DASAR-DASAR MATEMATIKA

D

I

S

U

S

N

OLEH :

LAILATUN NUR KAMALIA SIREGAR, M.PD

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN GURU MADRASAH IBTIDAIYAH

FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN

SUMATERA UTARA

MEDAN

2020

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis haturkan kehadirat Allah SWT, yang telah menganugerahkan segenap nikmat dan karunia hingga pada akhirnya penyusunan buku ajar ini dapat diselesaikan sebagaimana mestinya. Salawat dan salam semoga tercurah kepada Nabi Muhammad saw beserta keluarga, sahabat serta pengikutnya yang setia mengikuti sunnahnya hingga hari kemudian.

Buku ini merupakan Bahagian dari tri darma bakti yang tidak dapat ditinggalkan dalam perjalanan karir akademik. Darma ini harus terintegrasi ke dalam kegiatan-kegiatan sehari-hari dan dipergunakan dalam proses pengambilan keputusan profesional.Selain itu pula, melalui revitalisasi budaya akademik, perguruan tinggi akan mampu membentuk lulusan-lulusan yang cakap dan siap pakai. Oleh sebab itu, adalah sebuah keniscayaan yang mendesak untuk dilakukan oleh segenap civitas akademika diperguruan tinggi manapun juga agar mampu membangun proses pembelajaran yang relevan dengan Tridharma Perguruan Tinggi.

Akhirnya, melalui pengantar ini penulis juga bermaksud untuk menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya terhadap semua pihak yang telah memberi kesempatan, sumbang saran dan pikiran kepada penulis hingga pada akhirnya buku ajar Matematika dasars SD/MI ini dapat terselesaikan sesuai waktu yang telah ditetapkan. Khusunya kepada:

1. Bapak Dr. Amiruddin, M.Pd selaku Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara.
2. Bapak Drs Rustam, MA selaku Wakil Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara.
3. Ibu Dr. Salminawati, M.A selaku Ketua Prodi PGMI Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara.
4. Bapak/Ibu Dosen Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara selaku rekan-rekan penulis dalam mengemban tugas sebagai dosen.

Selain itu pula, penulis menyadari akan keterbatasan buku ini dalam berbagai hal. Untuk itu penulis dengan lapang hati menerima kritik dan saran konstruktif dari para pembaca, semoga buku ini bermanfaat bagi pembaca dan dunia pendidikan pada umumnya.

Medan, Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

HAKEKAT, NILAI DAN PERANAN MATEMATIKA

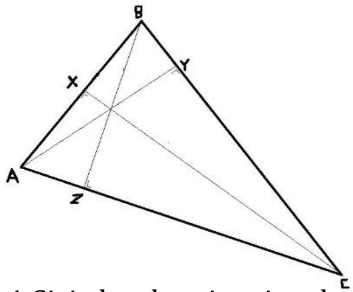
Matematika merupakan ilmu dasar yang sudah menjadi alat untuk mempelajari ilmu-ilmu yang lain. Oleh karena itu penguasaan terhadap matematika mutlak diperlukan dan konsep-konsep matematika harus dipahami dengan betul dan benar sejak dini. Hal ini karena konsep-konsep dalam matematika merupakan suatu rangkaian sebab akibat. Suatu konsep disusun berdasarkan konsep-konsep sebelumnya, dan akan menjadi dasar bagi konsep-konsep selanjutnya, sehingga pemahaman yang salah terhadap suatu konsep, akan berakibat pada kesalahan pemahaman terhadap konsep-konsep selanjutnya.[1]

