Persamaan Diferensial Elementer

Persamaan Diferensial merupakan salah satu cabang ilmu matematika terapan yang sangat penting dan banyak diaplikasikan di bidang teknik, ekonomi, komputer, dan pertanian. Materi prasyarat untuk dapat memahami dan menguasai materi ini adalah kalkulus khususnya konsep diferensial dan integral. Buku ini disusun dalam rangka sebagai pengantar memudahkan mahasiswa dan siapapun yang ingin mempelajari persamaan diferensial. Bahasa yang digunakan sederhana dan mudah dipahami mahasiswa. Pada penjelasannya diberikan contoh dan pembahasan. Buku ini membahas tentang :

1. Konsep dasar persamaan diferensial
2. Persamaan diferensial orde satu dengan jenis-jenisnya (persamaan diferensial orde satu variabel terpisah, homogen, nonhomogen, eksak, non eksak, Bernoulli dan peringkat pertama linear)
3. Aplikasi persamaan diferensial orde satu
4. Persamaan diferensial orde dua (persamaan diferensial orde dua variabel konstan homogen dan nonhomogen, persamaan diferensial orde dua dengan koefisien variabel Euler Cauchy)
5. Aplikasi persamaan diferensial orde dua
6. Transformasi laplace.

Rahmani

PT Cahaya Rahmat Rahmani
JL Kemuning Baru Komplek Ar Rahman
CahayaRahmatRahmani@gmail.com

ISBN 978-623-88090-5-9

9 786238 809059

Lisa Dwi Afri, M.Pd

Persamaan Diferensial Elementer

PERSAMAAN DIFERENSIAL ELEMENTER

Lisa Dwi Afri, M.Pd

Editor

Reflina, M.Pd

Persamaan Diferensial Elementer

Persamaan Diferensial Elementer

Lisa Dwi Afri, M.Pd

Rahmani

Persamaan Diferensial Elementer

Penulis :

Lisa Dwi Afri, M.Pd

Editor : Reflina, M.pd

Desain Layout : Ahmadi

Desai Cover : CRR

Di Terbitkan Oleh :

PT Cahaya Rahmat Rahmani

JL Kemuning Baru Komplek Ar Rahman

cahayarahmatrahmani@gmail.com

Website : www.cahayarahmatrahmani.store

Cetakan Pertama, Juli 2022

ISBN : 978-623-88090-5-9

IKAPI : 064/SUT/2022

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur penulis sampaikan kepada Allah SWT Yang Maha Pemurah, yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga dapat menyelesaikan buku ini dengan baik. Shalawat dan salam dipersembahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang membawa risalah Islam sebagai pedoman hidup untuk meraih keselamatan hidup di dunia dan juga di akhirat kelak.

Alhamdulillah, atas izin Allah SWT, penulis dapat menyelesaikan buku ini. Sebuah buku yang disusun sebagai pengantar bagi mahasiswa dalam memahami mata kuliah Persamaan Diferensial. Buku ini berjudul *Persamaan Diferensial Elementer.*

Penulis menyadari pada pembuatan buku ini mungkin masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, untuk itu diharapkan kritik dan saran dari para pembaca. Dan harapan penulis buku ini dapat dijadikan referensi belajar akademik di perguruan tinggi. Semoga buku ini bermanfat saya ucapkan terimakasih.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Medan, Juni 2022
Penulis

Lisa Dwi Afri

DAFTAR ISI

BAB I
KONSEP DASAR
PERSAMAAN DIFERENSIAL

Studi mengenai persamaan diferensial dimulai segera setelah penemuan Kalkulus dan Integral. Pada tahun 1676 Newton menyelesaikan sebuah persamaan diferensial dengan menggunakan deret tak hingga, sebelas tahun setelah penemuannya tentang bentuk fluksional dari kalkulus diferensial pada tahun 1665. Newton tidak mempublikasikan hal tersebut sampai dengan tahun 1693, pada saat Leibniz menghasilkan rumusan persamaan diferensial yang pertama.

