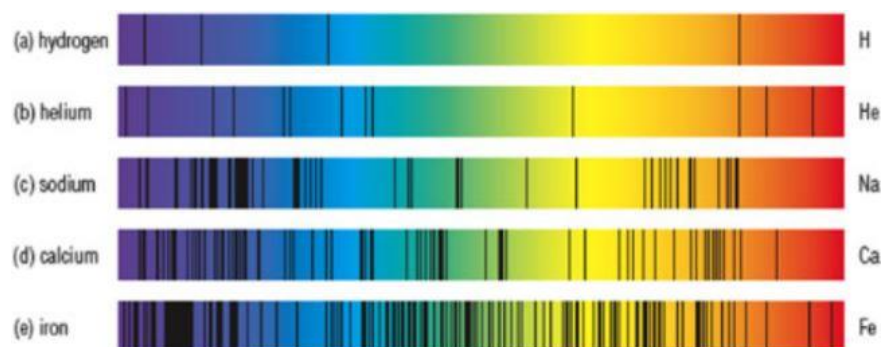
Gambar 3.2 Nukleon seolah-olah berperan sebagai matahari, sedangkan para elektron merupakan planet-planetnya.

Sumber: www.commonswikimedia.org

B. Spektrum Atom Hidrogen

Sebelum melihat secara rinci teori pertama dinamika atom yang berhasil, penulis meninjau karya eksperimental pada spektrum garis yang berfungsi sebagai dorongan untuk dan konfirmasi yang jelas dari teori kuantum pertama atom. Seperti yang sudah ditunjukkan di Bab 1, padatan dan cairan bercahaya (dan bahkan gas pada kepadatan tinggi yang ditemukan di bintang-bintang) memancarkan distribusi kontinu panjang gelombang. Distribusi ini menunjukkan bentuk yang sama untuk kurva intensitas versus panjang gelombang, dan puncak dalam kurva ini bergeser ke arah yang lebih pendek panjang gelombang dengan meningkatnya suhu. Kurva "benda hitam" universal ini adalah ditunjukkan pada Gambar 1.5.

Sangat kontras dengan spektrum kontinu ini adalah spektrum garis diskrit dipancarkan oleh gas bertekanan rendah yang mengalami pelepasan listrik. Ketika cahaya dari pelepasan gas bertekanan rendah tersebut diperiksa dengan spektroskop, ditemukan terdiri dari beberapa garis cerah warna murni pada latar belakang gelap. Ini kontras tajam dengan pelangi warna terus menerus terlihat saat bersinar padat dilihat melalui spektroskop. Selanjutnya, seperti yang dapat dilihat dari Gambar 3.3, panjang gelombang yang terkandung dalam spektrum garis tertentu adalah karakteristik dari elemen tertentu yang memancarkan cahaya. Spektrum garis paling sederhana diamati untuk atom hidrogen, dan kami akan menjelaskan spektrum ini secara rinci.

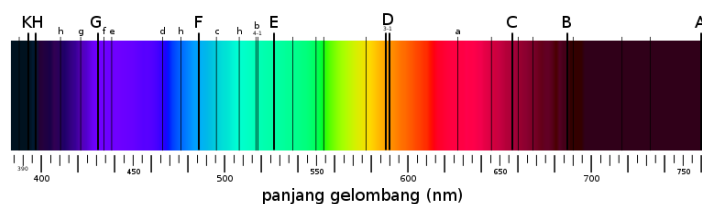


Gambar 3.3 Spektrum garis emisi dari beberapa representatif

Sumber: www.commonswikimedia.org

Atom lain, seperti merkuri, helium, dan neon, memberikan spektrum garis yang sama sekali berbeda. Karena tidak ada dua elemen memancarkan spektrum garis yang sama, fenomena ini mewakili praktis dan teknik sensitif untuk mengidentifikasi unsur-unsur yang ada dalam sampel yang tidak diketahui. Faktanya, pada tahun 1860, spektroskopi telah maju sejauh ini di tangan Gustav Robert Kirchhoff dan Robert Wilhelm von Bunsen di Universitas Heidelberg bahwa mereka dapat menemukan dua elemen baru, rubidium dan cesium, dengan mengamati sekuens baru garis spektral dalam sampel mineral. Perbaikan dalam instrumen dan teknik menghasilkan pertumbuhan besar dalam analisis spektral di Eropa dari tahun 1860 hingga 1900. Bahkan Imajinasi publik Eropa ditangkap oleh spektroskopi ketika teknik spektroskopi menunjukkan bahwa meteorit "langit" hanya terdiri dari elemen bumi yang diketahui.

Kontribusi besar Kirchhoff untuk spektroskopi juga ditunjukkan oleh kemajuan lain yang dibuatnya pada tahun 1859, yakni dasar spektroskopi absorpsi dan penjelasan garis-D gelap Fraunhofer dalam spektrum matahari. Pada tahun 1814, Joseph Fraunhofer telah melewati spektrum kontinu dari Matahari melalui celah sempit kemudian melalui prisma. Dia mengamati yang mengejutkan hasil dari hampir 1000 garis gelap halus, atau celah, dalam pelangi berkelanjutan spektrum Matahari, dan dia menetapkan huruf A, B, C, D . . . sampai ke garis-garis gelap yang paling menonjol. Garis-garis ini dan banyak lagi ditunjukkan pada Gambar 3.4. Kirchhoff dengan tepat menyimpulkan bahwa garis gelap misterius dihasilkan oleh awan atom yang menguap di luar Matahari, lapisan yang lebih dingin, yang menyerap pada frekuensi diskrit radiasi kontinu yang intens dari pusat Matahari. Selanjutnya, dia menunjukkan bahwa garis-D Fraunhofer diproduksi dengan cara diuapkan natrium dan bahwa mereka memiliki panjang gelombang yang sama dengan garis kuning kuat di spektrum emisi natrium. Kirchhoff juga dengan tepat menyimpulkan bahwa semua Garis gelap Fraunhofer seharusnya disebabkan oleh penyerapan oleh berbagai elemen yang ada di Matahari. Dalam satu pukulan dia membuka jalan untuk menentukan komposisi unsur bintang triliunan mil dari Bumi.



Gambar 3.4 Garis-garis Fraunhofer

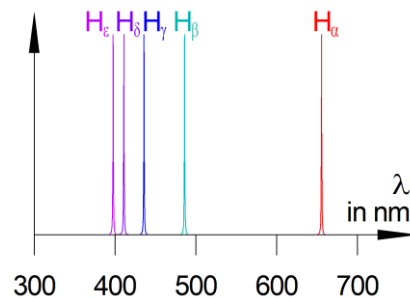
Sumber: www.commonswikimedia.org

Saat ini, spektroskopi serapan sama pentingnya dengan spektroskopi emisi untuk analisis kualitatif dan kuantitatif unsur dan molekul kelompok. Secara umum, seseorang memperoleh spektrum serapan dengan melewatkan cahaya dari sumber kontinu [baik dalam ultraviolet (uv), terlihat (vis), atau daerah inframerah (IR)] melalui gas dari elemen yang dianalisis. penyerapan spektrum terdiri dari serangkaian garis gelap yang ditumpangkan pada spektrum kontinu yang dipancarkan oleh sumbernya. Setiap garis dalam spektrum absorpsi dari suatu elemen bertepatan dengan garis dalam spektrum emisi yang sama elemen; Namun, tidak semua garis emisi hadir dalam penyerapan spektrum. Perbedaan antara spektrum emisi dan serapan pada umumnya rumit dan bergantung pada suhu uap penyerap.

Penggunaan yang menarik dari kebetulan garis penyerapan dan emisi adalah dibuat dalam spektrometer serapan atom. Perangkat ini secara rutin digunakan untuk

mengukur bagian per juta (ppm) logam yang tidak diketahui. Misalnya, jika natrium diukur, lampu natrium yang memancarkan spektrum garis dipilih sebagai cahaya sumber. Yang tidak diketahui dipanaskan dalam api panas (biasanya oxyacetylene) untuk menguap sampel, untuk memutuskan ikatan kimia natrium dengan unsur lain, dan untuk menghasilkan gas natrium unsur. Spektrometer kemudian disetel ke panjang gelombang yang memiliki garis absorpsi dan emisi (misalnya, salah satu garis D pada 588,99 atau 589,59 nm), dan jumlah penggelapan atau penurunan intensitas adalah diukur dengan photomultiplier sensitif. Penurunan intensitas adalah ukuran dari konsentrasi natrium. Dengan kalibrasi yang tepat, konsentrasi 0,1 ppm dapat diukur dengan teknik yang sangat selektif ini. Penyerapan atom spektroskopi telah menjadi teknik yang berguna dalam menganalisis kontaminasi logam berat pada rantai makanan. M Ångström isalnya, penentuan pertama tingkat tinggi merkuri pada ikan tuna dibuat dengan serapan atom.

Dari tahun 1860 hingga 1885 pengukuran spektroskopi terakumulasi secara besar-besaran mengubur ahli teori hiruk pikuk di bawah segunung data. Pengukuran akurat dari empat garis emisi hidrogen yang terlihat baru-baru ini dilakukan oleh Anders Ångström, seorang fisikawan Swedia, ketika pada tahun 1885 menjadi guru sekolah Swiss Johann Jakob Balmer, menerbitkan makalah dengan judul sederhana “*Notice Concerning the Spectral Lines of Hydrogen*”. Dengan coba-coba, Balmer telah menemukan formula yang dengan tepat memprediksi panjang gelombang empat garis Ångström yang terlihat: H_α (merah), H_β (hijau), H_γ (biru), dan H_δ (ungu). Gambar 3.5 menunjukkan ini dan garis lainnya dalam spektrum emisi hidrogen.



Gambar 3.5 Deret Balmer dari garis spektral hidrogen (spektrum emisi)

Sumber: www.commonswikimedia.org

Balmer memberikan rumusnya dalam bentuk

$$\lambda(\text{cm}) = C_2 \left(\frac{n^2}{n^2 - 2} \right); \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (3.1)$$

dimana λ adalah panjang gelombang yang diemisi dalam cm dan $C_2 = 3545,6 \times 10^{-8}$ cm, sebuah konstan yang disebut limit konvergen karena ia memberikan panjang gelombang dari garis dengan nilai n terbesar ($n = \infty$). Juga, perhatikan bahwa $n = 3, 4, 5, \dots$, dimana H_α memiliki $n = 3$, H_β memiliki $n = 4$, dan seterusnya. Meski hanya empat baris diketahui Balmer ketika dia memulai makalahnya, pada saat dia selesai, sepuluh garis lagi dalam warna ungu dan ultraviolet telah diukur. Banyak untuk kesenangan dan kepuasannya, garis-garis ini setuju dengan formula empirisnya dalam 0,1%! Didorong oleh kesuksesannya dan karena dia sedikit ahli dalam numerologi, Balmer menyarankan bahwa seri hidrogen lain mungkin ada dari bentuk

$$\lambda = C_3 \left(\frac{n^2}{n^2 - 3^2} \right); \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (3.2)$$

$$\lambda = C_4 \left(\frac{n^2}{n^2 - 4^2} \right); n = 5, 6, 7, \dots \quad (3.3)$$

Seperti yang kita ketahui sekarang, spekulasinya benar, dan seri ini memang benar ada. Dalam notasi hari ini, semua seri ini diberikan oleh satu rumus:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (3.4)$$

dimana n_f dan n_i adalah bilangan bulat. Konstanta Rydberg, R , adalah sama untuk semua deret dan memiliki nilai

$$R = 1,0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (3.5)$$

Perhatikan bahwa untuk deret tertentu, n_f memiliki nilai konstan. Selanjutnya, untuk diberikan seri $n_i = n_f + 1, n_f + 2, \dots$. Tabel 4.1 mencantumkan nama setiap seri (diberi nama setelah penemunya) dan bilangan bulat yang menentukan deret tersebut.

Tabel 3.1 Beberapa seri spektral untuk atom hidrogen

Deret Lyman (ultraviolet)	$n_f = 1$	$n_i = 2, 3, 4, \dots$
Deret Balmer (cahaya tampak–ultraviolet)	$n_f = 2$	$n_i = 3, 4, 5, \dots$
Deret Paschen (inframerah)	$n_f = 3$	$n_i = 4, 5, 6, \dots$
Deret Brackett (inframerah)	$n_f = 4$	$n_i = 5, 6, 7, \dots$
Deret Pfund (inframerah)	$n_f = 5$	$n_i = 6, 7, 8, \dots$

C. Model Atom Bohr

Pada bulan April 1913, seorang fisikawan muda Denmark, Niels Bohr (yang baru-baru ini bekerja dengan Thomson dan Rutherford), menerbitkan makalah tiga bagian yang mengguncang dunia fisika hingga ke dasarnya. Tidak hanya anak muda yang pemberontak ini memberikan teori spektrum garis atom pertama yang berhasil tetapi dalam prosesnya dia menggulingkan beberapa prinsip yang paling dihargai dari raja yang memerintah elektromagnetisme, James Clerk Maxwell.

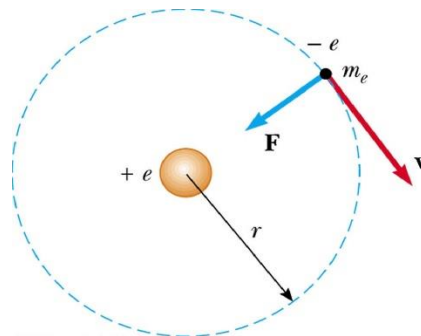
Dari sudut pandang kami, model Bohr mungkin tampak masuk akal untuk selanjutnya langkah, tetapi itu tampak mencengangkan, membingungkan, dan sangat berani untuk orang-orang sezamannya. Seperti disebutkan sebelumnya, baik Thomson dan Rutherford menyadari bahwa elektron harus berputar mengelilingi inti untuk menghindari jatuh ke dalamnya. Mereka, bersama dengan Bohr, menyadari bahwa menurut Maxwell's teori, muatan dipercepat yang berevolusi dengan frekuensi orbital f harus memancar gelombang cahaya frekuensi f . Sayangnya, didorong ke kesimpulan logisnya, model klasik ini membawa bencana. Saat elektron memancarkan energi, radius orbit terus menurun dan frekuensi revolusi meningkat. Hal ini menyebabkan frekuensi radiasi yang dipancarkan semakin meningkat dan keruntuhan dahsyat atom saat elektron terjun ke dalam nukleus.

Pengurangan elektron ini jatuh ke dalam nukleus dan terus menerus spektrum emisi dari unsur-unsur yang berani dielakkan oleh Bohr. Dia hanya mendalilkan teori

radiasi klasik, yang telah dikonfirmasi oleh Deteksi gelombang radio Hertz menggunakan sirkuit besar, tidak berlaku untuk sistem berukuran atom. Selain itu, ia menggambarkan pada karya Planck dan Einstein sebagai sumber teori yang benar tentang sistem atom. Dia mengatasi masalah elektron klasik yang terus-menerus kehilangan energi dengan menerapkan gagasan Planck tentang tingkat energi terkuantisasi untuk mengorbit elektron atom. Jadi dia mendalilkan bahwa elektron dalam atom umumnya terbatas pada stabil, nonradiating tertentu tingkat energi dan orbit yang dikenal sebagai keadaan stasioner. Dia menerapkan prinsip Einstein konsep foton untuk sampai pada ekspresi frekuensi cahaya dipancarkan ketika elektron melompat dari satu keadaan diam ke keadaan diam lainnya. Jadi, jika E adalah pemisahan dua kemungkinan keadaan stasioner elektronik, maka $E = hf$, di mana h adalah konstanta Planck dan f adalah frekuensi cahaya yang dipancarkan terlepas dari frekuensi gerakan orbital elektron. Dengan cara ini, dengan menggabungkan prinsip-prinsip tertentu mekanika klasik dengan prinsip-prinsip kuantum baru emisi cahaya, Bohr sampai pada teori atom yang sangat setuju dengan percobaan.

Sekarang kita telah melihat prinsip-prinsip umum model hidrogen Bohr dan spektrum eksperimental terperinci yang telah ditemukan pada tahun 1913, mari kita periksa teori kuantum Bohr secara rinci. Ide dasar dari Bohr teori yang berlaku untuk atom hidrogen adalah sebagai berikut:

- Elektron bergerak dalam orbit melingkar di sekitar proton di bawah pengaruh gaya tarik Coulomb, seperti pada Gambar 3.6. Sejauh ini tidak ada yang baru!



Gambar 3.6 Diagram yang mewakili model atom hidrogen Bohr.

Sumber: www.commonswikimedia.org

- Hanya orbit tertentu yang stabil. Orbit stabil ini adalah orbit di mana elektron tidak memancarkan. Oleh karena itu energi tetap atau stasioner dalam waktu, dan mekanika klasik biasa dapat digunakan untuk menggambarkan elektron bergerak dalam orbit yang stabil ini.
- Radiasi dipancarkan oleh atom ketika elektron “melompat” dari tempat yang lebih keadaan stasioner awal yang energetik ke keadaan yang lebih rendah yang kurang energetik. Ini "lompatan" tidak dapat divisualisasikan atau diperlakukan secara klasik. Secara khusus, frekuensi f foton yang dipancarkan dalam lompatan tidak tergantung pada frekuensi gerak orbital elektron. Sebaliknya, frekuensi cahaya yang dipancarkan terkait dengan perubahan energi atom dan adalah diberikan oleh rumus Planck-Einstein

$$E_i - E_f = hf \quad (3.6)$$

di mana E_i adalah energi negara, dan $E_i > E_f$.

- Ukuran orbit elektron yang diizinkan ditentukan oleh keadaan awal, E_f adalah energi akhir kondisi kuantum tambahan yang dikenakan pada sudut orbital elektron momentum. Yaitu, orbit yang diizinkan adalah orbit yang elektronnya momentum sudut orbital tentang inti adalah kelipatan integral dari $\hbar = h/2\pi$,

$$m_e v r = n \hbar; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

Dengan menggunakan empat asumsi ini, kita sekarang dapat menghitung energi yang diizinkan tingkat dan panjang gelombang emisi atom hidrogen. Ingat bahwa energi potensial listrik dari sistem yang ditunjukkan pada Gambar 3.6 diberikan oleh $U = qV = -ke^2/r$, di mana k (konstanta Coulomb) bernilai $1/4\pi\epsilon_0$. Jadi, energi total atom, yang mengandung istilah energi kinetik dan energi potensial, adalah

$$E = K + U = \frac{1}{2}m_e v^2 - k \frac{e^2}{r} \quad (3.8)$$

Menerapkan hukum kedua Newton untuk sistem ini, kita melihat bahwa gaya tarik Coulomb pada elektron, ke^2/r^2 , harus sama dengan massa kali percepatan elektron, atau

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (3.9)$$

Dari ekspresi ini, kami segera menemukan energi kinetik menjadi

$$K = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{ke^2}{2r} \quad (3.10)$$

Mensubstitusikan nilai K ini ke dalam Persamaan (3.8) memberikan energi total dari atom sebagai

$$E = -\frac{ke^2}{2r} \quad (3.11)$$

Perhatikan bahwa energi total negatif, menunjukkan elektron terikat-proton sistem. Ini berarti energi sebesar $\frac{ke^2}{2r}$ harus ditambahkan ke atom untuk melepaskan elektron hingga tak terhingga dan membiarkannya tidak bergerak. Sebuah ekspresi untuk r , jari-jari orbit elektron, dapat diperoleh dengan menghilangkan v antara Persamaan (3.7) dan (3.10):

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e k e^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

Persamaan (3.12) menunjukkan bahwa hanya orbit tertentu yang diperbolehkan dan bahwa orbit yang disukai mengikuti dari langkah nonklasik yang membutuhkan elektron momentum sudut menjadi kelipatan integral dari $\hbar$. Jari-jari terkecil terjadi untuk $n = 1$, disebut jari-jari Bohr, dan dilambangkan dengan a_0 . Nilai untuk Jari-jari Bohr adalah

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} = 0,529 \text{ \AA} = 0,0529 \text{ nm} \quad (3.13)$$

Fakta bahwa teori Bohr memberikan nilai a_0 sesuai dengan ukuran eksperimental hidrogen tanpa kalibrasi empiris ukuran orbit dianggap sebagai kemenangan mencolok untuk teori ini. Tiga orbit Bohr pertama ditunjukkan skala pada Gambar 3.7.