Sepintas lalu konsep matematika yang diberikan pada siswa sekolah dasar (SD) sangatlah sederhana dan mudah, tetapi sebenarnya materi matematika SD memuat konsep-konsep yang mendasar dan penting serta tidak boleh dipandang sepele. Diperlukan kecermatan dalam menyajikan konsep-konsep tersebut, agar siswa mampu memahaminya secara benar, sebab kesan dan pandangan yang diterima siswa terhadap suatu konsep di sekolah dasar dapat terus terbawa pada masa-masa selanjutnya. Misalnya, jika sejak semula dalam suatu gambar segitiga guru selalu menunjuk bahwa alas suatu segitiga adalah sisi yang berada di bagian bawah dan tinggi selalu ditunjukkan oleh segmen garis vertikal yang tegak lurus terhadap sisi alas dan berujung di titik sudut di atas sisi tersebut, maka untuk selanjutnya siswa akan terus melakukan hal serupa. Apabila dalam suatu ilustrasi segitiga tidak ada sisi yang mendatar, maka siswa akan kebingungan untuk menentukan sisi alasnya, sebab siswa telah menangkap pengertian alas sebagai sisi segitiga yang horizontal dan berada di bawah. Berkenaan dengan konsep alas sebuah segitiga, sebenarnya ketiga sisinya memiliki kesempatan yang sama untuk dipilih sebagai sisi alas, dan tinggi segitiga ditunjukkan oleh jarak antara garis yang melalui sisi alas dengan garis yang sejajar sisi alas dan melalui titik sudut di hadapan sisi alas.

Dengan demikian, sisi alas sebuah segitiga tidak harus selalu sisi bagian bawah dan tinggi segitiga juga tidak selalu harus ditentukan oleh segmen garis vertikal, sebab tinggi segitiga tergantung pada penetapan sisi alas. Sebagaimana contoh pada gambar 1.1, dalam segitiga ABC, jika sisi alasnya adalah AB maka tingginya adalah CX, jika sisi alasnya BC maka tingginya adalah AY, dan jika sisi alasnya adalah AC maka tingginya adalah BZ.

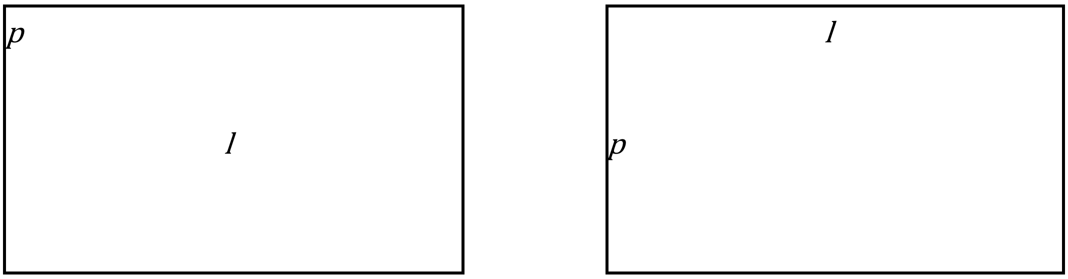
---

[1] Asmin. *Implementasi Pembelajaran Matematika Realistik (PMR) dan Kendala yang Muncul di Lapangan*. (dalam Jurnal Pendidikan dan Kebudayaan No. 44 – September 2003). http://www.depdiknas.go.id/Jurnal/44/asmin.htm diakses tanggal 6 Juni 2005.hlm. 53



Gambar 1.1 Sisi alas dan tinggi pada segitiga ABC

Contoh lain yang masih berkaitan dengan konteks harafiah sebuah istilah adalah pada konsep persegipanjang. Banyak yang berpandangan bahwa panjang suatu persegipanjang selalu lebih panjang daripada lebarnya. Apabila diketahui sebuah persegipanjang dengan panjang sisi-sisinya adalah 10 cm dan 8 cm, maka banyak siswa yang akan menetapkan sisi dengan ukuran 10 cm sebagai panjangnya dan sisi dengan ukuran 8 cm sebagai lebarnya. Pematokan konteks harafiah terhadap istilah *panjang* dan *lebar* pada sebuah persegipanjang tersebut bisa menjadi sebuah pertanyaan bagi siswa manakala mereka dihadapkan pada masalah nyata di sekitarnya. Misalnya, jika kita pergi ke toko kain, maka si penjual hanya akan menanyakan berapa *panjang* kain yang dibutuhkan, sebab *lebar* kain sudah ditetapkan, misalnya 1,5 m. Apabila kita membeli kain dengan *panjang* 1 m, maka kita akan mendapatkan kain berbentuk daerah persegipanjang dengan *panjang* 1 m dan *lebar* 1.5 m. Berdasarkan contoh riil tersebut, ternyata "panjang" dari sebuah persegipanjang bisa lebih pendek daripada "lebarnya". Oleh karenanya dalam konsep persegipanjang, istilah *panjang* dan *lebar* tidak perlu dideterminasikan secara harafiah, sebab istilah tersebut dimunculkan sebagai variabel untuk membedakan ukuran dari sisi-sisi sebuah persegipanjang.