Perkembangan persamaan diferensial sangat pesat dalam tahun-tahun berikutnya. Dalam tahun 1694-1697 John Bernoulli menjelaskan “Metode Pemisahan Variabel” dan membuktikan bahwa persamaan diferensial homogen orde satu dapat direduksi menjadi bentuk persamaan diferensial dengan variabel-variabel yang dapat dipisahkan. John Bernoulli dan saudaranya Jacob Bernoulli (yang menemukan Persamaan Diferensial Bernoulli) berhasil menyederhanakan sejumlah besar persamaan diferensia menjadi bentuk yang lebih sederhana yang dapat mereka selesaikan. Faktor integrasi yang kemungkinan ditemukan secara terpisah oleh Euler (1734) dan Fontaine dan Clairaut melalui beberapa pengkajian yang mereka lakukan terhadap penemuan Leibniz. Penyelesaian tunggal yang diperkenalkan oleh Leibniz (1694) dan Brook Taylor (1715) secara umum berkaitan dengan nama Clairaut (1734). Interpretasi geometris ditemukan oleh Lagrange (1774) namun teori dalam bentuk diferensial tidak dijelaskansampai tahun 1872 ketika Cayley dan M.J.M. Hill (1888) merumuskan diferensial geometri.(Nuryadi, 2018)

Metode pertama yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde kedua atau yang lebih tinggi dengan koefisien konstan, dirumuskan oleh Euler. D'Alembert merumuskan penyelesaian persamaan diferensial untuk kasus dimana persamaan bantuan mempunyai akar-akar yang sama. Beberapa metode simbolis untuk menentukan integral khusus belum dapat dijelaskan sampai sekitar seratus tahun kemudian, setelah Lobatto (1837) dan Boole (1859) merumuskan hal tersebut.

Persamaan diferensial parsial diketahui pertama kali muncul dalam persoalan getaran pada tali. Persamaan ini, merupakan persamaan diferensial orde kedua, telah dibicarakan oleh Euler dan D'Alembert dalam tahun 1747. Lagrange menyempurnakan penyelesaian dari persamaan tersebut kemudian menggunakannya juga untuk menelaah persamaan diferensial parsial orde pertama dalam tahun 1772 dan 1785. Lagrange berhasil merumuskan bentuk umum integral dari persamaan diferensial linier dan mengklasifikasikan bentuk-bentuk integral yang berbeda jika persamaan diferensialnya tidak linier.

Teori-teori yang berhubungan dengan persamaan diferensial belum berhenti sampai di situ. Perkembangan selanjutnya masih terus diupayakan oleh Chrystal (1892) dan Hill (1917). Metode-metode lain yang diterapkan untuk menjelaskan persamaan diferensial parsial orde pertama, diberikan oleh Charpit (1784) dan Jacobi (1836). Penelahaan yang paling penting untuk persamaan dengan orde yang lebih tinggi, dilakukan oleh Laplace (1773), Monge (1784), Ampere (1814), dan Darboux (1870).Sejak tahun 1800, subjek persamaan diferensial dalam konteks aslinya (secara matematis), yaitu penyelesaian dalam bentuk yang hanya mengandung sejumlah berhingga fungsi (atau integral) yang diketahui, kurang lebih sama dengan dengan yang kita jumpai sampai abad ini. Tahun 1823, Cauchy membuktikan bahwa deret tak hingga yang didapatkan dari sebuah persamaan diferensial, merupakan suatu deret yang konvergen sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk sebuah fungsi yang memenuhi persaman (diferensial) tersebut.

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat derivative (turunan) satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variable bebas suatu fungsi .persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivative dari f(x) (Sugiyarto, 2015). Persamaan diferensial merupakan cabang ilmu dari matematika modern. Untuk dapat menguasai konsep, solusi dan aplikasi persamaan diferensial ini, ada beberapa konsep dasar yang harus dipahami. Tujuan dari bab ini adalah menjelaskan terkait beberapa istilah pada persamaan diferensial dan konsep dasar tersebut.

