DIKTAT

PENGANTAR ANALISIS REAL

(Untuk Mahasiswa Pendidikan Matematika)

Disusun Oleh:

RUSI ULFA HASANAH, M.Pd.

NIP. 199212112019032024

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUMATERA UTARA MEDAN

2021

SURAT REKOMENDASI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Dr. Fibri Rakhmawati, M.Si
NIP.	:	198002112003122014
Pangkat/ Gol.	:	Lektor/ IIId
Unit Kerja	:	Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara

menyatakan bahwa diktat saudara

Nama	:	Rusi Ulfa Hasanah, M.Pd
NIP.	:	199212112019032024
Pangkat/ Gol.	:	Asisten Ahli/ IIIb
Unit Kerja	:	Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara
Judul Diktat	:	Analisis Real

telah memenuhi syarat sebagai suatu karya ilmiah (Diktat) dalam mata kuliah Pengantar Analisis Real pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara.

Demikianlah rekomendasi ini diberikan untuk dapat dipergunakan seperlunya.

Medan, 30 Maret 2021

Yang Menyatakan,

Dr. Fibri Rakhmawati, M.Si

NIP. 198002112003122014

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Segala puji bagi Allah dan rasa syukur atas rampungnya Diktat Analisis Real. Diktat ini disusun guna pengadaan bahan ajar mata kuliah Analisis Real. Analisis Real adalah mata kuliah wajib bagi mahasiswa Program Studi S-1 Pendidikan Matematika UIN Sumatera Utara Medan yang telah menyelesaikan mata kuliah kalkulus I, II, III, & IV. Diktat ini terdiri dari tiga bab yang membahas bilangan real, barisan dan deret bilangan real, serta limit. Pada setiap bab disediakan soal latihan yang cukup dengan soal yang bervariasi tingkat kesulitan maupun permasalahannya.

Semoga dengan disusunnya diktat ini, mahasiswa mempunyai tambahan sumber pengetahuan untuk mengembangkan ilmu. Setelah mempelajari materi pada diktat ini, diharapkan mahasiswa mempunyai kedewasaan dalam bermatematika, yang meliputi kemampuan berpikir secara deduktif, logis, dan runtut, serta memiliki kemampuan menganalisis masalah dan mengomunikasikan penyelesaiannya secara akurat dan *rigorous*.

Penyelesaian diktat ini tidak terlepas dari kontribusi banyak pihak. Penulis menyampaikan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah memberi masukan terhadap materi dalam diktat ini. Kami sangat menyadari sepenuhnya bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kami sangat mengharapkan kritik maupun saran yang membangun demi kelanjutan dan sempurnanya diktat ini, terima kasih.

Penulis,

Rusi Ulfa Hasanah, M.Pd.

DAFTAR ISI

BAB I
BILANGAN REAL

1.1. Sifat Aljabar Bilangan Real

1.1.1 Sifat Aljabar (Aksioma Field)

Terdapat operasi biner di dalam himpunan bilangan real (*field*) yaitu operasi penjumlahan (addition) dengan lambang “+” dan operasi perkalian (multiplication) dengan lambang “.”. Sifat-sifat operasi biner tersebut adalah sebagai berikut.

(A1) Sifat komutatif penjumlahan

$a + b = b + a, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

(A2) Sifat asosiatif penjumlahan

$(a + b) + c = a + (b + c), \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

(A3) Eksistensi elemen 0

$\exists 0 \in \mathbb{R} \ni 0 + a = a \wedge a + 0 = a, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$

(A4) Eksistensi elemen negatif

$\forall\, a \in \mathbb{R} \,\exists -a \in \mathbb{R} \ni a + (-a) = 0 \wedge (-a) + a = 0$

(M1) Sifat komutatif perkalian

$a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

(M2) Sifat asosiatif perkalian

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

(M3) Eksistensi elemen 1

$\exists 1 \in \mathbb{R} \ni 1 \cdot a = a \wedge a \cdot 1 = a, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$

(M4) Eksistensi elemen invers/kebalikan

$\forall\, a \neq 0 \in \mathbb{R} \,\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \ni a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1 \wedge (\frac{1}{a}) \cdot a = 1$

(D) Sifat distribusi perkalian dengan penjumlahan

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \wedge (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a), \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

1.1.2 Teorema

(a) Jika z dan a adalah anggota $\mathbb{R}$ yang mana $z + a = a$, maka $z = 0$

(b) Jika u dan $b \neq 0$ adalah anggota $\mathbb{R}$ yang mana $u \cdot b = b$, maka $u = 1$

Bukti:

(a) Diketahui $z, a \in \mathbb{R}$ dan $z + a = a$

Akan dibuktikan bahwa $z = 0$

Dari hal yang diketahui, berdasarkan (A4) dan (A2) diperoleh

$z + \left(a + (-a)\right) = a + (-a)$

Dengan menggunakan sifat (A4) diperoleh

$z + 0 = 0$

Dengan (A3) diperoleh

$z = 0$

Jadi terbukti bahwa jika $z, a \in \mathbb{R}$ dan $z + a = a$, maka $z = 0$.

(b) Diketahui $u, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ dan $u \cdot b = b$

Akan dibuktikan $u = 1$

Dari hal yang diketahui, menggunakan (M4) dan (M2) diperoleh

$u \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = b \cdot \frac{1}{b}$

Dengan menggunakan sifat (M4) diperoleh

$u \cdot 1 = 1$

Dengan (A3) diperoleh

$u = 1$

Jadi terbukti bahwa jika $u, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ dan $u \cdot b = b$, maka $u = 1$.

1.1.3 Teorema

(a) Jika a dan b adalah anggota $\mathbb{R}$ yang mana $a + b = 0$, maka $b = -a$

(b) Jika $a \neq 0$ dan b adalah anggota $\mathbb{R}$ yang mana $a \cdot b = 1$, maka $b = \frac{1}{a}$

Bukti:

(a) Diketahui $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a + b = 0$

Akan dibuktikan $b = -a$

Dari hal yang diketahui, menggunakan (A4) dan (A2) diperoleh

$\left((-a) + a\right) + b = (-a) + 0$

Dengan menggunakan sifat (A4) diperoleh

$0 + b = (-a) + 0$

Dengan (A3) diperoleh

$b = -a$

Jadi terbukti bahwa jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a + b = 0$, maka $b = -a$.

(b) Diketahui $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, dan $a \cdot b = 1$

Akan dibuktikan $b = -a$

Dari hal yang diketahui, menggunakan (A4) dan (A2) diperoleh

$\big((-a) + a\big) + b = (-a) + 0$

Dengan menggunakan sifat (A4) diperoleh

$0 + b = (-a) + 0$

Dengan (A3) diperoleh

$b = -a$

Jadi terbukti bahwa jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a + b = 0$, maka $b = -a$.

1.1.4 Teorema

Tidak ada bilangan rasional r sedemikian hingga $r^2 = 2$

Bukti:

Pembuktian menggunakan kontradiksi. Misalkan terdapat bilangan rasional r sedemikian hingga $r^2 = 2$.

Dipilih bilangan rasional $r = \frac{p}{q}$ yang merupakan bentuk paling sederhana dengan FPB dari p dan q adalah 1 dimana $p, q \in \mathbb{Z}$ (bilangan bulat) dan $q \neq 0$.

Sehingga:

$r^2 = 2$

$\frac{p^2}{q^2} = 2$

$p^2 = 2q^2$ ...(1)

Perhatikan bahwa p^2 adalah bilangan genap, dikarenakan $2q^2$ merupakan bentuk bilangan genap. (Ingatlah bahwa bilangan genap dapat ditulis dengan notasi $2n$ dan bilangan ganjil dengan notasi $2n - 1$, dengan $n \in \mathbb{Z}$)

Karena p^2 genap dan $p^2 = p.p$ maka pastilah p juga genap. (Karena bilangan ganjil apabila dikuadratkan akan menghasilkan bilangan ganjil, sedangkan bilangan genap apabila dikuadratkan akan menghasilkan bilangan genap)

Karena p genap maka $p = 2n$, sehingga (1) dilanjutkan menjadi:

$(2n)^2 = 2q^2$

$4n^2 = 2q^2$

$2n^2 = q^2$ ...(2)

Tampak bahwa q^2 adalah bilangan genap, mengakibatkan q juga genap.

Dari (1) dan (2) diperoleh bahwa p dan q adalah bilangan genap, yang mengakibatkan p dan q memiliki faktor persekutuan selain bilangan 1, yaitu bilangan 2.

Pernyataan ini bertentangan dengan pernyataan “pilih bentuk $\frac{p}{q}$ yang paling sederhana dengan FPB dari p dan q adalah 1”.

Terjadi kontradiksi. Artinya pengandaian di awal yaitu terdapat bilangan rasional r sedemikian hingga $r^2 = 2$ adalah salah. Dengan demikian dapat disimpulkan yang benar adalah tidak ada bilangan rasional r sedemikian hingga $r^2 = 2$.

Sifat urutan pada $\mathbb{R}$

1.1.6 Definisi

Misalkan $p, q \in \mathbb{R}$.

(a) Jika $a - b \in \mathbb{P}$ maka berlaku $a > b$ atau $b < a$

(b) Jika $a - b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ maka berlaku $a \geq b$ atau $b \leq a$

1.1.7 Teorema

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$

(a) Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$

(b) Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$

(c) Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ca > cb$

Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ca < cb$

Bukti:

(a) Karena $a > b$, menurut Definisi 2.1.6 (a) berlaku $a - b \in \mathbb{P}$

Karena $b > c$, menurut Definisi 2.1.6 (a) berlaku $b - c \in \mathbb{P}$

Menurut sifat 2.1.5 (i) maka:

$(a - b) + (b - c) \in \mathbb{P}$

$\Leftrightarrow a - b + b - c \in \mathbb{P}$

$\Leftrightarrow a - c \in \mathbb{P}$

Karena $a - c \in \mathbb{P}$, menurut Definisi 2.1.6 (a) berlaku $a > c$

(b) Karena $a > b$, menurut Definisi 2.1.6 (a) berlaku $a - b \in \mathbb{P}$

$a - b \in \mathbb{P}$

$\Leftrightarrow a - b + c - c \in \mathbb{P}$

$\Leftrightarrow a + c - b - c \in \mathbb{P}$

$\Leftrightarrow (a+c)-(b+c) \in \mathbb{P}$

menurut Definisi 2.1.6 (a), untuk $(a+c)-(b+c) \in \mathbb{P}$ berlaku $a+c > b+c$

(c) $a-b \in \mathbb{P}$ dan $c > 0$ dapat dikatakan $c \in \mathbb{P}$

Dengan sifat 2.1.5 (ii) diperoleh:

$c(a-b) \in \mathbb{P}$

$\Leftrightarrow ca - cb \in \mathbb{P}$

menurut Definisi 2.1.6 (a), untuk $ca - cb \in \mathbb{P}$ berlaku $ca > cb$

Untuk teorema Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ca < cb$ ditinggalkan sebagai tugas pembaca.

1.1.8 Teorema

(a) Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, maka $a^2 > 0$

(b) $1 > 0$

(c) Jika $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$

Catatan: $\mathbb{N}$ adalah notasi bilangan asli

Bukti:

(a) Berdasarkan sifat Trikotomi (sifat 2.1.5 (iii)), jika $a \neq 0$ maka ada 2 kemungkinan lain yaitu $a \in \mathbb{P}$ ($a > 0$) atau $-a \in \mathbb{P}$ ($a < 0$)

Berdasarkan sifat 2.1.5 (ii) maka berlaku:

$a.a = a^2 \in \mathbb{P}$ dan $(-a)(-a) = a^2 \in \mathbb{P}$

Karena keduanya menjunjukkan $a^2 \in \mathbb{P}$ maka disimpulkan $a^2 > 0$

(b) Karena $1 \neq 0$, berdasarkan Teorema 2.1.8 (a) berlaku

$1^2 > 0$

$\Leftrightarrow 1 > 0$

(c) Menggunakan Induksi Matematika

Untuk $n = 1$, benar bahwa $1 > 0$ (Berdasarkan Teorema 2.1.8 (b))

Dianggap benar untuk $n = k$, maka dianggap benar $k > 0$

Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$, sehingga harus ditunjukkan $k + 1 > 0$

Bukti: Karena $1 > 0$ dan $k > 0$ maka $1, k \in \mathbb{P}$

Berdasarkan Sifat 2.1.5. (i) berlaku $k + 1 \in \mathbb{P}$ yang dapat ditulis sebagai $k + 1 > 0$.

1.1.9 Teorema

Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk $\forall\ \varepsilon > 0$, maka $a = 0$

Bukti:

Menggunakan kontradiksi, misalkan $a \neq 0$.

Karena $a \neq 0$ maka hanya 1 kemungkina lainnya yaitu $a > 0$.

Dipilih $\varepsilon_0 \coloneqq \frac{1}{2}a$ (Catatan: Simbol "≔" berarti definisi atau yang didefinisikan sebagai)

Karena $a > 0$, pastilah $a > \frac{1}{2}a$

Karena $a > 0$ dan $a > \frac{1}{2}a$, berdasarkan Teorema 2.1.7 (a) maka berlaku:

$$a > \frac{1}{2}a = \varepsilon > 0$$

$\Leftrightarrow\ a > \varepsilon > 0$

$\Leftrightarrow\ 0 < \varepsilon < 0$, hal ini bertentangan dengan "$0 \leq a < \varepsilon$"

Artinya pengandaian "misalkan $a \neq 0$" bernilai salah, yang benar adalah "$a = 0$"

Jadi dapat disimpulkan bahwa "Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk $\forall\ \varepsilon > 0$, maka $a = 0$"

1.1.10 Teorema

Jika $ab > 0$, maka berlaku salah satu dari berikut:

(a) $a > 0$ dan $b > 0$, atau

(b) $a < 0$ dan $b < 0$

(Dengan kalimat lain: apabila perkalian dua bilangan real adalah positif, maka ada 2 kemungkinan yaitu keduanya bilangan positif atau keduanya bilangan negatif)

Bukti:

Karena $ab > 0$, maka berlaku $a \neq 0$ dan $b \neq 0$. (Hal ini akibat dari Teorema 2.1.2 (c). Apabila salah satu dari a dan b bernilai 0 maka pastilah $a.b = 0$)

Berdasarkan sifat Trikotomi, maka ada 2 kemungkinan nilai a yaitu $a > 0$ atau $a < 0$.

(a) Untuk $a > 0$ maka $\frac{1}{a} > 0$, akan diperiksa nilai b

$$b = b.1 = b.\left(a.\frac{1}{a}\right) = (b.a)\frac{1}{a} > 0$$

Dapat disimpulkan $b > 0$

(b) Untuk $a < 0$ maka $\frac{1}{a} < 0$, akan diperiksa nilai b

$$b = b.1 = b.\left(a.\frac{1}{a}\right) = (b.a)\frac{1}{a} < 0$$

Dapat disimpulkan $b < 0$

1.1.11 Akibat

Jika $ab < 0$, maka berlaku salah satu dari berikut:

(a) $a < 0$ dan $b > 0$, atau

(b) $a > 0$ dan $b < 0$

(Dengan kalimat lain: apabila perkalian dua bilangan real adalah negatif, maka salah satu bilangan tersebut adalah bilangan negatif)

Ketaksamaan Bernoulli

Jika $x > -1$, maka $(1+x)^n \geq 1 + nx$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

Bukti:

Menggunakan Induksi Matematika

- Untuk $n = 1$, mengakibatkan $(1+x)^1 \geq 1 + 1x$

  $1 + x \geq 1 + x$ (Benar)

  Maka benar untuk $n = 1$
- Dianggap benar untuk $n = k$, maka dianggap benar bahwa $(1+x)^k \geq 1 + kx$
- Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$,

  sehingga harus ditunjukkan bahwa $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$

  Bukti:

  $$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x)\\ &\geq (1+kx)(1+x)\\ &= 1 + x + kx + kx^2\\ &= 1 + (1+k)x + kx^2\\ &> 1 + (1+k)x\end{aligned}$$

  $\Leftrightarrow (1+x)^{k+1} > 1 + (1+k)x$ (Terbukti)

Soal Latihan Subbab 1.1

1. Jika $a, b \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa:

(a) $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

(b) $(-a)(-b) = ab$.

2. Selesaikan persamaan berikut.

(a) $2x + 5 = 8$.

(b) $x^2 = 2x$.

3. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa $\frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)$.

4. Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional t sedemikian hingga $t^2 = 3$.

5. Buktikan bahwa jika $a > 0$, maka $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

1.2. Nilai Mutlak dan Garis Bilangan Real

1.2.1 Definisi

Nilai mutlak dari bilangan real a, dinotasikan dengan $|a|$, didefinisikan sebagai

$$|a| := \begin{cases} a & , jika\ a > 0 \\ 0 & , jika\ a = 0 \\ -a & , jika\ a < 0 \end{cases}$$

1.2.2 Teorema

(a) $|ab| = |a||b|$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$

(b) $|a|^2 = a^2$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$

(c) Jika $c \geq$, maka $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$

(d) $-|a| \leq a \leq |a|$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$

Bukti:

(a) Jika $a = b = 0$, maka terbukti. Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $ab > 0$, sehingga $ab = ab$ $= a\ b$. Jika $a > 0$ dan $b < 0$, maka $ab < 0$, sehingga $ab = -ab = a\ (-b) = a\ b$.

(b) Karena $a_2 \geq 0$, maka $a_2 = a_2 = aa = a\ a = a\ {}_2$.

(c) Jika $a \leq c$, maka $a \leq c$ dan $-a \leq c$ yang berarti $-c \leq a \leq c$. Sebaliknya, jika $-c \leq a \leq c$, maka diperoleh $a \leq c$ dan $-a \leq c$. Jadi, $a \leq c$.

(d) Gunakan langkah yang sama seperti pada (c) dengan mengambil $c = a$.

1.2.3 Teorema

Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $|a + b| \leq |a| + |b|$

Bukti:

Dari Teorema 1.2.2(d), diketahui $-a \leq a \leq a$ dan $-b \leq b \leq b$. Dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan diperoleh $-(a + b) \leq a + b \leq a + b$. Menggunakan Teorema 1.2.2.(c) diperoleh bahwa $a + b \leq a + b$.

1.2.4 Akibat

Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka

(a) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

(b) $|a - b| \leq |a| + |b|$

Bukti:

(a) Tulis $a = a - b + b$ dan masukkan ke dalam Ketaksamaan Segitiga. Sehingga $a = (a - b) + b \leq a - b + b$. Kurangkan kedua ruas dengan b , diperoleh $a - b \leq a - b$. Gunakan cara yang sama untuk $b = b - a + a$, diperoleh $-a - b \leq a - b$. Kombinasikan kedua ketaksamaan tersebut, diperoleh $-a - b \leq a - b \leq a - b$. Menggunakan Teorema 1.2.2(c) diperoleh bahwa $a - b \leq a - b$.

(b) Gantilah b pada Ketaksamaan Segitiga dengan $-b$, sehingga diperoleh $a - b \leq a + -b$. Karena $-b = b$, maka diperoleh bahwa $a - b \leq a + b$.

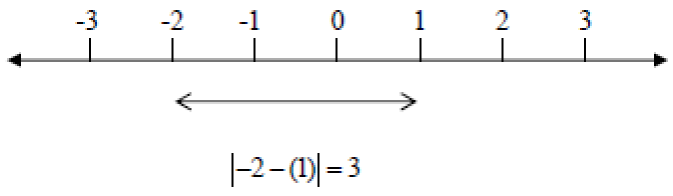
1.2.5 Akibat

Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah bilangan-bilangan real, maka

$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

Garis Bilangan Real (The Real Line)

Interpetasi geometri yang dikenal di antaranya garis bilangan real *(real line*). Pada garis real, nilai mutlak a dari suatu elemen $a \in \mathbb{R}$ adalah jarak a ke 0. Secara umum, **jarak** (*distance*) antara elemen a dan b di $\mathbb{R}$ adalah $a - b$. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.1. Jarak antara $a = -2$ dan $b = 1$.

1.2.7 Definisi

Misalkan $a \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$. Maka lingkungan- ε dari a adalah himpunan $V_\varepsilon(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}: |a - b| < \varepsilon\}$

1.2.8 Teorema

Misalkan $a \in \mathbb{R}$. Jika x merupakan lingkungan $V_\varepsilon(a)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x = a$

Bukti:

Jika x memenuhi $x - a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka berdasarkan Teorema 1.1.10 diperoleh bahwa $x - a = 0$, yang berakibat $x = 0$.

Soal Latihan Subbab 1.2

1. Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa:

(a) $|a| = \sqrt{a^2}$

(b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

2. Jika $x, y, z \in \mathbb{R}$ dan $x \leq z$, tunjukkan bahwa $x \leq y \leq z$ jika dan hanya jika $x - y + y - z = x - z$

3. Jika $a < x < b$ dan $a < y < b$, tunjukkan bahwa $x - y < b - a$.

4. Carilah semua nilai $x \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $x + 1 + x - 2 = 7$.

5. Buatlah sketsa grafik persamaan $y = x - x - 1$.

1.3. Sifat Kelengkapan Bilangan Real

1.3.1 Definisi

Misalkan S adalah subset tak kosong dari $\mathbb{R}$.

