Dr. Ismail Husein, M. Si

ALJABAR LINIER DASAR DAN PENERAPAN MATLAB

Dr. Ismail Husein, M. Si (Ed.)

Penerbit
CV. MANHAJI

ALJABAR LINIER DASAR
DAN PENERAPAN MATLAB

Penulis :
Dr. Ismail Husein, M. Si

Editor :
Dr. Ismail Husein, M. Si

Penata Letak & Perancang Sampul:
Muhammad Hakiki, S.Kom

Diterbitkan:
CV. Manhaji Medan
e-mail: cvmanhaji@yahoo.com

Cetakan Pertama : Agustus 2021

ISBN: 978-623-6763-28-5

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur dengan mengucapkan Alhamdulillah yang telah memerintahkan manusia untuk membaca, sesuai dengan firmannya surah Al-‘alaq (1-4). *Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan. Dia Telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha pemurah. Yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam.* Membaca merupakan suatu perintah yang pertama kali diturunkan kepada Nabi Muhammad SAW. Artinya di satu sisi bahwa dimana pun, kapanpun kita dituntut membaca untuk mendapatkan pengetahuan dalam menemukan Cahaya-Nya demi mendapatkan petunjuk dari-Nya.

Keselamatan dan salam semoga tetap tercurah kepada tauladan kita yang memberikan banyak pengaruh dalam kehidupan kita. Bahwa hanya dengan mengaktualisasikan cara hidup Rasul dalam setiap langkah kita, dalam setiap pikiran, maka setiap kita akan menjadi rahmat kapanpun dan dimanapun.

Buku ini bertujuan membahas secara sederhana mengenai Aljabar Linier Dasar dan Penerapan Matlab. Buku di sajikan dengan bahasa yang mudah dipahami oleh mahasiswa, sehingga mahasiswa diharapkan lebih mampu dalam berakselerasi dalam mengerjakan soal. Buku ini juga memberikan pengerjaan materi Aljabar Linier Dasar dan Penerapan Matlab, yang hal tersebut sangat jarang disajikan dalam buku lain yang berkenaan dengan Aljabar.

Buku ini juga menyajikan beberapa soal atau latihan bagi siswa disetiap akhir bab. Dengan adanya penyajian dengan aplikasi

MATLAB tersebut mahasiswa bisa membuktikan beberapa permasalahan dalam pengerjaan soal dan diharapkan mahasiswa lebih bisa mendapat pengalaman sehingga bisa membuat algoritma dalam menyelesaikan masalah dalam Aljabar Linier Dasar.

Terimakasih saya ucapkan kepada orangtua saya yang begitu mendukung kegiatan akademis sehingga dengan adanya buku ini mungkin bisa membayar tetesan keringat yang selama ini telah berjuang untuk keluarga. Terima kasih juga buat guru dan dosen saya yang begitu besar memotivasi saya untuk menjadi orang yang berguna bagi umat dan bangsa.

Pada akhirnya saya pribadi memohon ampun kepada Allah SWT dari segala kehilafan yang sangat mungkin terselip dalam buku ini. Semua kreativitas yang ada dalam buku ini hanyalah *zhann* (dugaaan) berdasarkan sumber-sumber yang ada. Kebenarannya hanya Allah yang tahu. Semoga buku atau wacana mengenai Aljabar linierDasar terus berkembang dan mengikuti perkembangan zaman yang semakin canggih dan modern.

Penulis,

Dr. Ismail Husein, M. Si

DAFTAR ISI

Bab 1

ALJABAR

Matriks telah dipelajari di tingkat SMA baik jurusan IPA maupun IPS. Matriks yang dipelajari meliputi jenis-jenis matriks, operasi aljabar matriks, transpose matriks, determinan dan invers matriks yang berukuran 2×2 dan 3×3, persamaan matriks, dan penggunaan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dua dan tiga variabel. Pada bab ini akan diulas kembali tentang jenis-jenis matriks, operasi aljabar matriks, transpose matriks, determinan dan invers matriks, ditambah dengan trace matriks, dan jenis-jenis matriks persegi. Sedangkan penyelesaian sistem persamaan linier akan dibahas di Bab 2.