Gambar 1.2 Panjang dan lebar pada persegipanjang

Siswa yang tidak mendapatkan konsep perkalian bilangan bulat secara benar pada waktu di sekolah dasar, akan berpandangan bahwa konsep 2 x 3 sama dengan 3 x 2. Fakta 2 x 3 = 3 x 2 sebenarnya hanya merupakan kesamaan pada tataran hasil komputasi saja, dan kondisi ini menunjukkan berlakunya sifat pertukaran (komutatif) dalam perkalian bilangan bulat. Konsep 2 x 3 berbeda dengan konsep 3 x 2, sebab 2 x 3 = 3 + 3 dan 3 x 2 = 2 + 2 + 2. Ilustrasi yang paling jelas untuk konsep ini adalah *resep dokter* atau aturan pemakaian suatu obat. Biasanya pada kemasan suatu obat dituliskan aturan pemakaiannya, misalnya *diminum 3 x 1 tablet sehari*. Hal ini tidak menunjukkan bahwa obat tersebut diminum sekaligus 3 tablet dalam sekali pemakaian, tetapi memberikan suatu indikasi bahwa pemakaian obat tersebut dalam sehari adalah pagi 1 tablet, siang 1 tablet dan sore 1 tablet, sehingga 3 x 1 memiliki pengertian $1 + 1 + 1$.

Contoh-contoh di atas menunjukkan bahwa konsep-konsep matematika harus diberikan secara benar sejak awal siswa mengenal suatu konsep, sebab kesan yang pertama kali ditangkap oleh siswa akan terus terekam dan menjadi pandangannya di masa-masa selanjutnya. Apabila ada suatu konsep yang diberikan secara salah, maka hal ini harus sesegera mungkin diperbaiki agar tidak menimbulkan kesulitan bagi siswa di kemudian hari.

Pemahaman suatu konsep matematika secara benar mutlak diperlukan oleh seorang guru atau calon guru sebelum mereka mulai mengajarkan pada siswanya. Upaya ini sangat mendesak untuk dilakukan, khususnya terhadap para mahasiswa PGMI yang nantinya akan mengajarkan konsep-konsep awal matematika pada siswa sekolah dasar. Sebagai gambaran dari pemahaman para mahasiswa S-1 PGMI terhadap beberapa konsep matematika, berikut disampaikan suatu contoh kasus. Sebagaimana pengalaman penulis mengajar mata kuliah Matematika pada program studi S-1 PGMI, masih banyak mahasiswa yang tidak paham perbedaan pengertian antara a x b dengan b x a. Mereka umumnya menyatakan bahwa keduanya sama dengan alasan bahwa operasi perkalian bilangan bulat bersifat komutatif. Mereka kurang menyadari bahwa sifat komutatif di sini hanya berorientasi pada hasil, sedangkan secara konsep keduanya berbeda. Ketidakpahaman ini disebabkan antara lain karena mereka mengabaikan konsep perkalian dan berpandangan bahwa yang penting sudah menguasai teknik perkalian itu sudah cukup bagi mereka. Jika seorang calon guru SD sudah berpandangan demikian, lalu bagaimana mereka dapat mengajarkan konsep matematika dengan benar nantinya. Pemahaman yang terbatas terhadap konsep alas dan tinggi dalam segitiga serta terhadap konsep panjang dan lebar dalam persegi panjang, sebagaimana telah dicontohkan di atas, juga dialami oleh banyak mahasiswa. Parahnya lagi ada yang berpandangan bahwa persegi berbeda dengan persegipanjang sebab semua sisi pada persegi ukurannya sama sedangkan pada persegipanjang tidak.