(a) Himpunan S dikatakan **terbatas atas** jika terdapat sebuah bilangan $u \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$. Untuk setiap bilangan u dinamakan **batas atas** dari S

(b) Himpunan S dikatakan **terbatas bawah** jika terdapat sebuah bilangan $w \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Untuk setiap bilangan w dinamakan **batas bawah** dari S

(c) Sebuah himpunan dikatakan terbatas apabila terbatas atas dan terbatas bawah. Sebuah himpunan dikatakan tidak terbatas apabila tidak dibatasi

1.3.2 Definisi

Misalkan S adalah subset tak kosong dari $\mathbb{R}$

(a) Jika S terbatas atas, maka sebuah bilangan u dikatakan **suprimum** (atau **batas atas terkecil**) dari S jika memenuhi kondisi:

(1) u adalah sebuah batas atas dari S, dan

(2) Jika v adalah batas atas lain dari S, maka $u \leq v$

(b) Jika S terbatas bawah, maka sebuah bilangan w dikatakan infimum (atau batas bawah terbesar) dari S jika memenuhi kondisi:

(3) w adalah sebuah batas bawah dari S, dan

(4) Jika t adalah batas bawah lain dari S, maka $t \leq w$

1.3.3 Lemma

Sebuah bilangan u adalah suprimum dari sebuah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ jika dan hanya jika u memenuhi kondisi-kondisi:

(1) $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$,

(2) Jika $v < u$, maka terdapat $s' \in S$ sedemikian hingga $v < s'$

1.3.4 Lemma

Sebuah batas atas u dari sebuah himpunan tak kosong S di dalam $\mathbb{R}$ adalah suprimum dari S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah $s_\varepsilon \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$

Bukti:

(a) $\Rightarrow$ Diketahui $u = \sup S$ dan diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $u - \varepsilon < u$, maka $u - \varepsilon$ bukan merupakan batas atas S. Oleh karena itu, terdapat $s_1 \in S$ yang lebih besar dari $u - \varepsilon$, sehingga $u - \varepsilon < s_1$.

$\Leftarrow$ Diketahui $u - \varepsilon < s_1$. Jika u merupakan batas atas S, dan jika memenuhi $v < u$, maka diambil $\varepsilon := u - v$. Maka jelas $\varepsilon > 0$, dan diperoleh bahwa $u = \sup S$.

(b) Coba buktikan sendiri.

1.3.5 Contoh

(a) Jika suatu himpunan tak kosong S_1 mempunyai elemen sebanyak berhingga, maka dapat dilihat bahwa S_1 mempunyai elemen terbesar, namakan u, dan elemen terkecil, namakan w. Maka $u = \sup S_1$ dan $w = \inf S_1$, dan keduanya merupakan elemen S_1.

(b) Himpunan $S_2 := \{x : 0 \le x \le 1\}$ mempunyai batas atas 1. Akan dibuktikan bahwa 1 merupakan supremumnya. Jika $v < 1$, maka terdapat $s' \in S_2$ sedemikian hingga $v < s'$. Oleh karena itu, v bukan merupakan batas atas S_2 dan karena v merupakan sebarang $v < 1$, maka dapat disimpulkan bahwa $\sup S_2 = 1$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\inf S_2 = 0$.

1.3.6 Sifat Kelengkapan ℝ

Setiap himpunan tak kosong dari bilangan real yang memiliki sebuah batas atas juga memiliki sebuah suprimum di ℝ.

Sifat ini juga dikenal sebagai **sifat suprimum dari ℝ.**

1.3.7 Akibat

Jika subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$ terbatas ke bawah, maka infimumnya ada, yaitu terdapat $w \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w = \inf S$.

Bukti.

Misalkan himpunan T terbatas ke bawah, $T \subset \mathbb{R}$. Dibentuk himpunan $S = \{-t : t \in T\}$, maka S terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Aksioma Supremum, $\sup S$ ada, namakan $u = \sup S$, maka $-u = \inf T$.

Soal Latihan Subbab 1.3

1. Diberikan $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Apakah S mempunyai batas bawah dan batas atas? Apakah $\inf S$ dan $\sup S$ ada? Buktikan jawabanmu.
2. Diberikan $T := \{1 - (-1)^n/n : n \in N\}$. Carilah $\inf T$ dan $\sup T$.
3. Diberikan S subset tak kosong $\mathbb{R}$ yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup\{-s : s \in S\}$.
4. Tunjukkan bahwa jika A dan B subset terbatas dari $\mathbb{R}$, maka $A \cup B$ merupakan himpunan terbatas. Tunjukkan bahwa $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.

5. Diberikan $S \subseteq \mathbb{R}$ dan misalkan $s^* := \sup S$ dalam S. Jika $u \notin S$, tunjukkan bahwa $\sup\left(S \cup \{u\}\right) = \sup\{s^*, u\}$.

BAB II
BARISAN DAN DERET BILANGAN REAL

2.1. Barisan dan Limitnya

2.1.1 Definisi

Urutan bilangan real (atau urutan dalam R) adalah fungsi yang didefinisikan pada himpunan N = {1, 2, · · ·} dari bilangan asli yang kisarannya terkandung dalam himpunan R dari bilangan real. Dengan kata lain, urutan dalam R menugaskan untuk setiap bilangan asli *n* = 1, 2, · · · a secara unik ditentukan bilangan real. Jika X : N → R adalah urutan, kita biasanya akan menunjukkan nilai *X* di *n* oleh simbol x_n dari pada menggunakan notasi fungsi X (n). Nilai x_n juga disebut **istilah** atau **elemen** dari urutan. Kita akan menunjukkan urutan ini dengan notasi

$$X, \qquad (x_n), \qquad (x_n : n \in \mathrm{N}).$$

Tentu saja, kita akan sering menggunakan huruf lain, seperti Y = (y_k), Z = (z_i), dan sebagainya, untuk menunjukkan urutan.

Kita sengaja menggunakan tanda kurung untuk menekankan bahwa pemesanan diinduksi oleh bilangan asli dari N adalah masalah penting. Dengan demikian, kita membedakan secara notaris antara urutan $(x_n : n \in \mathrm{N})$, yang memiliki banyak syarat tak terhingga memiliki urutan, dan himpunan nilai
$\{x_n : n \in \mathrm{N}\}$ dalam kisaran urutan yang tidak dipesan. Misalnya urutan $X: = ((-1)^n : n \in \mathrm{N})$ memiliki banyak istilah yang berganti-ganti antara -1 dan 1, sedangkan himpunan nilai $\{(-1)^n : n \in \mathrm{N}\}$ sama dengan himpunan {-1, 1}, yang hanya memiliki dua elemen.

Urutan sering didefinisikan dengan memberikan rumus untuk istilah ke x_n. Seringkali, itu sesuai untuk membuat daftar persyaratan urutan, berhenti ketika aturan pembentukan tampak jelas. Sebagai contoh, kita dapat menentukan urutan kebalikan dari angka genap dengan menulis

$$X: = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$$

meskipun metode yang lebih memuaskan adalah menentukan rumus untuk istilah umum dan menulis

$$X: = \left(\frac{1}{2n} : n \in \mathrm{N}\right)$$

atau lebih sederhana *X* = (1/2*n*).

Cara lain untuk mendefinisikan urutan adalah dengan menentukan nilai x_1 dan memberikan rumus untuk $x_{n=1}$ (n≥1) dalam hal x, .. Lebih umum, kita dapat menentukan x 1 dan memberikan rumus
untuk mendapatkan x,. + 1 dari x1, x2, • • ·, x_n, .. Urutan yang didefinisikan dalam r ini dikatakan sebagaididefinisikan secara induktif (atau secara rekursif).

2.1.2 Contoh

(a) Jika menjadi 1R, urutan B: = (b, b, b, ⋯), semua istilahnya sama dengan b, disebut urutan konstan b. Jadi urutan konstan 1 adalah urutan (1, 1, 1, ⋯), dan urutan konstan 0 adalah urutan (0, 0, 0, · · ·).

(b) Jika b ∈ R, maka B: = (b^n) adalah urutan B = (b, b^2 b^3, •••, b^n, ⋯). Khususnya, jika b = $\frac{1}{2}$, lalu kita dapatkan urutannya = $\left(\frac{1}{2n}: n \ \in \ \mathrm{N}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \frac{1}{2n}, \ldots\right)$

(c) Urutan (2n: n eN) dari bilangan natural dapat didefinisikan secara induktif atau menurut definisi

Yt: = 2, Yn + t: = Yt + Y,.

(d) Urutan Fibonacci terkenal F: = (/ ,.) diberikan oleh definisi induktif

ft: = 1, / 2: = 1, fn + l: = fn-1 + f ,. (n ~ 2).

Jadi setiap istilah melewati yang kedua adalah jumlah dari dua pendahulunya yang langsung. Sepuluh pertama ketentuan F dilihat (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ⋯).

2.1.3 Defenisi

Barisan X = (x_n) di R dikatakan konvergen ke $x \in R,$ atau x dikatakan sebagai limit (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K\ (\varepsilon)$ sedemikian rupa sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, ketentuan xn yang memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$

Jika suatu barisan memiliki limit, kita sebut urutannya konvergen; jika tidak memiliki limit kita sebut bahwa barisannya divergent

Catatan : Notasi $K\ (\varepsilon)$ digunakan untuk menekankan bahwa pilihan K tergantung pada nilai $\varepsilon.$ namun, sering kali lebih mudah untuk menulis K sebagai gantinya $K\ (\varepsilon)$. Dalam kebanyakan kasus, nilai ε yang "kecil" akan membutuhkan nilai K yang besar untuk menjamin jaraknya $|x_n - x|$ antara x_n dan x kurang dari ε untuk semua $n \geq K = K(\varepsilon)$

Ketika barisan mempunya limit $x,$ kita akan menggunakan notasi

$$\text{Lim } X = x \text{ atau} \qquad \lim\ (x_n) = x$$

Kadang-kadang kita akan menggunakan simbolisme $x_n \to x$, yang menunjukkan gagasan intuitif bahwa nilai x_n "mendekati" angka x sebagai $n \to \infty$

2.1.4 Keunikan Limit.

Barisan dari R dapat memiliki paling banyak satu limit

Bukti

Seandainya x' dan x'' keduanya adalah limit x_n untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat K' sedemikian sehingga $|x_n - x'| < \varepsilon/2$ untuk semua $n \geq K'$. Dan terdapat $K"$ sedemikian sehingga $|x_n - x"| < \varepsilon/2$ untuk semua $n \geq K"$. Kita biarkan K lebih besar daripada K' dan $K"$. Kemudian untuk $n \geq K$ kita mengaplikasikan ketaksamaan segitiga untuk mendapatkan

$$|x' - x"| = |x' - x_n + x_n - x"|$$
$$\leq |x' - x_n| + |x_n - x"| < \varepsilon/2 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah angka positif yang berubah-ubah, kita simpulkan bahwa $x' - x" = 0$

Untuk $x \in R$ dan $\varepsilon > 0$, ingat bahwa ε lingkungan x adalah himpunan

$$V\varepsilon(x) \coloneqq \{u \in R : |u - x| < \varepsilon\}.$$

2.1.5 Teorema : Misalkan X = (x_n) adalah sebuah barisan bilangan real, dan misalkan $x \epsilon R$. Pernyatan-pernyataan berikut adalah ekuivalen.

(a) X konvergen ke x

(b) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat sumbu K sedemikian sehingg untuk semua $n \geq K$, dengan suku suku x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$.

(c) Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah bilangan asli K, sehingga untuk semua $n \geq K$, dengan suku-suku x_n memenuhi $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

(d) Untuk semua daerah sekitar $V_\varepsilon\,(x)\; dari\; x$, terdapat sebuah bilangan asli K, sehingga untuk semua $n \geq K$ suku-suku x_n berada di $V_\varepsilon\,(x)$.

Bukti

Berdasarkan devenisi 3.1.3 maka : X konvergen ke x Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat sumbu K sedemikian sehingg untuk semua $n \geq K$, dengan suku suku x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$. Sehingga (a) ekuivalen dengan (b) karena sama-sama merupakan limit barisan X

(b), (c), dan (d) ekuivalen karena didapat dari implikasi berikut:

$U \in V_c\,(X) \Leftrightarrow |u - x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u - x < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < u < x + \varepsilon \Leftrightarrow u \in V_\varepsilon\,(x)$.

Kita juga dapat mendefenisikan kekonvergenan $X = (x_n)$ ke sumbu x dengan mengatakan : untuk setiap e-daerah sekeliling $V_\varepsilon\,(x)\; dari\; x$, semua kecuali (sejumlah hingga) suku-suku dari x terletak di dalam $V_\varepsilon\,(x)$. Sejumlah hingga suku-suku tersebut mungkin tidak terletak didalam $V_e\,(x)\ yaitu\ x_1, x_2, \dots, x_{K-1}$.

Catatan. Defenisi dari limit barisan bilangan real yang digunakan untuk membuktikan nilai x yang telah ditetapkan merupakan limit. Hal ini tidak menentukan berapa nilai limit seharusnya. Sehingga diperlukan latihan untuk sampai kepada dugaan (conjecture) nilai limit dengan perhitungan lansung suku-suku barisan tersebut. Dalam hal ini komputer akan sangat membantu namun demikian karena untuk menunjukkan bahwa suatu barisan, namun demikian komputer hanya dapat menghitung sampai sejumlah hingga suku barisan, maka perhitungan demikian bukanlah bukti.

Untuk menunjukkan bahwa suatu barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke x cukup dengan memilih $\varepsilon > 0$ sehingga beberapa nilai K yang diambil, diperoleh suatu $n_k > K$ sehingga x_{n_k} tidak terletak dalam $V_\varepsilon\,(x)$.

Contoh- contoh berkut ini menggambarkan bagaimana defenisi diterapkan untuk membuktikan bahwa suatu limit memiliki urutan tertentu.

2.1.6 Contoh

a. $\lim \frac{1}{n} = 0$

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan, kemudian $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Melalui bentuk archimedes 2.4.5 terdapat bilangan asli $K = K(\varepsilon)$ seperti $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Kemudian jika $n \geq K$ kita mempunyai $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$. Oleh karena itu, jika $n \geq K$, kemudian $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Untuk itu ini membuktikan bahwa limit $\left(\frac{1}{n}\right)$ = 0.

b. limit $\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$

Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan, untuk menemukan K, pertama-tama kita perhatikan bahwa jika $n \in N$, kemudian $\frac{1}{n^2+1} - 0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$.

Sekarang pilih k sedemikian sehingga $\frac{1}{K} < \varepsilon$ seperti (a) diatas. Kemudian $n \geq K$ menyiratkan bahwa $\frac{1}{n} < \varepsilon$ dan oleh karena itu $\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Ini membuktikan bahwa nilai kovergennya = 0.

c. limit $\frac{3n+2}{n+1} = 3$

Misalkan $\varepsilon > 0$ perhatikan kesamaan berikut $\left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$

Ketika n adalah cukup besar. Pertama-tama kita menyederhanakan pernyataan kiri. $\left|\frac{3+2}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n+2-3n-3}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Sekarang jika ketidaksamaan $\frac{1}{n} < \varepsilon$ akibatnya untuk semua $n \geq K > 1$ dipenuhi. Ini membuktikan bahwa limit $\frac{3n+2}{n+1} = 3$

d. Jika $0 < b < 1$ kemudian limit $(b^n) = 0$

Kita harus menggunakan bentuk dasar dari fungsi logaritma dasar. Jika $\varepsilon > 0$ diberikan, kita dapat melihat bahwa $b^n < \varepsilon \Leftrightarrow$ n ln n < ln c $\Leftrightarrow n > \frac{ln\varepsilon}{ln} b$.

Ketidaksamaan yang terakhir adalah terbalik karena ln b < 0. Jadi jika kita memilih K menjadi sedemikian sehingga $K > \frac{ln\varepsilon}{lnb}$, kemudian kita akan memilih $o < b^n < \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$. Jadi kita mempunyai limit $(b^n) = 0$.

Contohnya, jika b = 8, dan jika $\varepsilon = 01$ diberikan, kemudian kita akan membutuhkan K > ln.01/ln.8 ≥ 20.6377. jadi K = 21 akan menjadi pilihan yang tepat untuk $\varepsilon = .01$.

2. 1. 8 Definisi

Bila $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ suatu barisan bilangan real dan m selalu bilangan asli, maka ekor-m dari X adalah barisan

$$X_m := (x_{m+n} : n \in \boldsymbol{N}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots)$$

Sebagai contoh, ekor-3 dari barisan $X = 2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 2n, \cdots)$, adalah barisan $X_3 = (8, 10, 12, \cdots, 2n + 6, \cdots)$.

2. 1. 9 Teorema

Misalkan $X = (x_n : n \in N)$ suatu barisan bilangan real dan $m \in N$. Maka ekor-m adalah $X_m = (x_{m+n} : n \in N)$ dari X konvergen jika dan hanya jika X konvergen. Dalam hal ini, lim $X_m =$ lim X.

Bukti

Dapat kita catat untuk sebarang $p \in N$, suku ke-p dari X_m, merupakan suku ke-$(m + p)$ dari X. Secara sama bila $q > m$, maka suku ke-q dari X merupakan suku ke-$(q - m)$ dari X_m.

Misalkan X konvergen ke x. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$, bila untuk $n \geq K(\varepsilon)$ suku-suku dari X memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$, maka suku-suku dari X_m dengan $k \geq K_m(\varepsilon) - m$ memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$. Jadi kita dapat memilih $K_m(\varepsilon) = K_m(\varepsilon) - m$, sehingga X_m juga konvergen ke x.

Sebaliknya, bila suku-suku dari X_m untuk $k \geq K_m(\varepsilon)$ memenuhi $x_n - x < \varepsilon$ maka suku-suku dari X dengan $n \geq K_m(\varepsilon) + m$ memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$. Jadi kita dapat memilih $K(\varepsilon) = K_m(\varepsilon) + m$. Karena itu, X konvergen ke x jika dan hanya jika X_m konvergen ke x.

Kadang-kadang kita akan mengatakan suatu barisan X pada akhirnya mempunyai sifat tertentu, bila beberapa akar x mempunyai sifat tersebut. Sebagai contoh, kita katakan bahwa barisan $(3, 4, 5, 5, 5, \cdots, 5, \cdots)$ pada akhirnya konstan. Di lain pihak, barisan $(3, 5, 3, 5, \cdots, 3, 5, \cdots)$ tidaklah pada akhirnya konstan. Gagasan kekonvergenan dapat pula dinyatakan dengan begini : suatu barisan X konvergen ke x jika dan hanya jika suku-suku dari X pada akhirnya terletak di dalam lingkungan-ε ke x.

2.1.10 Teorema

Misalkan (x_n) menjadi barisan bilangan real dan $x \in R$. Jika (a_n) adalah barisan bilangan real positif dengan $\lim(a_n) = 0$ dan jika untuk suatu konstanta $C > 0$ dan suatu $m \in N$, kita mempunyai

$$|x_n - x| \leq Ca_n \; untuk \; semua \; n \geq m,$$

Maka $\lim(x_n) = x$

Bukti

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, karena $\lim(a_n) = 0$, maka terdapat bilangan asli $K = K(\frac{\varepsilon}{C})$, sehingga bila $n \geq K$, berarti

$$a_n = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{C}$$

Oleh karena itu hal ini mengakibatkan jika $n \geq K \; dan \; n \geq m$, maka

$$|x_n - x| \leq Ca_n < C\left(\frac{\varepsilon}{C}\right) = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, kita simpulkan bahwa $x = \lim(x_n)$

2.1.11 Contoh

(a) Jika $a > 0$ maka $\lim\left(\frac{1}{1+na}\right) = 0$

Karena $a > 0 \; maka \; 0 < na, 1 + na$, karenanya $0 < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$

Demikian sehingga $\left|\frac{1}{1+na} - 0\right| \leq \left(\frac{1}{a}\right)\frac{1}{n} \; untuk \; semua \; n \in N$

Karena $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, menurut Teorema 3.1.10 dengan $C = \frac{1}{a}$ dan $m = 1$ diperoleh bahwa $\lim\left(\frac{1}{1+na}\right) = 0$

(b) Jika $0 < b < 1$, maka $\lim(b^n) = 0$

Limit ini sebelumnya diperoleh dalam Contoh 3.1.6(d).

Kita akan memberikan bukti kedua dengan menggunakan Ketaksamaan Bernouli (lihat contoh 2.1.13(c)).

Karena $0 < b < 1$, kita dapat menuliskan $b = \frac{1}{1+a}$, dimana $a \coloneqq \frac{1}{b} - 1$ sehingga $a > 0$.

Dengan ketaksamaan Bernoulli kita mempunyai $(1+a)^n \geq 1 + na$. Karenanya,

$$0 < b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$$

Sehingga dengan menggunakan Teorema 3.1.10, diperoleh bahwa $\lim(b^n) = 0$.

Secara khusus jika $b = 8$, maka $a = .25$, dan jika diberikan $\varepsilon = .01$, maka ketaksamaan sebelumnya menghasilkan $K(\varepsilon) = \frac{4}{.01} = 400$.

Bandingkan dengan Contoh 3.1.6(d), dimana kita peroleh $K = 25$, kita lihat metode estimasi ini tidak memberikan nilai terbaik dari K. Namun, untuk tujuan mentapkan limit, ukuran K tidak penting.

(c) Jika $c > 0$, maka $\lim\left(c^{1/n}\right) = 1$

Untuk kasus $c = 1$ mudah, karena $\left(c^{1/n}\right)$ adalah barisan konstan (1, 1, …), yang jelas konvergen ke 1.

Jika $c > 1$, maka $c^{1/n} = 1 + d_n$untuk suatu $d_n > 0$. Dengan menggunakan Ketaksamaan Bernouli 2.1.13(c),

$$c = (1 + d_n)^n \geq 1 + nd_n \; untuk \; n \in \boldsymbol{N}$$

Oleh karena itu kita punya $c - 1 \geq nd_n$, sehingga $d_n \leq \frac{c-1}{n}$.