1.1 Persamaan Diferensial dan Klasifikasinya

Persamaan Diferensial adalah satu persamaan yang terdapat turunan atau diferensial satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas tersebut (Sugiyarto, 2015). Misalkan $f(x)$ mendefinisikan sebuah fungsi dari x pada suatu interval $I: a \leq x \leq b$. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivatif dari $f(x)$. (Darmawijoyo, 2011)

Persamaan diferensial yang akan kita pelajari dalam bagian ini adalah persamaan diferensial yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$Q(x,y)\frac{dy}{dx} + P(x,y) = 0$$

Seperti biasanya variabel y akan dinamakan variabel terikat dan variabel x dinamakan variabel bebas. Pernyataan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk lain dengan mengalikannya dengan dx dikedua ruas persamaan, menghasilkan

$$Q(x,y)dy + P(x,y)dx = 0$$

Dalam banyak buku teks, suku dy dan dx sering dinamakan **diferensial**. (Darmawijoyo, 2011)

Satu persamaan yang terdapat turunan atau diferensial satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut **Persamaan Diferensial** (Sugiyarto, 2015). Contoh-contoh persamaan diferensial yang dapat dijadikan ke bentuk diatas adalah :

1. $\frac{dy}{dx} = 2xy + \sin x$
2. $y' = \ln 2xy + \tan x$
3. $(x - \cos x + y)dx + (2xy + \sin x)dy = 0$
4. $e^x \cos y\, dx + 2x \sin x\, dy = 0$

Definisi 1.1

Persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial (Ross, 1984)

Contoh 1.1

Berikut contoh persamaan yang merupakan persamaan diferensial :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \qquad (1.1)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t, \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v, \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1.4)$$

Berdasarkan contoh 1.1 jelas bahwa berbagai variabel dan turunan yang terlibat dalam persamaan diferensial dapat terjadi dalam berbagai cara atau bentuk. Oleh karena itu perlu dilakukan klasifikasi dari persamaan diferensial tersebut. Untuk tahap awal, dimulai dengan pengklasifikasian berdasarkan satu atau lebih variabel bebas yang terlibat.

Definisi 1.2
Persamaan diferensial yang melibatkan turunan biasa dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa (Ross, 1984).

Contoh 1.2
Persamaan (1.1) dan (1.2) adalah persamaan diferensial biasa.
Pada persamaan 1.1, variabel x satu-satunya variabel bebas yang terlibat dalam persamaan diferensial, dan y adalah variabel terikat.
Pada persamaan 1.2 variabel bebasnya adalah t, sedangkan x variabel terikat.

Definisi 1.3
Persamaan diferensial yang melibatkan turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial (Ross, 1984).
Contoh 1.3
Persamaan (1.3) dan (1.4) adalah persamaan diferensial parsial. Pada persamaan (1.3) variabel s dan t adalah variabel bebas dan v adalah variabel

terikat. Pada persamaan (1.4) terdapat variabel x, y, z sebagai variabel bebas dan u sebagai variabel terikat.

Selanjutnya pengklasifikasian persamaan diferensial, baik biasa maupun parsial didasarkan pada urutan turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut. Untuk itu, kita pahami definisi berikut.

Definisi 1.4
Turunan tertinggi yang terlibat dalam persamaan diferensial disebut orde persamaan diferensial

Orde adalah turunan tertinggi yang muncul didalam persamaan diferensial (Afri, 2019).

Contoh 1.4
Persamaan diferensial biasa (1.1) adalah berorde dua, karena turunan tertinggi yang terlibat pada persamaan tersebut adalah turunan kedua. Persamaan (1.2) adalah persamaan diferensial biasa berorde empat. Persamaan diferensial parsial (1.3) dan (1.4) secara berurut merupakan persamaan diferensial berorde satu dan dua.