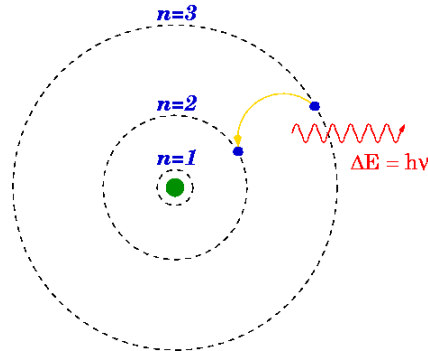
Kuantisasi jari-jari orbit segera mengarah ke kuantisasi energi. Hal ini dapat dilihat dengan mensubstitusikan $r_n = n^2 a_0$ ke dalam Persamaan (3.11), menghasilkan

tingkat energi yang diizinkan

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0} \left(\frac{1}{n^2} \right); n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.14)$$

Memasukkan nilai numerik ke dalam Persamaan (3.14) memberikan

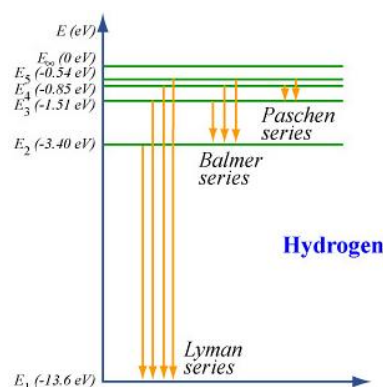
$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}; n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$



Gambar 3.7 Tiga orbit Bohr pertama untuk hidrogen

Sumber: www.commonswikimedia.org

Bilangan bulat n yang sesuai dengan nilai diskrit, atau terkuantisasi, dari energi atom memiliki nama khusus bilangan kuantum. Kuantum bilangan adalah pusat teori kuantum dan secara umum mengacu pada himpunan bilangan bulat yang memberi label nilai-nilai diskrit dari jumlah atom penting, seperti energi dan momentum sudut. Keadaan stasioner terendah, atau tidak memancar, disebut keadaan dasar, memiliki $n = 1$, dan memiliki energi $E_1 = -13,6 \text{ eV}$. Keadaan berikutnya, atau keadaan tereksitasi pertama, memiliki $n = 2$ dan energi $E_2 = \frac{E_1}{2^2} = -3,4 \text{ eV}$. Diagram tingkat energi yang menunjukkan energi dari keadaan energi diskrit ini dan bilangan kuantum yang sesuai ditunjukkan pada Gambar 3.8. Tingkat paling atas, sesuai dengan $n = \infty$ (atau $r = \infty$) dan $E = 0$, mewakili keadaan pelepasan elektron dari atom dan tidak bergerak. Energi minimum yang diperlukan untuk mengionisasi atom (yaitu, untuk melepaskan elektron sepenuhnya dalam keadaan dasar dari pengaruh proton) disebut energi ionisasi. Seperti yang bisa dilihat dari Gambar 3.8, energi ionisasi untuk hidrogen berdasarkan perhitungan Bohr adalah $13,6 \text{ eV}$. Ini merupakan pencapaian besar lainnya bagi Teori Bohr, karena energi ionisasi untuk hidrogen telah diukur tepat $13,6 \text{ eV}$.



Gambar 3.8 Diagram tingkat energi untuk hidrogen

Sumber: www.flickr.com

Persamaan (3.14) bersama dengan postulat ketiga Bohr dapat digunakan untuk menghitung frekuensi foton yang dipancarkan ketika elektron melompat dari luar mengorbit ke orbit dalam:

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{ke^2}{2a_0} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (3.16)$$

Karena besaran yang sebenarnya diukur adalah panjang gelombang, maka lebih mudah untuk mengubah frekuensi menjadi panjang gelombang menggunakan $c = \lambda f$ untuk mendapatkan

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{ke^2}{2a_0 hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (3.17)$$

Fakta yang luar biasa adalah bahwa ekspresi teoritis, Persamaan (3.17), identik dengan hubungan empiris Balmer

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (3.18)$$

membuktikan kombinasi konstanta $\frac{ke^2}{2a_0 hc}$ sama dengan konstanta Rydberg yang ditentukan secara eksperimen, $R = 1,0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$. Ketika Bohr mendemonstrasikan kesesuaian kedua besaran ini dengan ketepatan sekitar 1% di akhir tahun 1913, itu diakui sebagai pencapaian puncaknya teori kuantum hidrogen. Selanjutnya, Bohr menunjukkan bahwa semua mengamati seri spektral untuk hidrogen yang disebutkan sebelumnya di bagian ini memiliki interpretasi alami dalam teorinya. Deret spektral ini ditunjukkan sebagai transisi antar tingkat energi pada Gambar 3.8.

Bohr segera memperluas modelnya untuk hidrogen ke elemen lain di yang semua kecuali satu elektron telah dihapus. Unsur-unsur terionisasi seperti He^+ , Li^{2+} , dan Be^{3+} diduga ada di atmosfer bintang yang panas, di mana sering terjadi tumbukan atom dengan energi yang cukup untuk menghilangkan satu atau lebih elektron atom. Bohr menunjukkan bahwa beberapa garis misterius diamati di Matahari dan bintang-bintang tidak mungkin karena hidrogen, tetapi diprediksi dengan benar oleh teorinya jika dikaitkan dengan helium terionisasi tunggal. Secara umum, untuk menggambarkan elektron tunggal yang mengorbit inti tetap bermuatan $+Ze$, teori Bohr memberikan

$$r_n = (r^n) \frac{a_0}{Z} \quad (3.19)$$

dan

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0} \left(\frac{Z^2}{n^2} \right); n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.20)$$

Meskipun derivasi teoritis dari spektrum garis adalah prestasi yang luar biasa dalam dirinya sendiri, ruang lingkup dan dampak pencapaian monumental Bohr benar-benar terlihat hanya ketika disadari apa lagi yang dia bahas dalam makalah tiga bagiannya tahun 1913:

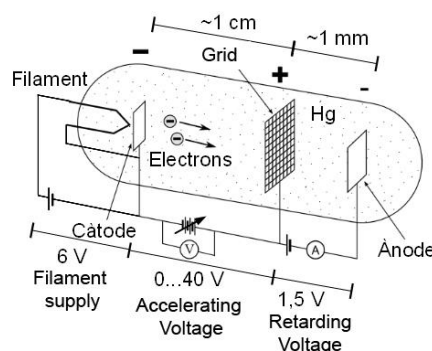
- Dia menjelaskan mengapa lebih sedikit garis yang terlihat dalam spektrum serapan hidrogen daripada dalam spektrum emisi.
- Dia menjelaskan emisi sinar-X dari atom.
- Dia menjelaskan asal mula partikel β .
- Dia menjelaskan sifat kimia atom dalam hal elektron model cangkang.
- Dia menjelaskan bagaimana atom berasosiasi membentuk molekul.

Dua dari topik ini, perbandingan penyerapan dan emisi dalam hidrogen dan struktur kulit atom, sangat penting secara umum sehingga layak mendapat penjelasan lebih. Kita telah menunjukkan bahwa gas akan menyerap pada panjang gelombang yang sesuai dengan beberapa garis emisi, tetapi tidak setiap garis yang ada dalam emisi adalah terlihat sebagai garis absorpsi gelap. Bohr menjelaskan penyerapan sebagai kebalikan dari emisi; yaitu, elektron dalam keadaan energi tertentu hanya dapat menyerap foton frekuensi tepat yang diperlukan untuk menghasilkan "lompatan" dari keadaan energi yang lebih rendah ke keadaan energi yang lebih tinggi. Biasanya, atom hidrogen berada dalam keadaan dasar ($n = 1$) dan hanya deret Lyman berenergi tinggi yang sesuai dengan transisi dari keadaan dasar ke keadaan energi yang lebih tinggi yang terlihat dalam penyerapan. Itu deret Balmer dengan panjang gelombang lebih panjang yang sesuai dengan transisi yang berasal dari keadaan tereksitasi pertama ($n = 2$) tidak terlihat karena energi panas rata-rata setiap atom tidak cukup untuk menaikkan elektron ke keadaan tereksitasi pertama. Itu adalah, jumlah elektron pada keadaan tereksitasi pertama tidak mencukupi pada keadaan biasa suhu untuk menghasilkan penyerapan yang terukur.

D. Percobaan Franck-Hertz

Di bagian sebelumnya kami telah menunjukkan jejak penalaran yang terlibat secara tidak langsung membuktikan adanya tingkat energi terkuantisasi dalam atom dari pengamatan spektrum garis optik yang dipancarkan oleh elemen yang berbeda. Sekarang kita beralih ke bukti eksperimental yang lebih sederhana dan lebih langsung dari keberadaan tingkat energi diskrit dalam atom yang melibatkan eksitasi mereka dengan tumbukan dengan elektron berenergi rendah. Eksperimen pertama dari jenis ini adalah dilakukan oleh fisikawan Jerman James Franck dan Gustav Hertz (keponakan Heinrich Hertz) pada tahun 1914 tentang atom merkuri (Hg). Ini memberikan bukti eksperimental yang jelas tentang keberadaan tingkat energi terkuantisasi dalam atom dan menunjukkan bahwa level yang disimpulkan dari pemboman elektron sesuai dengan yang disimpulkan dari spektrum garis optik. Selanjutnya, itu menegaskan universalitas kuantisasi energi dalam atom, karena sangat berbeda proses fisik emisi foton dan pemboman elektron dihasilkan tingkat energi yang sama.

Gambar 3.9 menunjukkan skema perangkat laboratorium perguruan tinggi yang serupa ke apparatus Franck-Hertz.

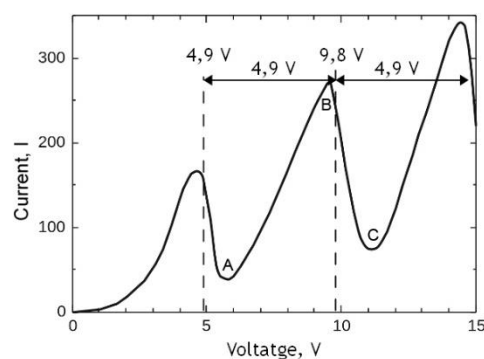


Gambar 3.9 Aparat Franck-Hertz. Setetes merkuri murni disegel ke dalam tabung yang dievakui.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Elektron yang dipancarkan oleh filamen dipercepat pada daerah yang relatif panjang (1 cm) oleh potensial positif pada kisi, V . Elektron dapat mencapai kolektor dan dicatat pada elektrometer (amperemeter sensitif) jika mereka memiliki energi yang cukup untuk mengatasi potensi perlambatan sekitar 1,5 V diatur dalam jarak pendek (1 mm) antara grid dan kolektor. Pada energi elektron rendah atau tegangan percepatan, tumbukan lenting sempurna terjadi antara elektron dan atom Hg di mana jumlah energi kinetik elektron dan atom adalah kekal. Karena atom Hg jauh lebih masif daripada elektron, elektron mentransfer sangat sedikit energi kinetik ke atom dalam tumbukan. Bahkan setelah beberapa kali tumbukan, elektron mencapai kisi-kisi dengan kinetika energi kira-kira e kali V dan akan dikumpulkan jika dipercepat tegangan V lebih besar dari 1,5 V. Ketika V dinaikkan sedikit, lebih banyak elektron mencapai kolektor dan arus, I , naik.

Sebagaimana tegangan percepatan meningkat lebih lanjut, tegangan ambang batas dicapai di mana tumbukan tidak elastis terjadi di kisi, di mana elektron mencapai energi e kali V . Dalam tumbukan tidak lenting ini, elektron dapat mentransfer hampir semua energi kinetiknya ke atom, menaikkannya ke keadaan tereksitasi pertama. Elektron yang bertabrakan inelastis tidak dapat mengatasi potensi perlambatan dan akibatnya I menurun untuk tegangan ambang ini. Gambar 3.10 menunjukkan tipikal plot arus versus tegangan percepatan, dengan penurunan arus lemah pertama (A) terjadi pada tegangan ambang sedikit lebih dari 7 V. Ketika tegangan meningkat sekali lagi, daerah tumbukan tidak elastis bergerak lebih dekat ke filamen dan elektron yang dihentikan oleh tumbukan tidak elastis dipercepat kembali, mencapai kolektor dan menyebabkan kenaikan lagi arus (B). Penurunan lain (C) terjadi ketika V dinaikkan cukup untuk elektron untuk memiliki dua tumbukan lenting berturut-turut: sebuah elektron menggairahkan atom setengah jalan antara filamen dan kisi, kehilangan semua energinya, dan kemudian dipercepat kembali untuk menggairahkan atom lain di kisi, akhirnya berakhir dengan tidak cukup energi untuk dikumpulkan. Proses ini berlangsung secara berkala dengan meningkatnya tegangan jaringan, sehingga menimbulkan maksimum spasi yang sama dan minima pada kurva $I - V$, seperti terlihat pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Arus sebagai fungsi tegangan dalam eksperimen Frank-Hertz.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Jika pemisahan maksimum dan minimum yang berdekatan dari Gambar 3.10 dilakukan dengan rata-rata secara hati-hati, seseorang menemukan rata-rata $4,9 \pm 0,1$ V, atau ground ke keadaan tereksitasi pertama dengan pemisahan $4,9 \pm 0,1 \text{ eV}$. Namun, perhatikan bahwa minimum pertama tidak terjadi pada 4,9 V tetapi pada sekitar 5,9 V. Energi ekstra ($5,9 - 4,9 = 1,0 \text{ eV}$) adalah diperlukan karena filamen dan kolektor

terbuat dari logam yang berbeda dengan: fungsi kerja yang berbeda. (Ingat bahwa fungsi kerja adalah energi yang dibutuhkan untuk menarik elektron keluar dari logam [lihat bab 2]). Meskipun filamen, seperti semua emitor yang baik, memiliki fungsi kerja yang rendah, kolektor memiliki fungsi kerja yang tinggi, dan energi fungsi kerja ini harus disuplai untuk mengekstrak elektron dari kolektor sehingga arus dapat mengalir di sirkuit.

Seperti yang telah kita lihat, Franck dan Hertz menggunakan pengukuran amperemeter dan voltmeter sederhana untuk menunjukkan bahwa atom hanya dapat menerima sejumlah energi diskrit dari berkas elektron. Selain itu, mereka menunjukkan bahwa tingkat energi diperoleh dari pemboman elektron setuju dengan hasil spektroskopi. Penalaran bahwa atom Hg benar-benar tereksitasi ke tingkat energi 4,9 eV di atas keadaan dasarnya dapat kembali ke keadaan dasarnya dengan memancarkan satu foton (seperti yang baru saja didalilkan Bohr), mereka menghitung panjang gelombang dari sebuah foton menjadi

$$\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (3.21)$$

atau

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV nm}}{4,9 \text{ eV}} = 253 \text{ nm} \quad (3.22)$$

Karena kaca tidak transparan terhadap radiasi ultraviolet, mereka membuat peralatan kuarsa dan hati-hati mengukur radiasi yang dipancarkan, menemukan radiasi dengan panjang gelombang 254 nm yang akan dipancarkan segera setelah tegangan percepatan melebihi 4,9 V. Untuk konfirmasi eksperimental langsung dari dasar ide Bohr tingkat energi diskrit dalam atom dan proses emisi foton, Franck dan Hertz dianugerahi hadiah Nobel pada tahun 1925.

E. Prinsip Korespondensi Bohr atau Mengapa Momentum Anguler Terkuantisasi?

Di mana orang lain mungkin telah meninggalkan celah liar dan tanpa hukum di antara kaum revolusioner hukum baru yang berlaku untuk sistem atom dan yang berlaku untuk sistem klasik, Bohr memberikan kontinum yang lembut dan halus dalam bentuk prinsip korespondensi. Prinsip ini menyatakan bahwa prediksi teori kuantum harus sesuai dengan prediksi fisika klasik di wilayah ukuran di mana teori klasik diketahui berlaku. Ukuran klasik ini untuk panjang, massa, dan waktu dalam orde sentimeter, gram, dan sekon dan biasanya melibatkan bilangan kuantum yang sangat besar, seperti yang dapat dilihat dengan menghitung n untuk atom hidrogen dengan jari-jari 1 cm. Jika bilangan kuantum menjadi besar karena bertambahnya ukuran atau massa, kita dapat menyatakan prinsip korespondensi secara simbolis sebagai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{fisika kuantum}] = [\text{fisika klasik}]$$

di mana n adalah bilangan kuantum khas sistem seperti nomor kuantum untuk hidrogen. Di tangan Bohr, prinsip korespondensi menjadi alat ahli untuk menguji hasil kuantum baru serta sumber postulat dasar tentang sistem atom. Faktanya, Bohr menggunakan penalaran jenis ini untuk sampai pada konsep kuantisasi elektron momentum sudut orbit. Kedua gagasan Bohr tentang diskrit, tidak memancar keadaan

energi dan postulat emisi untuk atom diramalkan dengan kuantisasi Planck tentang energi osilator benda hitam dan dengan Perlakuan Einstein terhadap efek fotolistrik. Namun, konsep kuantisasi momentum sudut tampaknya muncul sepenuhnya dari *Gedankenkuhe* (dapur pemikiran) Bohr, seperti yang diungkapkan dengan tepat oleh Einstein. Memang, dalam beberapa tulisannya kemudian Bohr menekankan sudut pandang bahwa kuantisasi momentum sudut adalah sebuah postulat, yang dapat diturunkan dari hukum yang lebih dalam, dan bahwa validitasnya hanya bergantung pada persetujuan modelnya dengan spektrum eksperimental.

Yang paling menarik adalah bahwa dalam makalahnya tahun 1913, Bohr dengan cerdas menunjukkan bahwa kuantisasi momentum sudut adalah konsekuensi dari kemunculan yang mulus dan bertahap dari hasil-hasil klasik dari teori kuantum dalam batas bilangan kuantum besar. Secara khusus, Bohr berpendapat bahwa menurut prinsip korespondensinya, kondisi kuantum untuk emisi ($\Delta E = hf$) dan teori radiasi klasik Maxwell (elektronik muatan dengan frekuensi orbital f memancarkan gelombang cahaya dengan frekuensi f) harus secara bersamaan berlaku untuk kasus orbit elektronik yang sangat besar.

Soal-soal

1. Panjang gelombang terpanjang dari suatu deret adalah $\frac{144}{7R}$, dengan R adalah tetapan Rydberg. Deret apakah ini?
2. Sebuah atom hidrogen dalam keadaan $n = 5$ membuat transisi ke keadaan $n = 2$ dengan memancarkan sebuah foton. Berapakah panjang gelombang foton yang dipancarkan?
3. Ketika sebuah atom hidrogen ditembak, elektron atom hidrogen itu akan tereksitasi ke tingkat energi yang lebih tinggi. Saat elektron tereksitasi jatuh kembali ke tingkat energi yang lebih rendah, cahaya dipancarkan. Tentukan ketiga panjang gelombang terbesar yang dipancarkan atom saat atom tersebut kembali ke keadaan $n = 1$ dari keadaan energi yang lebih tinggi?
4. Elektron yang mengelilingi atom hidrogen berada pada tingkat $n = 4$. Jika panjang gelombang foton 790 nm menumbuk atom, apakah atom akan mengalami ionisasi?
5. Garis-garis spektral hidrogen telah diramalkan secara akurat oleh Balmer jauh sebelum Bohr melakukannya. Mengapa pada akhirnya ramalan Bohr yang dianggap lebih signifikan?

BAB IV

DUALISME GELOMBANG PARTIKEL

A. Hipotesis de Broglie

Pada awal 1920-an para ilmuwan mengakui bahwa teori Bohr mengandung banyak kekurangan:

- Gagal memprediksi intensitas garis spektral yang diamati.
- Keberhasilannya hanya terbatas dalam memprediksi panjang gelombang emisi dan serapan untuk atom multielektron.
- Gagal memberikan persamaan gerak yang mengatur perkembangan waktu sistem atom mulai dari beberapa keadaan awal.
- Terlalu menekankan sifat partikel materi dan tidak bisa menjelaskan dualitas cahaya gelombang-partikel yang baru ditemukan.
- Tidak menyediakan skema umum untuk "mengkuantisasi" sistem lain, terutama yang tanpa gerakan periodik.

Langkah berani pertama menuju mekanika baru sistem atom diambil oleh Louis Victor de Broglie pada tahun 1923. Dalam disertasi doktornya ia mendalilkan bahwa karena foton memiliki karakteristik gelombang dan partikel, mungkin semua bentuk materi memiliki sifat gelombang dan partikel. Ini adalah ide radikal tanpa konfirmasi eksperimental pada saat itu. Menurut de Broglie, elektron memiliki sifat gelombang partikel ganda. Mendampingi setiap elektron adalah gelombang (bukan gelombang elektromagnetik!), yang memandu, atau “menuntun” elektron melalui ruang.

Mari kita lihat ide-ide de Broglie secara lebih rinci. Dia menyimpulkan bahwa panjang gelombang dan frekuensi gelombang materi yang terkait dengan objek bergerak apa pun diberikan oleh

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (4.1)$$

dan

$$f = \frac{E}{h} \quad (4.2)$$

di mana h adalah konstanta Planck, p adalah momentum relativistik, dan E adalah energi relativistik total benda. Mengingat matakuliah fisika modern, p dan E dapat ditulis sebagai

$$p = \gamma m v \quad (4.3)$$

dan

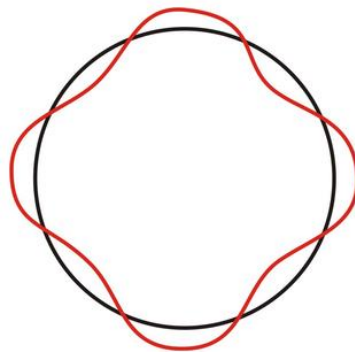
$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = \gamma^2 m^2 c^4 \quad (4.4)$$

di mana $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ dan v adalah kecepatan benda. Persamaan 5.1 dan 5.2 segera menyarankan bahwa seharusnya mudah untuk menghitung kecepatan gelombang de Broglie dari produk λf . Namun, seperti yang akan kami tunjukkan nanti, ini bukan kecepatan partikel. Karena perhitungan yang benar agak rumit, kami menundanya ke subbab C. Sebelum menjawab pertanyaan tentang kecepatan gelombang materi, kami

lebih suka terlebih dahulu memberikan beberapa contoh pengantar penggunaan $\lambda = \frac{h}{p}$ dan deskripsi singkat tentang bagaimana gelombang de Broglie memberikan fisik gambaran teori atom Bohr.