Akibatnya $\left|c^{1/n} - 1\right| = d_n \leq (c-1)\frac{1}{n} \; untuk \; n \in N$

Dengan menggunakan Teorema 3.1.10 diperoleh $\lim\left(c^{1/n}\right) = 1$ dimana $c > 1$

Sekarang misalkan $0 < c < 1; then \; c^{1/n} = \frac{1}{1+h_n}$ untuk suatu $h_n > 0$. Dengan menggunakan ketaksamaan Bernoulli diperoleh

$$c = \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n} < \frac{1}{nh_n}$$

yang diikuti oleh $0 < h_n < \frac{1}{nc} \; untuk \; n \in N$. Karenanya kita peroleh

$$0 < 1 - c^{1/n} = \frac{h_n}{1+h_n} < h_n < \frac{1}{nc}$$

Sehingga

$$\left|c^{1/n} - 1\right| < \left(\frac{1}{c}\right)\frac{1}{n} \ untuk\ n \in N$$

Sekarang gunakan Teorema 3.1.10 untuk memperoleh lim $\left(c^{1/n}\right) = 1$ dimana $0 < c < 1$.

(d) Lim$\left(n^{1/n}\right) = 1$

Karena $n^{1/n} > 1\ for\ n > 1$, maka $n^{1/n} = 1 + k_n untuk\ k_n > 0\ bila\ n > 1$.

Akibatnya $n = (1 + k_n)^n\ for\ n > 1$. Dengan Teorema Binomial, jika $n > 1$ kita mempunyai

$$n = 1 + nk_n + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2 + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2,$$

Yang diikuti oleh

$$n - 1 \geq \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2$$

Karenanya $k_n^2 \leq \frac{2}{n}\ untuk\ n > 1$. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka menurut sifat Archimedes terdapat bilangan asli N_ε sehingga $\frac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon^2$. Hal ini akan diikuti oleh bila $n \geq sup\{2, N_\varepsilon\}$ maka $\frac{2}{n} < \varepsilon^2$, maka

$$0 < n^{1/n} - 1 = k_n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} < \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka lim$\left(n^{1/n}\right) = 1$

Soal Latihan Subbab 2.1

1. Tuliskan lima bilangan pertama dari barisan (x_n) untuk x_n berikut.

(a) $x_n \coloneqq \frac{(-1)^n}{n}$

(b) $x_n \coloneqq \frac{1}{n^2+2}$

2. Tentukan rumus ke-*n* untuk barisan berikut.

(a) 5, 7, 9, 11, ...

(b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

3. Untuk sebarang $b \in \mathbb{R}$, buktikan bahwa lim $\left(\frac{b}{n}\right) = 0$

4. Tunjukkan (menggunakan definisi limit barisan).

(a) lim $\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 2$

(b) lim $\left(\frac{n^2-1}{2n^2+3}\right) = \frac{1}{2}$

5. Tunjukkan bahwa lim $(x_n) = 0$ jika dan hanya jika lim $(|x_n|) = 0$.

2.2. Teorema Limit

2.2.1 Definisi

Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan terbatas bila terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$

Jadi, barisan $X = (x_n)$ terbatas jika dan hanya jika himpunan $\{x_n : n \in N\}$ terbatas di ℝ.

2.2.2 Teorema

Suatu barisan bilangan real yang konvergen adalah terbatas.

Bukti :

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real yang konvergen.

Berarti lim $(x_n) = x,\ x \in$ ℝ..

Karena lim $(x_n) = x$, maka untuk $\varepsilon \coloneqq 1$

Dengan menggunakan Teorema 3.1.6 (c), terdapat bilangan asli $K = K(1)$ sehingga bilangan bila $n \geq K$ maka $|x_n - x| < 1$.

Dengan menggunakan akibat 2.3.4 (a) tentang ketaksamaan segitiga

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x|$$
$$< 1 + |x|, \forall\, n \geq K$$
$$|x_n| < 1 + |x|, \forall\, n \geq K$$

Bagaimana degan $K - 1$ dan sebaliknya, maka :

Pilih $M \coloneqq sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{K-1}|, 1 + |x|\}$

$|x_n| \leq M,$ untuk semua $n \in N$ → Terbukti

2.2.3 Teorema

(a) Misalkan X = (x_n) dan Y = (y_n) barisan bilangan Real yang berturu-turut konvergen ke x dan y, serta c∈R. Maka barisan X+Y, X-Y, X.Y dan cX berturut-turut konvergen ke x+y, x-y, xy dan cx.

(b) Bila X = (x_n) konvergen ke x dan Z = (z_n) barisan tak nol yang konvergen ke z, dan z ≠ 0, maka barisan $\frac{X}{Z}$ konvergen ke $\frac{x}{z}$.

Bukti :

(a) Untuk membuktikan limit $(x_n + y_n)$ = x + y , kita perlu memperkirakan $|(x_n + y_n) - (x + y)|$. Untuk melakukan ini kita menggunakan ketimpangan segitiga 2.2.3 untuk memperoleh :

$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n + x) + (y_n + y)$

$\leq |x_n - x| + |y_n - y|$

Dari hipotesis, jika ε > 0 ada bilangan asli K_1 sedemikian sehingga n ≥ K_1 maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, juga terdapat $K_2 \in N$ sedemikian sehingga bila $n \geq K_2$ maka $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Bila K (ε) = sup $\{K_1, K_2\}$, maka untuk semua n ≥ K(ε)

$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$

$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$

Karena ε > 0 sebarang, kita oeroleh bahwa X + Y = $(x_n + y_n)$ konvergen ke $+y$. Argumen serupa dapat digunakan untuk membuktikan bahwa $X - Y = (x_n - y_n)\ konvergen\ ke\ x - y$

Untuk membuktikan bahwa $X.Y = (x_n y_n)$ konvergen ke $+y$. Argumen serupa dapat digunakan untuk membuktikan bahwa $X - Y = (x_n - y_n)\ konvergen\ ke\ x - y$.

Untuk membuktikan bahwa $XY = (x_n y_n)\ konvergen\ ke\ xy$ kita akan mengestimasi

$|x_n y_n - xy| = |(x_n y_n - x_n y)| + |(x_n y - xy)|$

$\leq |x_n(y_n - y)| + |(x_n - x)y|$

$= |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|$

Menurut teorema 3.2.2 terdapat bilangan real $M_1 > 0\ sehingga\ |x_n| \leq M_1$ untuk semua $n \in N\ dan\ tetapkan\ M = \sup\{M_1, |y|\}$ selanjutnya kita mempunyai : $|x_n y_n - xy| \leq M|y_n - y| + M|x_n - x|$

Dari kekonvergenan X dan Y kita dapat menyimpulkan jika $\varepsilon > 0$ diberikan, maka terdapat $K_1, K_{2,} \in N\ sehingga\ bila\ n \geq K_1\ maka\ |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$, dan bila $n \geq K_2\ maka\ |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. sekarang tetapkan $K(\varepsilon) = \sup\{K_1 K_2\}$, maka untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$ diperoleh

$|x_n y_n - xy| \leq M|y_n - y| + |x_n - x|$

$< M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon.$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang , hal ini membuktikan bahwa barisan $XY = (x_n y_n)$ konvergen ke xy.

Berikutnya akan dibuktikan untuk barisan Cx = (cx_n) konvergen ke cx

Apabila sebarang ε > 0, karena $x = (x_n)$ maka terdapat K ∈ N sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K\ berlaku\ |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, perlihatkan bahwa

$$\begin{aligned}|cx_n - x| &= |cx_n - x_n + x_n - x| \\ &\leq |cx_n - x_n| + x_n x \\ &= |x_n||c-1| + |x_n - x|\end{aligned}$$

Karena $x = (x_n)$, maka (x_n) terbatas, yaitu terdapat M > 0 sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$, untuk semua n ∈ N. Akibatnya

$$|x_n||c-1| + |x_n - x| < M|c-1| + \frac{\varepsilon}{2} = (M|C-1|) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Terbukti bahwa untuk setiap ε > 0 terdapat K ∈ N sedemikian sehingga untuk setiap n ≥ K berlaku $|cx_n - x| < \varepsilon$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $cx = (cx_n)$ konvergen ke cx.

(b) Berikutnya kita akan menunjukan jika $Z = (z_n)$ barisan tak nol yang konvergen ke limit z tak nol. Maka barisan $\left(\frac{1}{z_n}\right) dari\ konvergen\ timbal\ balik\ ke\ \frac{1}{z}\ \ (karena\ z \neq 0)$.

Pertama misalkan $= \frac{1}{2}|z| maka\ \alpha > 0$. karena $\lim(z_n) = z$ maka terdapat $K_1 \in N$ sehingga jika $n \geq K_1$ maka $|z_n - z| < \alpha$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga dari Corollary 2.2.4 (a) diperoleh

$-\alpha \leq -|z_n - z| \leq |z_n| - |z| untuk\ n \geq K_1$. Karena itu $\frac{1}{z_n} \leq \frac{1}{|z|}\ untuk\ n \geq K_1$, jadi kita mempunyai : $\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z - z_n}{z_n z}\right| = \frac{1}{|z_n z|}|z - z_n|$

$$\leq \frac{2}{|z_n|^2}|z - z_n| untuk\ semua\ n > K(\varepsilon).$$

Sekarang kita berikan $\varepsilon > 0$ maka terdapat $K_2 \in N$ sehingga bila $n \geq K_2$ maka

$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| \leq \varepsilon$ untuk semua $n > K(\varepsilon)$.

$karena\ \varepsilon > 0\ sebarang\ , jadi$ lim $\left(\frac{1}{z_n}\right) = \frac{1}{z}$.

$dengan\ mendefinisikan\ Y\ barisan\ \left(\frac{1}{y_n}\right)$ dalam menggunakan

$XY = \left(\frac{x_n}{z_n}\right)$ konvergen ke $x\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{x}{z}$, bukti (b) telah selesai.

2.2.4 Teorema. Bila X = (x_n) barisan konvergen dan $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$, maka

$$x = \lim (x_n) \geq 0$$

Bukti :

Andaikan x < 0, pilih $z = -x > 0$. Karena X konvergen ke x, maka terdapat $K \in N$, sehingga $x - \varepsilon <$ (x_n) $< + \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$.

Khususnya kita mempunyai $x_k < x + z = x + (-x) = 0$. Hal ini kontradiksi dengan hipotesis bahwa $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$. Jadi haruslah $x \geq 0$.

2.2.5 Teorema

Bila X = (x_n) dan Y = (y_n) barisan konvergen dan $x_n \geq y_n$ untuk semua $n \in N$, maka limit (x_n) $\geq$ limit (y_n).

Bukti :

Misalkan $z_n = y_n - x_n$ sehingga $Z = (z_n) = Y - x$ dan $z_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$. Dari teorema 3.2.4 dan 3.2.3 diperoleh $0 \geq \lim Z = \lim(y_n) - \lim (x_n)$.

Jadi $\lim (x_n) \leq \lim (y_n)$

Yang berikut mengatakan bahwa bila semua suku dari barisan konvergen memenuhi ketaksamaan $a \leq x_n \leq b$, maka limitnya memenuhi ketaksamaan yang sama.

2.2.6. Teorema

Bila $X = (x_n)$ suatu barisan konvergen dan $a \leq x_n \leq b$ untuk semua $n \in N$, maka $a \leq lim(x_n) \leq b$.

Bukti

(a) $lim(x_n) \leq b$

Dengan menggunakan teorema 3.2.5. Misalkan X dan B konvergen dan $lim\,(x_n) = x$ dan $lim(b_n) = b$.

$X - B$ konvergen dan $lim(x_n - b_n) = x - b$

Akan ditunjukkan $x - b \leq 0$ atau dengan kata lain $x \leq b$

Andaikan $x > b$ atau dengan kata lain $x - b > 0$. Maka untuk $\varepsilon = x - b$ terdapat $K \in N$ sehingga.

$|(x_n - b_n) - (x - b)| < x - b \;\forall\, n \geq K$,T. 3.2.3. (a)

$-(x - b) < x_n - b_n < x - b$,T. 2.2.2. (c) nilai mutlak

$(x - b) - (x - b) < x_n - b_n < (x - b) + (x - b)$,kedua ruas ditambah $(x - b)$

$0 < x_n - b_n < 2(x - b)$

Atau

$$b_n < x_n$$

Kontradiksi dengan $x_n \leq b_n$ untuk setiap $n \in N$

Jadi, pengandaian salah. Haruslah $x \leq b$, T. 3.2.5

Karena (b_n) merupakan barisan konstan $(b, b, b, \dots)$ yang tentu saja memiliki limit b. Menurut teorema 3.2.5, karena $x_n \leq b_n$ untuk setiap $n \in N$, maka berlaku $lim\, x_n \leq b$

(b) $a \leq lim(x_n)$

Dengan menggunakan teorema 3.2.5. Misalkan A dan X konvergen dan $lim\,(a_n) = a$ dan $lim(x_n) = x$.

$A - X$ konvergen dan $lim(a_n - x_n) = a - x$, T. 3.2.3. (a)

Akan ditunjukkan $a - x \leq 0$ atau dengan kata lain $a \leq x$

Andaikan $a > x$ atau dengan kata lain $a - x > 0$. Maka untuk $\varepsilon = a - x$ terdapat $K \in N$ sehingga.

$|(a_n - x_n) - (a - x)| < a - x \ \forall\, n \geq K$,T. 3.2.3. (a)

$-(a - x) < \ a_n - x_n < \ a - x$,T. 2.2.2. (c) nilai mutlak

$(a - x) - (a - x) < \ a_n - x_n < (a - x) + (\mathrm{a} - x)$,kedua ruas ditambah $(a - x)$

$0 < \ a_n - x_n < 2(a - x)$

Atau

$$x_n < a_n$$

Kontradiksi dengan $a_n \leq x_n$ untuk setiap $n \in N$

Jadi, pengandaian salah. Haruslah $a \leq x$, T. 3.2.5

Karena (a_n) merupakan barisan konstan $(a, a, a, \dots)$ yang tentu saja memiliki limit a. Menurut teorema 3.2.5, karena $a_n \leq x_n$ untuk setiap $n \in N$, maka berlaku $a \leq lim(x_n)$

Jadi, terbukti bahwa bila $X = (x_n)$ suatu barisan konvergen dan $a \leq x_n \leq b$ untuk semua $n \in N$, maka $a \leq lim(x_n) \leq b$.

2.2.7. Teorema Apit

Misalkan $X = (x_n), Y = (y_n)$, dan $Z = (z_n)$ barisan bilangan real dimana

$x_n \leq y_n \leq z_n$ untuk semua $n \in N$

dan $lim(x_n) = lim(z_n)$. Maka $Y = (y_n)$ konvergen dan $lim(x_n) = lim(y_n) = lim(z_n)$.

Bukti :

Misalkan $lim(x_n) = lim(z_n) = w$ dan $\varepsilon > 0$. karena $lim(x_n) = lim(z_n) = w$ maka terdapat $K \in N$ sehingga $n > K$

$$|x_n - w| < \varepsilon \text{ dan } |z_n - w| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x_n - w < \varepsilon \quad \text{dan } -\varepsilon < z_n - w < \varepsilon$$

$$w - \varepsilon < x_n < \varepsilon + w \text{ dan } w - \varepsilon < z_n < \varepsilon + w$$

Karena $x_n \leq y_n$ dan $y_n \leq z_n$ untuk setiap $n \in N$ (Diketahui dalam soal)

Maka untuk setiap $n \geq K$

$$w - \varepsilon < x_n \leq y_n \quad \text{dan} \quad y_n \leq z_n < \varepsilon + w$$

Sehingga,

$$w - \varepsilon < y_n < \varepsilon + w$$

$$|y_n - w| < \varepsilon$$

$$lim(y_n) = w \text{ konvergen}$$

Karena $lim(y_n) = w$ maka $lim(x_n) = lim(y_n) = lim(z_n)$

2.2.8 Contoh

a) Barisan (n) divergen.

Mengikuti Teorema 3.2.2 andaikan barisan $X = (n)$ konvergen, maka terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga $n = n < M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Tetapi hal ini melanggar sifat Archimedes 2.4.3.

b) Barisan $((-1)^n)$ divergen

Barisan ini terbatas $(ambil\ M = 1)$, sehingga kita tidak dapat menggunakan Teorema 3.2.2. Karena itu, andaikan $X = ((-1)^n)$ konvergen dan $a = lim\ X$. Misalkan $\varepsilon = 1$, maka terdapat K_1 sehingga

$$\left|(-1)^n - a\right| < 1 \text{ untuk semua } n \geq K_1$$

Tetapi bila n ganjil dan $n \geq K$, hal ini memberikan $|-1 - a| < 1$, sehingga $-2 < a < 0$ (Mengapa?). Sedangkan bila n genap dan $n \geq K$, hal ini memberikan $|1 - a| < 1$, sehingga $0 < a < 2$. Karena a tidak mungkin memenuhi kedua ketaksamaan tersebut, maka pengandaian bahwa X konvergen menghasilkan hal yang kontradiksi. Haruslah X divergen.

c) $\lim \left(\frac{2n+1}{n}\right) = 2$

Misalkan $X = (2)$ dan $Y = \frac{1}{n}$, maka $\left(\frac{2n+1}{n}\right) = X + Y$

Dengan menggunakan Teorema 3.2.3 (a) diperoleh bahwa $\lim (X + Y) = \lim X + \lim Y = 2 + 0 = 2$

d) $\lim \left(\frac{2n+1}{n+5}\right) = 2$

Karna barisan $(2n + 1)$ dan $(n + 5)$ tidak konvergen (mengapa?), kita tidak dapat mengguanakan Teorema 3.2.3(b) secara langsung. Tetapi jika kita menulis

$\frac{2n+1}{n+5} = \frac{2+1/n}{1+5/n}$,

Kita dapat menggunakan Teorema 3.2.3(b) ketika kita mengambil $X = (2 + 1/n)$ dan $Z = (1 + 5/n)$. (Selidiki terlebih dahulu syarat-syarat yang harus dipenuhi). Setelah $\lim X = 2$ dan $\lim Z = 1 \neq 0$, Selanjutnya kita peroleh $\lim((2n + 1)/(n+5)) = 2/1 = 2$

e) $\lim \left(\frac{2n}{n^2+1}\right) = 0$

Teorema 3.2.3(b) tidak dapat digunakan secara langsung, (Mengapa?) kita perhatikan

$$\frac{2n}{n^2 + 1} = \frac{2}{n + 1/n},$$

Tetapi Teorema 3.2.3(b) juga tidak dapat digunakan secara langsung disini, karena $(n + 1/n)$ tidak konvergen. (mengapa tidak?) tetapi jika kita menulis

$$\frac{2n}{n^2 + 1} = \frac{2/n}{n + 1/n^2},$$

Maka kita dapat menggunkan Teorema 3.2.3 (b) , ketika $\lim(2/\mathrm{n}) = 0$ dan $\lim(1 + 1/\mathrm{n}^2) = 1 \neq 0$, selanjutnya kita peroleh $\lim((2n)/(n^2 + 1)) = 0/1 = 0$

f) $\lim \left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$

Kita tidak dapat menggunakan 3.2.3(b) secara langsung, pada soal ini (n) tidak konvergen $[tidak\ juga\ pada\ (\sin n)]$. tidak terlihat bahwa memanipulasi aljabar secara sederhana akan memungkinkan kita untuk menggunakan teorema 3.2.3. Tetapi jika kita menuulis $-1 \leq \sin n \leq 1$, maka

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}, untuk\ semua\ n \in \mathbb{N}$$

Karenanya kita dapat menggunakan Teorema 3.2.7 untuk itu dapat diperoleh $\lim(\mathrm{n}^{-1} \sin \mathrm{n}) = 0$ (kita perhatikan bahwa Teorema 3.1.10 juga dapat kita gunakan pada hal ini).

Soal Latihan Subbab 2.2

1. Tentukan apakah barisan berikut konvergen atau divergen.

   (a) $x_n := \dfrac{n^2}{n+1}$. (b) $x_n := \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$.

   (c) $x_n := \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

2. Tunjukkan bahwa jika X dan Y barisan bilangan real sedemikian hingga X dan $X+Y$ konvergen, maka Y konvergen.

3. Tunjukkan bahwa barisan $\left((-1)^n n^2\right)$ tidak konvergen.

4. Diberikan $y_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (y_n) dan $\left(\sqrt{n}\, y_n\right)$ konvergen. Carilah nilai limitnya.

5. Jika $a > 0$, $b > 0$, tunjukkan bahwa $\lim\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right) = \dfrac{a+b}{2}$.

2.3. Barisan Monoton

2.3.1 Defenisi

Misalkan X = (x_n) barisan bilangan real. Barisan X dikatakan **naik** jika memenuhi ketidaksamaan

$$\boldsymbol{x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots}$$

Barisan X dikatakan **turun** jika memenuhi ketidaksamaan

$$\boldsymbol{x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots}$$

Barisan X dikatan **monoton** jika X naik atau turun

Ketiga barisan berikut naik:

$$(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots), \qquad (1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots),$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a^2}, \boldsymbol{a^3}, \dots, \boldsymbol{a^n}, \dots) \qquad if\ a > 1$$

Barisan-barisan berikut turun:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right), \qquad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right),$$

$$(b, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots) \qquad if\ 0 < b < 1$$

Kedua barisan berikut tak monoton:

$(+1, -1, +1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots)$, $(-1, +2, -3, \dots, (-1)^n \dots)$

tetapi barisan berikut pada akhirnya monoton:

$$(7, 6, 2, 1, 2, 3, 4, \dots) \qquad \left(-2, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right).$$

2.3.2 Teorema Kekorgenan Monoton Barisan bilangan real monoton konvergen jika dan hanya jika ia terbatas. Selanjutnya:

(a) Jika X = (x_n) naik terbatas, maka

$lim(y_n) - \ in\,\{y_n \,:\, n \,\epsilon\, N\}$.

(b) Jika $Y = (y_n)$ turun terbatas, maka

$lim(y_n) - \ in\,\{y_n \,:\, n \,\epsilon\, N\}$.

Bukti:

Telah dibuktikan pada Teorema 3.2.2 bahwa urutan konvergen harus dibatasi.