Berikut ini adalah contoh-contoh dari persamaan diferensial:
$\frac{dy}{dx} + y = 0, y' - xy = 0$ (orde satu)
$\frac{d^2y}{dx^2} + y + x^2 + 5 = 0, y'' - xy' + e^x = 0$(orde dua)
$x\frac{d^3y}{dx^3} + x^2 + 5 = xy, y''' - x(y')^2 + \ln(x) = 0$(orde tiga).
(Darmawijoyo, 2011)

Kemudian, persamaan diferensial juga dibedakan dari derajatnya. Derajat adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi suatu persamaan diferensial. Berikut ini contoh dari derajat persamaan diferensial:

$x\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$ Derajat 1

$xy\frac{d^2y}{dx^2} - y^2 \sin x = 0$ Derajat 2

$\frac{d^3y}{dx^3} - y\frac{dy}{dx} + e^{4x} = 0$ Derajat 3

Melanjutkan pembahasan tentang persamaan diferensial biasa, sekarang kita bahas konsep penting linearitas yang diterapkan pada persamaan tersebut. Konsep ini akan memungkinkan kita untuk mengklasifikasikan persamaan ini lebih jauh.

Definisi 1.5

Persamaan diferensial biasa linier orde n, dengan variabel terikat y dan variabel bebas x, adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ ...+ a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x),$$

Dimana a_0 tidak sama dengan nol.

Perhatikan bahwa :

(1) variabel terikat y dan turunannya merupakan derajat pertama,

(2) tidak ada suku yang mengandung variabel y turunannya atau suku yang mengandung beberapa turunan, dan

(3) tidak ada fungsi transendental dari y dan/ atau turunannya

(Ross, 1984)

Contoh 1.5

Berikut adalah persamaan diferensial biasa yang linear dimana y sebagai variabel terikat. Perhatikan bahwa y dan berbagai turunannya yang muncul berderajat pertama dan tidak ada variabel y dan atau beberapa turunannya muncul bersama-sama dalam satu suku.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0, \qquad (1.5)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = xe^x \qquad (1.6)$$

Definisi 1.6

Persaman diferensial biasa tidak linear adalah persamaan diferensial biasa yang memenuhi bentuk umum dari persamaan diferensial linear.(Ross, 1984)

Contoh 1.6

Berikut adalah contoh persamaan diferensial biasa tidak linear:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0, \qquad (1.7)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0, \qquad (1.8)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0. \qquad (1.9)$$

Persamaan (1.7) adalah persamaan tidak linear karena terdapat variabel terikat y yang berderajat dua pada $6y^2$. Persamaan (1.8) juga tidak linear karena terdapat suku $5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ dimana turunan pertamanya berderajat tiga. Terakhir, persamaan (1.9) merupakan persamaan tidak linear karena terdapat suku $5y\frac{dy}{dx}$ dimana suku tersebut melibatkan variabel y dan turunannya secara bersamaan.

Persamaan diferensial biasa linier lebih lanjut diklasifikasikan menurut sifat koefisien dari variabel terikat dan turunannya. Misalnya persamaan (1.5) dikatakan linier dengan koefisien konstan, sedangkan persamaan (1.6) linier dengan koefisien variabel.

LATIHAN 1

Klasifikasikanlah setiap persamaan diferensial berikut, mana yang merupakan persamaan diferensial biasa atau parsial; nyatakan orde dan derajat setiap persamaan; dan tentukan apakah persamaan linier atau nonlinier.

1. $\frac{dy}{dx} + x^2y = xe^x$
2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = \sin x$
3. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = 0$
4. $x^2dy + y^2dx = 0$
5. $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$
6. $\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} + u = 0$
7. $\frac{d^2y}{dx^2} + y\, sinx = 0$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\sin y = 0$

9. $\frac{d^6x}{dt^6} + \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right) + x = t$

10. $\left(\frac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\frac{d^2r}{ds^2} + 1}$

1.2 Solusi Persamaan Diferensial

Kita akan membahas konsep dari solusi persamaan diferensial biasa orde-n. Solusi dari suatu persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat variabel-variabel dari persamaan diferensial dan **memenuhi** persamaan diferensial yang diberikan. Jika $f(x)$ merupakan solusi dari persamaan diferensial, maka $f(x)$ dan turunan-turunannya akan memenuhi persamaan diferensial tersebut. Dalam hal ini $f(x)$ disebut integral atau primitive dari persamaan diferensial itu.