Model atom Bohr memiliki banyak kekurangan dan masalah. Misalnya, ketika elektron berputar di sekitar inti, bagaimana seseorang bisa mengerti? fakta bahwa hanya energi elektronik tertentu yang diperbolehkan? Mengapa semua atom? dari suatu unsur tertentu memiliki sifat fisik yang persis sama terlepas dari variasi tak terbatas dari kecepatan awal dan posisi elektron dalam setiap atom?

Wawasan luar biasa De Broglie adalah menyadari bahwa meskipun ini dalam masalah untuk teori partikel, teori gelombang materi menangani masalah ini rapi melalui interferensi. Misalnya, senar gitar yang dipetik, meskipun awalnya dikenakan berbagai panjang gelombang, hanya mendukung pola gelombang berdiri yang memiliki node di setiap ujungnya. Jadi hanya himpunan diskrit panjang gelombang diperbolehkan untuk gelombang berdiri, sedangkan panjang gelombang lainnya tidak termasuk dalam set diskrit ini dengan cepat menghilang oleh interferensi destruktif. Ini alasan yang sama dapat diterapkan pada gelombang materi elektron yang ditekuk menjadi lingkaran di sekitar nukleus. Meskipun awalnya distribusi panjang gelombang kontinu mungkin ada, sesuai dengan distribusi elektron awal kecepatan, sebagian besar panjang gelombang dan kecepatan cepat mati. Pola gelombang berdiri residual dengan demikian menjelaskan sifat identik dari semua atom dari suatu atom tertentu elemen dan tunjukkan bahwa atom lebih seperti kepala drum yang bergetar dengan diskrit mode getaran daripada seperti tata surya miniatur. Sudut pandang ini ditekankan pada Gambar 4.1, yang menunjukkan pola gelombang berdiri dari elektron dalam atom hidrogen sesuai dengan keadaan $n = 4$ untuk teori Bohr.



Gambar 4.1 Gelombang berdiri cocok dengan orbit Bohr melingkar. Di dalam diagram tertentu, tiga panjang gelombang sesuai dengan orbit, sesuai dengan $n = 4$ energi keadaan teori Bohr.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Aspek lain dari teori Bohr yang juga lebih mudah divisualisasikan secara fisik dengan menggunakan hipotesis de Broglie adalah kuantisasi momentum sudut. Satu hanya mengasumsikan bahwa orbit Bohr yang diizinkan muncul karena gelombang materi elektron berinterferensi secara konstruktif ketika sejumlah integral panjang gelombang tepat sesuai dengan keliling orbit lingkaran. Dengan demikian,

$$n\lambda = 2\pi r \quad (4.5)$$

di mana r adalah jari-jari orbit. Dari Persamaan (4.1), kita melihat bahwa $\lambda = h/m_e v$. Substitusikan ini ke dalam Persamaan (4.5), dan menyelesaikan untuk $m_e v r$, momentum sudut elektron, memberikan

$$m_e v r = n \hbar \quad (4.6)$$

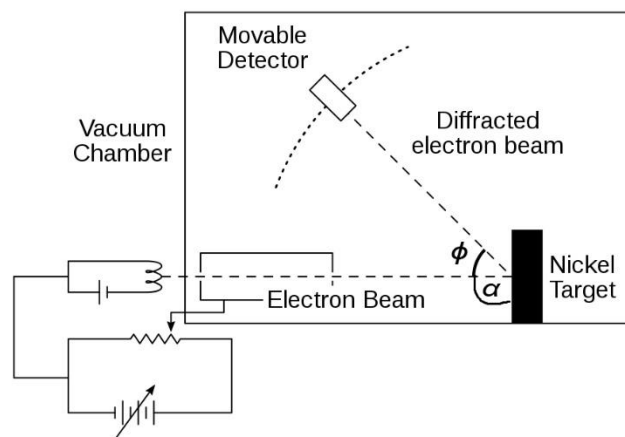
Perhatikan bahwa ini persis dengan kondisi Bohr untuk kuantisasi sudut momentum.

B. Eksperimen Davisson-Germer

Bukti eksperimental langsung bahwa elektron memiliki panjang gelombang h/p adalah dilengkapi oleh eksperimen difraksi fisikawan Amerika Clinton J. Davisson (1881– bukaan kecil seharusnya menunjukkan fenomena difraksi. Pada tahun 1925, Einstein dituntun pada perlunya mendalilkan gelombang materi dari analisis fluktuasi molekul gas. Di Selain itu, ia mencatat bahwa sinar molekul harus menunjukkan kecil tapi terukur efek difraksi. Pada tahun yang sama, Walter Elsasser menunjukkan bahwa lambat percobaan hamburan elektron C.J. Davisson dan C.H. Kunsman di Bell Labs dapat dijelaskan dengan difraksi elektron.

Bukti yang jelas dari sifat gelombang elektron diperoleh pada tahun 1927 oleh karya Davisson dan Germer di Amerika Serikat dan George P. Thomson (Fisikawan Inggris, 1892–1975, putra J. J. Thomson) di Inggris. Keduanya kasus menarik tidak hanya untuk fisika mereka tetapi juga untuk kepentingan manusia mereka. Kasus pertama adalah penemuan yang tidak disengaja, dan yang kedua melibatkan penemuan sifat partikel elektron oleh ayah dan sifat gelombang oleh putranya.

Eksperimen penting Davisson dan Germer adalah cabang dari upaya untuk memahami susunan atom pada permukaan sampel nikel dengan secara elastis menghamburkan seberkas elektron berkecepatan rendah dari target nikel polikristalin. Gambar skema peralatan mereka ditunjukkan pada Gambar 4.2.

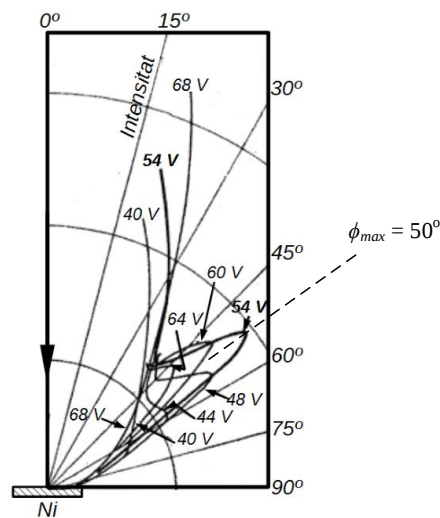


Gambar 4.2 Diagram skema dari alat percobaan Davisson-Germer.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Perangkat mereka memungkinkan variasi tiga parameter eksperimental, yaitu: 1) energi elektron, 2) orientasi target nikel, α , dan 3) sudut hamburan, ϕ . Sebelum kecelakaan yang beruntung terjadi, hasilnya tampak cukup pejalan kaki. Untuk konstan energi elektron sekitar 100 eV, intensitas hamburan menurun dengan cepat, namun ϕ

meningkat. Tapi kemudian seseorang menjatuhkan sebotol udara cair pada sistem vakum kaca, memecahkan vakum dan mengoksidasi target nikel, yang telah berada pada suhu tinggi. Untuk menghilangkan oksida, sampel direduksi dengan memanaskannya dengan hati-hati dalam aliran hidrogen yang mengalir. Ketika aparat dipasang kembali, hasil yang sangat berbeda ditemukan: Variasi yang kuat dalam intensitas elektron yang tersebar dengan sudut diamati, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3. Pemanasan yang lama ternyata telah merusak target nikel, menyebabkan daerah kristal tunggal yang besar untuk berkembang dalam sampel polikristalin. Daerah kristal ini melengkapi kisi reguler yang diperluas yang diperlukan untuk mengamati difraksi elektron. Begitu Davisson dan Germer menyadari bahwa itu adalah elastis hamburan dari kristal tunggal yang menghasilkan hasil yang tidak biasa (1925), mereka memulai penyelidikan menyeluruh tentang hamburan elastis dari kristal tunggal besar dengan orientasi kristalografi yang telah ditentukan. Bahkan percobaan ini adalah pada awalnya tidak dilakukan sebagai ujian teori gelombang de Broglie. Mengikuti diskusi dengan Richardson, Born, dan Franck, eksperimen dan analisis mereka akhirnya memuncak pada tahun 1927 dalam pembuktian bahwa elektron mengalami difraksi dengan panjang gelombang elektron yang diberikan oleh $\lambda = \frac{h}{p}$.



Gambar 4.3 Pola difraksi elektron pada percobaan Davisson-Germer
Sumber: www.commons.wikimedia.org

Gagasan bahwa elektron berperilaku seperti gelombang ketika berinteraksi dengan atom kristal sangat mencolok sehingga bukti Davisson dan Germer layak untuk lebih dekat pengawasan. Akibatnya, mereka menghitung panjang gelombang elektron dari rumus difraksi sederhana dan membandingkan hasil ini dengan rumus de Broglie. Meskipun mereka menguji hasil ini pada berbagai orientasi target dan energi elektron, kita mempertimbangkan secara rinci hanya kasus sederhana yang ditunjukkan pada Gambar 4.2 dan 4.3 dengan $\alpha = 90^\circ$, $V = 54,0 \text{ V}$, dan $\phi = 50,0^\circ$, sesuai dengan maksimum difraksi $n = 1$. Untuk menghitung panjang gelombang de Broglie untuk kasus ini, pertama-tama kita peroleh kecepatan elektron nonrelativistik yang dipercepat melalui beda potensial V dari hubungan energi

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV \quad (4.7)$$

Substitusi $v = \sqrt{2Ve/m_e}$ ke relasi de Broglie memberikan

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2Ve m_e}} \quad (4.8)$$

sehingga panjang gelombang dari elektron berenergi 54 eV adalah

$$\lambda = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}}{2(54,0V)(1,60 \times 10^{-19} C)(9,11 \times 10^{-31} kg)} = 1,67 \times 10^{-10} m = 1,67 \text{ \AA} \quad (4.9)$$

Panjang gelombang eksperimental dapat diperoleh dengan mempertimbangkan nikl atom menjadi kisi difraksi refleksi. Hanya lapisan permukaan atom dianggap karena elektron berenergi rendah, tidak seperti sinar-x, tidak menembus jauh ke dalam kristal. Interferensi konstruktif terjadi ketika perbedaan panjang lintasan antara dua sinar yang berdekatan adalah integral jumlah panjang gelombang atau

$$d \sin \phi = n\lambda \quad (4.10)$$

Karena d diketahui 2,15 dari pengukuran difraksi sinar-x, Davisson dan Germer menghitung λ menjadi

$$\lambda = (2,15 \text{ \AA})(\sin 50,0^\circ) = 1,65 \text{ \AA} \quad (4.11)$$

sangat sesuai dengan rumus de Broglie.

Sangat menarik untuk dicatat bahwa sementara garis difraksi dari energi rendah elektron yang dipantulkan cukup lebar (lihat Gambar 4.3), garis dari elektron berenergi tinggi yang ditransmisikan melalui lembaran logam cukup tajam. Efek ini terjadi karena ratusan bidang atom ditembus oleh elektron berenergi tinggi, dan akibatnya Persamaan (4.10), yang memperlakukan difraksi dari lapisan permukaan, tidak lagi berlaku. Sebaliknya, hukum Bragg, $2d \sin \theta = n\lambda$, berlaku untuk difraksi elektron berenergi tinggi. maksimal adalah sangat tajam dalam hal ini karena jika $2d \sin \theta$ tidak persis sama dengan $n\lambda$, tidak akan ada gelombang terdifraksi. Hal ini terjadi karena ada hamburan kontribusi dari begitu banyak bidang atom yang akhirnya panjang jalur perbedaan antara gelombang dari bidang pertama dan beberapa yang terkubur dalam pesawat akan menjadi kelipatan ganjil dari $\lambda/2$, mengakibatkan pembatalan total gelombang ini.

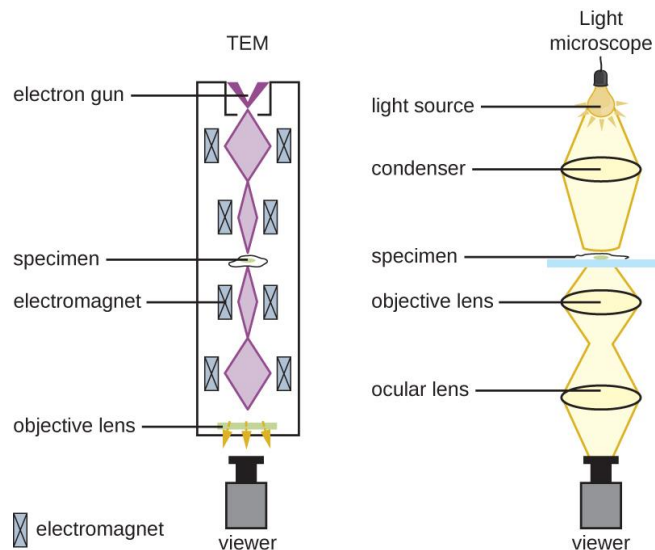
Jika postulat de Broglie benar untuk semua materi, maka setiap benda bermassa m memiliki sifat seperti gelombang dan panjang gelombang h/p . Pada tahun-tahun setelah Davisson dan penemuan Germer, para eksperimentalis menguji karakter universal dari postulat de Broglie dengan mencari difraksi sinar "partikel" lainnya. Dalam percobaan berikutnya, difraksi diamati untuk atom helium (Estermann dan Stern di Jerman) dan atom hidrogen (Johnson di Amerika Serikat). Setelah penemuan neutron pada tahun 1932, hal itu ditunjukkan bahwa berkas neutron dengan energi yang sesuai juga menunjukkan difraksi ketika insiden pada target kristal.

C. Mikroskop Elektron

Gagasan bahwa elektron memiliki panjang gelombang yang dapat dikontrol yang dapat dibuat banyak lebih pendek dari panjang gelombang cahaya tampak dan, karenanya, memiliki jauh lebih baik kemampuan untuk menyelesaikan detail halus hanyalah salah satu faktor yang menyebabkan perkembangan mikroskop elektron. Faktanya, ide alat semacam itu dilempar tentang kafe dan bar di Paris dan Berlin sejak tahun 1928. Apa yang benar-benar membuat perbedaannya adalah penggabungan

beberapa jalur pengembangan—tabung dan sirkuit elektron, teknologi vakum, dan kontrol berkas elektron—semuanya dipelopori dalam pengembangan tabung sinar katoda (CRT). Faktor-faktor tersebut menyebabkan konstruksi mikroskop Transmisi elektron (TEM) pertama dengan lensa magnetik oleh insinyur listrik Max Knoll dan Ernst Ruska di Berlin pada tahun 1931.

Ini luar biasa bahwa meskipun kinerja keseluruhan TEM telah ditingkatkan ribuan kali sejak penemuannya, pada dasarnya sama dengan prinsip yang pertama kali dirancang oleh Knoll dan Ruska: perangkat yang memfokuskan berkas elektron dengan magnet lensa dan menciptakan pola bayangan dua dimensi yang tampak datar di layarnya, hasil dari berbagai tingkat transmisi elektron melalui objek. Gambar 4.4(a) adalah diagram yang menunjukkan desain dasar ini dan Gambar 4.4(b) menunjukkan, sebagai perbandingan, mikroskop proyeksi optik. Mikroskop optik terbaik yang menggunakan sinar ultraviolet memiliki perbesaran sekitar 2000 dan dapat memisahkan dua objek yang terpisah sejauh 100 nm, tetapi menggunakan TEM elektron dipercepat melalui 100 kV memiliki perbesaran hingga 1.000.000 dan resolusi maksimum 0,2 nm. Dalam prakteknya, perbesaran 10.000 hingga 100.000 lebih mudah digunakan.



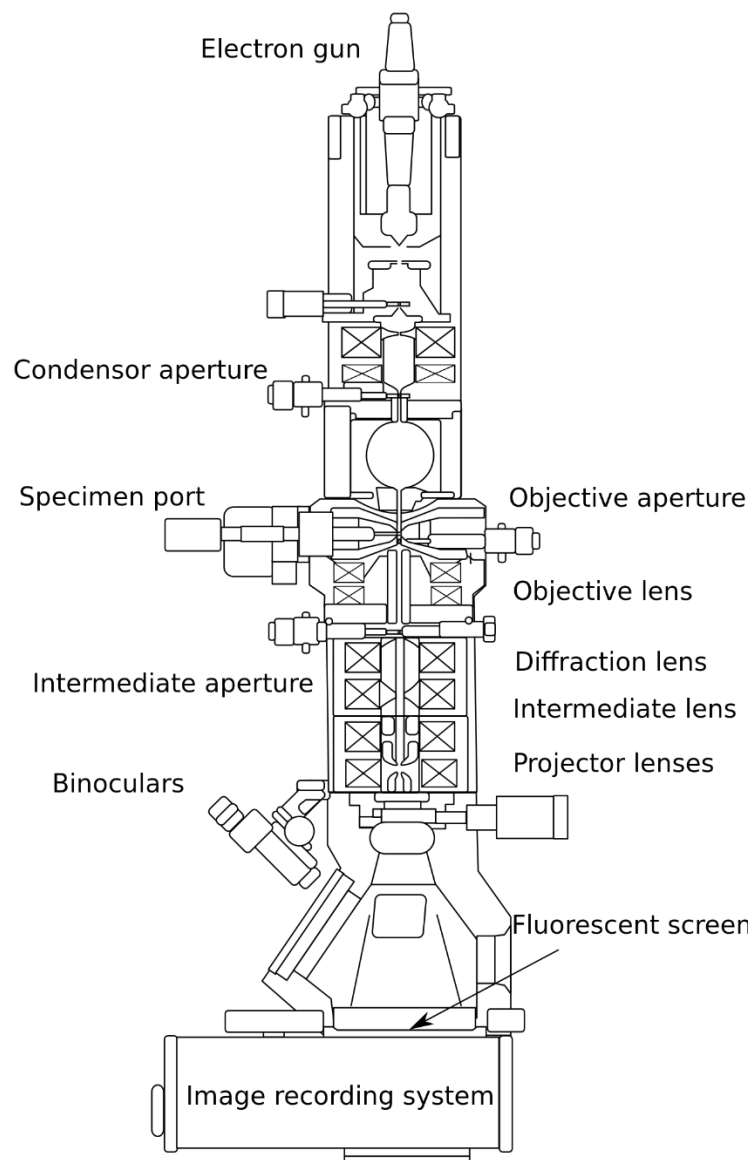
Gambar 4.4 (a) Gambar skema mikroskop elektron transmisi. (b) Skema mikroskop proyeksi cahaya.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Meskipun tampaknya meningkat energi elektron harus mengarah ke panjang gelombang elektron yang lebih pendek dan peningkatan resolusi, ketidaksempurnaan atau penyimpangan dalam lensa magnetik sebenarnya menetapkan batas resolusi sekitar 0,2 nm. Meningkatkan energi elektron di atas 100 keV tidak meningkatkan resolusi—ini hanya memungkinkan elektron untuk mengambil sampel daerah lebih dalam Sebuah Objek. Gambar 4.5 dan 4.6 masing-masing menunjukkan diagram modern TEM dan foto instrumen yang sama.