Sebaliknya, biarkan X menjadi monoton terbatas .Kemudian X menaik atau menurun

(a) Pertama kali lakukan kasus dimana $X = (x_n)$ adalah urutan, naik tebatas. Sejak X dibatasi, ada bilangan real M sehingga $x_n \leq M$ untuk semua $n \,\epsilon\, \boldsymbol{N}$. Menuut Properti Kelengkapan 2.3.6, supremum $x^* = \sup\,\{x_n \,:\, n \,\epsilon\, \boldsymbol{N}\,\}$ ada di **R;** kami akan tunjukkan bahwa $x^* = \lim(x_n)$.

Jika $\varepsilon > 0$ diberikan, maka $x^* - \varepsilon$ bukan atas atas dari himpunan $\{x_n \,:\, n \,\epsilon\, \boldsymbol{N}\}$**,** dan karenanya ada anggota himpunan x_K sehingga $x^* - \varepsilon < x_K$. Fakta bahwa X naik terbatas menyiratkan bahwa $x_K \leq x_n$ setiap kali n ≥ K, Sehingga

$x^* - \varepsilon < x_K \leq x_n \leq x^* < x^* + \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$.

Karena itu kami punya

$|x_n - x^*| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$.

Karena $\varepsilon > 0$ adalah arbiter, kami menyimpulkan bahwa (x_n) konvergen ke x^*

(b) Jika $Y = (y_n)$ adalah turun terbatas, maka jelas bahwa $X; = -Y = (-y_n)$ urutan peningkatan yang dibatasi. Itu ditunjukkan pada bagian

(1) bahwa $\lim\, X = \sup\,\{-y_n\!: n \,\epsilon\, N\}$. Sekarang $\lim X = -\lim Y$ dan juga, dengan latihan 2.4.4

(2) kita mempunyai

$\sup\{-y_n\!: n \,\epsilon\, N\} = -inf\,\{y_n\!: n \,\epsilon\, N\}$.

Karenanya $\lim Y = -\lim X = \inf\{y_n\!: n \,\epsilon\, N\}$.

Teorema Konvergensi Monoton menetapkan adanya batas dari monoton batasan. itu juga member kita cara menghitung batas quence asalkan kita dapat mengevaluasi suprenum dalam kasus

a) atau infimum dalam kasus

b) Terkadang sulit untuk mengevaluasi supremum ini (atau tidak maksimal), tetapi ketika kita tahu itu ada, seringkali mungkin untuk mengevaluasi batas dengan metode lain

2.3.3 Contoh

(a) $lim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$

Kita dapat menggunakan teorema 3.2.10 tetapi, kita akan menggunakan teori konvergensi Monotone. Jelaslah 0 adalah batas bawah dari himpunan $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}; n \in N\right\}$ dan tidaklah sulit untuk menunjukkan bahwa 0 adalah infimum dari himpunan $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}; n \in N\right\}$ oleh Karena itu $0 = lim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Di sisi lain, setelah kita tahu bahwa $X = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ terbatas dan tak naik, yanga mengakibatkan X konvergen ke bilangan real X. Karena $X = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ konvergen ke X, menurut teorema 3.2.3 bahwa X ... $X = \left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke $x^2 = 0$ yang mana $x = 0$

(b) Buktikan $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ untuk $n \in N$

Karena $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)} > x_n$, Kita lihat bahwa x_n adalah suatu barisan naik. Dengan teori konvergensi Monotone 3,3,2, pertanyaan apakah urutannya konvergen atau tidak dihasilkan oleh pertanyaan apakah barisan tersebut terbatas atau tidak. Upaya untuk menggunakan perhitungan numerik langsung untuk suatu dugaan mengenai kemungkinan terbatasnya barisan (x_n) mengarah pada frustrasi yang tidak meyakinkan. Sebuah komputer akan mengungkap perkiraan nilai $x_n \approx 11{,}4$ untuk $n = 50.000$ dan $x_n \approx 12{,}1$ untuk $n = 100.000$ Fakta numerik seperti itu mungkin membuat pengamat biasa menyimpulkan bahwa barisan ini terbatas.

Akan tetapi, barisan ini adalah divergent, yang dibentuk dengan mencatat bahwa

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{n}{2}$$

Karena (x_n) tidak dapat dibatasi, teorema 3.2.2 menyiratkan bahwa itu adalah divergent.

syarat untuk (x_n). meningkat sangat lambat. Misalnya, dapat diperlihatkan bahwa untuk mencapai, $x_n > 50$ akan mencakup sekitar 5.2×10^{21} tambahan, dan komputer normal melakukan 400 juta tambahan per detik menuntut lebih dari 400.000 tahun untuk melakukan perhitungan itu (ada 31.536.000 detik dalam setahun). Bahkan komputer super yang dapat melakukan lebih dari satu triliun detik tambahan, akan memakan waktu lebih dari 164 tahun untuk mencapai tujuan sederhana itu.

Urutan yang didefinisikan induktif harus diperlakukan secara berbeda. Jika indra seperti itu dikenal sebagai titik balik, maka nilai dari batas tersebut kadang-kadang dapat dicegah dengan menggunakan hubungan induktif.

Untuk contoh memisalkan bahwa konvergensi telah ditetapkan untuk urutan (x_n) didefenisikan dengan

$x_1 = 2, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{n}, n \in N$

Jika kita membiarkan $x = \lim(x_n)$ kemudian kita juga mempunyai $x = \lim(x_{n+1})$ karena 1 ekor (x_{n+1}) menyatu dengan limit yang sama. Lebih lanjut kita lihat bahwa $x_n \geq 2$ sehingga $x \neq 0$ untuk semua $n \in N$.

Karenanya kita boleh menggunakan teorema limit untuk mendapatkan urutan

$$x = \lim(x_{n+1}) = 2 + \frac{1}{\lim(x_n)} = 2 + \frac{1}{x}$$

Jadi, batas x adalah solusi persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 1 = 0$ dan karena x harus positif, kita menemukan bahwa urutan limitnya adalah $x = 1 + \sqrt{2}$

Tentu saja, masalah konvergensi tidak boleh diabaikan atau dianggap sepele untuk contoh jika kita asumsikan urutan (y_n) didefenisikan dari $y_1 = 1,\quad y_{n+1} = 2y_{n+1}$ adalah konvergen dengan limit y maka kita akan mendapatkan $y = 2y + 1$ sehingga $y = -1$ Tentu saja, ini tidak masuk akal.

Dalam contoh berikut, kami menerapkan metode ini batas mengevaluasi, tapi hanya setelah hati-hati menetapkan konvergensi menggunakan teori konvergensi Monotone. Contoh tambahan dari jenis ini akan diberikan dalam bagian 3.5.

2.3.6 Contoh

Misalkan $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ untuk $n \in N$ kita akan menunjukkan bahwa persamaan $E = e_n$ terbats dan tak menurun oleh karena itu adalah konvergen. Limit barisan ini dikenal dengan

Bilangan euler e, yang mempunyai nilai kira-kira 2,718 281 828 459…, yang mana dianggap sebagai bilangan dasar dari logaritma "natural".

Jika kita gunakan teorema binomial, kita mempunyai

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
$$= 1 + \frac{n}{1} . \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} . \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} . \frac{1}{n^3} + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1) \ldots 2.1}{n!} . \frac{1}{n^n}$$

Jika kita membagi kekuasaan n kedalam istilah pembilang koefisien binomial kita dapat

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Dengan cara yang sama kita mempunyai

$$e_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+!}\right)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Perhatikan bahwa ekspesi untuk e_n berisikan suku $n + 1$, sementara untuk e_{n+1} berisikan suku $n + 2$. Selain itu, setiap suku-suku yang muncul di e_n kurang atau sama dengan suku yang bersesuaian dalam e_{n+1}, dan e_{n+1} mempunyai lebih dari satu suku positif. Oleh kerena itu kita memiliki $2 \le e_1 < e_2 < \cdots < e_n < e_{n+1} < \cdots$, jadi suku-suku E adalah meningkat.

Untuk menunjukkan suku-suku E dibatasi atas, kita melihat bahwa jika $p = 1, 2, \ldots, n$ kemudian $\left(1 - \frac{p}{n}\right) < 1$. Selain itu $2^{p-1} \le p!$ $[lihat$ 1.2.4 $(e)]$ sehingga $\frac{1}{p!} \le \frac{1}{2^{p-1}}$

Oleh karena itu jika $n > 1$ maka kita mempunyai

$$2 < e_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Karena dapat dipastikan bahwa [lihat 1.2.4 (f)]

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

Kami menyimpulkan bahwa, $2 < e_n < 3$ untuk semua $n \epsilon N$. Teorema konvergensi Monotone menyiratkan bahwa barisan E konvergen ke angka nyata yang antara 2 dan 3. Kita defenisikan bilangan e untuk menjadi limit barisan ini.

Dengan meningkatkan perkiraan kita bisa menemukan perkiraan rasional yang lebih dekat ke e, tapi kita tidak bisa: menilai secara tepat, karena e adalah bilangan irasional.

Namun, ada kemungkinan untuk menghitung e ke banyak tempat desimal yang diinginkan. Pembaca harus menggunakan kalkulator (atau komputer) untuk menghitung e_n, dengan mengambil nilai n yang "besar".

Soal Latihan Subbab 2.3

1. Diberikan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} := 2 - \frac{1}{x_n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) terbatas dan monoton. Carilah nilai limitnya.
2. Diberikan $x_1 \geq 2$ dan $x_{n+1} := 1 + \sqrt{x_n - 1}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) turun dan terbatas ke bawah oleh 2. Carilah nilai limitnya.
3. Diberikan $A \subset \mathbb{R}$ tak berhingga yang terbatas ke atas dan misalkan $u := \sup A$. Tunjukkan bahwa terdapat barisan naik (x_n) dengan $x_n \in A$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $u = \lim(x_n)$.
4. Tentukan apakah barisan (y_n) konvergen atau divergen, dengan

$$y_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \quad \text{untuk } n \in \mathbb{N}.$$

2.4. Sub-Barisan dan Teorema Bolzano-Weierstrass

2.4.1 Definisi

Misalkan $X = (x_n)$ barisan dan $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, barisan bilangan asli yang naik. Maka barisan X' dalam R yang diberikan oleh $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ disebut subbarisan dari X.

Sebagai contoh, jika $X = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$, berikut ini adalah subbarisan dari

$X' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2K}, \ldots\right)$.

Dimana $n_1 = 2, n_2 = 4, \ldots, n_k = 2k, \ldots$

Subbarisan lain dari $X = \left(\frac{1}{n}\right)$ adalah sebagai berikut :

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2k-1}, \ldots\right), \left(\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{6!}, \frac{1}{(2k)!}\right).$$

Sedangkan yang berikut bukan subbarisan dari $X = \left(\frac{1}{n}\right)$:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots\right), \left(\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \ldots\right).$$

Tentu saja, sebarang ekor barisan merupakan subbarisan, ekor-m bersesuaian dengan barisan yang ditentukan dengan $n_1 = m + 1, n_2 = m + 2, \dots, n_k = m + k, \dots$

Tetapi tidak setiap subbarisan merupakan ekor barisan.

Subbarisan dari barisan konvergen juga konvergen ke limit yang sama.

2.4.2 Teorema

Jika suatu barisan biangan real $X = (x_n)$ konvergen ke x, maka sebarang subbarisan dari $X' = (x_{n_k})$ juga konvergen ke x.

Bukti :

misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan dan pilih bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\varepsilon)$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$. karena $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ adalah barisan bilangan real naik maka dibuktikan (dengan induksi) bahwa $n_k \geq k$. Dari sini, bila $k \geq K(\varepsilon)$, kita juga mempunyai $n_k \geq k \geq K(\varepsilon)$ dengan demikian $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. oleh karena itu suku barisan (x_{n_k}) juga konvergen ke x.

2.4.4 Teorema

Misalkan $X = (x_n)$ sebagai barisan bilangan real, maka pernyataan berikut ini ekuivalen:

(i) Barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke $x \in R$.

(ii) Ada $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian hingga untuk sembarang $k \in N$, terdapat $n_k \in N$ sedemikian hingga $n_k \geq k$ dan $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$.

(iii) Ada $\varepsilon_0 > 0$ dan suatu barisan bagian $X' = (x_{nk})$ dari X sedemikian hingga $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $k \in N$.

Bukti

(i)→(ii) Jika (x_n) tidak konvergen ke x, maka untuk suatu $\varepsilon_0 > 0$ tidak mungkin ditemukan bilangan asli k sedemikian hingga untuk setiap $n \geq k$ pada kondisi x_n berlaku $|x_n - x| < \varepsilon_0$. Akibatnya tidak benar bahwa setiap $k \in N$ untuk semua $n \geq k$ memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon_0$. Dengan kata lain untuk setiap $k \in N$ terdapat bilangan asli $n_k \geq k$ sedemikian hingga $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$.

(ii)→(iii) Diberikan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga memenuhi (ii) dan diberikan $n_1 \in N$ sedemikian hingga $n_1 \geq 1$ dan $|x_{n1} - x| \geq \varepsilon_0$. Selanjutnya diberikan $n_2 \in N$ sedemikian hingga $n_2 > n_1$ dan $|x_{n2} - x| \geq \varepsilon_0$; selanjutnya diberikan $n_3 \in N$ sedemikian hingga $n_3 > n_2$ dan $|x_{n3} - x| \geq \varepsilon_0$. Demikian seterusnya sehingga diperoleh suatu barisan bagian $X' = (x_{nk})$ dari X sehingga berlaku $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $k \in N$.

(iii)→(i) Misalkan $X = (x_n)$ mempunyai barisan bagian $X' = (x_{nk})$ yang memenuhi sifat (iii). Maka X tidak konvergen ke x, sebab jika konvergen ke x maka $X' = (x_{nk})$ juga konvergen ke x. Karena dari Teorema 3.4.2, barisan bagian X' juga konvergen ke x. Hal ini tidak mungkin, sebab $X' = (x_{nk})$ tidak berada dalam lingkungan $V_{\varepsilon 0}(x)$.

Karena semua subbarisan yang konvergen harus konvergen pada limit yang sama, kita mendapatkan hasil berikut pada bagian (i). Bagian (ii) diikuti dari fakta bahwa barisan konvergen yang terbatas.

2.4.5 Teorema Kriteria Divergen

Jika barisan $X = (x_n)$ bilangan real memenuhi salah satu dari sifat berikut, maka barisan X divergen.

(i) X mempunyai dua subbarisan konvergen $\mathrm{X}' = (\mathrm{x}_{\mathrm{nk}})$ dan $\mathrm{X}'' = (\mathrm{x}_{\mathrm{rk}})$ dengan limit keduanya tidak sama.

(ii) X tidak terbatas.

Bukti

(i) Penjelasan Teorema 3.4.5

Ada sebuah barisan $X = (x_n)$ dengan :

$X' = (x_{nk})$ merupakan subbarisan dari $X = (x_n)$ dan ada limitnya

$X'' = (x_{rk})$ merupakan subbarisan dari $X = (x_n)$ dan ada limitnya

Kedua subbarisan tersebut memiliki limit yang berbeda karena sebenarnya limit itu tunggal. $X = (x_n)$ divergen karena semua subbarisan yang konvergen harus konvergen pada limit yang sama.

Contoh

Jika $X = \{0,2,0,2,0,2,\dots\}$ maka subbarisan dari X tersebut adalah :

$$X' = \{0,0,0,\dots\} \to 0 \; dan \; L = 0$$

$$X'' = \{2,2,2,\dots\} \to 2 \; dan \; L = 2$$

Nilai limit kedua subbarisan dari $X = \{0,2,0,2,0,2,\dots\}$ berbeda sehingga $X = \{0,2,0,2,0,2,\dots\}$ divergen. Hal tersebut karena semua subbarisan yang konvergen harus konvergen pada limit yang sama.

(ii) Menggunakan pembuktian tidak langsung kontraposisi

Teorema 3.4.5 (ii) merupakan kontraposisi dari Teorema 3.2.2 (Jika suatu barisan bilangan real konvergen maka terbatas)

Pembuktian Teorema 3.2.2.

Misalkan $\lim(x_n) = x$ dan $\varepsilon = 1$. Dengan menggunakan teorema 3.1.6 (c), terdapat bilangan asli $K = K(1)$ sehingga bila $n \geq K$ maka $|x_n - x| < 1$. Dari sini, dengan menggunakan akibat 2.3.4 (a) tentang ketaksamaan segitiga, bila $n \geq K$ maka

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

Dengan menetapkan

$$M \coloneqq sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{K-1}|, 1 + |x|\}$$

Maka diperoleh $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$.

Kontraposisi dari Teorema 3.2.2 yaitu jika tidak terbatas maka barisan bilangan real divergen. $p \rightarrow q \cong \sim q \rightarrow \sim p$ artinya untuk membuktikan kebenaran $\sim q \rightarrow \sim p$ kita cukup membuktikan kebenaran $p \rightarrow q$.

2.4.6 Contoh

(a) Tunjukkan bahwa barisan $X = ((-1)^n)$ adalah divergen.

Barisan bagian $X' = ((-1)^{2n}) = (1,1,1,1, \dots)$ konvergen ke 1, dan barisan bagian $X'' = ((-1)^{2n-1}) = (-1. -1, -1, -1, \dots)$ konvergen ke -1. $X' dan\, X''$ mempunyai limit yang berbeda yaitu 1 dan -1. Untuk itu, kita simpulkan dari Teorema 3.4.5 (i) bahwa X adalah divergen.

(b) Tunjukkan bahwa barisan $\left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots\right)$ adalah divergen.

Namakan barisan tersebut dengan $Y = (y_n)$ dimana $y_{n1} = n$ jika n ganjil, dan $y_{n2} = \frac{1}{n}$ jika n genap. Maka diperoleh :

$Y = \left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots\right)$

$y_{n1} = \{1,3, \dots\}$ dengan n bilagan ganjil

$y_{n2} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ dengan n bilangan genap

Dengan mudah kita dapat melihat bahwa Y tidak terbatas. Sehingga berdasarkan Teorema 3.4.5 (ii), maka barisan tersebut divergen.

2.4.7 Teorema Barisan Bagian Monoton

Jika $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real,maka terdapat barisan bagian X yang monoton.

Bukti:

Untuk Tujuan pembuktian ini,kita akan berpendapat bahwa batas matematika X adalah “Puncak” jika $x_m \geq x_n$ untuk semua n seperti $n \geq m$ (Hal ini, x_m tidak pernah melewati oleh batas apapun yang mengikutinya dalam barisan).Catatan,dalam barisan menurun,setiap batas merupakan puncak,dimana terdapat barisan menaik,tidak batas merupakan puncak.

Pembuktian dibagi menjadi dua kasus,yaitu X mempunyai tak hingga banyak puncak dan X mempunyai berhingga banyak puncak.

Kasus 1*:* X mempunyai tak hingga banyak puncak.dalam kasus ini,kita tulis semua puncak urutan naik:x_{m_1}, x_{m_2}, ... , x_{m_k}, ... sejak setiap batas merupakan puncak,maka:

$$x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \cdots \geq x_{m_k} \geq \cdots$$

Oleh karena itu,barisan bagian (x_{m_k}) merupakan barisan bagian tak naik (monoton) dari X

Kasus 2: X mempunyai berhingga banyak (mungkin nol) puncak.Jika kita mengurutkan puncak-puncak tersebut dengan indeks naik: $: x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{mr}$ .Misalkan $s_1 = m_r + 1$ adalah indeks pertama setelah puncak terakhir.Karena x_{s_1} bukan puncak maka terdapat $s_2 \geq s_1$ sedemikian hingga $x_{s_2} \geq x_{s_1}$.Karena x_{s_2} juga bukan puncak maka terdapat $s_3 \geq s_2$ sedemikian hingga $x_{s_3} \geq x_{s_2}$.Jika kita meneruskan proses ini,kita peroleh barisan bagian tak turun (x_{s_n}) dari X

2.4.8 Teorema Bolzano-Weierstrass

Setiap bilangan real yang terbatas terdapat barisan bagian yang konvergen.

Bukti

Berdasarkan teorema barisan bagian monoton,maka barisan terbatas $X = (x_n)$ ini mempunyai sub barisan $X' = \left(x_{n_k}\right)$ yang monoton.Karena X terbatas,maka subbarisan inipun juga terbatas.Sehingga menurut teorema konvergensi monoton,subbarisan $X' = \left(x_{n_k}\right)$ konvergen.

Sebagai ilustrasi untuk menjelaskan teorema Bolzano-Weierstrass ini,perhatikan bahwa barisan $((-1)^n)$ merupakan barisan terbatas tetapi tidak konvergen.Dua barisan bagiannya yaitu $(x_{2n}) = ((-1)^{2n})$ dan $(x_{2n-1}) = ((-1)^{2n-1})$ konvergen,berturut-turut ke 1 dan -1.

2.4.9 Teorema

Misalkan X barisan terbatas dan $x \in R$ yang mempunyai sifat bahwa setiap sub-barisan konvergen dari X limitnya adalah x. Maka barisan X konvergen ke x.

Bukti

Misalkan $M > 0$, sehingga $\lceil x_n \rceil \leq M$ untuk semua $n \in N$. Andaikan X tidak konvergen ke x. Menurut kriteria divergensi 3.4.4 terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan sub-barisan $X' = (x_{n_k})$ dari X sehingga

$\left|X_{n_k} - x\right| \geq \varepsilon_0$, untuk semua $n \in N$. (1)

Karena X' subbarisan dari X, maka X' juga terbatas oleh M. Dari sini, menurut Teorema Bolzano-Weierstrass bahwa X' mempunyai barisan X'' yang konvergen. Tetapi X'' juga merupakan sub barisan dari X, karenanya harus konvergen ke x, menurut hipotesis. Akibatnya pada akhirnya X'' terletak di dalam lingkungan ε_0 dari x. Karena setiap suku dari X'' juga merupakan suku dari X', hal ini membawa kita ke suatu yang kontradiksi dengan (1).