Hal ini akhirnya membuat mereka memasukkan persegi dan persegipanjang pada kelas yang berbeda, padahal sebenarnya himpunan persegi merupakan himpunan bagian pada himpunan persegipanjang. Kasus-kasus semacam ini semakin bertambah banyak manakala matematika sudah menginjak pada konsep bilangan rasional dan pecahan, konsep bangun datar dan ruang, dan sebagainya. Masih banyak mahasiswa S-1 PGMI yang ternyata tidak memahami perbedaan antara bilangan rasional dan pecahan; banyak juga yang belum memahami mengapa pada teknik pembagian pecahan sama dengan perkalian kebalikannya; banyak juga yang tidak mengetahui perbedaan antara sudut dan titik sudut pada bangun ruang; dan bahkan yang lebih ironis, masih banyak mahasiswa yang menganggap sama antara bilangan dan angka. Dengan adanya berbagai masalah tersebut, maka dipandang perlu memberikan sumber belajar yang cukup bagi para guru atau calon guru SD, khususnya mahasiswa program S-1 PGMI, yang akan membantu mereka untuk dapat memahami konsep-konsep matematika dengan benar.

Pada dasarnya, seorang guru matematika pada Sekolah Dasar harus menguasai konsep-konsep matematika dengan benar dan mampu menyajikannya secara menarik, karena menurut teori perkembangan kognitif Piaget, perkembangan kognitif siswa SD berada pada tingkat operasional formal, yakni siswa akan mampu memahami suatu konsep jika mereka memanipulasi benda-benda kongkrit. Berangkat dari standar kompetensi yang harus dimiliki oleh seorang guru matematika SD dan inisiatif untuk memberikan bekal yang cukup bagi para mahasiswa S-1 PGMI khususnya dalam memahami dan menyajikan konsep-konsep matematika secara benar dan menarik, maka buku dengan judul “Memahami Konsep Matematika Secara Benar dan Menyajikannya dengan Menarik” ini disusun.

Secara garis besar beberapa hal yang perlu dipahami oleh para guru atau calon guru SD dalam rangka mempersiapkan pembelajaran matematika sudah barang tentu berkenaan dengan konsep-konsep dasar matematika, analisis substansi materi matematika dalam kurikulum SD dan proses pembelajarannya. Hal pertama yang perlu dipahami berkenaan dengan pengkajian terhadap konsep-konsep dasar matematika tersebut adalah masalah penalaran. Materi ini sengaja disetting mendahului materi-materi lainnya karena penalaran merupakan landasan untuk mempelajari konsep-konsep matematika selanjutnya. Bagaimana pola berpikir yang benar dan alat apa yang diperlukan dalam belajar matematika perlu dipahami terlebih dahulu oleh seseorang yang akan belajar matematika. Selain memahami penalaran dalam matematika, seorang guru perlu melakukan analisis terhadap masalah penalaran yang ada dalam materi matematika SD serta bagaimana mengarahkan siswa SD untuk bernalar dengan benar.

Setelah memiliki pemahaman yang cukup mengenai penalaran dalam matematika, maka hal selanjutnya yang perlu dipahami adalah tentang himpunan dan fungsi. Konsep himpunan dan fungsi merupakan konsep dasar dari semua obyek yang dipelajari dalam matematika. Pada saat seseorang belajar matematika, baik pada tingkat dasar maupun lanjut, disadari atau tidak, ia harus selalu berhadapan dengan himpunan dan fungsi. Sebagai contoh, jika seorang siswa belajar operasi penjumlahan bilangan bulat, maka dia sudah berhadapan dengan himpunan bilangan bulat, sehingga semua proses yang akan dilakukan harus berada dalam scope himpunan ini; sedangkan operasi penjumlahan yang dipergunakan merupakan sebuah operasi biner, yakni suatu fungsi yang akan memetakan setiap pasang bilangan bulat (a,b) dengan suatu bilangan bulat $a+b$. Atau pada tingkat lanjut, jika seseorang belajar integral, maka umumnya dia akan berhadapan dengan himpunan bilangan riil; dan integral yang dipergunakan merupakan suatu fungsi yang akan memetakan sebuah fungsi riil kepada fungsi riil lain yang merupakan integrasinya. Dengan demikian himpunan dan fungsi merupakan hal mendasar yang perlu dipahami oleh seseorang yang belajar matematika sebelum dia mempelajari konsep-konsep lainnya.