Mikroskop elektron jenis kedua dengan resolusi dan perbesaran lebih kecil dari TEM, tetapi mampu menghasilkan gambar tiga dimensi yang mencolok gambar, adalah *scanning electron microscope* (SEM). Gambar 4.7 menunjukkan bagaimana tipikal SEM bekerja. Perangkat tersebut dapat dioperasikan dengan elektron

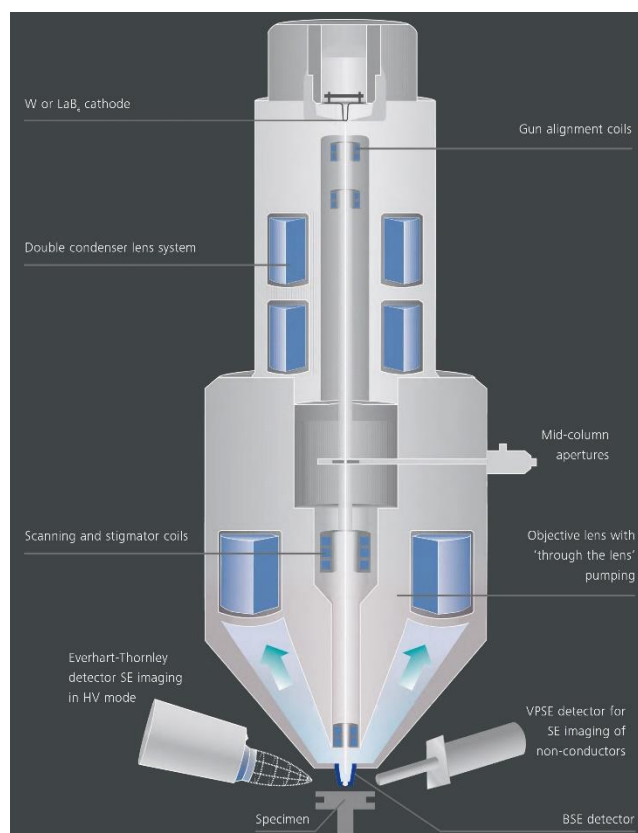
berkekuatan 20 keV dan memiliki resolusi sekitar 10 nm dan perbesaran mulai dari 10 hingga 100.000. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.7, sebuah elektron sinar difokuskan secara tajam pada spesimen dengan lensa magnetik dan kemudian dipindai (diraster) melintasi wilayah kecil pada permukaan spesimen. Berkas primer berenergi tinggi menghamburkan elektron sekunder berenergi rendah keluar dari objek tergantung pada komposisi spesimen dan topografi permukaan. Elektron sekunder ini dideteksi oleh sintilator plastik digabungkan ke photomultiplier, diperkuat, dan digunakan untuk memodulasi kecerahan secara bersamaan tampilan raster CRT. Rasio ukuran raster tampilan ke mikroskop ukuran raster berkas elektron menentukan perbesaran. Kaleng SEM modern juga mengumpulkan sinar-x dan elektron berenergi tinggi dari spesimen untuk dideteksi unsur kimia di lokasi tertentu pada permukaan spesimen, sehingga menjawab pertanyaan bonus, “Apakah benjolan kecil pada bilayer boron atau bismut?”



Gambar 4.5 Diagram mikroskop elektron transmisi
 Sumber: www.commonswikimedia.org



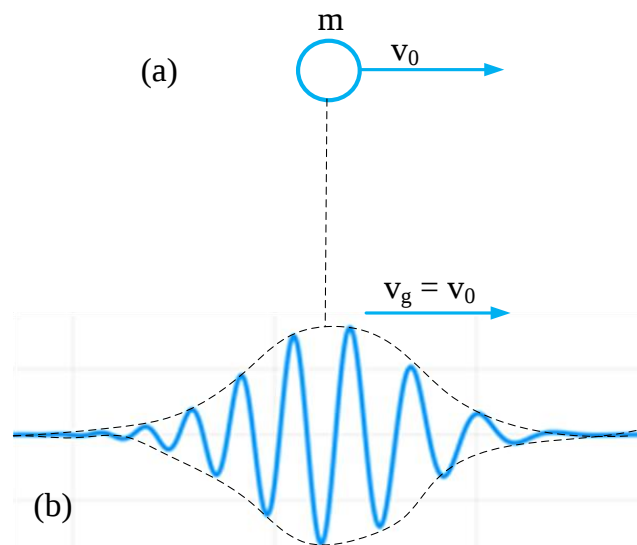
Gambar 4.6 Sebuah foto dari TEM yang sama
 Sumber: www.commonswikimedia.org



Gambar 4.7 Bagian kerja scanning electron microscope.
 Sumber: www.flickr.com

D. Paket Gelombang

Gelombang materi yang mewakili partikel yang bergerak harus mencerminkan fakta bahwa partikel memiliki kemungkinan besar untuk ditemukan di wilayah ruang yang kecil hanya pada waktu tertentu. Ini berarti bahwa gelombang materi sinusoidal berjalan luas tak terhingga dan amplitudo konstan tidak dapat mewakili a partikel bergerak terlokalisasi. Yang dibutuhkan adalah pulsa, atau "grup gelombang", dari batas spasial yang terbatas. Pulsa seperti itu dapat dibentuk dengan menambahkan sinusoidal gelombang dengan panjang gelombang yang berbeda. Kelompok gelombang yang dihasilkan kemudian dapat ditunjukkan bergerak dengan kecepatan v_g (kecepatan grup) identik dengan kecepatan partikel klasik. Argumen ini ditunjukkan secara skematis pada Gambar 4.8 dan akan dibahas secara rinci setelah pengenalan beberapa ide umum tentang grup gelombang.



Gambar 4.8 Mewakili partikel dengan gelombang materi: (a) partikel bermassa m dan kecepatan v_0 ; (b) superposisi dari banyak gelombang materi dengan penyebaran panjang gelombang yang berpusat pada $\lambda_0 = h/mv_0$ secara tepat mewakili sebuah partikel.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Sebenarnya, semua gelombang yang diamati terbatas pada daerah ruang tertentu dan disebut pulsa, kelompok gelombang, atau paket gelombang dalam kasus gelombang materi. Itu gelombang bidang dengan panjang gelombang yang tepat dan ekstensi tak terbatas adalah abstraksi. Gelombang air dari batu jatuh ke kolam, gelombang cahaya muncul dari rana yang dibuka sebentar, gelombang yang dihasilkan pada tali yang kencang oleh satu flip salah satu ujungnya, dan gelombang suara yang dipancarkan oleh kapasitor pengosongan harus semua dimodelkan oleh kelompok gelombang. Gugus gelombang terdiri dari superposisi gelombang dengan panjang gelombang yang berbeda, dengan amplitudo dan fase masing-masing komponen gelombang disesuaikan sehingga gelombang berinterferensi secara konstruktif pada gelombang kecil wilayah ruang. Di luar daerah ini kombinasi gelombang menghasilkan amplitudo bersih yang mendekati nol dengan cepat sebagai akibat dari interferensi destruktif. Mungkin contoh fisik yang paling akrab di mana kelompok gelombang muncul adalah fenomena ketukan. Ketukan terjadi ketika dua gelombang

suara panjang gelombang yang sedikit berbeda (dan karenanya frekuensi yang berbeda) digabungkan. Gelombang suara yang dihasilkan memiliki frekuensi yang sama dengan rata-rata dua menggabungkan gelombang dan amplitudo yang berfluktuasi, atau "berdetak," pada tingkat yang diberikan oleh perbedaan dua frekuensi asli.

Mari kita periksa situasi ini secara matematis. Pertimbangkan satu dimensi gelombang merambat dalam arah x positif dengan kecepatan fase v_p . Perhatikan bahwa v_p adalah kecepatan titik fase konstan pada gelombang, seperti puncak gelombang atau lewat. Gelombang berjalan ini dengan panjang gelombang λ , frekuensi f , dan amplitudo A dapat dijelaskan oleh

$$y = A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\right) \quad (4.12)$$

dimana λ dan f dihubungkan oleh

$$v_p = \lambda f \quad (4.13)$$

Bentuk yang lebih ringkas untuk Persamaan (4.12) dihasilkan jika kita mengambil $\omega = 2\pi f$ (di mana ω adalah frekuensi sudut) dan $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (di mana k adalah bilangan gelombang). Dengan substitusi ini, gelombang tak terbatas menjadi

$$y = A \cos(kx - \omega t) \quad (4.14)$$

dengan

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (4.15)$$

Mari kita sekarang membentuk superposisi dua gelombang dengan amplitudo yang sama, keduanya berjalan dalam arah x positif tetapi dengan panjang gelombang, frekuensi, dan kecepatan fase yang sedikit berbeda. Amplitudo resultan y diberikan oleh

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(k_1 x - \omega t) + A \cos(k_2 x - \omega t) \quad (4.16)$$

Menggunakan identitas trigonometri

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a - b) \cdot \cos \frac{1}{2}(a + b) \quad (4.17)$$

Kita menemukan

$$y = 2A \cos \frac{1}{2}\{(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t\} \cdot \cos \frac{1}{2}\{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t\} \quad (4.18)$$

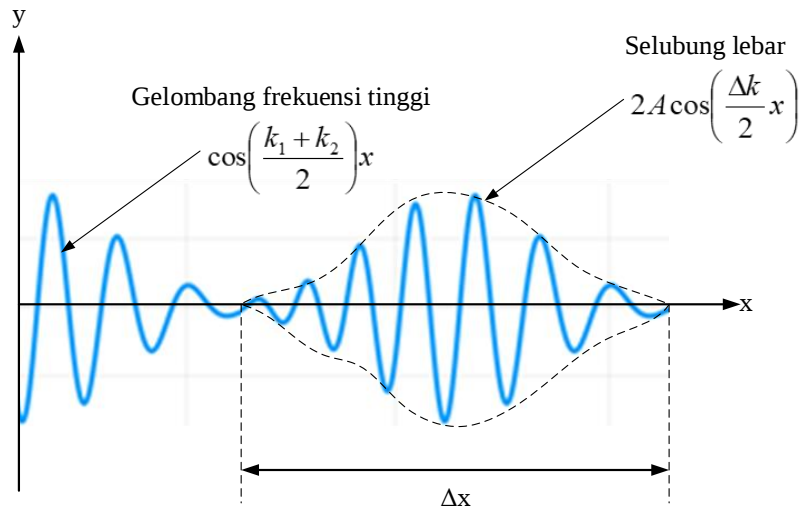
Untuk kasus dua gelombang dengan nilai k dan ω yang sedikit berbeda, kita melihat bahwa $\Delta k = k_1 - k_2$ dan $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$ kecil, tetapi $(k_1 + k_2)$ dan $(\omega_1 + \omega_2)$ adalah besar. Dengan demikian, Persamaan (4.18) dapat ditafsirkan sebagai selubung sinusoidal yang luas

$$2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \quad (4.19)$$

membatasi atau memodulasi gelombang frekuensi tinggi di dalam selubung

$$\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right] \quad (4.20)$$

Superposisi dari dua gelombang ini ditunjukkan pada Gambar 4.9.



Gambar 4.9 Superposisi dua gelombang dengan panjang gelombang yang sedikit berbeda menghasilkan kelompok gelombang primitif; t telah ditetapkan sama dengan nol dalam Persamaan (4.18).

Sumber: www.commonswikimedia.org

Meskipun model kita primitif dan tidak mewakili pulsa terbatas pada sebuah wilayah kecil dari ruang, ini menunjukkan beberapa fitur menarik yang umum untuk lebih banyak lagi model yang rumit. Misalnya, selubung dan gelombang di dalam amplop bergerak dengan kecepatan yang berbeda. Kecepatan baik gelombang frekuensi tinggi atau selubung diberikan dengan membagi koefisien suku t dengan koefisien suku x seperti yang dilakukan pada Persamaan (4.14) dan (4.15). Untuk gelombang di dalam selubung,

$$v_p = \frac{(\omega_1 + \omega_2)/2}{(k_1 + k_2)/2} = \frac{\omega_1}{k_1} = v_1 \quad (4.21)$$

Dengan demikian, gelombang frekuensi tinggi bergerak pada kecepatan fase v_1 dari salah satu gelombang atau di v_2 karena $v_1 \approx v_2$. Amplop atau grup yang dijelaskan oleh $2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$ bergerak dengan kecepatan yang berbeda, tetapi kecepatan grup diberikan oleh

$$v_g = \frac{(\omega_2 - \omega_1)/2}{(k_2 - k_1)/2} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \quad (4.22)$$

Karakteristik umum lain dari kelompok gelombang untuk gelombang jenis apa pun adalah keduanya durasi terbatas dalam waktu, Δt , dan batas terbatas dalam ruang, Δx . Hal ini ditemukan bahwa semakin kecil lebar spasial pulsa, Δx , semakin besar rentang panjang gelombang atau bilangan gelombang, Δk , yang dibutuhkan untuk membentuk pulsa. Hal ini dapat dinyatakan secara matematis sebagai

$$\Delta x \Delta k \approx 1 \quad (4.23)$$

Demikian juga, jika durasi waktu, Δt , dari pulsa kecil, kita membutuhkan lebar penyebaran frekuensi, $\Delta \omega$, untuk membentuk grup. Itu adalah,

$$\Delta t \Delta \omega \approx 1 \quad (4.24)$$

Dalam elektronik pulsa, kondisi ini dikenal sebagai “*response time-bandwidth formula*”. Dalam situasi ini Persamaan (4.24) menunjukkan bahwa untuk memperkuat

pulsa tegangan lebar waktu Δt tanpa distorsi, penguat pulsa harus sama memperkuat semua frekuensi dalam pita frekuensi lebar $\Delta\omega$.

Persamaan (4.23) dan (4.24) penting karena merupakan "relasi ketidakpastian" atau "hubungan timbal balik," untuk pulsa jenis apa pun: elektromagnetik, suara, atau bahkan gelombang materi. Secara khusus, Persamaan 5.16 menunjukkan bahwa Δx , the ketidakpastian dalam luas spasial pulsa, berbanding terbalik dengan Δk , kisaran bilangan gelombang yang membentuk pulsa: baik Δx dan Δk tidak dapat menjadi sewenang-wenang kecil, tetapi sebagai salah satu menurun yang lain harus meningkat.

Sangat menarik bahwa model dua gelombang sederhana kami juga menunjukkan prinsip-prinsip umum yang diberikan oleh Persamaan (4.23) dan (4.24). Jika kita menyebut (lebih tepatnya secara artifisial) tingkat spasial grup kita jarak antara minima yang berdekatan (berlabel Δx in Gambar 4.9), kita menemukan suku selubung $2A \cos\left(\frac{1}{2}\Delta k x\right)$ atau kondisi $\frac{1}{2}\Delta k \Delta x = \pi$ atau

$$\Delta k \Delta x = 2\pi \quad (4.25)$$

Di sini, $\Delta k = k_2 - k_1$ adalah kisaran bilangan gelombang yang ada. Demikian juga, jika x adalah dipertahankan konstan dan t diizinkan untuk bervariasi di bagian selubung Persamaan (4.18), hasilnya adalah $\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\Delta t = \pi$, atau

$$\Delta\omega\Delta t = 2\pi \quad (4.26)$$

Oleh sebab itu, persamaan (4.35) dan (4.36) setuju dengan prinsip umum, secara berturut-turut, $\Delta k \Delta x \approx 1$ dan $\Delta\omega\Delta t \approx 1$.

Penambahan hanya dua gelombang dengan frekuensi diskrit adalah instruktif tetapi menghasilkan gelombang tak terbatas, bukan pulsa sejati. Dalam kasus umum, banyak gelombang yang memiliki distribusi panjang gelombang kontinu harus ditambahkan untuk membentuk paket yang terbatas pada rentang terbatas dan benar-benar nol di tempat lain. Di kasus ini Persamaan (4.22) untuk kecepatan grup, v_g menjadi

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (4.27)$$

di mana turunan akan dievaluasi pada k_0 , pusat bilangan gelombang dari banyak gelombang yang hadir. Hubungan antara kecepatan grup dan kecepatan fase gelombang komposit mudah diperoleh. Karena $\omega = kv_p$, kami menemukan

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = v_p|_{k_0} + k \left. \frac{dv_p}{dk} \right|_{k_0} \quad (4.28)$$

dimana v_p adalah kecepatan fase dan, secara umum, merupakan fungsi dari k atau λ . Bahan di mana kecepatan fase bervariasi dengan panjang gelombang dikatakan menunjukkan penyebaran. Contoh medium pendispersi adalah kaca, yang indeksnya pembiasan bervariasi dengan panjang gelombang dan warna yang berbeda dari perjalanan cahaya di kecepatan yang berbeda. Media di mana kecepatan fase tidak berubah dengan panjang gelombang (seperti vakum untuk gelombang elektromagnetik) disebut nondispersive. Istilah dispersi muncul dari fakta bahwa gelombang harmonik individu yang membentuk pulsa perjalanan pada kecepatan fase yang berbeda dan menyebabkan pulsa awalnya tajam untuk berubah bentuk dan menjadi menyebar, atau tersebar. Dalam medium nondispersif di mana semua

gelombang memiliki kecepatan yang sama, kecepatan grup sama dengan kecepatan fase. Dalam media dispersif kecepatan grup bisa lebih kecil dari atau lebih besar dari kecepatan fase, tergantung pada tanda $\frac{dv_p}{dk}$, seperti yang ditunjukkan oleh Persamaan (4.28).

Kami sekarang dalam posisi untuk menerapkan teori umum grup gelombang kami untuk elektron. Kami akan menunjukkan dispersi gelombang de Broglie dan hasil yang memuaskan bahwa paket gelombang dan partikel bergerak dengan kecepatan yang sama. Menurut de Broglie, gelombang materi individu memiliki frekuensi f dan λ panjang gelombang yang diberikan oleh

$$f = \frac{E}{h} \text{ dan } \lambda = \frac{h}{p} \quad (4.29)$$

dimana E dan p adalah energi dan momentum relativistic. kecepatan fasa dari gelombang materi ini diberikan oleh

$$v_p = f\lambda = \frac{E}{p} \quad (4.30)$$

Kecepatan fasa dapat dinyatakan sebagai fungsi p atau k sendiri dengan mensubsitusikan $E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$ ke persamaan (4.30):

$$v_p = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2} \quad (4.31)$$

Relasi dispersi untuk gelombang de Broglie bisa diperoleh sebagai fungsi k dengan mensubsitusikan $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$ ke persamaan (4.31). Ini memberikan

$$v_p = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2} \quad (4.32)$$

Persamaan (4.32) menunjukkan bahwa individu gelombang de Broglie mewakili partikel massa m menunjukkan dispersi bahkan di ruang kosong dan selalu bergerak dengan kecepatan lebih besar dari atau paling sedikit sama dengan c . Karena gelombang komponen ini merambat pada kecepatan yang berbeda, lebar paket gelombang, x , menyebar atau menyebarkan seiring berjalannya waktu. Untuk mendapatkan grup kecepatan, kita menggunakan

$$v_g = \left[v_p + k \frac{dv_p}{dk} \right]_{k_0} \quad (4.33)$$

dan persamaan (4.32). Setelah melalui beberapa aljabar, kita menemukan

$$v_g = \frac{c}{\left[1 + \left(\frac{mc}{\hbar k_0} \right)^2 \right]^{1/2}} = \frac{c^2}{v_p|_{k_0}} \quad (4.34)$$

Menyelesaikan untuk kecepatan fasa dari persamaan (4.30), kita temukan

$$v_p = \frac{E}{p} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mv} = \frac{c^2}{v} \quad (4.35)$$

di mana v adalah kecepatan partikel. Pada akhirnya, substitusi $v_p = \frac{c^2}{v}$ ke persamaan (4.34) untuk v_g menunjukkan kecepatan grup dari paket gelombang materi adalah

sama dengan kecepatan partikel. Ini sesuai dengan intuisi kita bahwa selubung gelombang materi seharusnya bergerak dengan kecepatan yang sama dengan partikel.

E. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Pada periode 1924–25, Werner Heisenberg, putra seorang profesor Yunani dan Latin di Universitas Munich, menemukan teori lengkap tentang mekanika kuantum yang disebut mekanika matriks. Teori ini mengatasi beberapa masalah dengan teori atom Bohr, seperti postulat orbit elektron yang "tidak dapat diamati". Formulasi Heisenberg didasarkan terutama pada kuantitas terukur seperti probabilitas transisi untuk lompatan elektronik antara keadaan kuantum. Karena probabilitas transisi bergantung pada awal dan keadaan akhir, mekanika Heisenberg menggunakan variabel yang diberi label oleh dua subskrip. Meskipun pada awalnya Heisenberg mempresentasikan teorinya dalam bentuk aljabar tak bergerak, Max Born dengan cepat menyadari bahwa teori ini bisa lebih digambarkan secara elegan oleh matriks. Akibatnya, Born, Heisenberg, dan Pascual Jordan segera mengembangkan teori mekanika matriks yang komprehensif. Meskipun formulasi matriks cukup elegan, itu menarik sedikit perhatian di luar sekelompok kecil fisikawan berbakat karena sulit diterapkan di kasus tertentu, melibatkan matematika yang tidak dikenal oleh sebagian besar fisikawan, dan berdasarkan konsep fisik yang agak kabur.

Meskipun kita akan menyelidiki bentuk mekanika kuantum yang luar biasa ini tidak lebih jauh, kita akan membahas penemuan Heisenberg lainnya, prinsip ketidakpastian, yang dijelaskan dalam makalah terkenal pada tahun 1927. Dalam makalah ini Heisenberg memperkenalkan gagasan bahwa tidak mungkin untuk menentukan secara bersamaan dengan presisi tak terbatas posisi dan momentum sebuah partikel. Dengan kata-kata kita dapat menyatakan prinsip ketidakpastian sebagai berikut:

Jika pengukuran posisi dilakukan dengan presisi Δx dan pengukuran momentum simultan dalam arah x dilakukan dengan presisi Δp_x , maka produk dari dua ketidakpastian tidak pernah bisa lebih kecil dari $\hbar/2$. Itu adalah,

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.36)$$

Dalam makalahnya tahun 1927, Heisenberg dengan hati-hati menunjukkan bahwa ketidakpastian tak terhindarkan p_x dan x tidak muncul dari ketidaksempurnaan di alat ukur praktis. Sebaliknya, mereka muncul dari kebutuhan untuk menggunakan sejumlah besar bilangan gelombang, k , untuk mewakili paket gelombang materi yang terlokalisasi di wilayah kecil, x . Prinsip ketidakpastian mewakili tajam putus dengan ide-ide fisika klasik, di mana diasumsikan bahwa, dengan keterampilan dan kecerdikan yang cukup, dimungkinkan untuk mengukur secara bersamaan posisi partikel dan momentum ke tingkat presisi yang diinginkan. Tidak ada kontradiksi antara prinsip ketidakpastian dan hukum klasik untuk sistem makroskopik karena nilai kecil dari $\hbar$.