1.1. Pengertian Aljabar

Sebelum membahas lebih jauh tentang matriks, pembaca perlu mengetahui kegunaan dari matriks. Salah satu kegunaan matriks adalah untuk menyimpan data dalam jumlah besar. Sebuah data pada tabel yang berukuran $m \times n$ tanpa adanya garis-garis pembatas antar baris dan antar kolom merupakan sebuah matriks. Perhatikan tabel berikut ini.

Tabel 1.1. Uang yang dikeluarkan dalam 4 hari

Nama	Pengeluaran (dalam ribuan rupiah)			
	Hari I	Hari II	Hari III	Hari IV
Rudi	10	8	7	6
Dedi	12	5	20	10
Rika	5	9	15	13

Dengan menghilangkan garis-garis pembatas dan huruf-huruf yang ada pada Tabel 1.1, akan diperoleh sebuah matriks B yaitu

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 7 & 6 \\ 12 & 5 & 20 & 10 \\ 5 & 9 & 15 & 13 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini diberikan definisi matriks secara umum agar pembaca dapat memahami.

Definisi 1.1. *Matriks adalah kumpulan dari angka-angka (elemen atau entri yang berupa bilangan real atau kompleks) yang disusun pada* m *baris dan* n *kolom sehingga membentuk sebuah persegi panjang yang berukuran* $m \times n$ *yang diapit oleh kurung siku.*

Berdasarkan Definisi 1.1, matriks B yang merupakan representasi dari Tabel 1.1 terdiri dari 3 baris dan 4 kolom. Sehingga matriks B berukuran 3×4. Ukuran dalam matriks sering disebut sebagai **ordo**. Jadi matriks B dapat dikatakan berordo 3×4.

Secara umum sebuah matriks $A = [a_{ij}]$ (entrinya a_{ij}) yang berukuran $m \times n$ dengan $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Entri a_{11} menyatakan entri pada baris ke-1 dan kolom ke-1, entri a_{2n} menyatakan entri pada baris ke-2 dan kolom ke-n. Sehingga bentuk a_{ij} menyatakan entri pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Sebuah matriks A dikatakan **matriks persegi** (bujursangkar) jika pada (1.1) harga $m = n$. Sehingga matriks A adalah matriks persegi yang berukuran $n \times n$. Jika pada (1.1) harga $m = 1$ dan $n \geq 2$, maka matriks A disebut sebagai **matriks baris** (vektor baris) yang berukuran $1 \times n$. Jika pada (1.1) harga $n = 1$ dan $m \geq 2$, maka matriks A disebut sebagai **matriks kolom** (vektor kolom) yang berukuran $m \times 1$.

Contoh 1.1. Matriks $A, B,$ dan C berikut berturut-turut merupakan matriks persegi, matriks baris dan matriks kolom.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Sebuah matriks disebut sebagai **matriks nol**, jika seluruh entri pada matriks tersebut adalah nol dan biasanya dinotasikan dengan nol. Misalkan matriks nol berukuran 2×3 yaitu $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dua buah matriks A dan B dikatakan **sama**, ditulis $A = B$, jika kedua matriks ini mempunyai ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian sama nilainya.

Contoh 1.2. Tentukan nilai $a, b,$ dan c sedemikian rupa sehingga

$$\begin{bmatrix} a+b & b-3c \\ 2a & 4a+2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan definisi kesamaan matriks, maka keempat entri yang bersesuaian haruslah sama. Dengan demikian :

$$a + b = 3 \qquad b - 3c = -7 \qquad 2a = 2 \qquad 4a + 2c = 10.$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan di atas akan diperoleh $a = 1, b = 2,$ dan $c = 3$. $\square$

Latihan 1.1.