Konsep dasar yang mendapat porsi terbanyak dalam pembelajaran matematika di sekolah dasar adalah konsep yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan. Masalah persamaan dan pertidaksamaan merupakan masalah yang selalu dihadapi oleh siswa pada saat berlatih komputasi, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Pada masalah penjumlahan bilangan cacah misalnya, siswa dituntut untuk mendapatkan nilai fungsi yang tepat dari suatu pasang bilangan cacah (a,b), dalam hal ini siswa harus dapat menentukan suatu bilangan cacah c yang nilainya sama dengan $a+b$. Demikian pula dengan masalah pertidaksamaan, dengan landasan yang kuat pada konsep kurang dari atau lebih dari, siswa akan mudah mengerjakan berbagai operasi hitung.

Selain penguasaan terhadap masalah operasi hitung bilangan, hal lain yang juga perlu dikembangkan pada diri siswa sekolah dasar adalah pengembangan daya tilik bidang dan ruangnya, yakni dengan menyajikan materi unsur-unsur, bangun-bangun dan transformasi geometri. Bagi seorang guru atau calon guru SD yang akan mengajarkan materi bangun datar, simetri, dan bangun ruang, perlu memiliki pemahaman yang cukup terhadap konsep-konsep pangkal dan aksioma yang ada dalam geometri dan transformasinya. Hal ini sangat diperlukan agar merekapun dapat menyajikan konsep-konsep geometri yang benar bagi siswanya.

Salah satu tujuan pembelajaran matematika di sekolah dasar adalah memberikan bekal yang cukup bagi siswa untuk menghadapi materi-materi matematika pada tingkpendidikan lanjutan. Selain penguatan terhadap konsep-konsep matematika seperti yang sudah disebutkan di atas, maka diperlukan juga pengenalan pada konsep-konsep lanjutan seperti peluang, statistika dasar dan pemecahan masalah.

Sebelum memulai pembahasan mengenai substansi matematika dan pembelajarannya, maka sebaiknya dipahami lebih dahulu tentang hakekat matematika, nilai-nilai yang terkandung dalam matematika, serta peranan matematika di sekolah dasar. matematika pada tingkat pendidikan lanjutan. Selain penguatan terhadap konsep-konsep matematika seperti yang sudah disebutkan di atas, maka diperlukan juga pengenalan pada konsep-konsep lanjutan seperti peluang, statistika dasar dan pemecahan masalah.

Sebelum memulai pembahasan mengenai substansi matematika dan pembelajarannya, maka sebaiknya dipahami lebih dahulu tentang hakekat matematika, nilai-nilai yang terkandung dalam matematika, serta peranan matematika di sekolah dasar.

A. Hakekat Matematika

Banyak pendefinisian tentang matematika; ada yang mendefinisikan bahwa matematika adalah ilmu pasti; ada yang menyatakan bahwa matematika merupakan bagian dari ilmu pengetahuan tentang bilangan dan kalkulasi; ada yang mendefinisikan matematika sebagai ilmu pengetahuan tentang penalaran logis dan masalah-masalah yang berhubungan dengan bilangan; dan ada juga yang menyatakan bahwa matematika adalah ilmu pengetahuan tentang kuantitas dan ruang. Semua pendefinisian tersebut tidaklah salah karena masing-masing memiliki latar belakang tinjauan tersendiri terhadap matematika. Namun demikian, di balik begitu banyaknya pendefinisian tentang matematika, satu hal yang perlu dipahami dari matematika adalah hakekatnya.[2]