Satu dapat menunjukkan bahwa $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ berasal dari hubungan ketidakpastian mengatur semua jenis pulsa gelombang yang dibentuk oleh superposisi gelombang dengan panjang gelombang yang berbeda. Dalam subbab D, kami menemukan bahwa untuk membangun grup gelombang terlokalisasi di wilayah kecil Δx , kita harus menjumlahkan sejumlah besar bilangan gelombang Δk , dimana $\Delta k \Delta x$

≈ 1 (Persamaan [4.23]). Nilai tepat bilangan di ruas kanan Persamaan (4.23) bergantung pada bentuk fungsional $f(x)$ gelombang kelompok serta pada definisi spesifik dari Δx dan Δk . Pilihan yang berbeda dari $f(x)$ atau aturan yang berbeda untuk mendefinisikan Δx dan Δk (atau keduanya) akan memberikan angka yang sedikit berbeda. Dengan Δx dan Δk didefinisikan sebagai standar deviasi, dapat menunjukkan bahwa bilangan terkecil, $1/2$, diperoleh untuk fungsi gelombang Gaussian. Dalam kasus ketidakpastian minimum ini kita memiliki

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2} \quad (4.37)$$

Untuk pilihan apapun dari $f(x)$,

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2} \quad (4.38)$$

dan menggunakan $\Delta p_x = \hbar \Delta k$, $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$ seketika menjadi

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.39)$$

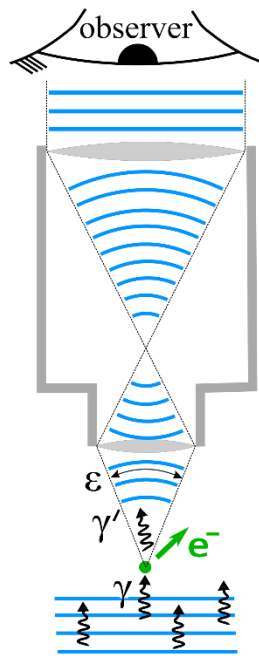
Arti dasar dari $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ adalah bahwa ketika satu ketidakpastian meningkatkan lainnya menurun. Dalam kasus ekstrim sebagai salah satu pendekatan ketidakpastian menuju ∞ , yang lain harus mendekati nol. Kasus ekstrem ini diilustrasikan oleh gelombang bidang $e^{ik_0 x}$ yang memiliki momentum presisi $\hbar k_0$ dan luas tak terhingga, yaitu fungsi gelombang tidak terkonsentrasi di setiap segmen sumbu x .

Hubungan ketidakpastian penting lainnya melibatkan ketidakpastian dalam energi paket gelombang, ΔE , dan waktu, Δt , yang diambil untuk mengukur energi itu. Mulai dengan $\Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2}$ sebagai bentuk minimum dari prinsip ketidakpastian waktu-frekuensi, dan menggunakan hubungan de Broglie untuk hubungan antara materi energi gelombang dan frekuensi, $E = \hbar \omega$, kita segera menemukan prinsip ketidakpastian energi-waktu

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.40)$$

Persamaan (4.40) menyatakan bahwa presisi yang dengannya kita dapat mengetahui energi beberapa sistem dibatasi oleh waktu yang tersedia untuk mengukur energi. Biasa penerapan ketidakpastian energi-waktu adalah dalam menghitung masa hidup partikel subatomik berumur pendek yang masa hidupnya tidak dapat diukur secara langsung, tetapi yang ketidakpastian energi atau massanya dapat diukur.

Meskipun kami telah menunjukkan bahwa $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ muncul dari teori pembentukan pulsa atau grup gelombang, ada cara yang lebih fisik untuk melihat asal usul prinsip ketidakpastian. Kami mempertimbangkan eksperimen ideal tertentu (disebut eksperimen pemikiran) dan menunjukkan bahwa tidak mungkin melakukan eksperimen yang memungkinkan posisi dan momentum partikel yang akan diukur secara bersamaan dengan akurasi yang melanggar prinsip ketidakpastian. Eksperimen pemikiran yang paling terkenal di sepanjang garis ini diperkenalkan oleh Heisenberg sendiri dan melibatkan pengukuran posisi elektron melalui mikroskop (Gambar 4.10), yang membentuk bayangan elektron pada layar atau retina mata.



Gambar 4.10 Eksperimen pemikiran untuk melihat elektron dengan mikroskop yang kuat

Sumber: www.commonswikimedia.org

Karena cahaya dapat menyebar dari dan mengganggu elektron, mari kita meminimalkan efek ini dengan mempertimbangkan hamburan hanya kuantum cahaya tunggal dari elektron awalnya diam (Gambar 4.11). Untuk dikumpulkan oleh lensa, foton harus tersebar melalui sudut mulai dari $-\theta$ sampai θ , yang akibatnya memberikan elektron nilai momentum x mulai dari $+(h \sin \theta)/\lambda$ ke $-(h \sin \theta)/\lambda$. Jadi ketidakpastian momentum elektron adalah $\Delta p_x = (2h \sin \theta)/\lambda$. Setelah melewati lensa, foton mendarat di suatu tempat di layar, tetapi gambar dan akibatnya posisi elektron “kabur” karena foton terdifraksi saat melewati bukaan lensa. Menurut optik fisik, resolusi mikroskop atau ketidakpastian dalam gambar elektron, Δx , diberikan oleh $\Delta x = \lambda/(2 \sin \theta)$. Di sini 2θ adalah sudut yang dibentuk oleh lensa objektif, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.11. Mengalikan ekspresi untuk Δp_x dan Δx , kami menemukan elektron

$$\Delta p_x \Delta x = \left(\frac{2h \sin \theta}{\lambda} \right) \left(\frac{\lambda}{2 \sin \theta} \right) = h \quad (4.11)$$

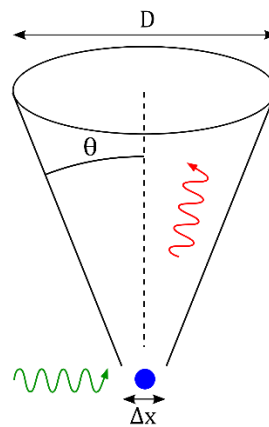
sesuai dengan hubungan ketidakpastian. Perhatikan juga bahwa prinsip ini tak terhindarkan dan tak kenal lelah! Jika Δx dikurangi dengan memperbesar θ atau ukuran lensa, ada adalah peningkatan ekuivalen dalam ketidakpastian momentum elektron.

Pemeriksaan percobaan sederhana ini menunjukkan beberapa sifat fisik utama yang mengarah pada prinsip ketidakpastian:

- Sifat tak terpisahkan dari partikel cahaya atau kuantum (tidak kurang dari satu foton dapat digunakan!).
- Sifat gelombang cahaya seperti yang ditunjukkan pada difraksi.

- Ketidakmungkinan memprediksi atau mengukur jalur klasik yang tepat dari foton tunggal yang tersebar dan karenanya mengetahui momentum yang tepat ditransfer ke elektron.

Kita menyimpulkan bagian ini dengan beberapa contoh jenis perhitungan yang dapat dilakukan dengan prinsip ketidakpastian. Dalam semangat Fermi or Heisenberg, "perhitungan di balik selubung" ini mengejutkan karena kesederhanaan dan deskripsi penting dari sistem kuantum yang detailnya tidak diketahui.

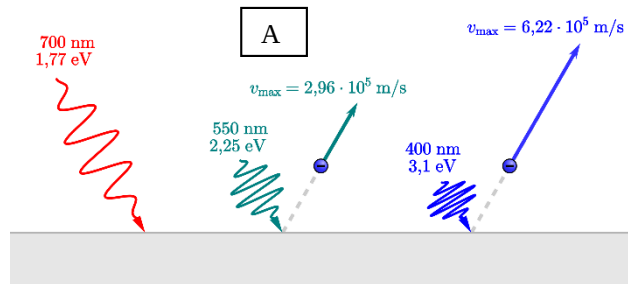


Gambar 4.11 Mikroskop Heisenberg
Sumber: www.commonswikimedia.org

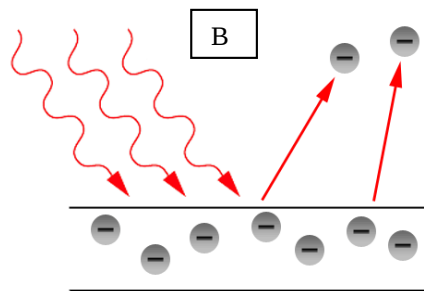
Soal-soal

1. Sebuah bola tenis 0,20 kg yang bergerak dengan kecepatan 30 m/s sesaat sesudah dipukul. Panjang gelombang de Broglie dari bola tenis tersebut adalah...
2. Sebuah elektron bergerak dengan kecepatan 2×10^7 m/s. Jika tetapan Planck $h = 6,6 \times 10^{-34}$ Js, tentukan panjang gelombang elektron tersebut.
3. Dalam kehidupan sehari-hari, mengapa kita tidak tampak dalam kehidupan sehari-hari? Beri contoh perhitungan untuk membenarkan jawaban Anda.
4. Apakah kita bisa mengukur momentum dan posisi elektron secara teliti pada saat bersamaan?
5. Jelaskan perbedaan bentuk antara gelombang bidang dengan paket gelombang! Sebenarnya apa tujuan de Broglie memperkenalkan konsep paket gelombang?
6. Ketika pengamat menggunakan mikroskop canggih untuk mengamati posisi electron dengan suatu rentang waktu yang sudah diatur, maka akan diperoleh lintasan electron yang acak. Mengapa pengamat selalu mendapati lintasan elektron yang berbeda-beda untuk setiap percobaan?

7. Apakah ketidakpastian posisi suatu partikel dapat bernilai nol ($\Delta x = 0$)?
8. Perhatikan kedua gambar peristiwa efek fotolistrik berikut. Gambar A atau B yang lebih shahih sebenarnya? Mengapa?



Sumber: www.commonswikimedia.org



Sumber: www.commonswikimedia.org

BAB V

PERSAMAAN SCHRÖDINGER DAN FUNGSI GELOMBANG

Sampai tahun 1925 gagasan tentang teori kuantum tidak diketahui. Selama 1925 tiga versi yang berbeda tetapi setara dari teori kuantum diusulkan, yaitu 1) mekanika gelombang yang diusulkan Schrödinger, 2) Mekanika matriks yang dikembangkan Heisenberg, dan 3) teori operator yang diperkenalkan Dirac. Mempertimbangkan masalah de Broglie gelombang Erwin Schrödinger, seorang fisikawan Austria, berpendapat bahwa jika sebuah partikel seperti elektron berperilaku sebagai gelombang maka persamaan gerak gelombang bisa: berhasil diterapkan padanya. Dia mendalilkan fungsi yang bervariasi di kedua ruang dan waktu dengan cara seperti gelombang (karenanya disebut fungsi gelombang dan dilambangkan sebagai ψ). Fungsi ini umumnya kompleks dan diasumsikan mengandung informasi tentang sebuah sistem. Schrödinger membuat persamaan seperti gelombang linier dan bergantung waktu, disebut persamaan gelombang Schrödinger, untuk menggambarkan aspek gelombang dari suatu partikel dengan mempertimbangkan hubungan de Broglie untuk panjang gelombang. Secara fisis, $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$, di mana $\psi(\mathbf{r}, t)$ adalah solusi persamaan Schrödinger, diinterpretasikan sebagai kepadatan probabilitas posisi. Artinya, $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ adalah kerapatan peluang mengamati sebuah partikel pada posisi $\mathbf{r}$ pada waktu t . ψ tidak memberikan hasil pengamatan yang pasti tetapi membantu kita untuk mengetahui semua kemungkinan peristiwa dan probabilitasnya. Selanjutnya, interpretasi probabilitas memungkinkan kita untuk menemukan rata-rata atau hasil yang diharapkan dari serangkaian pengukuran pada sistem kuantum.

Ada beberapa fitur menarik dari fungsi gelombang ψ . Interpretasi probabilitas $|\psi|^2$ memaksakan kondisi tertentu pada yang berarti ψ . Lebih jauh, $|\psi|^2$ memenuhi hukum kekekalan, persamaan yang analog dengan kontinuitas persamaan aliran dalam hidrodinamika. Untuk mengatur total probabilitas kesatuan harus memenuhi kondisi normalisasi $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\tau = 1$. Mengetahui ψ kita dapat menghitung nilai ekspektasi variabel seperti posisi, momentum, dll. Dalam mekanika kuantum variabel yang dapat diukur secara eksperimen bukan lagi variabel dinamis tetapi menjadi operator. Hasil percobaan adalah nilai eigen dari operator yang dapat diamati. Hasil yang menarik adalah bahwa persamaan evolusi waktu nilai ekspektasi posisi dan operator momentum (disebut teorema Ehrenfest) mematuhi persamaan yang sama gerak variabel-variabel ini dalam mekanika klasik. Di sisi lain, persamaan untuk fase fungsi berbentuk Hamilton–Jacobi persamaan mekanika klasik. Dalam bab ini, kami menyiapkan Schrödinger persamaan dan diskusikan sifat-sifat umum yang disebutkan di atas dari solusi dari persamaan Schrödinger.

A. Konstruksi Persamaan Schrödinger

1. Persamaan Schrödinger untuk Partikel Bebas

Asumsikan sebuah partikel bebas bergerak dalam garis satu dimensi. Asumsikan ia berlaku seperti gelombang dan fungsi gelombangnya dalam bentuk

$$\psi(x, t) = ae^{i(kx - \omega t)} \quad (5.1)$$

Ini adalah gelombang monokromatik bidang paling sederhana. ψ mengacu pada kasus gelombang merambat sepanjang arah x , sedangkan gangguan berada pada bidang yang tegak lurus terhadap arah- x . ψ yang diberikan oleh Persamaan (5.1) disebut gelombang bidang karena amplitudo $|\psi| = \sqrt{\psi^* \psi} = \sqrt{a^* a} = |a|$ adalah sebuah konstanta. Schrödinger menggabungkan partikel dan sifat gelombang dalam membangun persamaan gelombang. sudut frekuensi dari gelombang di atas harus sesuai dengan energi E partikel, sedangkan bilangan gelombang k harus sesuai dengan momentum $p_x = mv$. Menurut Planck dan Einstein hubungan antara E sebuah partikel dan $\omega = 2\pi f$ gelombang adalah

$$E = \hbar \omega \quad (5.2)$$

Menurut de Broglie

$$p_x = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \quad (5.3)$$

Persamaan gelombang yang memnuhi solusi persamaan (5.1) dan relasi (2.2)–(2.3) dikonstruksikan sebagai berikut.

Menurunkan persamaan (5.1) terhadap t kita peroleh

$$-i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega \psi \quad (5.4)$$

Menurunkan persamaan (5.1) dua kali terhadap x memberikan

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi \quad (5.5)$$

Menggantikan k dengan $p_x/\hbar$ (persamaan [5.3]) dan p_x dalam variabel E menggunakan $E = p_x^2/2$ (energi partikel bebas) dan kemudian E dengan $\hbar\omega$, kita peroleh

$$\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega \psi \quad (5.6)$$

Perbandingan persamaan (5.4) dan (5.6) menuntun ke persamaan

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.7)$$

Persamaan (5.6) disebut persamana gelombang Schrödinger atau persamaan ψ untuk partikel bebas dalam satu dimensi. Untuk partikel bebas dalam tiga dimensi, persamaan gelombangnya adalah

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \quad (5.8)$$

Mengalikan persamaan $E = \mathbf{p}^2/(2m)$ dengan ψ pada kedua sisi kita peroleh

$$E\psi = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 \psi \quad (5.9)$$

Perbandingan persamaan ini dengan persamaan (5.8) memberikan

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \mathbf{p} = -i\hbar \nabla, p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (5.10)$$

dimana $\nabla = \frac{\mathbf{i}}{\partial x} + \frac{\mathbf{j}}{\partial y} + \frac{\mathbf{k}}{\partial z}$.

2. Persamaan Schrödinger untuk Partikel dalam Potensial

Karena $E - V = p_x^2/(2m)$, persamaan gelombang untuk $V(x) \neq 0$ bisa diperoleh dari persamaan (5.7) dengan hanya mengganti $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V(x)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \quad (5.11)$$

Untuk sistem tiga dimensi, persamaan Schrödingernya adalah

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi, \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (5.12)$$

Persamaan (2.12) menggambarkan evolusi $\psi(\mathbf{r}, t)$ dengan adanya sebuah fungsi potensial $V(\mathbf{r})$. Setiap kali kita melakukan pengukuran pada kuantum sistem, hasilnya ditentukan oleh ψ . Persamaan Schrödinger digunakan dan diterima karena mengarah pada hasil yang sesuai dengan pengamatan dimanapun itu diterapkan dengan benar.

3. Persamaan Schrödinger dalam Bentuk Operator

Persamaan (5.12) menunjukkan bahwa

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (5.13)$$

Operator ini disebut operator Hamiltonian. Dalam mekanika klasik, Hamiltonian adalah variabel dinamis dasar dari mana kita memperoleh Hamilton's persamaan gerak yang menggambarkan evolusi keadaan suatu sistem. Dalam kuantum mekanik operator Hamilton dari sistem pada dasarnya menentukan variasi waktu ψ . Perhatikan bahwa untuk mengatur persamaan gelombang untuk kuantum sistem mekanik kita membutuhkan Hamiltonian klasik. Kemudian kita peroleh gelombang persamaan dengan mengganti variabel dinamis klasik $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$, $V(\mathbf{r})$ dan E oleh $\mathbf{r}$, $-i\hbar \nabla$, $V(\mathbf{r})$ dan $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ masing-masing dan mengoperasikan kedua sisi persamaan $E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ pada ψ .

B. Solusi dari Persamaan Tak Gayut Waktu

Mari kita asumsikan bahwa potensial V tak bergantung waktu dan mencari solusi dari persamaan (5.12) dengan bentuk

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})f(t) \quad (5.14)$$

Mensubstitusi solusi di atas ke persamaan (5.12) memberikan

$$i\hbar \frac{\dot{f}}{f} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi} \nabla^2 \phi + V \quad (5.15)$$

Sisi kiri persamaan (5.15) adalah fungsi t saja, sedangkan sisi kanan adalah fungsi ruang variabel saja. Oleh karena itu, kedua ruas persamaan (5.15) harus sama dengan sebuah konstanta yang sama. Membandingkan ruas kanan persamaan (5.15) dengan $H\phi = E\phi$ kita menuliskan

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + V\phi = E\phi \quad (5.16)$$

Menulis kembali persamaan di atas sebagai

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(\mathbf{r})] \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.17)$$

Persamaan (5.17) disebut persamaan Schrödinger tidak bergantung waktu atau persamaan Schrödinger keadaan stasioner.

Terlebih lagi, kita mempunyai $\frac{i\hbar \dot{f}}{f} = E$ yang solusinya adalah

$$f(t) = ae^{-iEt/\hbar} \quad (5.18a)$$

dimana a tak tentu. Nilai E yang berbeda memberikan solusi yang berbeda. Jadi, kita menuliskan

$$f_n(t) = a_n e^{-iE_n t/\hbar} \quad (5.18b)$$

sehingga ψ diberikan oleh

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t/\hbar} + \int a_E e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5.19)$$

dimana suku pertama pada ruas kanan berkorespondensi dengan nilai diskrit E , sedangkan suku kedua adalah rentang kontinu dari nilai E . Pada persamaan (5.19) ϕ_n dan ϕ adalah solusi dari persamaan (5.17)

C. Interpretasi Fisis dari $\psi^* \psi$

Sehubungan dengan fungsi gelombang kita bertanya:

1. Apakah ψ merupakan besaran yang dapat diukur secara eksperimen?
2. Bagaimana ψ terkait dengan sifat fisik dari sistem mekanika kuantum?
3. Bagaimana kita menentukan sifat-sifat sistem dari ψ yang diberikan?