1. Berikanlah 5 buah contoh matriks untuk masing-masing matriks yang berukuran 3×3, 4×5, 5×5, 5×1, dan 1×6.

2. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 6 & 0 & 9 \\ 11 & 0 & 12 & 4 & 15 \\ 9 & 2 & 10 & -4 & 6 \\ -13 & 4 & 7 & 8 & 16 \\ 10 & 14 & 8 & -9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tentukanlah:

(a) ukuran matriks A.

(b) entri a_{32} dan a_{43}.

(c) nilai $\sum_{i=1}^{5} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{55}$

(d) nilai $\prod_{i=1}^{5} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times a_{44} \times a_{55}$

3. Diketahui matriks

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Perlihatkan bahwa

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} b_{ij} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} b_{ij}.$$

4. Untuk sebarang skalar k dan sebuah matriks A yang berukuran $m \times n$, dimana $m, n \geq 3$, buktikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$$

dan

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} k.a_{ij} = k\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}.$$

5. Tentukan nilai a, b dan c sedemikian hingga

(a) $\begin{bmatrix} 2-a & 7-2b \\ a-b+c & c-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -10 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} a+b & b-c & a-1 \\ 5a-2c & 2 & 2b-c \\ a+b+c & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2c-3b \\ -1 & 2c-4 & 1 \\ 6 & 5a-7 & a+b-2c \end{bmatrix}$

1.2. Operasi Aljabar Matriks

1.2.1. Penjumlahan matriks

Penjumlahan dua buah matriks merupakan operasi dasar yang pertama sekali harus diketahui pembaca. Dua buah matriks dapat dijumlahkan ataupun dikurangkan bilamana kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama. Berikut ini diberikan definisi tentang penjumlahan dua buah matriks.

Definisi 1.2. *Andaikan A dan B adalah dua buah matriks yang mempunyai ukuran yang sama. Jumlah dari A dan B, ditulis A+B, adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri yang bersesuaian dari kedua matriks tersebut. Apabila tidak mempunyai ukuran yang sama, maka matriks-matriks tersebut tidak dapat dijumlahkan (tak terdefinisi).*

Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah dua buah matriks yang berukuran $m \times n$, maka

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Pada pengurangan dua buah matriks A dan B, nilai dari $A - B = A + (-B)$. Untuk lebih memahami tentang penjumlahan dua buah matriks atau lebih, perhatikan Contoh 1.3.

Contoh 1.3. Bila diketahui matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & -8 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah:

(a) $A + B$
(b) $A + C$
(c) $B + C$
(d) $C - A$

Untuk menjawab (a) lihat terlebih dahulu ukuran matriks A yaitu 3×3, dan ukuran matriks B yaitu 2×3. Ukuran matriks A dan B tidaklah sama. Berdasarkan Definisi 1.2, $A + B$ tidak dapat dijumlahkan (tak terdefinisi), begitu pula untuk persoalan (c). Sekarang untuk persoalan (b) dan (d),

(b) $$A + C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+3 & -1+4 & 2+5 \\ 5+2 & 1+1 & 4+4 \\ 10+(-2) & 7+4 & -8+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 7 & 2 & 8 \\ 8 & 11 & -11 \end{bmatrix}.$$

(d) $C - A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & -8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-3 & 4-(-1) & 5-2 \\ 2-5 & 1-1 & 4-4 \\ -2-10 & 4-7 & -3-(-8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -12 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$ □

1.2.2. Perkalian matriks

Pada bagian ini, pertama sekali akan kita bahas tentang perkalian skalar matriks. Pengertian perkalian skalar matriks secara sederhana adalah perkalian antara bilangan skalar dengan sebuah matriks. Untuk lebih jelasnya, perhatikan Definisi 1.3 berikut ini.