Apabila kita amati, obyek utama dalam matematika adalah himpunan dan fungsi. Pada waktu di sekolah dasar siswa dikenalkan pada bilangan dan operasinya: penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Secara tidak langsung siswa diajak untuk mengamati karakteristik sebuah himpunan, baik himpunan bilangan cacah maupun himpunan bilangan bulat. Sedangkan operasi-operasi yang diaplikasikan terhadap bilangan-bilangan tersebut merupakan fungsi yang diterapkan pada himpunan bilangan tersebut. Pada siswa juga dikenalkan bangun-bangun geometri, baik bangun datar maupun bangun ruang. Disini siswa diajak untuk mengenali sifat dan karakteristik dari elemen-elemen pada himpunan bangun-bangun geometri, sedangkan transformasi geometri, seperti pencerminan, pergeseran, dan perputaran, merupakan fungsi yang dijalankan dalam himpunan bangun-bangun geometri tersebut. Demikian juga dalam statistika, siswa dihadapkan pada himpunan benda-benda dan menyajikannya baik dalam tabel maupun grafik yang mengkaitkan himpunan benda-benda tersebut dengan jumlahnya. Misalnya siswa diminta untuk mengamati macam dan jumlah kendaraan yang melintas di jalan depan sekolah mulai jam 09.00 sampai jam 09.15. Dengan tugas ini siswa akan mengelompokkan kendaraan menurut macamnya, misalnya sepeda, becak, sepeda motor, mobil roda empat, truk, dan bus. Selanjutnya siswa akan melakukan pengamatan terhadap himpunan kendaraan tersebut berkenaan dengan jumlahnya masing-masing. Dengan menyajikan laporannya, baik berupa tabel maupun grafik, siswa sudah mendeskripsikan sebuah fungsi yang memetakan himpunan kendaraan ke himpunan bilangan cacah. Demikian juga pada pembahasan konsep-konsep matematika pada tingkat lanjut, obyek penelaahannya tetap berupa himpunan dan fungsi.

Himpunan dan fungsi dalam matematika bukanlah obyek yang masing-masing berdiri sendiri, melainkan mereka berkolaborasi membentuk sebuah sistem matematika. Setiap sistem matematika memiliki struktur tersendiri yang

---

[2] O, Bueno. *Application of Mathematics and Underdetermination*. Fresno: Department of Philosophy California State University. http://www.socsci.uci.edu/lps/psa2k/application-underdetermination.pdf diakses tanggal 20 Agustus 2005.hal.25.

masing-masing terbentuk melalui pola penalaran secara deduktif dengan alat berpikir kritis yang digunakan adalah logika matematika.

Pembentukan suatu sistem melalui penalaran deduktif diawali dengan penetapan beberapa unsur yang tidak didefinisikan yang disebut dengan *konsep pangkal.* Konsep pangkal ini diperlukan sebagai sarana komunikasi untuk menyusun pernyataan-pernyataan selanjutnya, baik berupa definisi, aksioma maupun teorema. Suatu contoh misalnya dalam pembentukan sistem geometri, diawali dengan penetapan sebuah konsep pangkal yakni *titik.* Sebagai konsep pangkal, *titik* tidak didefinisikan, tetapi semua orang akan memiliki sebuah gambaran yang sama bagaimana konsep *titik* tersebut. Menggunakan konsep *titik* kemudian dapat dibangun konsep tentang *garis* (lurus), yakni melalui dua titik yang berbeda dapat dibuat satu buah garis. Selanjutnya konsep garis digunakan untuk menyusun definisi-definisi selanjutnya, seperti *sinar garis, setengah garis,* dan *ruas garis.* Konsep sinar garis dan titik, kemudian digunakan untuk menyusun definisi tentang *sudut* dan *titik sudut*. Konsep titik juga digunakan untuk mendefinisikan *kurva*. Semua unsur geometri tersebut kemudian digunakan untuk membangun bangun-bangun geometri, baik bangun-bangun datar maupun bangun-bangun ruang. Dalam rangkaian proses tersebut kemudian juga muncul teorema-teorema sebagai hasil analisa terhadap sifat-sifat unsur-unsur tersebut, yang pada akhirnya membangun sebuah sistem geometri, seperti sistem geometri Euclid sebagaimana yang kita jumpai sekarang ini.