Schrödinger berpikir bahwa ψ menggambarkan sebuah partikel; yaitu, dalam arti tertentu dianggap sebagai gelombang materi seperti gelombang suara dan gelombang air. Tetapi, interpretasi ini memiliki beberapa kesulitan. Pertama, ketika kita mencoba untuk menemukan partikel menggunakan, katakanlah, detektor yang kita temukan terkonsentrasi di wilayah kecil (itu terlokalisasi). Tetapi fungsi gelombang $\psi(\mathbf{r}, t)$ pada waktu tertentu menyebar seperti gelombang (itu adalah tidak terlokalisasi). Kedua, misalkan kita menafsirkan ψ sebagai gelombang dalam ruang fisik dan waktu satu partikel. Dalam kasus n partikel gelombang harus diwakili dalam ruang $3n$ dimensi. Poin ketiga adalah bahwa ψ umumnya kompleks. Kita dapat memberikan interpretasi untuk gelombang nyata saja. Bagaimana kita menjelaskan nilai kompleks dari ψ ? Oleh karena itu, interpretasi baru sangat penting. ψ dalam beberapa hal terkait dengan keberadaan partikel. Oleh karena itu, kita tidak mengharapkan partikel di daerah ruang di mana $\psi = 0$. Di sisi lain, ψ harus bukan nol di daerah di mana tidak ada partikel.

Pada tahun 1926 Max Born (Hadiah Nobel pada tahun 1954) meninjau tabrakan dari dua partikel. Jauh sebelum dan jauh setelah tumbukan kedua partikel berperilaku sebagai partikel bebas. Menggunakan teori gangguan yang dia peroleh

$$\psi_{scat}(r \rightarrow \infty) \approx \sum_f c_{fi} \phi_f, \quad c_{fi} = \int \phi_f^* V \phi_i d\tau \quad (5.20)$$

Di sini ϕ_f adalah solusi dari persamaan Schrödinger keadaan stasioner dan mewakili keadaan partikel jauh setelah hamburan (disebut keadaan akhir) dengan momentum K_f . ϕ_i adalah solusi keadaan awal (keadaan jauh sebelum tumbukan) dengan momentum K_i dan V adalah potensial. Dalam persamaan (2.20) misalkan $|c_{fi}|^2$ berhubungan dengan jumlah partikel yang dihamburkan dengan keadaan akhir ϕ_f dan keadaan awal ϕ_i . Yaitu, $|c_{1i}|^2, |c_{2i}|^2 \dots$ mewakili, jauh setelah hamburan, jumlah partikel (atau persentase partikel yang datang) dalam keadaan $\phi_1, \phi_2, \dots$ masing-masing dengan semua keadaan mereka jauh sebelum interaksi adalah ϕ_i . Dalam hal ini akan menggambarkan partikel itu sendiri. Asumsikan potensi penghalang memiliki properti bahwa itu akan mencerminkan 60% dari partikel insiden dan menyebarkan 40% dari mereka. Tidak ada kesulitan dengan arti dari c_{fi} dan ψ di atas. Misalkan hanya satu insiden partikel pada penghalang. Kemudian menurut 60% di atas adalah untuk dihamburkan dan 40% dipantulkan. Born menyadari bahwa karena satu partikel tidak dapat membagi dirinya sendiri, ψ tidak dapat menggambarkan partikel itu sendiri. Karena itu, hanya satu interpretasi yang mungkin untuk koefisien c_{fi} , yakni itu adalah probabilitas amplitudo bahwa partikel datang dengan momentum K_i dihamburkan dengan momentum K_f . Kami tidak memiliki jawaban untuk pertanyaan Apa keadaan setelahnya tabrakan? tetapi kami memiliki jawaban untuk pertanyaan Berapa probabilitasnya dari efek tertentu dari tumbukan?

Mempertimbangkan di atas, Max Born dan Ernst Pascual Jordan menginterpretasikan $\psi^*\psi$ sebagai densitas probabilitas posisi. Mereka menginterpretasikan $|\psi|^2$ sebagai

$$Pdx dy dz = \psi^*\psi dx dy dz = |\psi|^2 dx dy dz \quad (5.21)$$

di mana $Pdx dy dz$ adalah probabilitas bahwa sistem akan berada dalam elemen volume $dx dy dz$ pada posisi $\mathbf{r}$. Dasar untuk Persamaan (5.21) adalah bahwa dalam teori cahaya klasik, intensitas cahaya pada setiap titik diberikan oleh kuadrat amplitudo gelombang. Ini menunjukkan bahwa, dalam mekanika kuantum gelombang fungsi dapat diperkenalkan dengan memainkan peran probabilitas. Perhatikan bahwa, ψ itu sendiri tidak bisa menjadi probabilitas. Ini karena ψ mungkin kompleks dan negatif tetapi probabilitas selalu nyata dan positif. ψ tidak memiliki fisik signifikansi langsung dan tidak terukur secara eksperimental. Itu bukan entitas fisik yang ada di ruang angkasa seperti bola kriket atau medan listrik. Tujuannya adalah untuk menghitung $|\psi|^2$. Artinya, ini adalah alat matematika untuk menghitung hasil dari pengamatan.

Menurut interpretasi probabilitas $\psi^*\psi$, kita tidak pernah bisa mengatakan bahwa partikel kuantum ada atau tidak di tempat tertentu². Born, Bohr dan kelompoknya di Kopenhagen menganalisis interpretasi probabilitas $\psi^*\psi$ secara mendalam. Untuk alasan ini, interpretasi probabilistik dari $\psi^*\psi$ juga disebut sebagai interpretasi Kopenhagen. Interpretasi lain juga telah diusulkan. Misalnya, *sum-over history* oleh Richard Feynman dan interpretasi banyak dunia oleh Hugh Everett. Intinya adalah bahwa kondisi awal yang diberikan dapat memberikan berbagai hasil akhir, jadi teori kuantum membuat masa depan terbuka dan menghalangi kemampuan kita untuk mengetahui masa lalu.

D. Kondisi untuk Fungsi Gelombang yang Diizinkan

Interpretasi probabilitas dari $\psi^*\psi$ menuntut ke kondisi-kondisi berikut untuk ψ .

1. Integrasi untuk $\psi^*\psi$ terhadap variabel ruang atas semua ruang harus satu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi d\tau = 1 \quad (5.22)$$

2. $|\psi| \rightarrow 0$ ketika $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$.
3. ψ harus berharga tunggal pada setiap titik.
4. ψ tidak boleh berharga tak terhingga pada titik mana pun.
5. ψ, ψ_x, ψ_y , dan ψ_z harus merupakan fungsi kontinu untuk $\mathbf{r}$.

Integral dalam Persamaan (5.22) merupakan probabilitas total. Karena peluang total harus satu untuk setiap kejadian, ψ harus memenuhi kondisi Persamaan (5.22). Fungsi gelombang sedemikian dikatakan ternormalisasi. Kondisi Persamaan (5.22) disebut kondisi normalisasi. Jika

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi d\tau = N^2, N^2 = \text{konstan} \neq 1, \neq \infty \quad (5.23)$$

maka ψ dikatakan *square-integrable* dan konstanta N^2 disebut norma dari ψ . Fungsi gelombang seperti itu selalu dapat dinormalisasi dengan mengalikannya dengan konstan $1/N$. Hal ini dimungkinkan karena persamaan Schrödinger linier dan oleh karena itu jika ψ adalah penyelesaiannya maka $\alpha\psi$, di mana α adalah konstanta, juga ialah solusi. Persyaratan keterbatasan norma memaksakan kondisi (2). Ini berarti bahwa $\psi^*\psi \rightarrow 0$ ketika $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ dan dengan demikian partikel terbatas pada wilayah ruang yang terbatas. Keadaan demikian dikatakan sebagai keadaan terikat. Ini disebut keadaan terikat karena gerak partikel klasik yang bersesuaian terbatas. Jika $\psi(\mathbf{r}, t)$ tidak cenderung ke 0 ketika $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ maka tidak dapat dinormalisasi. Keadaan yang demikian disebut keadaan hamburan. Gerak yang sesuai dengan partikel klasik tidak terbatas.

Perhatikan bahwa fase keseluruhan $e^{i\alpha}$ dalam fungsi gelombang tidak dapat diamati. ψ dan $e^{i\alpha}\psi$ keduanya menggambarkan keadaan fisik yang sama. Tetapi jika fase konstan muncul sebagai fase relatif antara dua ψ dalam superposisi linier seperti pada $\psi = \psi_1 + e^{i\alpha}\psi_2$ maka itu bisa diamati; ia memberikan efek interferensi dan pergeseran memperkenalkan dalam pergeseran interferensi pinggir.

Apakah $\psi(\mathbf{r}, t)$ merupakan besaran tak berdimensi? Jika tidak, apa dimensinya? Probabilitas menemukan partikel dalam volume tertentu $d\tau = dxdydz$ di suatu titik $\mathbf{r}$ pada waktu t adalah $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dxdydz$. Probabilitas adalah besaran yang tidak berdimensi. Oleh karena itu, $|\psi|^2 dxdydz$ juga harus tak berdimensi. dx, dy , dan dz memiliki dimensi panjang. Oleh karena itu, dimensi $\psi(\mathbf{r}, t)$ adalah $(\text{panjang})^{-3/2}$. Ini adalah untuk partikel tunggal dalam ruang tiga dimensi. Untuk N partikel dalam ruang d dimensi, dimensi fungsi gelombangnya adalah $(\text{panjang})^{-Nd/2}$.

E. Konservasi Probabilitas

Interpretasi probabilitas dari $\psi^*\psi$ dapat dibuat secara konsisten, asalkan konservasi probabilitas dijamin. Jika peluang menemukan partikel di suatu wilayah ruang berkurang seiring dengan bertambahnya waktu maka kemungkinan menemukannya di luar wilayah ini harus meningkat dengan jumlah yang sama sehingga probabilitas total selalu merupakan satu. Oleh karena itu, kita berharap $\rho = \psi^*\psi$ memenuhi konservasi persamaan (juga disebut persamaan kontinuitas)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.34)$$

Persamaan kontinuitas diperlukan untuk membuktikan bahwa partikel tidak menghilang secara lokal. Dalam hidrodinamika, ρ dalam Persamaan (5.34) adalah densitas fluida dan $\mathbf{J}$ mewakili kerapatan arus fluida. Dalam elektrodinamika ρ dan $\mathbf{J}$ adalah rapat muatan dan rapat arus masing-masing. Mari kita turunkan hukum kekekalan probabilitas untuk ψ dari persamaan Schrödinger.

Definisikan $\rho = \psi^* \psi$ sebagai probabilitas densitas posisi. Probabilitas P partikel dalam sebuah volum V adalah $\int_V \rho \, d\tau$. Laju perubahan P adalah

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, d\tau = \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) d\tau \quad (5.35)$$

Menggantikan suku turunan waktu dalam persamaan (5.35) dengan turunan ruang yang ekuivalen menggunakan persamaan Schrödinger. Persamaan Schrödinger untuk ψ^* diperoleh dari persamaan (5.12) sebagai

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V\psi^* \quad (5.36)$$

Mengalikan persamaan Schrödinger (5.12) dengan ψ^* dan persamaan (5.36) dengan ψ mengurangkan satu sama lainnya memberikan

$$\begin{aligned} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \psi^*] \\ &= -\frac{\hbar}{2mi} \nabla \cdot [\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*] \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{J} \end{aligned} \quad (5.37)$$

dimana

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2mi} \nabla \cdot [\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*] \quad (5.38)$$

$\mathbf{J}$ bisa juga dinyatakan sebagai

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} \text{Re}(-i\psi^* \nabla \psi) \text{ atau } \mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi) \quad (5.39)$$

Menggunakan persamaan (5.37) dalam persamaan (5.35), kita peroleh

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\tau \quad (5.40)$$

Substitusi $P = \int_V \rho \, d\tau$ ke persamaan (5.40) kita peroleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, d\tau + \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\tau = 0 \quad (5.41)$$

Oleh karena itu,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.42)$$

Interpretasi dari $\psi^* \psi$ sebagai densitas probabilitas menuntun ke kepuasan persamaan kontinuitas.

$\mathbf{J}$ didefinisikan sebagai kerapatan arus probabilitas atau vektor fluks probabilitas. $\mathbf{J}$ pada $\mathbf{r}$ adalah jumlah peluang menyeberang pada titik tersebut dalam satuan waktu.

Ini sesuai dengan vektor Poynting dalam teori elektromagnetik klasik. Peningkatan (penurunan) probabilitas di dalam volume terbatas V disebabkan oleh masuknya (fluks keluar) dari arus probabilitas melalui permukaan A yang membatasi ini volume. Apa arti dari $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$?

F. Nilai Ekspektasi

Misalkan kita mengukur posisi partikel mekanika kuantum yang besar berkali-kali. Bahkan jika fungsi gelombang partikel sama sebelum setiap pengamatan kita tidak mendapatkan hasil yang sama. Dalam hal ini kami tertarik untuk mengetahui nilai rata-rata atau yang diharapkan dari kumpulan pengukuran posisi yang dilambangkan sebagai $\langle x \rangle$. Mengetahui ψ , bagaimana kita menghitung $\langle x \rangle$.? Untuk mendapatkan ekspresi untuk $\langle x \rangle$., alih-alih sistem kuantum, pertimbangkan sistem klasik, misalnya dadu dengan enam sisi bernomor 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 atau katakanlah $a_1, a_2, \dots, a_6$ berturut-turut. Lempar dadu N (sangat besar) beberapa kali dan catat hasilnya di masing-masing melemparkan. Biarkan, N_i menunjukkan berapa kali peristiwa a_i terjadi. Kemudian nilai rata-rata atau nilai ekspektasi pelemparan dadu adalah

$$\langle \text{outcome} \rangle = \frac{1}{N} (N_1 a_1 + N_2 a_2 + \dots + N_6 a_6) = \sum_i a_i P(a_i)$$

atau secara sederhana

$$\langle \text{outcome} \rangle = \sum_a a P(a) \quad (5.45)$$

dimana penjumlahan adalah atas semua nilai a yang mungkin. Di sini, nilai a yang mungkin diasumsikan diskrit. Ketika hasil eksperimen mengambil nilai apa pun dalam interval, katakan, $[-\infty, \infty]$ maka

$$\langle \text{outcome} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a P(a) da \quad (5.46)$$

Dalam teori kuantum $P(\mathbf{r}, t) d\tau = \psi^* \psi d\tau$, dimana $d\tau = dx dy dz$, memberikan probabilitas untuk mencari sebuah partikel dalam volume $d\tau$ terpusat pada $\mathbf{r}$ dan karenanya untuk pengukuran posisi, persamaan (5.46) menjadi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r} P(\mathbf{r}, t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r} \psi^* \psi d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r}_{op} \psi(\mathbf{r}, t) d\tau \end{aligned} \quad (5.47)$$

dimana $\psi(\mathbf{r}, t)$ diasumsikan ternormalisasi. Untuk penyederhanaan, jatuhkan subskrip 'op' pada operator. Persamaan (5.47) memberikan nilai ekspektasi dari partikel mekanika kuantum. Nilai ekspektasi dari $\mathbf{r}^n$ diberikan dalam variabel ψ atau ϕ

$$\langle \mathbf{r}^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r}^n \psi(\mathbf{r}, t) d\tau \quad (5.48)$$

Dengan cara yang sama, nilai ekspektasi dari kuantitas apapun yang hanya merupakan fungsi posisi yang dapat didefinisikan. Untuk fungsi $f(\mathbf{r}, t)$

$$\langle f(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f \psi d\tau \quad (5.49)$$

dimana f di dalam integral merupakan bentuk operator dari fungsi f .

G. Postulat-postulat Dasar

Dalam mekanika klasik kita bekerja dengan posisi $\mathbf{r}$, momentum $\mathbf{p}$, energi total E , dll. Besaran ini disebut variabel dinamis. Dalam kuantum mekanik variabel dinamis tidak lagi variabel tetapi operator. Sebuah operator dioperasikan pada fungsi gelombang ψ untuk mendapatkan berbagai hasil dari variabel fisik yang sesuai. Dari diskusi kita tentang persamaan Schrödinger dan fungsi gelombangnya sejauh ini, kita sekarang membuat daftar postulat dasar penting dalam mekanika kuantum.

Postulat 1:

Untuk setiap sistem dinamis terdapat fungsi gelombang (dan spasialnya turunan). Ini adalah fungsi parameter yang kontinu, terbatas, bernilai tunggal sistem, koordinat ruang dan waktu. Dari fungsi gelombang, prediksi sifat fisik dari sistem yang akan dibuat. Postulat ini berisi persyaratan bahwa semua gelombang fisik seperti gelombang suara, gelombang elektromagnetik dan gelombang air bertemu.

Postulat 2:

Operator Hamilton dari sistem mekanika kuantum menentukan evolusi sistem. Hamiltonian klasik $E = H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ diubah menjadi persamaan gelombang (5.12) dengan substitusi operator berikut untuk variabel dinamis: $x \rightarrow \hat{x}$, $r \rightarrow \hat{r}$, $f(x) \rightarrow \hat{f}(x)$, $p_x \rightarrow \frac{i\hbar\partial}{\partial x}$, $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$, dan $E = i\hbar\partial/\partial t$.

Postulat 3:

$\psi^*\psi$ diinterpretasikan sebagai densitas probabilitas posisi dan fungsi gelombang yang dapat diterima harus memenuhi kondisi normalisasi (5.22) untuk membuat probabilitas total bersatu.

Postulat 4:

Untuk setiap besaran fisis yang dapat diamati, terdapat operator yang sesuai dengan nilai eigen nyata. Satu-satunya nilai terukur dari yang dapat diamati adalah kemungkinan nilai eigen dari operator yang sesuai.

Postulat 5:

Mekanika kuantum tidak mengatakan dengan pasti hasil suatu eksperimen. Tapi itu memungkinkan komputasi probabilitas untuk berbagai hasil yang mungkin. Akibatnya, kami tertarik pada nilai rata-rata dari variabel dinamis A dan ini diberikan oleh persamaan (2.55).

H. Evolusi Waktu dari Keadaan Stasioner

Pertimbangkan persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu. Seperti yang dinyatakan sebelumnya keadaan sistem mekanika kuantum diwakili oleh fungsi

gelombang ψ . $|\psi|^2$ diasumsikan memberikan kepadatan probabilitas posisi. Dari solusi $\phi(\mathbf{r})$ persamaan Schrödinger tak bergantung waktu, persamaan (5.17), solusi persamaan Schrödinger yang bergantung waktu ditulis sebagai

$$\psi_n(\mathbf{r}, t) = \phi_n(\mathbf{r})e^{-iE_n t/\hbar} \quad (5.50)$$

Kita perhatikan bahwa $|\psi_n(\mathbf{r}, t)|^2$ tidak bergantung pada waktu. Selanjutnya, ketergantungan waktu dari $\psi_n(\mathbf{r}, t)$ periodik dengan frekuensi sudut $\omega = E_n/\hbar$. Keadaan seperti itu disebut keadaan stasioner. Dalam mekanika kuantum keadaan stasioner tidak berarti bahwa sistem benar-benar dalam keadaan istirahat atau dalam titik kesetimbangan klasik. Di dalam keadaan, nilai harapan dari semua variabel dinamis

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(\mathbf{r}, t) A \psi_n(\mathbf{r}, t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(\mathbf{r}) A \phi_n(\mathbf{r}) d\tau \quad (5.51)$$

adalah independen dari waktu. Ini berarti bahwa meskipun dapat bervariasi dengan waktu, pada setiap titik dalam ruang konfigurasi tidak bergantung pada waktu.

Solusi $\phi_n(\mathbf{r})$ dari persamaan Schrödinger tak bergantung waktu (5.17) untuk nilai tetap E_n jelas tidak tergantung waktu dan dengan demikian $\phi_n^*(\mathbf{r})\phi_n(\mathbf{r})$ tidak tergantung waktu. Oleh karena itu, kita sebut Persamaan (5.17) sebagai persamaan Schrödinger keadaan stasioner dan solusinya sebagai solusi keadaan stasioner atau fungsi eigen. Ini adalah sebuah persamaan nilai eigen energi, $H\phi = E\phi$. Akibatnya, ketika keadaan partikel adalah solusi dari Persamaan (5.17) maka energi itu memiliki nilai yang pasti diberikan oleh nilai eigen E .

Misalkan sebuah partikel awalnya dalam keadaan stasioner yang diwakili oleh $\psi_n^*(\mathbf{r}, 0) = \phi_n(\mathbf{r})$. Kemudian dari Persamaan (2.94) kita menuliskan

$$\psi_n(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}, 0)e^{-iE_n t/\hbar} \quad (5.52)$$

dan $|\psi_n(\mathbf{r}, t)|^2 = |\psi_n(\mathbf{r}, 0)|^2$ tidak bergantung pada waktu. Artinya, Jika suatu sistem adalah awalnya dalam keadaan stasioner kemudian tetap dalam keadaan itu selamanya. Meskipun $\psi_n(\mathbf{r}, t)$ berubah seiring waktu, energi dan nilai harapan dari yang dapat diamati tetap sama.

Kami mencatat bahwa fungsi gelombang yang diberikan oleh persamaan (5.52) adalah solusi khusus persamaan Schrödinger bergantung waktu. Kombinasi khusus seperti itu solusi diberikan oleh persamaan (5.19). Sekarang kita bertanya: Dapatkah fungsi gelombang diberikan oleh persamaan (2.19) mewakili keadaan stasioner? Jawabannya tidak, seperti yang ditunjukkan di bawah ini.