Soal Latihan Subbab 2.4

1. Tunjukkan bahwa barisan berikut ini divergen.

   (a) $\left(1-(-1)^n+\frac{1}{n}\right)$. (b) $\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

2. Berikan contoh barisan tak terbatas yang memuat barisan bagian konvergen.

3. Diberikan barisan $X=(x_n)$ dan $Y=(y_n)$. Diberikan barisan $Z=(z_n)$ dengan definisi $z_1 := x_1$, $z_2 := y_1, \ldots$, $z_{2n-1} := x_n$, $z_{2n} := y_n$. Tunjukkan bahwa Z konvergen jika dan hanya jika X dan Y konvergen dan $\lim(x_n)=\lim(y_n)$.

4. Tentukan konvergensi dan limit barisan berikut.

   (a) $\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2\right)$. (b) $\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}\right)$.

2.5. Kriteria Cauchy

2.5.1 Defenisi

Barisan $X = (x_n)$ dikatakan **Barisan Cauchy** bila untuk setiap $\varepsilon_0 > 0$ terdapat $H(\varepsilon) \in N$ sedemikian sehingga bila $m, n \geq H(\varepsilon)$, maka x_m dan x_n memenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

3.5.2 Contoh

1. $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy

Ambil $\varepsilon > 0$, pilih $H = H(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $H > \frac{2}{\varepsilon}$. Maka jika $m, n \geq H$, kita mempunyai $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy.

2. $(1 + (-1)^n)$ bukan barisan Cauchy

Catatan: Negasi dari defenisi barisan cauchy

Ada $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga setiap H ada minimal satu $n \geq H$ dan minimal satu $m \geq H$ sedemikian sehingga $|x_n - x_m| \geq \varepsilon_0$.

Untuk $x_n = 1 + (-1)^n$, jika n genap, maka $x_n = 2$ dan $x_{n+1} = 0$.

Jika diambil $\varepsilon_0 = 2$, maka setiap H kita dapat memilih $n > H$ dan misalkan $m = n + 1$ dan kita dapatkan $|x_n - x_{n+1}| = 2 = \varepsilon_0$.

Jadi, barisan $(1 + (-1)^n)$ bukan barisan Cauchy.

2.5.3 Lemma

Jika $X = (X_n)$ barisan real yang konvergen, maka X *merupakan barisan Cauchy*.

Bukti :

Misalkan $x := \lim X$. Diberikan $\varepsilon > 0$ *maka terdapat* K (ε/2) sedemikian sehingga jika n $\geq K$ (ε/2). *maka* $|x_n - x| <$ε/2. *Oleh karena itu, Jika* $H(\varepsilon) := K$(ε/2) *dan jika* $n, m \geq H(\varepsilon)$ maka diperoleh :

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)|$$
$$\leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$ *maka terbukti bahwa* (x_n) *bar.san cauchy*.

Bukti

(→) Diketahui (x_n) konvergen $\lim(x_n) = x$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka ada bilangan asli K sehingga $|x_n - x| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq K$.

Jadi untuk setiap $n, m \geq K$ *berlaku* :

$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leq |x - x_n| + |x - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Terbukti (x_n) *barisan Cauchy*

(←)

Diberikan $\varepsilon > 0$ Sebarang, Karena (x_n) Cauchy maka ada bilangan asli K_1 sehingga $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n, m \geq K_1$. Berdasarkan Lemma 3.5.4, Barisan cauchy(x_n) ini terbatas dan berdasarkan teorema Balzano Wierestrass terdapat barisan bilangan (x_{rn}) yang konvergen.

Katakan $\lim(x_{rn}) = x^*$. Oleh karena itu terdapat bilangan asli K_2 sehingga

$|x_{rn} - x^*| < \varepsilon/2$ $untuk\ setiap\ rn \geq K_2$

$Bila\ diambil\ k := max\{K_{1,}, K_2\}\ maka\ keduanya\ berlaku$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \text{ dan } |x_{rn} - x^*| < \varepsilon/2\ untuk\ setiap\ n, m, rn \geq K$$

Khususnya untuk $m = K = rn\ berlaku$

$$|x_n - x_K| < \varepsilon/2\ dan\ |x_K - x^*| < \varepsilon/2\ \ untuk\ setiap\ n \geq K$$

Maka diperoleh untuk setiap $n \geq K\ berlaku$

$$|x_n - x^*| = |x_n - x_K + x_K - x^*|$$

$$\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$Yaitu\ (x_n)\ konvergen\ ke\ x^*$$

2.5.4 Lemma

Barisan Cauchy Terbatas

Bukti :

Diketahui $x := (x_n)\ barisan\ cauchy. Diberikan\ \varepsilon := 1. Jika\ H := H(1) dan\ n \geq +1$

Maka$|x_n - x_H| < 1.\ Selanjutnya\ menggunakan\ ketaksamaan\ segitiga$

$$diperoleh\ |x_n| \leq |x_H| + 1\ untuk\ semua\ n \geq H. Jika\ kita\ namakan$$

$$M := Sup\ \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{H-1}|, |x_H| + 1\}$$

Maka diperoleh $|x_n| \leq M\ untuk\ semua\ n \in N$

$$Misalkan\ (x_n)\ sebarang\ barisan\ cauchy$$

Ambil $\varepsilon = 1\ maka\ \exists\ K\ \epsilon\ N \ni |x_n - x_H| < 1, \quad m, n \geq H$

$$\big||x_n| - |x_H|\big| \leq |x_n - x_H| < 1, \qquad m, n \geq H$$

$-|x_n - x_H| \leq |x_H| - |x_n| \leq |x_n - x_H| < 1,\ m, n \geq$ (menggunakan pembuktian teorema 2.2.2 (c)

$$|x_H| - |x_n| \leq 1, \qquad m, n \geq H$$

$|x_n| \leq |x_H| + 1, \qquad m, n \geq H$ (ketaksamaan segitiga 2.2.3)

maka diperoleh :

$$|x_n| \leq |x_H| + 1, \qquad n \geq H$$

Maka M = Sup $\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{H-1}|, |x_H| + 1\}\ berlaku\ |x_n| \leq M, \forall_n \in N$

2.5.5 Kriteria Konvergensi Cauchy

Barisan bilangan real konvergen jika dan hanya jika merupakan barisan Cauchy.

Bukti

Lemma 3.5.3 telah membuktikan bahwa barisan konvergen merupakan barisan Cauchy. Sebaliknya, misalkan X = (X_n) barisan Cauchy ; kita akan tunjukkan bahwa X konvergen ke suatu bilangan. Pertama kita peroleh dari lemma 3.5.4 bahwa X terbatas. Karena itu, menurut teorema Bolzano Weistrass 3.4.8 terdapat sub barisan X = (X_{n_k}) dari X yang konvergen ke x^* suatu bilangan real. Kita akan melengkapi bukti dengan menunjukkan bahwa X konvergen ke x^*.

Karena X = (X_n) barisan Cauchy, untuk sebarang $\varepsilon < 0$ terdapat $H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in N$ sehingga bila n,m $\geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in N$, maka

$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Karena subbarisan X' = (x_{n_k}) konvergen ke x^*, maka terdapat bilangan asli $K \geq H(\frac{\varepsilon}{2})$ unsur dari $\{n_1, n_{2,\ldots\ldots}\}$ sehingga

$$|x_k - x^*| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena $K \geq H(\frac{\varepsilon}{2})$, lihat persamaan (1) m = K diperoleh

$|x_n - x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk $n \geq H(\frac{\varepsilon}{2})$

Karena itu jika $n \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ kita mempunyai

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |(x_n - x_k) + (x_k - x^*)| \\ &\leq |x_n - x_k| + |x_k - x^*| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $\lim(x_n) = x^*$

Berikut kita lihat beberapa contoh aplikasi dari kriteria Cauchy.

2.5.6 Contoh

(a) Misalkan X = x_n di definisikan

$$X_1 = 1 \quad X_2 = 2 \quad \text{dan} \quad X_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) \text{ untuk } n > 2$$

Dapat ditunjukkan dengan induksi bahwa $1 \leq x_n \leq 2$ untuk semua $n \in N.$ Beberapa perhitungan menunjukkan bahwa barisan x tidak monoton. Tetapi, karena suku-sukunya diperoleh dari rata-rata, mudah dilihat bahwa

$$|x_n + x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}\ untuk\ n \in N$$

(Buktikan dengan induksi) Jadi, bila m > n kita dapat menggunakan ketaksamaan segitiga untuk memperoleh

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m|$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}}$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}}$$

Karena itu bila diberikan $\varepsilon < 0$ dengan memilih n yang begitu besar sehingga

$\frac{1}{2^n} < \frac{3}{4}$ dan bila m > n , maka $(x_n - x_m) < \varepsilon$

Karenanya, X barisan Cauchy. Dengan menggunakan kriteria Cauchy 3.5.5 diperoleh barisan X konvergen ke suatu bilangan x.

Untuk mencari nilai x, kita harus menggunakan aturan untuk definisi $= \frac{1}{2}\ (x_{n-1} + x_{n-2})$ yang akan sampai pada kesimpulan $x = \frac{1}{2}\ (x + x)$, yang memang benar, tetapi tidak informative karena itu kita harus coba cara yang lain.

Karena X konvergen ke x, demikian juga dengan halnya subbahasan X` dengan indeks ganjil. Menggunakan induksi bahwa pembaca dapat menunjukkan bahwa [lihat 1.2.4 (+)]

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}$$
$$= 1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

Dari sini diperoleh bahwa (bagaimana?) $x = \lim X = \lim X\,` = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

2.5.7. Definisi

Kita katakan bahwa barisan X = (x_n) pada bilangan real adalah kontraktif jika ada sebuah konstanta C, 0 < C < 1, sedemikian sehingga

$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C\,|x_{n+1} - x_n|$

Untuk semua $n \in$ N. Bilangan C disebut dengan konstanta dari barisan kontraktif.

2.5.8. Teorema

Setiap barisan kontraktif adalah urutan Chauchy, dan sebelumnya adalah konvergen.

Bukti.

Jika kita berturut-turut menerapkan yang mendefinisikan kondisi untuk sebuah barisan kontraktif, kita dapat bekerja dengan cara kita kembali ke awal barisan sebagai berikut

$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C\,|x_{n+1} - x_n| \leq C^2\,|x_n - x_{n-1}|$

$$\leq C^3|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq C^n |x_2 - x_1|$$

Untuk $m > n$, kita memperkirakan $|x_m - x_n|$dengan terlebih dahulu menerapkan ketimpangan segitiga dan kemudian memakai rumus untuk jumlah perkembangan geometris (lihat 1.2.4 (f)). Hal ini memberikan

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (C^{m-2} + C^{m-3} + \cdots + C^{n-1}) |x_2 - x_1| \\ &= C^{n-1}\left(\frac{1 - C^{m-n}}{1 - C}\right)|x_2 - x_1| \\ &\leq C^{n-1}\left(\frac{1}{1 - C}\right)|x_2 - x_1| \end{aligned}$$

Karena $0 < C < 1$, kita tahu $\lim\ (C^n) = 0$ [lihat 3.1.11(b)]. Sebelumnya, kita menyimpulkan bahwa (x_n) adalah sebuh barisan Cauchy. Sekarang mengikuti dari konvergen chauchy 3.5.5. bahwa (x_n) adalah barisan konvergen.

Dalam proses menghitung limit dari barisan kontraktif, sering sangat penting untuk mengestimasi kesalahan pada tahap ke-n. Berikut ini kita memberikan dua estimasi: pertama melibatkan dua suku kata pertama dan n; dan kedua melibatkan selisih $x_n - x_{n-1}$

Soal Latihan Subbab 2.5

1. Berikan sebuah contoh barisan terbatas yang bukan barisan Cauchy.
2. Tunjukkan menggunakan definisi bahwa barisan berikut merupakan barisan Cauchy.

   (a) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. (b) $\left(1+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$.
3. Tunjukkan menggunakan definisi bahwa barisan berikut bukan barisan Cauchy.

   (a) $\left((-1)^n\right)$ (b) $\left(n+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ (c) $(\ln n)$
4. Diberikan barisan (x_n) dengan $x_n := \sqrt{n}$, tunjukkan bahwa $\lim|x_{n+1} - x_n| = 0$, tetapi bukan barisan Cauchy.
5. Diberikan barisan Cauchy (x_n) sedemikian hingga $x_n \in \mathbb{Z}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) selalu konstan.

2.6. Sifat Barisan Divergen

2.6.1. Definisi

Misalkan (x_n) suatu barisan bilangan real.

a) Kita katakana bahwa (x_n) menuju ke $+\infty$, dan ditulis $\lim\ (x_n) = +\infty$, jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ terdapat bilangan asli $\mathrm{K}(\alpha)$ sedemikian sehingga jika $n \geq \mathrm{K}(\alpha)$, maka $x_n > \alpha$.

b) Kita katakana bahwa (x_n) menuju ke $-\infty$, dan ditulis $\lim\ (x_n) = -\infty$, jika untuk setiap $\beta \in \mathbb{R}$ terdapat bilangan asli $\mathrm{K}(\beta)$ sedemikian sehingga jika $n \geq \mathrm{K}(\beta)$, maka $x_n < \beta$.

Kita katakana bahwa (x_n) **divergen murni** dalam hal kita mempunyai $\lim\ (x_n) = +\infty$ dan $\lim\ (x_n) = -\infty$.

Pembaca harus menyadari bahwa kita menggunakan simbol $+\infty$ dan $-\infty$ semata-mata sebagai notasi yang tepat dalam ungkapan diatas. Hasil yang telah dibuktikan pada bagian sebelumnya untuk konvensional $\lim\ (x_n) = L(for\ L \in \mathbb{R})$ mungkin tidak tetap benar ketika $\lim\ (x_n) = \pm\infty$.

2.6.2 Contoh

a) $\lim\ (n) = +\infty$,

Kenyataannya, jika diberikan $\alpha \in \mathbb{R}$, misal $\mathrm{K}(\alpha)$ sebarang bilangan asli sedemikian sehingga $\mathrm{K}(\alpha) > \alpha$

b) $\lim\ (n^2) = +\infty$,

Jika $\mathrm{K}(\alpha)$ suatu bilangan asli sedemikian sehingga $\mathrm{K}(\alpha) > \alpha$, dan jika $n \geq \mathrm{K}(\alpha)$ maka kita mempunyai $n^2 \geq n > \alpha$

c) Jika $c > 1$, maka $\lim\ (c^n) = +\infty$,

Misalkan $c = 1 + b$, dimana $b > \alpha$, jika diberikan $\alpha \in \mathbb{R}$, missal $\mathrm{K}(\alpha)$ suatu bilangan asli sedemikian sehingga $\mathrm{K}(\alpha) > \frac{\alpha}{b}$. Jika $n \geq \mathrm{K}(\alpha)$ maka menurut ketaksamaan Bernoulli

$$c^n = (1+b)^n \geq 1 + nb > 1 + \alpha > \alpha$$

Oleh karena itu $\lim\ (c^n) = +\infty$,

Barisan-barisan monoton khususnya adalah sederhana dalam memandang konvergennya. Kita telah melihat Teorema Konvergensi Monoton 3.2.2 bahwa suatu barisan monoton adalah konvergen jika dan hanya jika terbatas. Hasil berikut adalah suatu reformulasi dari hasil tersebut diatas.

2.6.3 Teorema

Suatu barisan bilangan real yang monoton divergen murni jika dan hanya jika barisan tersebut tidak terbatas.

(a) Jika (x_n) suatu barisan naik tak terbatas, maka lim $(x_n)\ = +\infty$

(b) Jika (x_n) suatu barisan turun tak terbatas, maka lim $(x_n)\ = -\infty$

Bukti :

a) Anggaplah bahwa (x_n) suatu barisan naik. Kita ketahui bahwa jika (x_n) terbatas, maka (x_n) konvergen. Jika (x_n) tak terbatas, maka untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ terdapat $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\alpha < x_{n(\alpha)}$. Tetapi karena (x_n), kita mempunyai $\alpha < x_n$ untuk semua $n \geq n(\alpha)$. Karena α sebarang, maka berarti $\lim(n) = +\infty$

   Bagian (b) dibuktikan dengan cara yang serupa.

b) Anggaplah bahwa (x_n) suatu barisan turun. Kita ketahui bahwa jika (x_n) terbatas, maka (x_n) konvergen. Jika (x_n) tak terbatas, maka untuk sebarang $\beta \in \mathbb{R}$ terdapat $n(\beta) \in N$ sedemikian sehingga $\beta > x_{n(\beta)}$. Tetapi karena (x_n), kita mempunyai $\beta > x_n$ untuk semua $n \geq n(\beta)$. Karena β sebarang, maka berarti $\lim(x_n) = -\infty$. [Sesuai dengan defenisi 3.6.1 (b)]

Teorema perbandingan berikut senantiasa akan dipergunakan dalam menunjukkan bahwa suatu barisan divergen murni. [Pada kenyataannya, tidak digunakan secara implisit dalam contoh 3.6.2 (c)].

2.6.4. Teorema

Misalkan (x_n) dan (y_n) dua barisan bilangan real dan anggaplah bahwa $(1)\ x_n\ \leq y_n$ untuk semu$a\ \ n \in \mathbb{N}$

(a) Jika $\lim(x_n)\ = +\infty$, maka $\lim(y_n) = +\infty$

(b) Jika $\lim(y_n) = -\infty$, maka $\lim(x_n)\ \ = -\infty$

Bukti :

a) Jika lim $(x_n)\quad = +\infty$, dan jika diberikan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka terdapat bilangan asli $K(\alpha)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\alpha)$, maka $\alpha < x_n$. Mengingat (1) , berarti $\alpha < y_n$ untuk semua $n \geq K(\alpha)$. Karena α sebarang, maka ini menyatakan bahwa $\lim(y_n) = +\infty$.

   Pembuktian bagian (b) dilakukan dengan cara yang serupa.

b) Jika lim $(y_n) = -\infty$, dan jika diberikan $\beta \in \mathbb{R}$, maka terdapat bilangan asli $K(\beta)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\beta)$, maka $\beta > y_n$. Mengingat (1) , berarti $\beta < x_n$ untuk semua $n \geq K(\beta)$. Karena β sebarang, maka ini menyatakan bahwa $\lim(x_n) = -\infty$.

Remakkan:

a) Teorema 3.6.4 pada akhirnya benar jika syarat (1) pada akhirnya benar; yaitu, jika terdapat $m \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x_n \le y_n$ untuk semua $n \ge m$.

b) Jika syarat (1) dari teorema 3.6.4 memenuhi dan jika $\lim(y_n) = +\infty$, tidak mesti berlaku bukan $\lim(x_n) = +\infty$. Serupa juga, jika (1) dipenuhi dan jika $\lim(x_n) = -\infty$, belum tentu berlaku $\lim(y_n) = -\infty$. Dalam pemakaian teorema 3.6.4 untuk menunjukkan bahwa suatu barisan menuju ke $+\infty$ [atau ke $-\infty$] kita perlu untuk menunjukkan bahwa suku-suku dari barisan ini adalah pada akhirnya lebih besar dari [atau lebih kecil] atau sama dengan suku-suku barisan lain yang bersesuaian dimana barisan lain kita ketahui bahwa menuju ke $+\infty$ [atau ke $-\infty$]

Karena kadang-kadang sangat sulit untuk memperlihatkan ketaksamaan sebagaimana (1), maka "Teorema Perbandingan Limit" berikut masing-masing lebih tepat untuk digunakan daripada Teorema 3.6.4.

2.6.5 Teorema. Misalkan (x_n) dan (y_n) dua barisan bilangan real positif dan anggaplah bahwa untuk suatu $L \in R, L > 0$, kita mempunyai

(2) $$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = L$$

Maka $\lim(x_n) = +\infty$ jika dan hanya jika $\lim(y_n) = +\infty$

Bukti:

Jika (2) berlaku, maka terdapat $K \in N$ sedemikian sehingga

$$\frac{1}{2}L < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}L \text{ untuk semua } n \ge K$$

Dari sini kita mempunyai $\left(\frac{1}{2}L\right)y_n < x_n < \left(\frac{3}{2}L\right)y_n$ untuk semua $n \ge K$. Sekarang kesimpulan didapat dari suatu modifikasi kecil teorema 3.6.4 detailnya ditinggalkan untuk dikerjakan oleh pembaca.

Pembaca dapat menunjukkan bahwa konklusi tidak berlaku jika $L = 0$ atau $L = +\infty$. Akan tetapi ada suatu hasil parsial belum dapat ditunjukkan dalam kasus-kasus ini, seperti telah diperlihatkan dalam latihan.

Soal Latihan Subbab 2.6

1. Tunjukkan bahwa jika (x_n) barisan tak terbatas, maka (x_n) memuat barisan bagian yang divergen proper.
2. Tunjukkan bahwa jika $x_n > 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$.
3. Tentukan apakah barisan berikut ini divergen proper.
   (a) $(\sqrt{n})$.
   (b) $(\sqrt{n+1})$.
   (c) $(\sqrt{n-1})$.
   (d) $\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)$.
4. Diberikan (x_n) barisan divergen proper dan diberikan (y_n) sedemikian hingga $\lim(x_n y_n) \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa (y_n) konvergen ke 0.