Solusi dari persamaan diferensial dalam fungsi y yang tidak diketahui dan variabel x pada interval f adalah fungsi y(x) yang memiliki persamaan diferensial secara identik untuk semua x dalam f (Bronson & Costa, 2006).

1.2.1 Solusi eksplisit dan implisit

Ada dua bentuk penulisan solusi persamaan diferensial biasa orde-n yaitu

1. Solusi eksplisit yaitu solusi persamaan diferensial biasa dengan fungsi yang mana variabel bebas dan varibel tak bebas dapat dibedakan dengan jelas.
   Solusi eksplisiit dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$

Definisi

Misalkan $y = f(x)$ mendefinisikan y sebagai fungsi dari x pada interval $I : a < x < b.$ dikatakan bahwa fungsi $f(x)$ adalah *penyelesaian eksplisit,* atau *penyelesaian* saja, dari persamaan diferensial jika $f(x)$ memenuhi persamaan untuk setiap x dalam interval $I,$ yakni jika kita substitusikan y dengan $f(x),$ y' dengan $f'(x),$ y'' dengan $f''(x),$ dan seterusnya, persamaan yang di dapat adalah identitas dalam $x.$

Dalam simbol matematika definisi di atas bahwa $f(x)$ merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial, jika

$$F(x, y, y', \ldots, y'') = 0$$
$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^n(x) = 0$$

untuk setiap x dalam I (Darmawijoyo, 2011).

Contoh

1) Apakah fungsi eksplisit $f(x) = x^2$ merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial $xy' = 2y, \forall x$?

Penyelesaian

Kita harus membuktikan apakah fungsi $f(x) = x^2$ memenuhi persamaan diferensial $xy' = 2y$.

$y = f(x) = x^2$

$y' = 2x$

Substitusikan y dan y' ke persamaan diferensial

$xy' = 2y$

$x(2x) = 2(x^2)$

$2x^2 = 2x^2$ (memenuhi)

Jadi fungsi $f(x) = x^2$ merupakan solusi dari persamaan diferensial $xy' = 2y$.

2) Ujilah bahwa fungsi yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \ln(x) + c, \qquad x > 0 \tag{1.3}$$

adalah penyelesaian dari persamaan diferensial

$$y' = \frac{1}{x} \tag{1.4}$$

Penyelesaian

bahwa persamaan (1.4) terdefinisi untuk $x > 0$. Jelaslah bahwa dengan mendeferensialkan (1.3) dan menstubstitusikannya ke (1.4), persamaan yang diperoleh adalah persamaan identitas untuk semua $x > 0$.

2. Solusi implisit yaitu solusi persamaan diferensial biasa dengan fungsi yang mana variabel bebas dengan variabel tak bebas tidak dapat dibedakan secara jelas. Solusi implisit dinyatakan dalam bentuk $f(x, y) = 0$

   Jika fungsi implisit $g(x,y) = 0$ memenuhi suatu persamaan diferensial pada interval $I: a < x < b$, maka relasi $g(x,y) = 0$ dinamakan *penyelesaian implisit* dari persamaan diferensial itu.

   Definisi

   Suatu relasi $g(x,y) = 0$ dinamakan penyelesaian implisit dari persamaan diferensial $F(x, y, y', c \ldots, y'') = 0$ pada interval $I: a < x < b$, jika

- fungsi itu mendefinisikan fungsi implisit pada interval I, yaitu jika ada fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada I sedemikian hingga $g(x, f(x)) = 0$ untuk setiap x dalam I, dan jika
- $f(x)$ memenuhi persamaan diferensial tersebut, yaitu jika $F(x, f(x), f'(x), c\ldots, f^n(x)) = 0$ untuk setiap x dalam I (Darmawijoyo, 2011).