Mari kita hitung $\psi^*\psi$ dari ψ yang diberikan oleh persamaan (2.19). Untuk sederhananya asumsikan bahwa nilai energi bersifat diskrit. Kami menuliskan ψ^* sebagai

$$\psi^* = \sum_m a_m^* \phi_m^* e^{iE_m t/\hbar} \quad (5.53)$$

maka

$$\begin{aligned} \psi^*\psi &= \sum_m \sum_n a_m^* a_n \phi_m^* \phi_n e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \\ &= \sum_n |a_n|^2 |\phi_n|^2 + \sum_{m \neq n} \sum_n a_m^* a_n \phi_m^* \phi_n e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Karena suku kedua dalam persamaan di atas mengandung t , $\psi^*\psi$ bergantung pada waktu. Oleh karena itu, solusi ψ yang diberikan oleh persamaan (5.19) tidak mewakili solusi keadaan stasioner.

Dari pembahasan kita di atas, kita katakan bahwa solusi keadaan stasioner dari sistem mekanika kuantum diperoleh hanya dengan mencari solusi dari persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu (5.17) dan lalu kalikan dengan $e^{-iEt/\hbar}$, asalkan potensialnya tidak tergantung waktu. Sekarang pertanyaan yang menarik adalah: Berapa nilai E yang diperbolehkan? Bisakah E tak tentu? Dengan kata lain, apakah ada solusi (terbatas) dari persamaan (5.17) untuk semua nilai riil E ? Jawabannya adalah tidak. Solusi hanya ada untuk nilai spesifik tertentu dari E . Ini adalah karena solusi dari persamaan (5.17) memenuhi kondisi yang dapat diterima hanya untuk nilai-nilai tertentu dari E . Nilai energi yang diizinkan disebut spektrum energi atau spektrum nilai eigen atau tingkat energi sistem. Dapatkah Anda mengingat beberapa dari persamaan yang berbentuk $A\phi = \lambda\phi$ di mana A adalah operator diferensial linier yang solusi terbatasnya hanya ada untuk nilai nyata diskrit tertentu dari λ ? Apa nilai eigen dan fungsi eigennya?

I. Kondisi untuk Transisi yang Diizinkan

Misalkan kita ingin mengetahui apakah sebuah partikel mampu melakukan transisi mendadak dari suatu keadaan tertentu ke keadaan lain. Kita juga bertanya: dapatkah sebuah partikel melompat ke keadaan tak tentu? Jika tidak, ke keadaan bagian mana ia dapat melompat? Apa yang terjadi ketika partikel berpindah dari satu keadaan energi ke keadaan energi lainnya? Kami akan membahas ini pertanyaan di bagian ini.

Bohr mendalilkan bahwa ketika sebuah partikel membuat transisi dari energi yang lebih tinggi tingkat E_m ke tingkat energi yang lebih rendah E_n maka frekuensi radiasi yang dipancarkan partikel tersebut adalah $\nu_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$. Dapatkah sebuah partikel memancarkan radiasi ketika ia dalam keadaan energi stasioner? Jawabannya adalah tidak. Untuk membuktikannya perhatikan sistem partikel kuantum yang bergerak hanya dalam arah x dan dalam keadaan $\phi_n(x)$ dengan energi E_n . Fungsi eigen bergantung waktu yang terkait dengan ini keadaan ditulis sebagai

$$\psi_n(x, t) = \phi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} \quad (5.55)$$

Sekarang, nilai ekspektasi posisi dari partikel adalah

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^*(x, t)\psi_n(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\phi_n^*(x, t)\phi_n(x, t)dx \quad (5.56)$$

yang tidak bergantung terhadap waktu. Jadi, $\langle x \rangle$ dari partikel tidak berosilasi dan tidak ada radiasi yang terjadi.

Selanjutnya, kita menghitung $\langle x \rangle$ untuk transisi dari E_m ke E_n . ψ dari partikel adalah $a\phi_m + b\phi_n$ dimana a^*a dan b^*b adalah probabilitas untuk partikel berada di ϕ_m dan ϕ_n secara berturut-turut. Kita peroleh

$$\begin{aligned} \langle x \rangle = & \cos(\nu_{mn}t) \int_{-\infty}^{\infty} x[ab^*\phi_m\phi_n^* + a^*b\phi_m^*\phi_n] dx + \\ & i \sin(\nu_{mn}t) \int_{-\infty}^{\infty} x[ab^*\phi_m\phi_n^* - a^*b\phi_m^*\phi_n] dx \end{aligned} \quad (5.57)$$

Jika partikel dalam keadaan tertentu E_m atau E_n maka $\nu = 0$ dan $\langle x \rangle = \text{konstan}$, independen dari waktu. Ketika partikel melakukan transisi dari keadaan E_m ke keadaan

E_n kemudian $\langle x \rangle$ berosilasi dengan waktu dan frekuensi radiasi dipancarkan diberikan oleh $\nu_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$. Dari persamaan (5.57), kita memperoleh kondisi untuk $\langle x \rangle \neq 0$ sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^* x \phi_n dx \neq 0 \quad (5.58)$$

Jika nilai integral di atas bukan nol maka transisi dari level E_m ke E_n diperbolehkan jika tidak, transisi dilarang. Kondisi pada m dan n yang integral dalam persamaan (5.58) bukan nol disebut seleksi aturan. Karena operator dipol listrik diberikan sebagai ex , transisi berdasarkan aturan pemilihan di atas disebut transisi dipol listrik.

J. Ortogonalitas Dua Keadaan

Fungsi gelombang yang termasuk dalam nilai energi (eigen) tertentu E_m ke E_n umumnya disebut fungsi eigen energi ϕ_n . Sifat penting fungsi eigen ϕ_n dari persamaan Schrödinger keadaan stasioner adalah bahwa dua fungsi eigen milik untuk dua nilai energi yang berbeda E_m dan E_n memenuhi persamaan integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^* \phi_n d\tau = 0 \quad (5.59)$$

Dalam analisis vektor dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ yang $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u_i v_i = 0$ disebut ortogonal. (Jika jumlah komponen $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ sangat besar dan kenaikannya sangat kecil maka kami mengganti penjumlahan di atas dengan integral). Dalam analogi dengan ϕ_m dan ϕ_n ini memenuhi kondisi (5.59) disebut fungsi ortogonal. Fungsi ortogonal mengacu pada keadaan yang independen satu sama lain. Kemungkinan keadaan energi yang berbeda dari partikel semuanya ortogonal satu sama lain.

Misalkan ϕ_m dan ϕ_n adalah dua fungsi eigen dengan energi E_m dan E_n secara berturut-turut. Fungsi ini memenuhi persamaan (5.17)

$$\nabla^2 \phi_m + \frac{2m}{\hbar^2} (E_m - V) \phi_m = 0 \quad (5.60a)$$

$$\nabla^2 \phi_n + \frac{2m}{\hbar^2} (E_n - V) \phi_n = 0 \quad (5.60b)$$

Persamaan untuk ϕ_m^* adalah

$$\nabla^2 \phi_m^* + \frac{2m}{\hbar^2} (E_m - V) \phi_m^* = 0 \quad (5.60c)$$

Mengalikan persamaan (5.60b) dengan ϕ_m^* dan (5.60c) dengan ϕ_n dan mengurangi satu sama lain kita peroleh

$$\phi_m^* \nabla^2 \phi_n - \phi_n \nabla^2 \phi_m^* + \frac{2m}{\hbar^2} (E_n - E_m) \phi_m^* \phi_n = 0 \quad (5.61)$$

Mengintegrasikan persamaan (5.61) terhadap variabel waktu, kita dapatkan

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\phi_m^* \nabla^2 \phi_n - \phi_n \nabla^2 \phi_m^*) d\tau + \frac{2m}{\hbar^2} (E_n - E_m) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^* \phi_n d\tau = 0 \quad (5.62)$$

Menggunakan identitas kedua Green

$$\int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \int_S (f \nabla g - g \nabla f) dS \quad (5.63)$$

Persamaan (5.62) menjadi

$$\int_S (\phi_m^* \nabla^2 \phi_n - \phi_n \nabla^2 \phi_m^*) dS + \frac{2m}{\hbar^2} (E_n - E_m) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^* \phi_n d\tau = 0 \quad (5.64)$$

Karena $\phi_m, \phi_n \rightarrow 0$ ketika $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, integral permukaan menghilang dan kita mempunyai

$$(E_n - E_m) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^* \phi_n d\tau = 0 \quad (5.65)$$

Karena $E_m \neq E_n$ kita memiliki kondisi persamaan (5.59) Ketika $E_m = E_n$ dan n bebas linier dari ϕ_m , maka kedua keadaan tersebut dikatakan berdegenerasi menyatakan memiliki nilai eigen yang sama tetapi fungsi eigen yang berbeda. Dalam beberapa kasus $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^* \phi_n d\tau$ tidak harus nol. Tetapi dimungkinkan untuk memilih satu set fungsi ortogonal dengan menggunakan prosedur ortogonalisasi Schmidt. integral untuk $m = n$ adalah $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^* \phi_n d\tau$ berhingga dan dapat dinormalisasi menjadi satu dengan kondisi normalisasi. Oleh karena itu, jika setiap ϕ dinormalisasi maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m^* \phi_n d\tau = \delta_{mn} \quad (5.66)$$

Fungsi yang memenuhi persamaan (5.66) disebut ortonormal karena mereka ortogonal satu sama lain dan juga ternormalisasi.

Soal-soal

1. Fungsi gelombang sebuah partikel yang bergerak di dalam potensial kotak dimensi satu sepanjang L dinyatakan oleh $\varphi(x) = C \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Tentukan konstanta normalisasi C .
2. Fungsi gelombang sebuah partikel di dalam potensial kotak dimensi satu pada interval $[0, 1]$ diberikan oleh $\psi(x, t) = A \sin(3\pi x) \exp(-iE_3 t/\hbar)$ dengan konstanta normalisasi A dan energi E_3 . Tentukan:
 - a. kerapatan probabilitas partikel
 - b. konstanta normalisasi A
 - c. probabilitas untuk menemukan partikel pada interval $0,2 \leq x \leq 0,4$.

3. Sebuah partikel memiliki fungsi gelombang ternormalisasi sebagai berikut:

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{1/2} \frac{x + ix}{1 + ix^2}$$

Tentukan posisi yang paling mungkin untuk menemukan partikel tersebut!

4. Fungsi gelombang ternormalisasi sebuah partikel di bawah pengaruh potensial harmonik sederhana diberikan oleh

$$\varphi(x, t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} e^{-iEt/\hbar}$$

Tentukan nilai ekspektasi $\langle x \rangle$.

BAB VI

OPERATOR, NILAI EIGEN, DAN FUNGSI EIGEN

Besaran pokok dalam mekanika kuantum adalah fungsi gelombang ψ . Mengingat sistem mekanika kuantum kita menulis persamaan Schrödinger untuk itu. Solusinya adalah fungsi gelombang. Saat memperkenalkan fungsi gelombang, kami menyatakan bahwa informasi maksimum tentang keadaan suatu sistem hanya dapat diperoleh dari . Bagaimana cara mengekstrak sifat sistem yang dapat diamati dari fungsi gelombang? Dalam mekanika kuantum untuk setiap variabel dinamis klasik ada operator. Misalnya, operator momentum $\mathbf{p}$ adalah $-i\hbar\nabla$, sedangkan operator variabel energi $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + v(\mathbf{r})$ adalah $-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2 + V(\mathbf{r})$. Operasi operator pada ψ memberikan fungsi lain. Jika fungsi baru adalah $\lambda\psi$, maka λ adalah nilai eigen dari operator. Misalnya, energi partikel dalam keadaan tertentu yang diwakili oleh ψ dapat diperoleh dengan mengoperasikan H pada ψ . Artinya, kita memiliki $H\psi = E\psi$ di mana E adalah nilai eigen energi. Nilai ekspektasi $A(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ dapat diperoleh dari rumus

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* A \psi d\tau \quad (6.1)$$

di mana ψ adalah solusi dari persamaan $H\psi = E\psi$.

Operator dalam mekanika kuantum yang mewakili yang dapat diamati adalah jenis khusus: Mereka adalah linier dan Hermitian. Operator tersebut tidak hanya membentuk alat komputasi, tetapi juga membentuk bahasa yang paling efektif dalam hal: teori tersebut dapat dirumuskan. Hal yang menarik adalah bahwa dengan menggunakan operator linier kita dapat memahami mekanika kuantum. Oleh karena itu, penting untuk mempelajari teori dasar operator linier. Dalam bab ini, kami menyajikan sifat-sifat penting dari operator linier dan fungsi eigennya. Kita diskusikan fitur dari berbagai operator yang diperlukan untuk mempelajari sistem mekanika kuantum. Bab ini akan menunjukkan betapa kaya dan indahya struktur matematika mekanika kuantum.

A. Operator Linear

Sebuah operator A_{op} adalah operasi matematika yang mana, ketika ia beraksi pada fungsi $f(x)$ memberikan fungsi lain $g(x)$:

$$A_{op}f(x) = g(x) \quad (6.2)$$

Untuk mempermudah, kami menjatuhkan subskrip 'op' di A_{op} . Operasi matematika seperti penambahan, pengurangan, diferensiasi, integrasi, dll dapat direpresentasikan oleh operator yang sesuai. Contoh operator adalah d/dx .

Biasanya operator ditentukan oleh tindakannya. Namun, operator pada dasarnya terdiri dari tindakan dan domainnya. Yang kami maksud dengan tindakan adalah apa yang dilakukan operator terhadap fungsi. Di sisi lain, set fungsi yang ditentukan di mana operator bertindak disebut sebagai domain operator. Mengapa haruskah

seseorang mendefinisikan domain operator? Kami akan sampai pada pertanyaan ini ketika membahas tentang self-adjoint dan operator Hermitian di subbab D.

Sebuah operator A dikatakan sebagai operator linear jika ia memenuhi aturan

$$A(\phi_1 + \phi_2) = A\phi_1 + A\phi_2 \quad (6.3a)$$

$$A(c\phi_1) = cA\phi_1, \quad A(c\phi_2) = cA\phi_2 \quad (6.3b)$$

di mana ϕ_1 dan ϕ_2 adalah fungsi yang diberikan dan c adalah konstanta kompleks tak tentu. Operator d/dx adalah linear karena

$$\frac{d}{dx}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{d}{dx}\phi_1 + \frac{d}{dx}\phi_2 \quad (6.4a)$$

$$\frac{d}{dx}c_1\phi_1 = c_1\frac{d}{dx}\phi_1, \quad \frac{d}{dx}c_2\phi_2 = c_2\frac{d}{dx}\phi_2 \quad (6.4b)$$

Operator secara umum tidak memiliki sifat yang diberikan oleh persamaan (6.3a). Anggap operator A didefinisikan oleh $A\phi = \sin \phi$. Maka sisi kiri dari persamaan (6.3a) adalah

$$A(\phi_1 + \phi_2) = \sin(\phi_1 + \phi_2) \quad (6.5a)$$

Sisi kanan persamaan (6.3a) adalah

$$A\phi_1 + A\phi_2 = \sin \phi_1 + \sin \phi_2 \quad (6.5b)$$

Sisi kanan persamaan (6.3) tidak sama. Itu adalah, operator A yang didefinisikan oleh $A\phi = \sin \phi$ bukan merupakan operator linear.

Andaikan kita mengasumsikan kalau

$$A\phi = \lambda\phi \quad (6.6)$$

dimana λ adalah bilangan. Persamaan (6.6) disebut persamaan nilai eigen dari A . adalah ϕ disebut fungsi eigen dari A . λ disebut nilai eigen dari operator A yang sesuai dengan fungsi eigen ϕ . Diberikan persamaan nilai eigen kita bertanya: Apa adalah nilai-nilai λ yang solusi nontrivialnya terbatas di mana-mana bahkan pada $x = \pm\infty$ terjadi? Secara umum, solusi nontrivial ada untuk nilai-nilai tertentu dari λ saja. Nilai-nilai tertentu disebut nilai eigen. Nilai eigennya adalah nilai penting dari λ karena hanya untuk himpunan nilai tertentu dari persamaan (6.6) yang memiliki solusi nontrivial. Solusi ini, yang disebut fungsi eigen, adalah yang penting solusi karena mereka adalah satu-satunya kemungkinan solusi yang bermakna. Sekumpulan dari nilai eigen disebut spektrum.

Misalkan A dan B adalah dua operator linier. Kombinasi linier dari mereka adalah $C = \alpha A + \beta B$. Apakah C merupakan operator linier? Jawabannya adalah ya. Artinya, kombinasi linier dari dua atau lebih operator linier juga merupakan operator linier. Sangat mudah untuk menunjukkan bahwa produk dari dua atau lebih operator linier juga merupakan operator linier. Jika $A\phi = 0$ maka A adalah disebut operator tunggal. Ketika $AB = BA = I$ maka $A^{-1} = B$ dan $B^{-1}A$. Sekarang, operator A dan B disebut operator nonsingular.

Beberapa sifat operator linear diringkas di bawah ini:

$$A + B = B + A \quad (6.7a)$$

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C) \quad (6.7b)$$

$$A(BC) = (AB)C + ABC \quad (6.7c)$$

$$(A + B)C = AC + BC \quad (6.7d)$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad (6.7e)$$

$$A^2 = AA \quad (6.7f)$$

Dalam mekanika kuantum, operator yang berasosiasi dengan observable seperti posisi, momentum linear, momentum sudut dan energi semuanya memenuhi sifat operator linear.

B. Operator Komut dan Nonkomut

Dalam mekanika klasik jika kita mengetahui beberapa himpunan besaran fisika seperti $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ maka jumlah bunga tertentu lainnya dapat ditentukan. Misalnya, diberikan $\mathbf{r}$ dan $\mathbf{p}$ dapat ditentukan momentum sudut orbital $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Dari himpunan semua variabel dinamis banyak himpunan bagian yang kompatibel dapat dipilih. Anggota mereka dibatasi oleh tanda kurung Poisson. Jika koordinat sebuah partikel dilambangkan dengan x_1, x_2, x_3 dan momentum dengan p_1, p_2, p_3 maka tanda kurung Poisson dari dua fungsi f dan g (yang merupakan fungsi x_i dan p_i) adalah didefinisikan sebagai

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \quad (6.8)$$

Dalam mekanika kuantum, kondisi kurung Poisson digantikan oleh tanda kurung komutator.

Operator $AB - BA$ disebut komutator dari A dan B dan dinotasikan $[A, B]$. Sifat-sifat kurung komutator mirip dengan sifat-sifat kurung Poisson. Jika $[A, B] = 0$, yaitu $AB = BA$, maka kedua operator A dan B dikatakan sebagai operator komut; jika tidak, operator nonkomut. Untuk operator komut urutan kemunculannya dapat diubah secara bebas. Kapan $AB = BA$ operator A dan B dikatakan sebagai operator antikomut.

Identitas berikut dapat dengan mudah diverifikasi:

$$[A, B] = -[B, A] \quad (6.9a)$$

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C] \quad (6.9b)$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (6.9c)$$

$$[\alpha_1 A + \alpha_2 B, C] = \alpha_1 [A, C] + \alpha_2 [B, C] \quad (6.9d)$$

$$[A, \alpha_1 B + \alpha_2 C] = \alpha_1 [A, B] + \alpha_2 [A, C] \quad (6.9e)$$

$$[A, A^n] = 0, e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \quad (6.9f)$$

Aturan untuk menghitung luas persegi dengan panjang l dan lebar b adalah komutatif; $lxb = bxl$. Namun demikian, terdapat operator matematika tertentu yang tidak komutatif. Mari kita tinjau dua operasi berikut.

1. Gerakkan dua langkah ke arah depan. Sebut operasi ini sebagai S .
2. Putar 90° ke sisi kanan. Sebut operasi ini sebagai R .

Misalkan kita berdiri di sebuah ruangan dan melakukan operasi 1 dan 2. Catat posisi akhir dan itu menjadi P_{12} . Selanjutnya, kita pergi ke posisi awal dan lakukan operasi 2 dan 1. Posisi kita katakanlah P_{21} . Jelas, P_{21} berbeda dengan P_{12} . Artinya, secara simbolis $SR \neq RS$ atau $SR - RS \neq 0$ operator S dan R tidak komutatif. Untuk operator koordinat dan momentum yang kita miliki

$$\begin{aligned} [x, p_x]\phi &= (xp_x)\phi - (p_x x)\phi \\ &= -i\hbar \left(x \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (x\phi) \right) \\ &= i\hbar \phi \end{aligned} \quad (6.10)$$

Jadi, $[x, p_x] = i\hbar$ yang menyiratkan bahwa urutan operator ini tidak dapat berubah. Apa konsekuensi dari hubungan ini? Konsekuensinya adalah $x(p_x\phi) \neq p_x(x\phi)$ di mana ϕ adalah keadaan sistem. Artinya, pengukuran posisi yang diikuti dengan pengukuran momentum dapat memberikan hasil yang berbeda dari pengukuran momentum diikuti dengan pengukuran posisi.