2.7. Pengantar Deret Tak Hingga

2.7.1 Definisi

Jika $X := (x_n)$ adalah sebuah barisan bilangan di R, maka deret tak hingga (atau sederhananya deret) yang dihasilkan oleh X adalah barisan $S := (s_k)$ yang ditentukan oleh

$$s_1 := x_1$$
$$s_2 := s_1 + x_2 \qquad (= x_1 + x_2)$$
$$\ldots\ldots.$$
$$s_k := s_{k-1} + x_k \qquad (= x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$$

Angka x_n disebut ketentuan deret dan angka s_k disebut jumlah parsial dari nilai deret ini. jikalim S ada, kita katakan bahwa deret ini konvergen dan sebut ini batas jumlah atau nilai deret. jika limit ini tidak ada, kita katakan bahwa deret s divergen.

lebih mudah menggunakan simbol seperti

(2) $\qquad \sum(x_n)$ atau $\sum x_n$ atau $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

untuk menunjukkan kedua deret S tak hingga yang dihasilkan oleh barisan $X = (x_n)$ dan juga untuk menunjukkan nilai lim S, dalam hal ini limit ada. Demikian symbol dalam (2) dapat dianggap hanya sebagai cara memamerkan deret tak terbatas yang konvergensi atau divergensinya harus diselidiki. dalam praktiknya, penggunaan ganda notasi ini tidak menyebabkan kebingungan, asalkan dipahami bahwa konvergensi (atau divergensi) dari seri harus ditetapkan.

Sama seperti barisan dapat diindeks sehingga elemen pertama bukan x_1, tetapi $x_{0,}$ atau x_5 atau $x_{99,}$ kita akan menunjukkan deret memiliki angka-angka ini sebagai elemen pertama dari symbol

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad atau \quad \sum_{n=5}^{\infty} x_n \quad atau \quad \sum_{n=99}^{\infty} x_n$$

Perlu dicatat bahwa ketika istilah pertama dalam seri adalah x_N, maka jumlah parsial pertama dilambangkan oleh s_N.

Peringatan. Pembaca harus menjaga agar tidak membingungkan kata "barisan" dan “deret”. dalam bahasa non-matematika, kata-kata ini dapat dipertukarkan; namun, dalam matematika, kata-kata ini bukan sinonim. memang, deret adalah barian $S = (s_k)$ yang diperoleh dari barisan tertentu $X = (x_n)$ sesuai dengan prosedur khusus yang diberikan dalam definisi 3.7.1

2.7.3 Teorema (the nth term test)

Jika deret $\sum Xn$ konvergen, maka lim (*Xn)* = 0

Bukti:

Dengan menggunakan defenisi 3.7.1. $\sum Xn$ konvergen apabila lim (*s_k)* ada. Karena $Xn = |S_n - S_{n-1}|$.

Maka $\lim(X_n) = \lim(S_n) - \lim(S_{n-1}) = 0$ **(terbukti)**

2.7.4 Teorema Kriteria Chauchy

Deret $\sum Xn$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap ε > 0 terdapat M (ε) ∈ N, sedemikian hingga jika m > n > M (ε), maka:

$$|\boldsymbol{S_m - S_n}| = |\boldsymbol{x_{n-1} + x_{n+2} + \cdots + x_m < \varepsilon}$$

Bukti:

Diketahui, X_n= X = S merupakan barisan chauchy.

Diberikan ε > 0 terdapat M (ε) ∈ N, sedemikian sehingga jika m $>$ n $\geq$ M (ε), maka $\left|S_m - S_n\right| = \left|X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_m\right| < \varepsilon$

Karena berlaku untuk berang ε > 0, maka terbukti $\sum Xn$ barisan Cauchy dengan demikian merupakan konvergen dengan teorema 3.5.5

2.7.5 Teorema

Diberikan (x_n) barisan bilangan real nonnegatif. Maka deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika barisan S = (s_k) dari jumlahan parsialnya terbatas.

Dalam hal ini,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = lim(s_k) = \sup\{s_k : k \in \mathrm{N}\}$$

Bukti.

Karena $x_n \geq 0$, maka barisan jumlahan parsial S naik monoton, yaitu:

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_k \leq \cdots.$$

Menggunakan Teorema 3.3.2 (a)

Jika $X = (x_n)$ naik (monoton) dan terbatas ke atas, maka $X = (x_n)$ konvergen dengan $lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathrm{N}\}$. Sehingga jika barisan S = (s_k) konvergen berlaku juga $lim(s_k) = \sup\{s_k : k \in \mathrm{N}\}$

Karena S = (s_k) terbatas ke atas maka terdapat M ∈ N sedemikian hingga $s_k \leq$ M untuk semua k ∈ N. Kita namakan A $= \{s_k : k \in \mathrm{N}\}$, maka A ⊂ ℝ terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut sifat lengkap ℝ, maka supremum A ada karena terbatas atas, kita namakan S $= \sup A$. Diambil $\varepsilon > 0$ maka K ∈ N sedemikian hingga $s - \varepsilon < s_k \leq s$. Karena S naik monoton, maka untuk k ≥ K berlaku

$$s - \varepsilon < s_k < s + \varepsilon \iff |s_k - s| < \varepsilon$$

Jadi, S = (s_k) konvergen ke $S = lim(s_k) = \sup\{s_k : k \in \mathrm{N}\}$

Sehingga,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = lim(s_k) = \sup\{s_k : k \in \mathrm{N}\}$$

2.7.6 Contoh

(a) Deret geometri dikatakan divergen jika $|r| \geq 1$.

Ini mengikuti dari fakta bahwa istilah r^n tidak mendekati 0 saat $|r| \geq 1$

Berdasarkan sifat deret geometri, jika $|r| \geq 1$ maka barisan $\{r^n\}$ divergen karena $\lim_{n \to \infty} r^n = \infty$ maka deretnya juga divergen.

(b) Deret harmonik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen

Karena istilah $\frac{1}{n} \to 0$, kita tidak dapat menggunakan *The nrt Term Test* 3.7.3. untuk menetapkan divergensi ini. Namun, terlihat dalam contoh 3.3.3 (b) dan 3.5.6 (c) bahwa urutan jumlah parsial tidak dibatasi. Oleh karena itu, mengikuti dari teorema 3.7.5 bahwa deret harmonik divergen. Bagian ini dikenal dengan pertumbuhan yang sangat lambat dari jumlah parsialnya (lihat diskusi dalam contoh 3.3.3 (b)) dan juga untuk berbagai bukti divergennya. Ini merupakan bukti kontradiksi. Jika kita mengansumsikan bagian konvergen ke bilangan S, maka kita mendapatkan

$$
\begin{aligned}
S &= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)+\cdots \\
&> \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right)+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \\
&= S
\end{aligned}
$$

Kontrakdiksi S > S menunjukkan asumsi konvergen salah dan deret harmonik harus divergen.

(c) Deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergen

Karena jumlahan parsialnya monoton, maka cukup ditunjukkan bahwa barisan bagian (s_k) terbatas. Jika $k_1 = 2^1-1=1$, maka $s_{k1}=1$. Jika $k_2 = 2^2-1=3$, maka

$$
s_{k2} = \frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right) < 1+\frac{2}{2^2} = 1+\frac{1}{2'}
$$

dan jika $k_3 = 2^3-1=7$, maka diperoleh

$$
s_{k_3} = s_{k_2}+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right) < s_{k_2}+\frac{4}{4^2} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}
$$

Menggunakan induksi matematik, diperoleh bahwa jika $k_j := 2^j-1$, maka

$$
0 < s_{k_j} < 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}
$$

Karena ruas kanan merupakan jumlahan parsial dari deret geometri dengan r = $\frac{1}{2}$, maka $\lim(s_k) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 2$, dan teorema 3.7.5 menunjukkan deret tersebut konvergen.

Soal Latihan Subbab 2.7

1. Tunjukkan bahwa

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}=\frac{1}{\alpha}>0$, jika $\alpha>0$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$.

2. Jika $\sum x_n$ dan $\sum y_n$ konvergen, tunjukkan bahwa $\sum(x_n + y_n)$ konvergen.

3. Berikan contoh deret konvergen $\sum x_n$ dan deret divergen $\sum y_n$ sedemikian hingga $\sum(x_n + y_n)$ konvergen. Jelaskan.

4. (a) Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ divergen.

   (b) Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ konvergen.

5. Jika $\sum a_n$ dengan $a_n > 0$ konvergen, maka apakah $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ juga konvergen? Tunjukkan atau beri contoh penyangkalnya jika tidak terbukti.

BAB III

LIMIT

3.1. Limit Fungsi

3.1.1 Definisi

Ambil $A \subseteq \boldsymbol{R}.$ Sebuah titik c $\in \boldsymbol{R}$ adalah titik kumpul dari A jika untuk setiap $\delta > 0$ ada paling sedikit satuu titik $x \in A, x \neq c$ dimana $|x = c| < \delta$

Definisi ini diartikan dengan cara lain dengan bahasa lain seperti : sebuah titik c adalah titik kumpulan himpunan A jika setiap lingkungan $-\delta$ $V_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$ dari c memuat paling sedikit satu titik dari A yang berbeda dengan c.

Catatan

Titik c mungkin saja anggota A maupun tidak, tapi bahkan jika itu ada di A, itu dihiraukan dalam menentukan apa itu merupakan titik kumpul dari A atau bukan, karena secara eksplisist kita membutuhkan ada titik di $V_\delta\,(c) \cap A$ yang berbeda dari c untuk c menjadi titik kumpul dari A

Untuk contoh Jika $A := (1,2)$, maka titik 1 bukanlah titik kumpul A, jika memilih $\delta := \frac{1}{2}$ memberikan lingkungan dari 1 yang tidak memuat titik adari A yang berbeda dengan 1. Hal juga sama juga terjadi untuk titik 2, jadi A tidak punya titik kumpul.

3.1.2 Teorema

Sebuah angka c $\in R$ adalah titik kumpul daru subset A dari R jika dan hanya jika ada sebuah barisan (a_n) di A dimana lim $(a_n) = c$ dan $a_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

Bukti

Jika c adalah titik kumpul dari A, maka untuk sembarang n $\in \mathbb{N}$ lingkungan (1/n) $V_{\frac{1}{n}}(c)$ memuat paling sedikit satu titik a_n di A yang berbeda dengan c. Maka, $a_n \in A, a_n \neq c$, dan $|a_n - c| < 1/n$ mengakibatkan lim $(a_n) = c$

Konversnya, jika ada sebuah barisan (a_n) di A\{c} dengan lim$\,(a_n) = c$, maka untuk sembarang $\delta > 0$ dan K sedemikian rupa sehingga n $\geq K, maka\ a_n \in$ (c), oleh karenanya lingkungan-δ $V_\delta(c)$ dari c memuat a_n, untuk n $\geq K$, dimana pada A dan berbeda dengan c.

3.1.3 Contoh

(a) Untuk interval terbuka $A_1 := (0, l)$, setiap titik interval tertutup [0, 1] adalah titik kelompok dari A_1. Perhatikan bahwa titik 0,1 adalah titik kelompok dari A_1, tetapi bukan milik A_1. Semua poin dari A_1 adalah titik-titik kelompok dari A_1.

(b) Himpunan terbatas tidak memiliki titik kelompok.

(c) Himpunan tak terbatas $\mathbb{N}$ tidak memiliki titik kelompok.

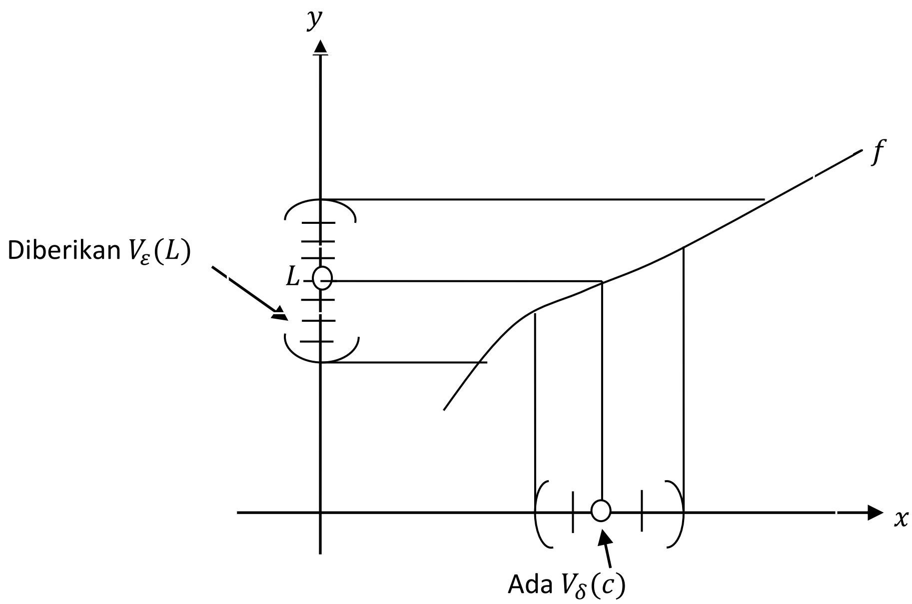
(d) Himpunan $A_4 := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ hanya memiliki titik 0 sebagai titik kelompok. Tidak ada poin dalam A_4 adalah titik kelompok dari A_4.

(e) Jika I: = [0, 1], maka himpunan $A_5 := I \cap \mathbb{Q}$ terdiri dari semua angka rasional di I. Ini mengikuti dari Teorema Kepadatan 2.4.8 bahwa setiap titik di I adalah titik kelompok di A_5.

Setelah membuat cara yang singkat ini, sekarang kita kembali ke konsep limit fungsi di titik kelompok domainnya.

Definisi Limit

Berikut ini kita akan menyajikan definisi limit dari suatu fungsi pada suatu titik.



Gambar 3.1.1 ***Limit dari f pada c adalah L***

3.1.4 Definisi

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, dan misalkan c adalah titik kelompok A. Untuk fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, bilangan asli L dikatakan sebagai limit f pada c jika, mengingat setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ seperti itu bahwa jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Keterangan

(a) Karena nilai δ biasanya tergantung di ε, kita terkadang akan menulis $\delta(\varepsilon)$ bukannya δ untuk menekankan ketergantungan ini.

(b) Ketidaksamaan $0 < |x - c|$ setara dengan mengatakan $x \neq c$

Jika L adalah limit *f* pada *c*, maka kita juga mengatakan bahwa *f* menyatu dengan L pada c. Kita sering menulis

$L = \lim_{x \to c} f(x)$ atau $L = \lim_{x \to c} f$

Kami juga mengatakan bahwa "*f*(*x*) mendekati *L* sebagai *x* mendekati *c*". (Tetapi perlu dicatat bahwa poin sebenarnya tidak bergerak kemana-mana) Simbolnya yaitu :

$f(x) \to L$ sebagai $x \to c$

Kadang-kadang juga digunakan untuk mengungkapkan fakta bahwa *f* memiliki limit L pada *c*. Jika limit *f* pada *c* tidak ada, kita katakan bahwa *f* berbeda di *c*.

Hasil pertama kita adalah bahwa nilai L dari limit tersebut ditentukan secara unik. Keunikan ini bukan bagian dari definisi limit, tetapi harus disimpulkan.

3.1.5 Teorema

Jika $f : A \to \mathbb{R}$ dan jika c adalah suatu titik cluster dari A, maka f hanya dapat memiliki satu limit pada c.

Bukti

Misalkan bilangan L dan L' memenuhi Definisi 4.1.4. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, maka $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Serta juga terdapat $\delta'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ sedemikian sehingga jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, maka $|f(x) - L'| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Sekarang misalkan $\delta := \inf\{\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \delta'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\}$. Maka jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, Ketidaksamaan Segitiga tersebut menyiratkan bahwa

$$|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ dapat berubah, kita menyimpulkan bahwa $L - L' = 0$, sehingga $L = L'$.

Definisi dari limit dapat menjadi sangat mudah untuk dijelaskan dalam terminologi dari lingkungan (lihat gambar 4.1.1). Kita dapat mengamati karena

$V\delta\ (c) = (c - \delta, c + \delta) = \{x : |x - c| < \delta\}$,

ketidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$ adalah setara dengan mengatakan bahwa $x \neq c$ dan x milik lingkungan-δ $V\delta$ (c) dari c. Sama halnya, ketidaksamaan $|f(x) - L| < \varepsilon$ adalah setara dengan mengatakan bahwa $f\ (x)$ termasuk dalam lingkungan-ε V ε(L) dari L. Dengan cara ini, kita telah memperoleh hasil. Pembaca harus menulis argumen terperinci untuk menetapkan teorema.

3.1.6 Teorema

Misalkan $f: A \to \mathbb{R}$ dan misalkan c adalah titik cluster dari A. Maka pernyataan berikut setara dengan.

(i) $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

(ii) Diberikan lingkungan- ε Vε (L) dari L, maka terdapat lingkungan- δ Vδ (c) dari c sedemikian sehingga jika $x \neq c$ adalah titik di Vδ (c) $\cap A$, maka $f(x)$ milik Vε (L).

Kita sekarang memberikan beberapa contoh yang menggambarkan bagaimana definisi dari limit diterapkan.

Bukti

Syarat i untuk membuktikan syarat ii

Anggaplah $\lim_{x\to c} f(x) = L$, artinya bahwa $f(x)$ mempunyai limit L pada c, dan memenuhi definisi 4.1.4.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$ yang merupakan unsur dalam lingkungan- ε $V\varepsilon(c)$ dari c dengan $x \neq c$, akibatnya nilai $f(x)$ termasuk dalam lingkungan- ε $V\varepsilon(L)$ dari L. Dengan cara lain dapat kita katakan bahwa ketidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$, sama dengan mengatakan bahwa $x \neq c$ dengan x merupakan unsur lingkungan-δ Vδ (c) dari c dimana $f(x)$ juga termasuk dalam lingkungan-ε V ε(L) dari L jika dan hanya jika $|f(x) - L| < \varepsilon$. Jadi dapat disimpulkan bahwa jika $x \in A$ memenuhi $0 < |x - c| < \delta$, maka $f(x)$ memenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$ sehingga $f(x)$ termasuk dalam lingkungan- ε $V\varepsilon(L)$ dari L. \

Syarat ii untuk membuktikan syarat i

Karena syarat ii telah dibuktikan dan dinyatakan terbukti, maka kita dapat menggunakannya untuk membuktikan syarat i.

Definisi limit dapat dituliskan dengan lingkungan-δ Vδ (c) $= (c - \delta, c + \delta)$ juga berlaku lingkungan-ε Vε (L) $= (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Selanjutnya *Perhatikan teorema 4.1.6 (pembuktian syarat ii).* Definisi limit yang telah dituliskan diatas berakibat pada syarat ii jika x masuk dalam Vδ (c), dimana $x \in A$ dan $x \neq c$, maka $f(x)$ termasuk dalam Vε (L).

Oleh karena itu, *berdasarkan definisi 4.1.4, f* mempunyai limit L pada c. Sehingga dapat dituliskan $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

3.1.7 Contoh

(a) $\lim_{x \to c} b = b$

Untuk lebih explisit misalkan *f(x)* := b untuk x ∈ ℝ. Kita akan menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = b$. Jika diberikan ε > 0, diperoleh δ := 1. (faktanya, beberapa δ positif akan memenuhi persamaan). Kemudian, jika $0 < |x - c| < 1,$ kita memiliki $|f(x) - c = |b - b| < \varepsilon.$ Karena ε > 0 memenuhi, maka dapat kita simpulkan dari Defenisi 4.1.4 bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = b.$

(b) $\lim_{x \to c} x = c$

Misalkan $g(x) \coloneqq x$ untuk semua x ∈ ℝ. Jika ε > 0, kita pilih δ(ε). Jika $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, diperoleh $|g(x) - c| = |x - c| < \varepsilon$. Karna ε > 0 memenuhi, kita simpulkan bahwa $\lim_{x \to c} x = c$

(c) $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$

misalkan $h(x) \coloneqq x^2$ untuk semua x ∈ ℝ. Kita akan membuktikan selisih dari $|h(x) - c^2| = |x^2 - c^2|$

kurang dari a yang telah ditentukan sebelumnya ε > 0 dengan mengambil x mendekati c. Dengan demikian kita mengetahui bahwa $x^2 - c^2 = (x - c)(x + c)$. Terlebih,jika $|x - c| < 1,$ maka $|x| < |c| + 1 \; sehinga \; |x + c| \leq |x| + |c| < 2|c| + 1$

untuk itu, jika $|x - c| < 1$, diperoleh

(1) $$|x^2 - c^2| = |x + c||x - c| < (2|c| + 1)|x + 1|$$

Terlebih bentuk terakhir ini akan kurang dari ε yang ditentukan kita ambil $|x - c| < \varepsilon/(2|c| + 1)$. Akibatnya jika kita memilih

$$\delta(\varepsilon) \coloneqq \inf\left\{1, \frac{\varepsilon}{(2|c| + 1)}\right\},$$

Kemudian jika $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, akan menyebabkan $|x - c| < c$ sehingga (1) benar. Dan jika $|x - c| < \varepsilon/(2|c| + 1)$ maka

$|x^2 - c^2| < (2|c| + 1)|x + 1) < \varepsilon.$

Karena kita dapat memilih $\delta(\varepsilon) > 0$ untuk sebarang $\varepsilon > 0$, dapat kita simpulkan bahwa $\lim_{x \to c} h(x) = \lim_{x \to c} x^2 = c^2$

(d) $\lim_{x\to c}\frac{1}{x}=\frac{1}{c}\ jika\ c>0$

Misalkan $\varphi(x):=\frac{1}{x} untuk\ x>0\ dan\ c>0$. Untuk membuktikan bahwa $\lim_{x\to c}\varphi=1/c$ kita akan menyatakan selisih

$$\left|\varphi(x)-\frac{1}{c}\right|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right|$$

Kurang dari a yang sebelummnya ditetapkan dari $\varepsilon>0$ dengan mengambil sebarang x mendekati $c>0$. Pertama kita perhatikan babwa

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right|=\left|\frac{1}{cx}(c-x)\right|=\frac{1}{cx}(c-x)$$

Untuk $x>0$. ini berguna untuk mendapatkan batas atas dari bentuk $1/(cx)$ yang mendekati c. Terutama jika $|x-c|<\frac{1}{2}c$, kemudian $\frac{1}{2}c<x<\frac{3}{2}c\ (mengapa?)$, sehingga

$$0<\frac{1}{cx}<\frac{1}{c^2}\ \ untuk\ |x-c|<\frac{1}{2}c$$

Maka untuk nilai x kita memperoleh

(2) $$\left|\varphi(x)-\frac{1}{c}\right|\le\frac{2}{c^2}|x-c|$$

Selanjutnya untuk memenuhi bentuk terakhir ini kurang dari ε terpenuhi ambil $|x-c|<\frac{1}{2}c^2\varepsilon$. Akibatnya jika kita memilih

$$\delta(\varepsilon):=\inf\left\{\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}c^2\varepsilon\right\}$$

Maka jika $0<|x-c|<\ \delta(\varepsilon)$, itu akan menyebabkan $|x-c|<\frac{1}{2}c$ sehingga (2) benar, dan karena $|x-c|<(\frac{1}{2}c^2)\varepsilon$, maka

$$\left|\varphi(x)-\frac{1}{c}\right|=\frac{2}{c^2}|x-c|<\varepsilon$$

Karena kita dapat mengambil $\delta(\varepsilon)>0\ untuk\ sebarang\ \varepsilon>0$, maka dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x\to c}\varphi=1/c$.