Contoh

1. Ujilah bahwa

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

adalah penyelesaian implisit dari persamaan diferensial

$$F(x, y, y') = yy' + x = 0$$

pada interval I: $-5 < x < 5$

Penyelesaian

pertama-tama lihat bahwa fungsi $g(x, y)$ mendefinisikan $y = f(x)$ sebagai fungsi implisit dari x pada interval I. Jika dipilih fungsi eksplisitnya adalah

$$y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

maka akan kita peroleh persamaan

$$F(x, f(x), f'(x)) = \sqrt{25 - x^2}\left(-\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}\right) + x = 0$$

karena ruas kiri dari (1.10) adalah no; berarti persamaan ini merupakan identitas dalam x. Oleh karenanya, kedua persyaratan dalam definisi di atas terpenuhi. Maka kesimpulannya bahwa fungsi $g(x, y)$ adalah penyelesaian implisit dari persamaan diferensial pada interval I.

2. Apakah suatu fungsi implisit yag didefinisikan sebagai $x^2 + y^2 - 1 = 0$ merupakan solusi dari persamaan diferensial $yy' = -x$ pada $[a, b]$?

Penyelesaian

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Kita turunkan persamaan tersebut, sehingga diperoleh

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x \; atau \; dapat \; ditulis$$

$$yy' = -x \ (memenuhi)$$

Sehingga fungsi $x^2 + y^2 - 1 = 0$ merupakan solusi dari persamaan diferensial $yy' = -x$.

1.2.2 Solusi Umum dan Solusi Khusus

Solusi umum dari persamaan differensial order -n adalah solusi (baik dinyatakan secara eksplisit maupun implisit) yang memuat semua solusi yang mungkin pada suatu interval. Pada umumnya solusi umum persamaan diferensial biasa orde-n memuat n konstanta sebarang yang bebas liniear. Jika dari solusi umum itu, semua konstanta yang terdapat di dalamnya
masing- masing diberi nilai tertentu, maka akan diperoleh solusi yang disebut solusi khusus persamaan differensial. Jadi solusi khusus persamaan diferensial bebas dari sebarang konstan, artinya solusi tersebut tidak mengandung konstanta variable karena terdapat syarat awal pada persamaan diferensial.

Solusi dari persamaan diferensial dalam fungsi y yang tidak diketahui dan variabel independen x pada interval I , adalah fungsi $y(x)$ yang memenuhi persamaan diferensial secara identik untuk semua x dalam I.

Contoh

1. Apakah $y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$, dimana C_1 dan C_2 adalah konstanta sembarpang, merupakan solus dari $y'' + 4y = 0$?

   Penyelesaian
   Dengan mendiferensialkan y, kita akan memperoleh
   $y' = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x$ dan $y'' = -4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x$
   Sehingga

$$y'' + 4y = (-4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x) + 4(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$$
$$= (-4C_1 + 4C_1) \sin 2x + (-4C_1 + 4C_1) \cos 2x = 0$$

Jadi, $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ memenuhi persamaan differensial yang dimaksud untuk semua nilai x sehingga merupakan solusi pada interval $(-\infty, \infty)$

2. Tentukan apakah $y = x^2 - 1$ merupakan solusi dari $(y')^4 + y^2 = -1$

Penyelesaian
Perhatikan bahwa sisi kiri dari persamaan diferensial tersebut harus non-negatif untuk setiap fungsi yang real $y(x)$ dan setiap x, karena merupakan penjumlahan suku-suku yang dipangkatkan dua dan empat, sedangkan sisi kanan dari persamaan tersebut adalah negatif. Karena tidak ada fungsi $y(x)$ yang memenuhi persamaan ini, persamaan diferensial yang diberikan di sini *tidak memiliki solusi*.