Demikian pula, kita memperoleh

$$[y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar, [p_x, x] = [p_y, y] = [p_z, z] = -i\hbar \quad (6.11)$$

Catat bahwa pasangan konjugat (x, p_x) , (y, p_y) , dan (z, p_z) tidak komut. Tetapi untuk x, p_y kita punya $[y, p_y] = 0$ sehingga urutan operator-operator ini bisa diubah tanpa mempengaruhi hasilnya. Terlebih lagi,

$$[x, p_z] = 0, [y, p_x] = 0, [y, p_z] = 0, [z, p_x] = 0, [z, p_y] = 0 \quad (6.12)$$

Ada tiga fitur penting yang terkait dengan operator mekanika kuantum komuter dan noncommuting. Mereka diberikan di bawah ini:

1. Jika operator A dan B dari dua objek yang dapat diamati tidak bolak-balik maka mereka tidak dapat diukur secara bersamaan dengan akurasi yang sewenang-wenang.
2. Jika A dan B adalah dua operator komut maka fungsi eigen dari A (atau B) juga merupakan fungsi eigen dari B (A).
3. Nilai ekspektasi dari operator yang melakukan perjalanan dengan Hamiltonian H adalah konstanta gerak atau tidak tergantung waktu.

Andaikan A dan B adalah dua operator dan ϕ adalah fungsi sedemikian sehingga

$$A\phi = a\phi, B\phi = b\phi \quad (6.13)$$

maka ϕ disebut fungsi eigen simultan dari A dan B yang termasuk nilai eigen a dan b secara berturut-turut.

$$BA\phi = aB\phi = ab\phi \quad (6.14)$$

Dengan cara yang sama, $B\phi = b\phi$ kita peroleh

$$AB\phi = bA\phi = ba\phi \quad (6.15)$$

Dari persamaan (6.14) dan (6.15), kita dapatkan

$$(AB - BA)\phi = [A, B]\phi = 0 \quad (6.16)$$

Oleh karena itu, jika adalah fungsi eigen simultan dari operator A dan B maka $[A, B] = 0$. Jadi, $[A, B] = 0$ adalah kondisi yang diperlukan untuk menjadi fungsi eigen simultan dari A dan B . Bahkan, itu juga menjadi kondisi cukup. Untuk partikel bebas $[H, p_x] = 0$. Oleh karena itu, operator $H = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) d^2/dx^2$ dan $p_x = -i\hbar d/dx$ memiliki himpunan fungsi eigen yang sama. (Verifikasi ini dengan solusi persamaan Schrödinger bebas waktu dari partikel bebas).

C. Operator *self-adjoint* dan Hermitian

Tinjau integral

$$(\phi_1, A\phi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^* A\phi_2 d\tau \quad (6.17)$$

yang melibatkan dua fungsi yang berbeda, ϕ_1 dan ϕ_2 , dan A adalah operator. Untuk operator A , seseorang bisa selalu bisa menemukan operator lain $A^\dagger$ (*A-dagger*) yang disebut adjoin A sedemikian sehingga

$$(\phi_1, A\phi_2) = (A^\dagger \phi_1, \phi_2) \quad (6.18)$$

Itu adalah, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^* A\phi_2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (A^\dagger \phi_1)^* \phi_2 d\tau$. Sejauh nilai integral bersangkutan, tidak masalah apakah A bertindak pada ϕ_2 atau adjoinnya $A^\dagger$ bertindak pada fungsi lainnya ϕ_1 . Ketika $A^\dagger = A$, operator A dikatakan *self-adjoint*. Sebuah operator self-adjoint dengan kondisi batas tertentu pada fungsi eigen disebut Hermitian.

Ketika sebuah operator A adalah *self-adjoint* maka

$$(\phi_1, A\phi_2) = (A\phi_1, \phi_2) \quad (6.19)$$

Fitur menarik dari operator self-adjoint adalah nilai ekspektasi dari variabel dinamik yang bersesuaian adalah real seperti yang ditunjukkan di bawah ini. Ketika $A^\dagger = A$ dan $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ kemudian menggunakan persamaan (6.18) dan persamaan (6.19), kita peroleh

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^* A\phi d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (A^\dagger \phi)^* \phi d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi^* (A\phi) d\tau \right]^* \\ &= \langle A \rangle^* \end{aligned} \quad (6.20)$$

$\langle A \rangle$ dengan demikian nyata. Jika operator variabel dinamis adalah *self-adjoint*, maka nilai yang mungkin dari variabel hanya nyata. Dalam sebuah percobaan, hasil dari pengukuran tunggal dari suatu variabel tentu merupakan bilangan real. Oleh karena itu, operator selfadjoint cocok untuk mewakili variabel dinamis yang dapat diamati. Jika $(\phi_1, A\phi_2) = -(A\phi_1, \phi_2)$ maka A dikatakan anti *self-adjoint* (atau anti Hermitian). Dalam hal ini $\langle A \rangle = \langle A \rangle^*$ nilai ekspektasi dari operator anti *self-adjoint* selalu merupakan imajiner murni.

Soal-soal

1. Diberikan sebuah operator $x + \frac{d}{dx}$. Buktikan bahwa fungsi $\varphi(x) = c \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \lambda x\right)$ adalah fungsi eigen dari operator $x + \frac{d}{dx}$ jika nilai eigennya adalah λ .

2. Bentuk matriks suatu operator $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. hitunglah harga-harga eigennya dan tentukan fungsi eigen bersangkutan.
3. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari operator berikut!

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
4. Berdasarkan persamaan Schrödinger, hitunglah komutasi dari $[\hat{x}, \hat{H}] = -i\hbar \frac{\hat{p}_x}{m}$.
5. Tuliskan hasil operasi dari operator momentum $\hat{p}_x$ pada fungsi gelombang $\psi(x) = \sin(2x)$.
6. Tuliskan hasil operasi dari operator energi kinetic dimensi satu $\hat{T}_x$ pada fungsi gelombang $\psi(x) = \sin(2x)$.
7. Diberikan sebuah operator $\frac{d^2}{dx^2}$. Buktikan bahwa kombinasi linear e^{-2ix} dan e^{2ix} adalah fungsi eigen dari operator tersebut!

BAB VII POTENSIAL SEDERHANA

A. Partikel Bebas

Partikel bebas adalah partikel yang tidak memiliki gaya. Kasus khusus ini dapat dipelajari dengan menggunakan asumsi sebelumnya tanpa menggunakan persamaan Schrödinger. Perkembangan tersebut menggarisbawahi peran kondisi awal dalam fisika kuantum. Bilangan gelombang k dan frekuensi gelombang f materi partikel bebas diberikan oleh hubungan de Broglie

$$k = \frac{p}{\hbar} \text{ dan } \omega = \frac{E}{\hbar} \quad (7.1)$$

Untuk partikel non-relativistik, ω berhubungan dengan k sebagai

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (7.2)$$

yang mengikuti dari koneksi klasik $E = \frac{p^2}{2m}$ antara energi E dan momentum p untuk sebuah partikel bebas.

Untuk fungsi gelombang itu sendiri, kita semestinya mengambil

$$\psi_k(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = A \{ \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t) \} \quad (7.3)$$

di mana $i = \sqrt{-1}$ adalah unit imajiner. Ini adalah osilasi dengan bilangan gelombang k , frekuensi f , dan amplitudo A . Karena variabel x dan t hanya terjadi pada kombinasi $kx - \omega t$, osilasi adalah gelombang berjalan, sebagaimana layaknya partikel bebas bergerak. Selanjutnya, kombinasi khusus yang diungkapkan oleh Persamaan (7.3) adalah gelombang bidang, yang kerapatan peluangnya $|\psi|^2 (= A^2)$ adalah seragam. Artinya, peluang untuk menemukan partikel ini di setiap interval sumbu x adalah sama dengan interval lain dengan panjang yang sama dan tidak berubah bersama waktu. Gelombang bidang adalah bentuk gelombang perjalanan paling sederhana dengan sifat ini. Ia menyatakan gagasan yang masuk akal bahwa tidak ada tempat khusus untuk suatu partikel bebas dapat ditemukan. Lokasi partikel sama sekali tidak diketahui di $t = 0$ dan tetap demikian sepanjang waktu; namun, momentum dan energinya adalah dikenal dengan tepat sebagai $p = \hbar k$ dan $E = \hbar \omega$, secara berturut-turut.

Tetapi tidak semua partikel bebas dijelaskan oleh persamaan (7.3). Misalnya, kita mungkin menetapkan (melalui pengukuran) bahwa partikel kita pada awalnya berada dalam kisaran Δx sekitar x_0 . Dalam hal ini, $\psi(x, 0)$ harus berupa paket gelombang yang terkonsentrasi pada interval ini. Deskripsi gelombang bidang tidak pantas sekarang karena bentuk gelombang awal tidak diberikan dengan benar oleh $\psi_k(x, 0) = Ae^{ikx}$. Sebagai gantinya, sejumlah gelombang bidang dengan bilangan gelombang yang berbeda harus digunakan untuk mewakili paket. Karena k tidak dibatasi, penjumlahan sebenarnya merupakan integral di sini dan kami menulis

$$\psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{ikx} dk \quad (7.4)$$

Koefisien $a(k)$ mencirikan amplitudo gelombang bidang dengan bilangan gelombang k dalam campuran dan dipilih untuk menghasilkan bentuk gelombang

awal. Untuk sebuah $\psi(x, 0)$ yang diberikan, $a(k)$ yang diperlukan dapat ditemukan dari teori integral Fourier. Kita tidak akan peduli dengan rincian analisis ini di sini; poin penting adalah bahwa hal itu dapat dilakukan untuk paket dalam bentuk apa pun. Jika setiap gelombang bidang yang merupakan paket diasumsikan merambat secara independen dari yang lain sesuai dengan persamaan (7.3), paket pada setiap waktu t adalah

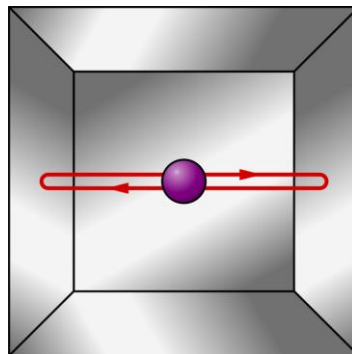
$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i\{kx - \omega(k)t\}} dk \quad (7.5)$$

perhatikan bahwa data awal hanya digunakan untuk menetapkan amplitudo $a(k)$; selanjutnya, paket berkembang sesuai dengan evolusi konstituen gelombang bidangnya. Karena masing-masing konstituen ini bergerak dengan kecepatan yang berbeda $v_p = \omega/k$ (kecepatan fase), paket gelombang mengalami dispersi (lihat subbab D; bab IV) dan paket berubah bentuknya saat merambat. Itu kecepatan rambat paket gelombang secara keseluruhan diberikan oleh kecepatan grup $d\omega/dk$ gelombang bidang yang membentuk paket. Persamaan (7.5) tidak lagi menggambarkan partikel dengan nilai momentum dan energi yang tepat. Untuk membangun paket gelombang (yaitu, melokalisasi partikel), campuran bilangan gelombang (karenanya, momentum partikel) diperlukan, seperti yang ditunjukkan oleh $a(k)$ yang berbeda. Amplitudo $a(k)$ memberikan apa yang disebut konten spektral paket. Semakin sempit paket yang diinginkan $\psi(x, 0)$, semakin luas fungsi $a(k)$ mewakili paket itu. Jika Δx menunjukkan lebar paket dan Δk menunjukkan ekstensi $a(k)$ yang sesuai, seseorang menemukan bahwa produk selalu sebuah jumlah orde kesatuan, yaitu $\Delta x \Delta k \approx 1$. Bersama dengan $p = \hbar k$, ini menyiratkan prinsip ketidakpastian:

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar \quad (7.6)$$

B. Partikel di Dalam Kotak

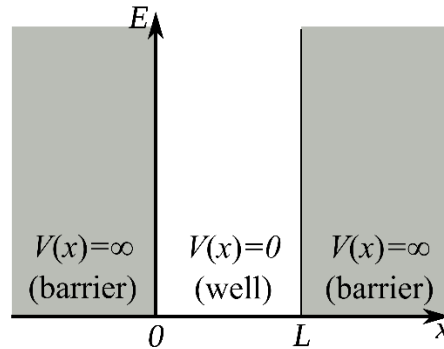
Dari masalah yang melibatkan gaya, yang paling sederhana adalah masalah kurungan partikel. Pertimbangkan sebuah partikel yang bergerak sepanjang sumbu x antara titik $x = 0$ dan $x = L$, di mana L adalah panjang “kotak”. Di dalam kotak partikel tersebut adalah bebas; pada titik akhir, bagaimanapun, ia mengalami kekuatan kuat yang berfungsi untuk mengandungnya. Contoh sederhana adalah pantulan bola yang secara elastis antara dua tembok yang tak bisa ditembus (Gambar 7.1).



Gambar 7.1 Partikel memantul secara elastis antara dua dinding yang tidak dapat ditembus.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Bentuk fungsi potensial dalam koordinat kartesian ditunjukkan pada gambar 7.2. Beberapa referensi kadang menamai topik ini sebagai sumur potensial persegi tak berhingga.



Gambar 7.2 Potensial persegi tak hingga berdimensi-1

Sumber: www.commonswiki.org

Dari sudut pandang klasik, partikel kita hanya memantul bolak-balik di antara dinding pembatas kotak. Kecepatannya tetap konstan, seperti halnya energi kinetiknya. Lebih jauh lagi, fisika klasik tidak membatasi nilai-nilai momentum dan energinya. Deskripsi kuantum sangat berbeda dan mengarah pada fenomena menarik dari kuantisasi energi.

Kita tertarik pada fungsi gelombang tak bergantung waktu $\psi(x)$ dari partikel kita. Karena terbatas pada kotak, partikel tidak pernah dapat ditemukan di luar, yang mensyaratkan $\psi(x)$ menjadi nol di daerah luar $x < 0$ dan $x > L$. Di dalam kotak, $V(x) = 0$ dan Persamaan Schrödinger menjadi, setelah penataan ulang,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi(x) \text{ dengan } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Solusi independen untuk persamaan ini adalah $\sin kx$ dan $\cos kx$, mengindikasikan bahwa k adalah bilangan gelombang osilasi. Solusi paling umum adalah kombinasi linear dari dua,

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \text{ untuk } 0 < x < L \quad (7.7)$$

Gelombang interior harus cocok dengan gelombang eksterior pada dinding kotak supaya $\psi(x)$ menjadi kontinu di mana-mana. Jadi, kita mensyaratkan gelombang interior menghilang pada $x = 0$ dan $x = L$:

$$\psi(0) = B = 0 \quad (7.8)$$

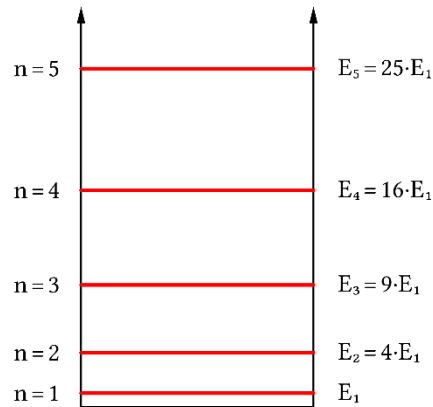
$$\psi(L) = A \sin kL = 0 \quad (7.9)$$

Kondisi terakhir mensyaratkan bahwa $kL = n\pi$, di mana n adalah sembarang bilangan bulat positif. Karena $k = 2\pi/\lambda$, ini ekuivalen dengan mencocokkan bilangan integral dari setengah panjang gelombang ke dalam kotak. Menggunakan $k = n\pi/L$, kita menemukan bahwa energi partikel terkuantisasi, dibatasi pada nilai

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}; n = 1, 2, \dots \quad (7.10)$$

Energi terendah yang diizinkan diberikan oleh $n = 1$ dan adalah $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$. Ini adalah keadaan dasar. Karena $E_n = n^2 E_1$, keadaan tereksitasi dimana $n = 2, 3, 4, \dots$ memiliki

energi $4E_1, 9E_2, 16E_2, \dots$. Diagram tingkat energi diberikan dalam Gambar 7.3. Perhatikan bahwa $E = 0$ tidak diperbolehkan; yaitu, partikel tidak pernah bisa berada di keadaan rehat. Energi terkecil yang dapat dimiliki partikel, E_1 , disebut energi titik nol. Hasil ini jelas bertentangan dengan prediksi klasik, di mana $E = 0$ adalah energi yang dapat diterima, seperti semua nilai positif E .



Gambar 7.3 Diagram tingkat energi untuk partikel yang terbatas pada kotak lebar satu dimensi L . Energi terendah yang diperbolehkan adalah E_1 , dengan nilai $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.

Sumber: www.commonswikimedia.org

Soal-soal

1. Sebuah partikel yang berada dalam sumur potensial dengan dinding tak berhingga memiliki fungsi gelombang sebagai berikut.

$$\varphi_n(x) = C \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right); n = 1, 3, 5, \dots \text{ dan}$$

$$\varphi_n = D \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right); n = 2, 4, 6, \dots$$

Hitunglah faktor normalisasi C dan D dengan batasan $-a \leq x \leq a$. Selanjutnya, buktikan bahwa fungsi-fungsi tersebut membentuk set ortonormal.

2. Sebuah partikel bebas memiliki fungsi gelombang sebagai berikut.

$$\psi(x, 0) = A \exp(-ax^2)$$

Dimana A dan a adalah konstanta dengan a ril positif. Normalisasi fungsi itu adalah...

3. Buktikan bahwa tingkat-tingkat energi untuk suatu partikel di dalam potensial kubus bersisi a adalah:

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

DAFTAR PUSTAKA

- Beiser, Arthur. *Konsep Fisika Modern*. Edited by Carol Manik. Translated by The Houw Liong. 3rd ed. Jakarta: Erlangga, 1986.
- Deych, Lev I. *Advanced Undergraduate Quantum Mechanics*. *Advanced Undergraduate Quantum Mechanics*. Cham: Springer International Publishing, 2018. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-71550-6>.
- Gautreau, Ronald, and William Savin. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Modern Physics*. Edited by H. Wibi Hardani. Translated by Soni Astranto. 2nd ed. Schaum's Outline Series. Jakarta: Erlangga, 2006. <https://books.google.co.id/books?id=7mxvGduPeagC>.
- Griffiths, David J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2nd ed. Upper Saddle River: Pearson Education, Inc., 2005.
- Kanginan, Marthen. *Fisika 3 Untuk SMA/MA Kelas XII*. Edited by Supriyana, Syarifuddin, and Fachrizal Rian Pratama. Jakarta: Erlangga, 2013.
- Krane, Kenneth. *Fisika Modern*. Translated by Hans J. Wospakrik. Jakarta: Universitas Indonesia, 2014.
- Levi, A F J. *Applied Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. <https://books.google.co.id/books?id=40rRzNbuhpAC>.
- Maryana, Okky Fajar Tri, and Yuant Tiandho. *Fisika Kuantum: Sejarah Dan Kisah Inspiratif Para Tokohnya*. Bandung: Yrama Widya, 2019.
- Pereyra, Pedro. *Fundamentals of Quantum Physics: Textbook for Students of Science and Engineering*. 1st ed. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer Berlin, Heidelberg, 2012. <https://books.google.co.id/books?id=-OPDauaCXYUC>.
- Purwanto, Agus. *Fisika Kuantum*. 2nd ed. Yogyakarta: Gava Media, 2016.
- Rajasekar, S, and R Velusamy. *Quantum Mechanics I: The Fundamentals*. Florida: CRC Press, 2014. <https://books.google.co.id/books?id=hdjMBQAAQBAJ>.
- Sani, Ridwan Abdullah, and Muhammad Kadri. *Fisika Kuantum*. Edited by Hastuti. Jakarta: Bumi Aksara, 2017.
- Siregar, Rustam E. *Fisika Kuantum*. Bandung: Widya Padjajaran, 2010.
- . *Mekanika Kuantum Molekul: Struktur Elektronik Atom Dan Molekul*. Bandung: UNPAD Press, 2014.
- Sudarmo, Unggul. *Kimia 1 Untuk SMA/MA Kelas X*. Edited by Bima Prasetya and Supriyana. Jakarta: Erlangga, 2013.
- Sudarta, I Wayan. *Mekanika Kuantum*. 1st ed. Labuapi: CV. Garuda Ilmu, 2019.
- Sugiyono, Vani. *Mekanika Kuantum*. Edited by Tri Admojo. Jakarta: Buku Seru, 2016.
- Surya, Yohanes. *Fisika Modern*. Tangerang: Kandel, 2009.

Sutjahja, Inge M. *Fisika Modern*. Edited by Edi Warsidi. Bandung: ITB Press, 2019.

www.commonswikimedia.org

www.flickr.com

www.freesvg.org