Definisi 1.3. *Jika terdapat matriks* $A = [a_{ij}]$ *dan suatu bilangan skalar* k. *Perkalian* $k.A$ *merupakan perkalian antara* k *dengan setiap entri matriks A, atau dapat ditulis* $kA = [k.a_{ij}]$.

Dari Definisi 1.3, penulisan $k.A$ bila matriks A berukuran $m \times n$, yaitu

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{ml} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (1.3)$$

Untuk lebih jelasnya tentang perkalian skalar matriks, perhatikan Contoh 1.4.

Contoh 1.4. Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$. Maka:

$$5A = 5\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(-1) & 5(2) & 5(5) \\ 5(1) & 5(0) & 5(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 25 \\ 5 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

$$2B = 2\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3) & 2(4) & 2(-5) \\ 2(2) & 2(-3) & 2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 4 & -6 & 14 \end{bmatrix}.$$

$$2B - 5A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 4 & -6 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 10 & 25 \\ 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 & -35 \\ -1 & -6 & -1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Dari Contoh 1.3 dan 1.4, kita dapat memahami tentang penjumlahan dua buah matriks dan hasil kali skalar sebuah matriks. Terdapat beberapa sifat-sifat dasar pada operasi penjumlahan dua buah matriks atau lebih dan perkalian skalar matriks, yakni yang termuat dalam Teorema 1.4.

Teroma 1.4. *Perhatikan sebarang matriks $A, B,$ dan C (dengan ukuran yang sama) dan sebarang skalar k dan k'. Maka:*

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
(ii) $A + 0 = 0 + A = A$,
(iii) $A + (-A) = -A + A = 0$,
(iv) $A + B = B + A$,
(v) $k(A + B) = kA + kB$,
(vi) $(kk')A = k(k'A)$,
(vii) $1. A = A$.

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Anggaplah matriks A, B, dan C berukuran $m \times n$; dan 0 pada (ii) dan (iii) merupakan matriks 0 berukuran $m \times n$. Kemudian kita berpatokan pada Definisi 1.2 dan 1.3.

Contoh 1.5. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$. Perlihatkanlah bahwa bahwa Teorema 1.4 (i) dan (v) terpenuhi. Pertama kita perlihatkan bahwa (i) terpenuhi. Pada ruas kiri

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dan pada ruas kanan

$$\begin{aligned}A + (B + C) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Karena hasil $(A + B) + C = A + (B + C)$, maka (i) terpenuhi.

Selanjutnya kita perlihatkan bahwa (v) terpenuhi. Pada ruas kiri

$$k(A + B) = k \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= k\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 7k \\ 2k & 0 \end{bmatrix}.$$

Dan pada ruas kanan

$$kA + kB = k\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k & 4k \\ 2k & -k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2k & 3k \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 7k \\ 2k & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $k(A+B) = kA + kB$, maka (v) terpenuhi. $\square$

Selanjutnya akan kita bahas tentang perkalian dua buah matriks. Perhatikan definisi berikut.

Definisi 1.5. *JIka A adalah matriks yang berukuran $m \times n$ dan B adalah matriks berukuran $n \times p$. Perkalian A dan B, ditulis AB, adalah matriks yang berukuran $m \times p$, dimana entri pada baris i dan kolom j dari AB ditentukan sebagai berikut. Pilihlah baris i dari matrks A dan kolom j dari matriks B. Kemudian kalikan entri–entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama. Selanjutnya tambahkan keseluruhan hasil kalinya.*

Secara sederhana, dapat kita katakan bahwa perkalian dua buah matriks A dan B yaitu AB adalah perkalian antara baris dari matriks A dengan kolom dari matriks B. Misalkan diberikan dua buah matriks, yaitu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Untuk mencari matriks AB, ada beberapa langkah yang perlu kita diperhatikan, yakni:

(1) Kalikan baris pertama matriks A dengan kolom pertama dari matriks B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}.$$

(2) Kalikan baris pertama matriks A dengan kolom kedua dari matriks B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ \square & \square \end{bmatrix}.$$