Kita lihat bahwa beberapa persamaan diferensial memiliki solusi dengan jumlah yang tidak terbatas (Contoh I), sedangkan persamaan-persamaan lain tidak memiliki solusi sama sekali (Contoh II). Terdapat pula kemungkinan bahwa suatu persamaan diferensial hanya memiliki satu solusi. Misalnya saja $(y')^4 + y^2 = 0$, dengan alasan-alasan yang sama seperti di dalam Contoh II hanya memiliki satu solusi $y \equiv 0$

Sebuah *solusi khusus* dari persamaan diferensial adalah satu solusi. *Persamaan umum* dari persamaan diferensial merupakan kumpulan dari semua solusi. Dapat ditunjukkan bahwa solusi umum untuk persamaan diferensial dalam Contoh I adalah $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$. Artinya, setiap solusi tertentu dari persamaan diferensial tersebut memiliki bentuk umum ini. Beberapa solusi tertentu misalnya:
(a) $y = 5 \sin 2x - 3 \cos 2x$ (pilih $C_1 = 5$ dan $C_2 = -3$),

$(b)\ y = \sin 2x$(pilih $C_1 = 1$ dan $C_2 = 0$), dan
$(c)\ y \equiv 0$(pilih $C_1 = 0$ dan $C_2 = 0$).

Solusi umum dari suatu persamaan diferensial tidak selalu dapat diekspresikan melalui satu formula tunggal. Sebagai contoh perhatikan diferensial $y' + y^2 = 0$, yang memiliki dua solusi tertentu $y = \frac{1}{x}$ dan $y \equiv 0$.

LATIHAN 2

1. Buktikanlah fungsi yang diberikan adalah solusi persamaan diferensial!
   a. $xy'' - (x+1)y' + y = 0; y(x) = e^x$
   b. $ty' - y = t^2; y(\quad) = 3t + t^2$
   c. $y'' + 4y = 0; y(x) = \cos(2x)$

2. Tentukanlah pasangan antara fungsi pada kolom I dengan kolom II berikut, dimana hubungannya adalah fungsi pada kolom I merupakan solusi dari persamaan diferensial pada kolom II

I	II
$f(x) = x\_3e^{-x}$	$\frac{dy}{dx} + y = x + 1$
$f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$	$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$
$f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$	$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$

3. Tunjukkan bahwa $x^3 + 3xy^2 = 1$ adalah solusi implisit dari persamaan diferensial $2xy\frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$ pada interval $0 < x < 1$.
4. Tunjukkan bahwa setiap fungsi yang didefinisikan
$$f(x) = 2 + ce^{-2x^2}$$
dimana c merupakan suatu konstanta, adalah solusi dari persamaan diferensial
$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$$

1.3 Masalah Nilai Awal dan Nilai Batas

Dalam kebanyakan permasalahan, penyelesaian unik bagi satu masalah yang diberikan yang kemudian disebut satu penyelesaian khusus, adalah diperoleh daripada satu penyelesaian umum mengikuti satu **syarat awal** $y(x_0) = y_0$ dengan diberikan nilai $x_0\, dan\, y_0$ yang digunakan untuk menentukan skalar hasil dari penyelesaian persamaan diferensial biasa tadi.

Syarat awal adalah syarat yang dikhususkan pada satu titik yang diberikan. Bilangan syarat awal tak bebeas pada peringkat persamaan diferensial. Satu persamaan diferensial biasa dengan satu syarat awal disebut masalah nilai awal (MNA). Jadi jika secara jelas satu persamaan diferensial biasa diberikan oleh $y' = f(x, y)$, maka masalah nilai awal diberikan oleh:(Sugiyarto, 2015)

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

Contoh masalah nilai awal seperti berikut.