(e) $\lim_{x\to c}\frac{x^3-4}{x^2+1}=\frac{4}{5}$

Misalkan $\Psi(x):=(\boldsymbol{x^3-4})/(\boldsymbol{x^2+1})$ untuk x $\in\mathbb{R}$. Dengan sedikit manipulasi aljabar diperoleh

$$\left|\Psi(x)-\frac{4}{5}\right|=\frac{|5x^3-4\boldsymbol{x^2}-\boldsymbol{24}|}{5(\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{1})}$$

$$= \frac{|5x^2+6x+12|}{5(x^2+1)} \cdot |x-2|$$

Untuk memperoleh batas pada koefisien dari $|x-2|$ kita batasi x pada $1 < x < 3$. Untuk x dalam interval ini diperoleh $5x^2 + 6x + 12 \leq 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 12 = 75$ dan $5(x^2 + 1 \geq 5(1^2 + 1) = 10$, sehingga

$$\left|\Psi(x) - \frac{4}{5}\right| \leq \frac{75}{10}|x-2| = \frac{15}{2}|x-2|$$

Sekarang, karena diberikan ε>0, kita pilih

$$\delta(\varepsilon) \coloneqq \inf\left\{1, \frac{2}{15}\varepsilon\right\}$$

Kemudian jika $0 < |x-2| < \delta(\varepsilon)$, diperoleh $|\Psi(x) - (4/5)| \leq \left(\frac{15}{2}\right)|x-2| < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ terpenuhi, maka pernyataan terpenuhi.

3.1.8 Kriteria Barisan

Misalkan f: A → ℝ dan misalkan c adalah titik kumpul A. Lalu berikut ekuivalennya.

(i) $\lim_{x \to c} f = L$.

(ii) Untuk setiap barisan (x_n) di A yang konvergen ke c sedemikian sehingga $x_n \neq$ c untuk semua n ∈ ℕ, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

<u>Bukti</u>

Jika (x_n) → c

Maka $({x_n}^2) \to c^2$

Dengan kriteria barisan, Misalkan $f(x) = x^2$ mempunyai limit, yakni:

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x^2$

$= c^2$

(x_n) konvergen ke c karena memiliki limit

Pembuktian (i) ⇒ (ii)

Asumsikan f mempunyai limit L di c, dan andaikan (x_n) adalah barisan di A dengan $\lim x_n = c$ dan $x_n \neq$ c untuk semua n ∈ ℕ.

Kita harus membuktikan bahwa barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

Misalnya diberikan $\varepsilon > 0$. Kemudian dengan definisi 4.1.4, ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika x ∈A memenuhi $0 < |x-c| < \delta$, kemudian $f(x)$ memenuhi $|f(x) - L\} < \varepsilon$. Nilai δ biasanya bergantung pada nilai ε, biasanya dituliskan $\delta(\varepsilon)$ untuk menunjukkan keterkaitan nilai δ.

Sekarang kita menggunakan barisan konvergen (D 3.1.3) pada δ yang diberikan untuk menperoleh bilangan asli $K(\delta)$ sedemikian sehingga jika $n > K(\delta)$ maka $|x_n - c| > \delta$. Tetapi untuk setiap x_n kita mempunyai $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.
Jadi, jika $n > K(\delta)$ maka $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.
Oleh karena itu, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.
Jadi terbukti (ii) $\forall (x_n) \to c, (x_n)\ di\ A \ni\ x_n \neq c, \forall n \in \mathbb{N}\ sehingga\ (f(x_n)) \to L$

Pembuktian (ii) ⇒ (i)
Anggap $\lim_{x \to c} f \neq L$ sehingga V_{ε_0}(L) sedemikian sehingga daerah persekitaran δ dari c yang kita pilih, Akan selalu terdapat paling sedikit satu x_δ di $A\ \cap V_\delta(c)$ dengan $x_\delta \neq$ c sedemikian sehingga $f(x_\delta)\ \notin\ V_{\varepsilon_0}$(L).
Oleh karena itu untuk setiap n ∈ ℕ, daerah persekitaran $(\frac{1}{n})$ dari c memuat suatu bilangan x_n sedemikian sehingga $0 < |x_n - c| < 1/n$ dan $x_n \in A,$
Tetapi,
$|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ untuk semua n ∈ ℕ
Disimpulkan bahwa barisan (x_n) di A\{c}, x_n konvergen ke c, tetapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke L.
Jadi berdasarkan kontraposisi jika (i) tidak benar, maka (ii) juga tidak benar sehingga terbukti (ii) ⇒ (i).

3.1.9 Kriteria Divergen
Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, misalkan $f: A \to \mathbb{R}$ dan misalkan c ∈ ℝ menjadi titik kumpul dari A, maka:
(a) Jika L ∈ ℝ, maka f tidak mempunyai limit L di c jika dan hanya jika ada suatu barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq$ c untuk semua n ∈ ℕ sedemikian sehingga barisan (x_n) konvergen ke c tetapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke L.
(b) Fungsi f tidak mempunyai limit di c jika dan hanya jika ada suatu barisan (x_n) di A dengan $x_n \neq$ c untuk semua n ∈ ℕ sedemikian sehingga barisan (x_n) konvergen ke c tetapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke dalam ℝ.
Bukti
(a) $L \in \mathbb{R}\ \to \lim_{x \to c} f \neq L\ \Leftrightarrow\ \exists (x_n)$ di A, $x_n \neq$ c, ∀ n ∈ ℕ ∋ $(x_n) \to c$ tetapi $\big(f(x_n)\big) \nrightarrow L$
(b) $\lim_{x \to 0} f = L \Leftrightarrow\ \exists (x_n)$ di A, $x_n \neq$ c, ∀ n ∈ ℕ ∋ $(x_n) \to c$ tetapi $\big(f(x_n)\big) \nrightarrow \mathbb{R}$

Misalkan $f(x) = \frac{1}{x}$

Maka $\lim_{x\to 0} f = \frac{1}{x}$ tidak ada

Ambil (x_n) = $\left(\frac{1}{n}\right)$, ∀ n ∈ ℕ

Maka lim $\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ atau $\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Tetapi, $f(x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$

Karena $(f(x_n)) = (n)$, n merupakan barisan bilangan asli dan n tidak terbatas, Maka $(f(x_n))$

merupakan divergen bukan konvergen.

Karena $L \in \mathbb{R}$, maka $\big(f(x_n)\big)$ tidak konvergen dalam L dan $\big(f(x_n)\big)$ tidak konvergen dalam ℝ.

3.1.10 Contoh

(a) $\lim_{x\to 0}(1/x)$ tidak ada di ℝ.

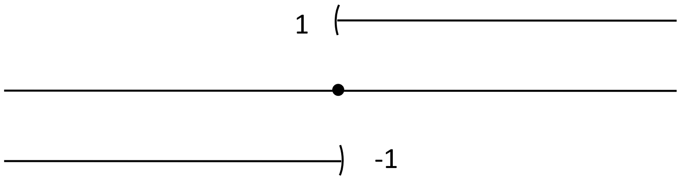
Seperti dalam Contoh 4.1.7 (d), misalkan $(x) := 1/x$ untuk $x > 0$. Namun, di sini kami menganggap $c = 0$. Argumen yang diberikan dalam Contoh 4.1.7 (d) rusak jika $c = 0$ karena kita tidak dapat memperoleh batasan seperti pada (2) di contoh itu. Memang, jika kita mengambil urutan (x_n) dengan $x_n := 1/n$ untuk $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim(x_n) = 0$, tetapi $\varphi\,(x_n) = 1/(1/n) = n$. Seperti yang kita ketahui, urutan $\big(\varphi(x_n)\big) = (n)$ tidak konvergen dalam ℝ, karena tidak dibatasi. Oleh karena itu, oleh Teorema 4.1.9 (b), $\lim_{x\to 0}(1/x)$ tidak ada dalam ℝ.

(b) $\lim_{x\to 0}$ sgn(x) tidak ada.

Biarkan fungsi signum sgn ditentukan oleh

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & \text{untuk} \quad x > 1 \\ 0 & \text{untuk} \quad x = 0 \\ -1 & \text{untuk} \quad x < 1 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ untuk $x \neq 0$. (Lihat Gambar 4.1.2.) Kami akan menunjukkan bahwa sgn tidak memiliki batas pada $x = 0$. Kami akan melakukan ini dengan menunjukkan bahwa ada urutan (x_n) sedemikian sehingga $\lim(x_n) = 0$, tetapi sedemikian sehingga (sgn (x_n)) tidak konvergen.

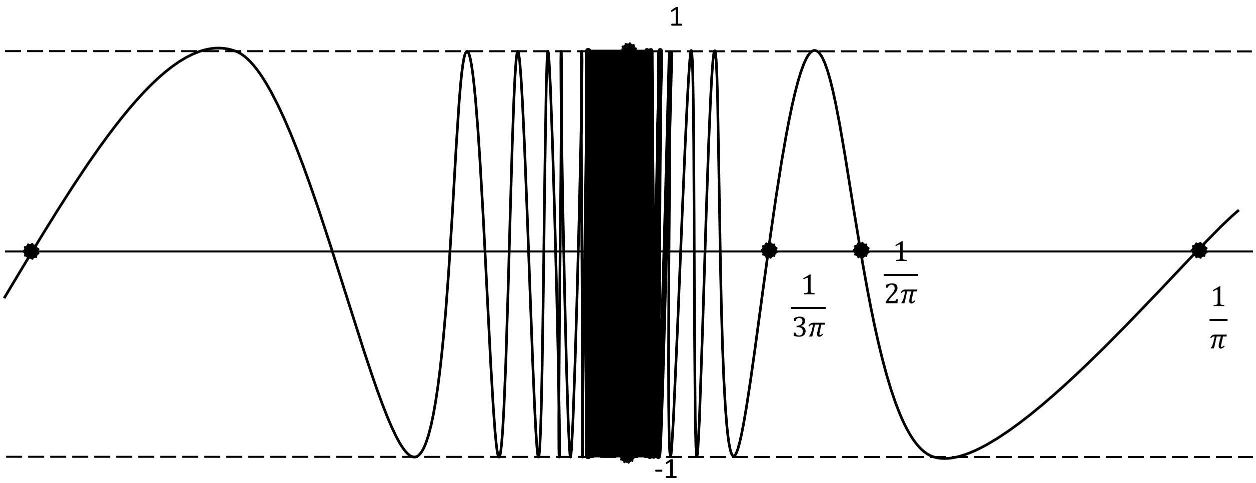


Gambar 4.1.2 Fungsi signum.

Memang, misalkan $x_n := (-1)^n/n$ untuk $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\lim(x_n) = 0$. Namun, karena sgn $(x_n) = (-1)^n$ untuk $n \in \mathbb{N}$, hal ini mengikuti dari Contoh 3.4.6(a) bahwa $(\text{sgn}(x_n))$ tidak konvergen. Oleh karena itu $\lim_{x \to 0} \text{sgn}(x)$ tidak ada.

(c) $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$ tidak ada dalam $\mathbb{R}$.

Misalkan $g(x) := \sin(1/x)$ untuk $x + 0$. (Lihat Gambar 4.1.3.) Kami akan menunjukkan bahwa g tidak memiliki batas pada $c = 0$, dengan menunjukkan dua urutan (x_n) dan (y_n) dengan $x_n \neq 0$ dan $y_n \neq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan sedemikian sehingga $\lim(x_n) = 0$ dan $\lim(y_n) = 0$, tetapi sedemikian sehingga $\lim(g(x_n)) \neq \lim(g(y_n))$. Pandangan Teorema 4.1.9 ini menyiratkan bahwa $\lim_{x \to 0}$ g tidak ada. (Jelaskan mengapa.)



Gambar 3.1.3 Fungsi $g(x) = \boldsymbol{sin(1/x)(x \neq 0)}$.

Memang, kita ingat dari kalkulus bahwa $\sin t = 0$ jika $t = n\pi$ untuk $n \in \mathbb{Z}$, dan $\sin t = +1$ jika $t = \frac{1}{2}\pi + 2\pi n$ untuk $n \in \mathbb{Z}$. Sekarang mari $x_n := \frac{1}{n\pi}$ untuk $n \in \mathbb{N}$; lalu $\lim(x_n) = 0$ dan $g(x_n) = \sin n\pi = 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, sehingga $\lim(g(x_n)) = 0$. Di sisi lain, misalkan $y_n := \left(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n\right)^{-1}$ untuk $n \in \mathbb{N}$; lalu $\lim(y_n) = 0$ dan $\mathrm{g}(y_n) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n\right) = 1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga $\lim\big(\mathrm{g}(y_n)\big) = 1$. Kami menyimpulkan bahwa $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ tidak ada.

3.2. Teorema Limit

3.2.1 Definisi

Misalkan$A \subseteq \mathbb{R}$, misalkan$f: A \to \mathbb{R}$, dan biarkan $c \in \mathbb{R}$ menjadi titik kluster A. Kita katakan bahwa f dibatasi pada daerah sekitar c jika ada $a\,\delta -$ daerah sekitar $V_\delta(c)$ dari c dan a konstanta $M > 0$ sehingga kita memiliki $|f(x)| \le M$ untuk semua $x \in A \cap V_\delta(c)$.

3.2.2 Teorema

Jika $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \to \mathbb{R}$ mempunyai sebuah limit di $c \in \mathbb{R}$, selanjutnya f terbatas di beberapa lingkungan dari c.

Bukti

Jika $L = \lim_{x\to c} f$, maka untuk $\varepsilon = 1$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < 1$: karenanya (oleh akibatnya teorema 2.2.4(a))

$$|f(x)| - |L| \le |f(x) - L| < 1$$

Oleh karena itu, jika $x \in A \cap V_\delta(c), x \neq c$, maka $|f(x)| \le |L| + 1$. Jika $c \notin A$, kita ambil $M = |L| + 1$, sedangkan jika $c \in A$ kita ambil $M = \sup\{|f(c)|, |L| + 1\}\}$. Ini berarti bahwa jika $x \in A \cap V_\delta(c)$, selanjutnya $|f(x)| \le M$. Ini mrnunjukkan bahwa f adalah terbatas di lingkaran $V_\delta(c)\ dari\ c$.

Definisi selanjutnya serupa dengan definisi untuk penjumlahan, pengurangan, hasil kali, dan hasil bagi dari urutan di bagian 3.2

3.2.3 Definisi

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan misalkan $f\ dan\ g$ fungsi-fungsi yang terdefinisi pada $A\ ke\ \mathbb{R}$. Kita definisikan penjumlahan $f + g$, pengurangan $f - g$, dan hasil kali fg di $A\ ke\ \mathbb{R}$ sebagai fungsi-fungsi yang diberikan oleh

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Untuk semua $x \in A$. Selanjutnya, jika $b \in \mathbb{R}$, kita definisikan kelipatan bf menjadi fungsi yang diberikan oleh

$$(bf)(x) = bf(x) \text{ buat semua } x \in A$$

Akhirnya, jika $h(x) \neq 0$ untuk $x \in A$, kita definisikan hasil bagi f/h menjadi fungsiyang diberikan oleh

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \text{ buat semua } x \in A$$

3.2.4 Teorema

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}, f$ dan g fungsi- fungsi pada A ke $\mathbb{R}$ dan $c \in \mathbb{R}$ titik limit dari A. Selanjutnya, misalkan $b \in \mathbb{R}$.

a. Jika $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = M$, maka

- $\lim_{x\to c}(f \pm g) = L \pm M,$

  Bukti.

  Misalkan(x_n) adalah barisan di $A \ni x_n \neq c, \forall n \in \mathbb{N}, \lim(x_n) = c$

  Karena $\lim_{x\to c} f(x) = L\ dan\ \lim_{x\to c} g(x) = M,$

  Berdasarkan teorema 4.1.8 diperoleh $\lim_{x\to c} f(x_n) = L$ dan $\lim_{x\to c} g(x_n) = M$

  Berdasarkan Definisi 4.2.3 sehingga

  $\lim_{x\to c}(f \pm g)(x_n)) = f(x_n) \pm g(x_n), \qquad \forall x \in \mathbb{N}$

  Berdasarkan T. 3.2.3 di dapat;

  $\lim\limits_{x\to c}(f \pm g)(x_n)) = \lim\limits_{x\to c} f(x_n) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x_n)$

  $\lim\limits_{x\to c}(f \pm g)(x_n)) = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x_n)\right] \pm \left[\lim\limits_{x\to c} g(x_n)\right]$

  $\lim\limits_{x\to c}(f \pm g)(x_n)) = L \pm M$

  Berdasarkan T. 4.1.8 diperoleh $\lim_{x\to c}(f \pm g) = \lim\big((f \pm g)(x_n)\big) = L \pm M$

  Jadi, $\lim_{x\to c}(f \pm g) = L \pm M$, **Terbukti**

- $\lim_{x\to c}(f.g) = LM$

  Bukti.

  Misalkan(x_n) adalah barisan di $A \ni x_n \neq c, \forall n \in \mathbb{N}, \lim(x_n) = c$

  Karena $\lim_{x\to c} f(x) = L\ dan\ \lim_{x\to c} g(x) = M,$

  $\lim_{x\to c} f(x_n) = L$ dan $\lim_{x\to c} g(x_n) = M$ (T.4.1.8)

  $(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n)$, $\forall x \in \mathbb{N}$ (T. 4.2.3)

  $\lim((fg)(x_n)) = \lim(f(x_n)g(x_n))$ (T. 3.2.3)

  $\lim((fg)(x_n)) = LM$

  $\lim(fg) = \lim\big((fg)(x_n)\big) = LM$

  Jadi, $\lim_{x\to c}(f.g) = LM$, **Terbukti**

- $\lim_{x\to c}(b\ \ f) = bL$

  Bukti.

  Misalkan(x_n) adalah barisan di $A \ni x_n \neq c, \forall n \in \mathbb{N}, \lim(x_n) = c$

  Karena $\lim_{x\to c} f(x) = L\ \ dan\ \lim_{x\to c} g(x) = M,$

  $\lim_{x\to c} f(x_n) = L$ dan $\lim_{x\to c} g(x_n) = b$ (T.4.1.8)

  $(bf)(x_n) = bf(x_n), \ \ \forall x \in \mathbb{N}$ (T. 4.2.3)

  $\lim\big((bf)(x_n)\big) = b\lim(f(x_n))$ (T. 3.2.3)

  $\lim\big((bf)(x_n)\big) = bL$

  $\lim\limits_{x\to c}(b\,.\,f) = \lim bf\ (x_n) = bL$

  Jadi, $\lim_{x\to c}(b\ \ f) = bL$, **Terbukti**

b. Jika $h: A \to \mathbb{R}, h(x) \neq 0$ untuk semua $x \in A$, dan jika $\lim_{x\to c} h = H \neq 0$, maka
   $\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}$ jika $\lim_{x\to c} h(x) \neq 0$

   Bukti.

   Misalkan(x_n) adalah barisan di $A \ni x_n \neq c, \forall n \in \mathbb{N}, \lim(x_n) = c$

   Karena $\lim_{x\to c} f(x) = L\ \ dan\ \lim_{x\to c} h(x) = H,$

   Berdasarkan T.4.1.8 Diperoleh;

   $\lim_{x\to c} f(x_n) = L$ dan $\lim_{x\to c} h(x_n) = H, H \neq 0$

   Berdasarkan T. 4.2.3 sehingga;

   $$\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{h}\right)(x_n) = \frac{f(x)}{h(x),}, \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

   Berdasarkan T. 3.2.3 di dapat;

   $$\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{h}\right)(x_n) = \left(\frac{\lim f(x)}{\lim h(x)}\right)$$

   $$\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{h}\right)(x_n) = \frac{L}{H}, \quad H \neq 0$$

   Kemudian berdasarkan T. 4.1.8 diperoleh

   $$\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{h}\right) = \lim_{x\to c}\left(\left(\frac{f}{h}\right)(x_n)\right) = \left(\frac{\lim f(x)}{\lim h(x)}\right) = \frac{L}{H}, \quad H \neq 0$$

   Jadi, $\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}$, **Terbukti**

Bukti. Salah satu cara pembuktian dari teorema-teorema ini sngat serupa dengan pembuktian Teorema 3.2.3. secara alternatif, teorema ini dapat dibuktikan dengan menggunakan teorema 3.2.3 dan teorema 4.1.8. sebagai contoh, misalkan (x_n) sebarang barisan dalam A sedemikian sehigga $(x_n) \neq c$ untuk semua $n \epsilon \mathbb{N}$ dan $c = \lim(x_n)$. Menurut teorema 4.1.8 bahwa

$\lim\big(f(x_n)\big) = L$ $\lim\big(f(x_n)\big) = L$

$(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n)$ untuk semua $n \epsilon \mathbb{N}$ (Definisi 4.2.3)

Oleh karena itu suatu aplikasi dari teorema 3.2.3 menghasilkan

$$\lim(fg)(x_n) = \lim(f(x_n)g(x_n))$$

$$\lim(fg)(x_n) = (\lim(f(x_n)).(\lim g(x_n))$$

$$\lim(fg)(x_n) = LM$$

Bagian lain dari teorema ini dibuktikan dengan cara yang serupa. Kita tinggalkan untuk dilakukan pembaca.