(3) Setelah selesai kita kalikan baris pertama matriks A dengan seluruh kolom pada matriks B. Langkah selanjutnya, kita kalikan baris kedua matriks A dengan kolom pertama dari matriks B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & \square \end{bmatrix}.$$

(4) Terakhir kita kalikan baris kedua matriks A dengan kolom kedua dari matriks B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Tanda $\square$ memberikan arti bahwa entrinya belum diketahui atau belum dicari. Kempat langkah diatas dapat kita gunakan sebagai sebuah pedoman dalam mencari perkalian dua buah matriks.

Dari Definisi 1.5, perkalian dari dua buah matriks yaitu A dan B yang masing-masing berukuran $m \times n$ dan $n \times p$ dapat diilustrasikan sebagai berikut.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \times & B & = & AB & \longrightarrow & \text{matriks} \\ m \times \underbrace{n} & & \underbrace{n} \times p & & m \times p & \longrightarrow & \text{ukuran} \end{array}$$

sama

Contoh 1.6. Carilah matriks AB, jika $A = [1 \quad -2 \quad 4]$, dan $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Karena matriks A berukuran 1×3 dan matriks B berukuran 3×1, dari Definisi 1.5 matriks AB akan berukuran 1×1. Oleh karena itu, kita peroleh

$$AB = [1 \quad -2 \quad 4] \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [1(4) + (-2)(2) + (4)(-1)] = [-4]. \quad \square$$

Contoh 1.6 memperlihatkan perkalian antara matriks yang berukuran 1×3 dan 3×1. Dari Definisi 1.5, anggapaplah $A = [a_{ik}]$ dan $B = [b_{kj}]$ adalah matriks-matriks yang masing-masing berukuran $m \times n$ dan $n \times p$. Jika hasil kali $AB = C$, maka matriks C dapat ditulis sebagai

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., Rorres, C. 2010. *Elementary Linear Algebra Applications Version. 10^{th} ed*. USA: John Wiley & Sons.

Ayres, F.Jr. 1985. *Teori dan Soal-Soal Matriks. Seri Buku Schaum (Terjemahan)*. Jakarta: Erlangga.

Bapat, R.B. 2012. *Linear Algebra and Linear Models. 3^{rd} ed*. London: Springer.

Bellman, R. 1997. *Introduction to Matrix Analysis. 2^{nd} ed*. Philadelpia: SIAM.

Bernstein, D.S. 2009. *Matrix Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Hoffman, K., Kunze, R. 1971. *Linear Algebra. 2^{nd} ed*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kostrikin, A.I., Manin, Y.I. 1997. *Linear Algebra and Geometry (Volume I)*. Netherland: Gordon and Breach Science Publishers.

Lancaster, P., Tismenetsky. M. 1985. *The Theory of Matrices. 2^{nd} ed*. London: Academic Press.

Leon, S.J. 2010. *Linear Algebra with Applications*. 8^{th} ed. USA: Pearson.

Roman, S. 2008. *Advanced Linear Algebra. 3^{rd} ed*. London: Springer.

Strang, G. 2003. *Introduction to Linear Algebra. 3^{rd} ed*. USA: Wellesley-Cambridge Press.

Ayres, F. 1985. *Teori dan Soal-Soal Matriks. Seri Buku Schaum (Terjemahan)*. Jakarta: Erlangga.

Adiwijaya. 2014. *Aplikasi Matriks dan Ruang Vektor*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Mursita, D. 2010. *Aljabar Linier*. Bandung: Rekayasa Sains.

Lang, S. 2004. *Linear Algebra. 3rd ed*. London: Springer.

Kolman, B., Hill, D.R. 2008. *Elementary Linear Algebra with Applications. 9th ed*. New Jersey: Pearson.

Meyer, C.D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelpia: SIAM.

Shores, T.S. 2007. *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis*. London: Springer.