1. Contoh masalah nilai awal adalah
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 7y = \sin x$$
Dengan syarat awal $y(0) = 0, \frac{dy(0)}{dx} = y'(0) = 1$
2. Diketahui persamaan diferensial
$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = \sin x$$
Dengan syarat awal $y(0) = 0, \frac{dy(0)}{dx} = y'(0) = 1, \frac{d^2y(0)}{dx^2} = 2$

Syarat batas adalah syarat yang dikhususkan pada satu atau titik-titik yang berbeda. Bilangan syarat batas juga tak bebaspada peringkat persamaan diferensial. Masalah nilai batas (MNS) adalah satu persamaan diferensial dengan syarat batas (Sugiyarto, 2015).

Contoh

1. Diketahui persamaan diferensial
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + y = \sin x$$
Dengan syarat batas $y(0) = 1, y(1) = 2$

2. Diketahui persamaan diferensial
$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx} + y = \sin x$$
Dengan syarat batas $y(0) = 0, y(1) = 0, y(2) = -1$

LATIHAN 3

1. Tentukanlah nilai c sehingga $y(x) = c(1 - x^2)$memenuhi kondisi-kondisi awal yang diberikan:
   (a)y(0)=1 (b) y(1)=0

2. Tentukan nilai c_1 *dan* c_2 sehingga:
   a. $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ memenuhi kondisi awal y(0)=1 dan y'(0)=2.
   b. $y(x) = c_1 x + c_2 + x^2 - 1$ memenuhi kondisi awal y(1)=1 dan y'(1)=2

3. Tunjukkan bahwa $y = 4e^{2x} + 2e^{-3x}$ adalah solusi dari persamaan diferensial
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0,$$
$$y(0) = 6, y'(0) = 2$$

DAFTAR PUSTAKA

Afri, L. D. (2019). *Diktat Persamaan Diferensial Elementer* (Reflina & Lusi Eka Afri (eds.)). Universitas Islam Negeri Sumatera Utara.

Boyce, W,E. & Diprima,R, C. (1997). *Elementary Differential Equation and Boudaru Value Problema*. John Willey & Sons. Lnc.

Bronson, R., & Costa, G. B. (2006). *Schaum's Outlines Differential Equations* (Third). The McGraw-Hill Companies Inc.

Dafik. (1999). *Persamaan Difrensial Biasa*. Universitas Negeri Jember.

Darmawijoyo. (2011). *Persamaan Diferensial Biasa□:Suatu Pengantar*. Erlangga.

Giornado, W. (1994). *Differential Equation A Modelling approach*. Addition Wesley Publishing Company.

H , William, dkk. (2006). *Elektromagnetika*. Erlangga.

Hariyanto. (1992). *Persamaan Differensial Biasa Modul 1-9* (cetakan 1). Universitas Terbuka.

Heris, H. (2002). *Persamaan Differensial*. CV PUSTAKA SETIA.

King, A.C, J. Bilingham, and S. R. O. (2003). *Differential Equations: Linier, Ordinary, Partial*. Cambridge University Press.

Kreyszig, E. (1988). *Matematika Teknik Lanjutan*. Gramedia.

Kusmaryanto, S. (2013). *Matematika Teknik I*. UB Press.

Lestari, D. (2013). *Diktat Persamaan Diferensial*. Universitas Negeri Yogyakarta.

Nababan, S. (2008). *Persamaan Difierensial Biasa*. Universitas Terbuka.

Nuryadi. (2018). *Persamaan Diferensial Elementer*. Penebar Media Pustaka.
Riogilang. (2020). *Persamaan Diferensial*. Binacipta.
Ross, S. (1984). *Differential Equation*. John Willey & Sons. Lnc.
Santoso, W. (1988). *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern*. Erlangga.
SM. Nababan. (2005). *Persamaan Diferensial Biasa* (kesatu). Universitas Terbuka.
Sugiyarto. (2015). *Persamaan Diferensial*. Binafsi Publisher.
Waluya, B. (2006). *Buku Ajar Persamaan Diferensial*. UNNES.
Waluya St, B. (2006). *Buku Ajar Persamaan Diferensial. Semarang*. Universitas Negeri Semarang.