Catatan (1). Kita perhatikan bahwa dalam bagian (b), asumsi tambahan dibuat bahwa $H = \lim_{x \to c} h \neq 0$. Jika asumsi inididak dipenuhi, maka;

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{h(x)}$$

Tidak ada. Akan tetapi jikalimit ini ada, kita tidak dapat menggunkan Teorema 4.2.4 (b) untuk menghitungnya.

Catatan (2). Misalkan $A \in \mathbb{R}$ dan $f_1, f_2 \dots., f_n$ fungsi-fungsi pada A ke $\mathbb{R}$ dan c suatu titik limit dari A. Jika

$L_k = \lim_{x \to c} f_k$ untuk $k = 1,2, \dots, n$

Maka, menurut Teorema 4.2.4 dengan argumen induksi kita peroleh bahwa

$L_1 + L_2 + \cdots + L_n = \lim\limits_{x \to c}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ dan

$L_1. L_2. \dots. L_n = \lim\limits_{x \to c}(f_1. f_2 \dots. f_n$

Catatan (3). Khususnya, kita deduksi dari (2) bahwa jika $L_k = \lim_{x \to c} f$ dan $n \in \mathbb{N}$ maka

$L^n = \lim\limits_{x \to c}(f(x))^n$

3.2.5 Contoh

a. Beberapa limit yang diperlihatkan pada pasal 4.1 dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema 4.2.4. sebagai contoh, mengikuti hasil ini bahwa karena $\lim_{x \to c} x = c$, maka $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$, dan jika $c > 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

Bukti.

Jika $c > 0$

$\lim_{x \to c} x = c, \to bukti\ C.$ 4.1.7 (b)

$\lim_{x \to c} x^2 = c^2 \to bukti\ C.$ 4.1.7 (c) maka

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim_{x \to c} x} = \frac{1}{c}$$

b. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)(x^3 - 4) = 20$

Berdasarkan Teorema 4.2.4, kita peroleh bahwa

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)(x^3 - 4) = \lim_{x \to 2} (x^2 + 1)(\lim_{x \to 2} (x^3 - 4) = 5(4) = 20$$

c. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}\right) = \frac{4}{5}$

$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}\right) = \frac{\lim_{x \to 2} (x^2 - 4)}{\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)} = \frac{4}{5}$ Teorema 4.2.4 (b),

Perhatikan bahwa karena limit pada penyebut yaitu $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$ tidak sama dengan 0, maka Teorema 4.2.4 (b) dapat dipergunakan.

d. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{3x - 6}\right) = \frac{4}{3}$

Jika kita misalkan $f(x) = x^2 - 4\ dan\ h(x) = 3x - 6$ untuk $x \in \mathbb{R}$, maka kita dapat menggunakan Teorema 4.2.4(b) untuk menghitung $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{h(x)}$ sebab

$$H = \lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} (3x - 6)$$

$$= 3 \lim_{x \to 2} x - 6 = 3(@) - 6 = 0$$

Akan tetapi jika $x \neq 2$, maka berarti bahwa

$$\left(\frac{x^2 - 4}{3x - 6}\right) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{3(x - 2)} = \frac{1}{3}(x + 2)$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{3x - 6}\right) = \frac{1}{3}(x + 2) = \frac{1}{3}\left(\lim_{x \to 2} x + 2\right) = \frac{4}{3}$$

Perhatikan bahwa fungsi $g(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{3x - 6}\right)$ mempunyai limit pada $x = 2$ meskipun tidak terdefinisi pada titik tersebut.

e. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada dalam $\mathbb{R}$

Tentu saja $\lim_{x \to 0} 1 = 1$ dan $H = \lim_{x \to 0} x = 0$. Akan tetapi karena $H = 0$, kita dapat menggunakan Teorema 4.2.4 (b) untuk menghitung $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$. Kenyataannya, seperti kita lihat pada contooh 4.1.10 (a), fungsi $\varphi(x)\frac{1}{x}$ tidak mempunyai limit pada $x = 0$. Kesimpulan ini mengikuti juga Teorema 4.2.2 karena fungsi $\varphi(x)\frac{1}{x}$ tidak terbatas pada lingkungan dari $x = 0.?\,(mengapa?)$

f. Jika p fungsi polinimial pada $\mathbb{R}$, maka $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$

Misalkan p fungsi polinimial pada $\mathbb{R}$ dengan demikian $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$ menurut Teorema 4.2.4 dan fakta bahwa $\lim_{x\to c} x^k = c^k$, maka

$$\lim_{x\to c} p(x) = \lim_{x\to c}[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0]$$

$$= \lim_{x\to c}(a_n x^n) + \lim_{x\to c}(a_{n-1}x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x\to c}(a_1 x) + \lim_{x\to c}(a_0)$$

$$= (a_n c^n) + (a_{n-1}c^{n-1}) + a_1 c + a_0$$

$$= p(c)$$

Dari sini $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$ untuk sebarang fungsi polinimial p

g. Jika p dan q fungsi-fungsi polinimial pada $\mathbb{R}$ dan jika $q(c) \neq 0$, maka

$$\lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$$

Karena $q(x)$ suatu fungsi polinimial, berarti menurut suatu teorema dalam aljabar bahwa terdapat bahwa paling banyak sejumlah hingga bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_m$[pembuat nol dari $q(x)$] sedemikian sehingga $q(a_1) = 0$ dan sedemikian sehingga jika $x \notin \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ kita dapat mendefisikan

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Jika c bukan pembuat nol dari $q(x)$, maka $q(c) \neq 0$, berdasarkan bagian (f) bahwa jika $\lim_{x\to c} q(x) = q(c) \neq 0$. Oleh karena itu kita dapat menggunakan Teorema 4.2.4 (b) untuk menyimulkan bahwa

$\lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to c} p(c)}{\lim_{x\to c} q(c)} = \frac{p(c)}{q(c)}$ (dari Teorema 3.2.6)

3.2.6 Teorema

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}\ f : A \to \boldsymbol{R}\ dan\ c \in \boldsymbol{R}$ suatu titik cluster dari A. Jika $a \leq f(x) \leq b$ untuk semua x∈A, x ≠ c, dan *jika* $\lim_{x\to c} f$ ada, *maka* $a \leq \lim_{x\to c} f \leq b$

Bukti

Jika $L = \lim_{x\to c} f$, maka menurut Teorema 4.1.8 bahwa, (x_n) sebarang barisan bilangan real sedemikian sehingga $c \neq (x_n) \in A$ untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$ dan jika barisan (x_n) konvergen ke c, maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

Karena $a \leq f(x_n) \leq b$ untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$, berarti menurut Teorema 3.2.6 bahwa $a \leq L \leq b$. Maka, $a \leq \lim\limits_{x\to c} f \leq b$

Sekarang kita akan menyatakan suatu hasil yang analog dengan *Teorema Apit 3.2.7* berbunyi : Misalkan bahwa X = (x_n), Y= (y_n), dan Z= (z_n), barisan yang memenuhi :

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ untuk semua } n \in \boldsymbol{N}$$

dan lim (x_n) = lim (z_n) maka (y_n) konvergen dan lim (x_n) = lim (y_n) = lim (x_n).

Bukti : Misalkan w = lim (x_n) = lim (z_n). Bila $\varepsilon > 0$ diberikan, maka karena X dan Z konvergen ke w, terdapat K$\in \boldsymbol{N}$ sehingga untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$ dengan $n \geq K$ dipenuhi :

$$|x_n - w| < \varepsilon \text{ dan } |x_n - w| < \varepsilon$$

Dari hipotesisi diperoleh bahwa $x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w$, untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$, yang diikuti oleh (mengapa?)

$$-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon$$

untuk semua $n \geq K$. karena $\varepsilon > 0$ sebarang, jadi lim $(y_n) = w$.

3.2.7 Teorema

Misalkan A$\subseteq R, f, g, h : A \to R, dan\ c \in R$ suatu titik cluster dari A. Jika $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua $x \in$ A, $x \neq c$, dan *jika* $\lim_{x\to c} f = L = \lim_{x\to c} h$, *maka* $\lim_{x\to c} g = L$

Bukti

Misal $A \subseteq R, f, g, h : A \to R$ dan $c \in R$, c titik kumpul dari A.

Adib $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in A, x \neq c$ dan $\lim_{x\to c} f = L = \lim_{x\to c} h$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ sehingga berdasarkan D. 4.1.4 diperoleh,

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ berarti $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_1(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, 0< $|x - c|$

$$< \delta_1(\varepsilon) = |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\lim_{x\to c} h(x) = L$ berarti $\exists\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_2(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A$, 0< $|x - c|$

$$< \delta_2(\varepsilon) = |h(x) - L| < \varepsilon$$

Karena $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in A, x \neq c$ sehingga, $f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L$, $\forall x \in A, x \neq c$ diperoleh,

$$|g(x) - L| \leq \sup\{|f(x) - L|, |h(x) - L|\} < \varepsilon.$$

Pilih $\delta(\varepsilon) = \inf\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ sehingga, $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta(\varepsilon) = |g(x) - L| \leq \sup\{|f(x) - L|, |h(x) - L|\} < \varepsilon$.

Maka, $\lim_{x \to c} g\,(x) = L$ **Terbukti**

3.2.8 Contoh

a) $\lim_{x \to 0} x^{3/2}$= 0 (x > 0)

Misalkan *f*(x)= $x^{3/2}$ untuk x> 0. Ketidaksamaan $x < x^{1/2} \leq 1$ berlaku untuk $0 < x \leq 1$ (mengapa), itu mengikuti $x^2 \leq f(x) = x^{3/2} \leq x$ untuk $0 < x \leq 1$ karena $\lim_{x \to 0} x^2$= 0 dan $\lim_{x \to 0} x$= 0,

Bukti:

Misal $f(x) = x^{3/2}$, $\forall x > 0$.

Karena ketidaksamaan $x < x^{1/2} \leq 1{,}0 \leq x \leq 1$.

Sehingga $x^2 \leq x^{3/2} = f(x) = x, 0 < x \leq 1$.

Karena $\lim_{x \to 0} x^{3/2}$= 0 dan $\lim_{x \to 0} x$= 0, sehingga

Berdasarkan teorema apit 4.2.7 diperoleh

$\lim_{x \to 0} x^2 \leq \lim_{x \to 0} x^{3/2} \leq \lim_{x \to 0} x$.

$\leftrightarrow 0 \leq \lim_{x \to 0} x^{\frac{3}{2}} \leq 0$.

Kemudian didapat $\lim_{x \to 0} x^{\frac{3}{2}} = 0$.

Jadi, $\lim_{x \to 0} x^{3/2} = 0$ terbukti. ■

b) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$.

Ini akan dibuktikan dengan lihat teorema 4.2.7), bahwa $-x \leq \sin x \leq x$ untuk semua $x \geq 0$. Karena $\lim_{x \to 0}(\pm x) = 0$, ini mengikuti dari teorema Apit bahwa $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$.

Bukti:

Inf sin = -1, sup sin x=1, $\forall x \epsilon R,$ sehingga

-1≤ $\sin x \leq 1, \forall x \epsilon R$

-x ≤ $\sin x \ \leq x, \forall x \epsilon R$

Didapat dari T. 848 karena $\lim_{x \to 0}(\pm x) = 0$

Sehingga berdasarkan teorema apit diperoleh

$\lim_{x \to 0} -x = 0 \leq \lim_{x \to 0} \sin x \leq \lim_{x \to 0} x$= 0

$$\leftrightarrow 0 \leq \lim_{x \to 0} \sin x \leq 0.$$

Kemudian didapat $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$.

Jadi, $\lim_{x \to 0} \sin x$ = 0 terbukti.

c) $\lim_{x\to 0} \cos\ x = 1$

Ini akan dibuktikan (lihat teorema 8.4.8) bahwa $1 - 1x^{\frac{1}{2}} \le \cos x\ 1$

Untuk semua untuk semua x ϵR. 1$\le \sin x \le 1, \forall x \epsilon R$

-x $\le \sin x \ \le x, \forall x \epsilon R$ ■

$\lim_{x\to 0}\ \ x\,(1 - 1/2x^2$ = 1, ini mengikuti dari teorema apit bahwa $\lim_{x\to 0} \cos\ x$ = 1.

Bukti

Akan dibuktikan menggunakan T.4.2.8

$$1 - \frac{1}{2x^2} \le C(X) \le 1$$

Inf cos x= -1$-1, \forall x \ \epsilon\ R$

Sup cos x= 1, $\forall x\ \epsilon\ R$.

Sehingga -1$-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in r \to 1 - \frac{1}{2}x^2$,

Pembuktian asal mula $1 - \frac{1}{2x^2} \le c(x) \le 1$.

$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ $\qquad x = 0 \ \ \to 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$

$\frac{1}{2}x^2 = 1$ $\qquad x > 0 \ \to 0 < x < \sqrt{2}$ sehingga$1 - \frac{1}{2}x^2 > 0$

$x^2 = \ 2$ $\qquad \to x = \sqrt{2}\, s$ehingga $1 - \frac{1}{2}x^2 = 0$

$x = \sqrt{2}$ $\qquad \to x = \sqrt{2}$ sehingga $1 - \frac{1}{2}x^2 > 0$

$x < 0 \to -\sqrt{2} < x < 0$ sehingga $1 - \frac{1}{2}x^2 > 0$

$$\to x = -\sqrt{2} \text{ sehingga } 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$\to x < -\sqrt{2} \text{ sehingga } 1 - \frac{1}{2}x^2 < 0$$

Misalkan c(x) = cos x, maka $1 - \frac{1}{2x^2} \le \cos x \le 1$.

Karena $\lim_{x\to 0}\ \ x\,(1 - 1/2x^2$ = 1,sup $1 - \frac{1}{2}x^2\ = 1$ akibatnya

$1 \le \cos x \le 1.$ maka $\lim_{x\to 0}\ \ \cos x \le \lim_{x\to 0}\ \ 1$ sehingga

$1 \le \lim_{x\to 0} cos\ \ x \le 1$. Jadi berdasarkan teorema apit bahwa $\lim_{x\to 0} \cos\ x = 1$

d) $\lim_{x\to 0} \cos(\frac{x-1}{x}) = 0$

Kita tidak dapat menggunakan teorema 4.2.4 (b) untuk menghitung limit ini. (mengapa tidak) namun, ini mengikuti dari ketidaksamaam (1) pada bagian (c) bahwa

$-\frac{1}{2}x \le (\cos x - 1)/x \le 0$ untuk $x > 0$ dan bahwa

$0 \le (\cos x - 1)/x \le -\frac{1}{2} untuk\ x > 0.$

Sekarang misalkan,

$f(x) := -x/2$ untuk $x \ge 0$ dan $f(x) := 0$ untuk $h(x) := -x/2$ untuk $x < 0$.

$f(x) \le \cos x - 1)/x \le h(x)$ untuk x$\neq$ 0.

Karena ini mudah dilihat bahwa $\lim_{x\to 0} \mathrm{f} = 0 = \lim_{x\to 0} \mathrm{h}$, ini mengikuti dari torema torema Apit bahwa $\le \lim_{x\to 0}(\cos x - 1)/x \le 0$.

Bukti:

Misalkan c(x)= (cos x-1)/x.

$f(x) := -x/2$ untuk $x \ge 0$ dan $f(x) := 0$, $x < 0$, dan h(x) $:= 0$, $x \ge 0$ dan $hx := -\frac{x}{2}, x < 0.$

Karena $f(x) \le c(x) \le h(x) \to \left(-\frac{x}{2}\right) \le c(x) \le 0$, untuk x > 0.

Sehingga $\lim_{x\to 0} \mathrm{f} = 0 = \lim_{x\to 0} \mathrm{h}$.

Jadi, berdasarkan teorema apit bahwa $\lim_{x\to 0} \cos(\frac{x-1}{x}) = 0$ ■

e) $\lim_{x\to 0} (\frac{sinx}{x}) = 1$

Lagi kita tidak dapat menggunakan Teorema 4.2.4 (b) untuk menghitung limit ini. Akan tetapi dapat dibuktikan nanti (lihat Teorema 4.8.8) bahwa

$x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x$ untuk $x \ge 0$

dan bahwa

X$\le \sin x \le x - \frac{1}{6}x^3$ untuk $x \le 0$ oleh karena itu mengikuti (mengapa) bahwa

1- -$\frac{1}{6}x^2 \le \frac{\sin x}{x} \le 1$ untuk semua $x \neq 0$ tetapi karena $\lim_{x\to 0}(1 - \frac{1}{6}x^2 \le \frac{\sin x}{x} \le 1$ untuk semua $x \neq 0$ tetapi karena $\lim_{x\to 0}(1 - \frac{1}{6}x^2) =$ 1- -$\frac{1}{6}\lim_{x\to 0} x^2 = 1$, kita simpulkan dari teorema apit bahwa $\lim_{x\to 0} (\frac{sinx}{x}) = 1$

Pembuktian:

$\lim_{x\to 0} (\frac{sinx}{x}) = 1$

Bukti:

Pembuktian nanti di teorema 8.4.8 bahwa

$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$ untuk $x \geq 0$

Dan

X $\leq \sin x \ \leq x - \frac{1}{6}x^3$ untuk $x \leq 0$

Karena

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq x$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{6}x^3 \leq 0$$

$$\leftrightarrow x \geq 0$$

Dan

$$\mathrm{x} \leq -\frac{1}{6}x^3$$

$$\leftrightarrow 0 \leq -\frac{1}{6}x^3$$

$\leftrightarrow 0 \geq x^3$

Maka boleh pilih salah satu

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq sinx \leq x\ untuk\ x \geq 0$$

$\leftrightarrow x\left(1 - \frac{1}{6}x^2\right) \leq sinx \leq x\ untuk\ x \geq 0$

$\leftrightarrow$ 1- -$\frac{1}{6}x^2 \leq \frac{\sin x}{x} \leq$ 1 untuk semua $x \neq 0$

$$\leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{6}x^2\right) \leq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to 0}1$$

$$\leftrightarrow 1 - \frac{1}{6}x^2 \leq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$\leftrightarrow 1 \leq \frac{sinx}{x}) \ \leq 1$

Karena $1 \leq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leq 1$ sehingga berdasarkan teorema apit didapat $\lim_{x\to 0}(\frac{sinx}{x}) = 1$.

Jadi, $\lim_{x\to 0}(\frac{sinx}{x}) = 1$ (terbukti)

f) $\lim_{X\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$

Bukti:

Misalkan *f*(x) = $\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, $x \neq 0$. Karena -1$\leq \sin z \ \leq 1, untuk\ semua\ z \in R\ maka,$

$$-|x| \leq f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$$

Untuk $x \in$ R, , $x \neq 0$. Karena $\lim\limits_{X\to 0} |x| =$ 0, maka dengan teorema apit 4.2.7 diperoleh $\lim_{X\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ terbukti.■

3.2.9 Teorema

Misalkan A R, $f: A \to R$ dan c$\in R$ suatu titik kumpul dari A. $\lim_{f\to c} f > 0$ [*atau*, $\lim_{f\to c} f >$ 0], maka terdapat suatu persekitaran $V\delta(C)$ sedemikian sehingga *f(x)* > 0 [atau, f (x) < 0] untuk semua $x \epsilon A\ \cap V_\delta$ (C), $x \neq c$.

Bukti:

Misalkan L:= $\lim_{X\to c} f$ dan anggaplah L > 0. Kita ambil $\varepsilon = \frac{1}{2}L > 0$ dalam defenisi 4.1.4, diperoleh suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika 0 < $|x - c|$ < δ dan $x \epsilon A$, maka $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$. Oleh karena itu (mengapa?) berarti bahwa jika $x \epsilon A\ \cap V_\delta$ (C), $x \neq c$, maka $f(x) > \frac{1}{2}L$ > 0.

Jika $f > 0$, dapat digunakan argument.

a. Fungsi f dikatakan menuju ke +∞ untuk $x \to c$, dan ditulis $\lim_{x\to c} f\ (x) = +\infty$, jika untuk setiap $\alpha \in R$ Terdapat $\delta = \delta(\alpha) > 0$ sehingga untuk x ϵ A dengan $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $f(x) > \alpha$.
b. Fungsi f dikatakan menuju ke - ∞ untuk untuk $x \to c$, dan ditulis $\lim_{x\to c} f\ (x) =$ -∞, jika untuk setiap $\beta \in R$ Terdapat $\delta = \delta(\beta) > 0$ sehingga untuk x ϵ A dengan $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $f(x) < \beta$. Terbukti

DAFTAR PUSTAKA

Apostol, T.M. (1974). *Mathematical analysis (2nd ed.).* Massacheusetts, USA: Addison-Wiley.

Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. (2000). *Introduction to real analysis (3rd ed.).* USA: Wiley and Sons.

Bloch, Ethan D. (2011). *The real numbers and real analysis*. New York: Springer.

Darmawijaya, Soeparna. (2006). *Pengantar analisis real*. Yogyakarta: UGM.

Rudin, Walter. (1976). *Principles of mathematical analysis (3rd ed.)*. New York: Mc-Graw Hill.

Khotimah, R. P. & Sari, C. K. (2018). *Pengantar analisis real*. Surakarta: Muhammadiyah University Press.

Wade, W.R. (2000). *An introduction in analysis*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.