Berkenaan dengan penyusunan suatu sistem matematika, seringkali juga melalui proses *abstraksi* dan *generalisasi*. Misalnya dalam pembentukan sebuah sistem aljabar seperti *grup*. Diawali dengan pengamatan terhadap himpunan-himpunan kongkrit beserta operasi biner yang didefinisikan di dalamnya, misalnya himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan, himpunan fungsi riil dengan operasi komposisi fungsi, himpunan matriks 2 x 2 berentri riil dengan operasi penjumlahan matriks, himpunan bilangan rasional dengan operasi penjumlahan, himpunan bilangan riil dengan operasi perkalian, himpunan polinom dengan operasi penjumlahan polinom, himpunan matriks invertible 5 x 5 dengan operasi perkalian matriks, dan sebagainya. Melalui pengkajian terhadap karakteristik himpunan-himpunan tersebut, maka dihasilkan sifat-sifat yang sama, yakni:

1. Semua operasi yang didefinisikan pada himpunan-himpunan tersebut bersifat tertutup; artinya operasi dari setiap dua elemen dalam suatu himpunan akan menghasilkan elemen yang juga tetap berada dalam himpunan yang sama;
2. Semua operasi yang didefinisikan pada himpunan-himpunan tersebut bersifat asosiatif;
3. Pada setiap himpunan tersebut terdapat elemen identitas; artinya ada sebuah elemen sedemikian hingga untuk setiap elemen dalam himpunan tidak akan berubah nilainya apabila dioperasikan dengan elemen tersebut;

4. Setiap elemen dalam setiap himpunan memiliki invers; artinya untuk setiap elemen dalam suatu himpunan, ada suatu elemen yang juga berada dalam himpunan yang sama sedemikian hingga apabila mereka dioperasikan akan menghasilkan elemen identitas.

Irisan sifat-sifat inilah yang kemudian dipergunakan untuk membentuk sebuah sistem aljabar abstrak yang terdiri dari sebuah himpunan G dan operasi * yang didefinisikan dalam G, yang memenuhi aksioma-aksioma:

1. tertutup: yakni untuk setiap $a, b \in G$, maka $a * b \in G$;
2. asosiatif: yakni untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$;
3. identitas: yakni ada sebuah elemen $e \in G$, sedemikian hingga untuk setiap $a \in G$, berlaku $a * e = e * a = a$; selanjutnya e disebut elemen identitas;
4. invers: yakni untuk setiap $a \in G$, ada $b \in G$, sedemikian hingga $a * b = b * a = e$; dalam hal ini b disebut invers dari a dan sebaliknya.

Sistem ini kemudian dinotasikan dengan $[G,*]$ dan didefinisikan sebagai *grup*. Sebagai konsekwensinya, semua himpunan dengan operasi biner yang didefinisikan di dalamnya, yang memenuhi keempat aksioma tersebut disebut grup. Proses pembentukan sistem abstrak inilah yang disebut dengan proses *abstraksi*. Selanjutnya diadakan pengkajian terhadap karakteristik dan sifat-sifat dari grup abstrak, yang kemudian menghasilkan teorema-teorema, seperti:

1. elemen identitas adalah tunggal;
2. invers dari setiap elemen adalah tunggal;
3. dalam grup berlaku hukum kanselasi;
4. persamaan $a * x = b$ memiliki penyelesaian tunggal dalam G untuk setiap $a, b \in G$.

Dengan memahami hakekat matematika tersebut maka seorang guru akan memiliki suatu wawasan, visi dan strategi yang tepat dalam mengajarkan konsep-konsep matematika kepada siswanya. Mengingat hakekatnya yang berkenaan dengan ide-ide abstrak (misalnya tentang konsep bilangan), sementara tingkat perkembangan kognitif siswa SD pada umumnya masih berada pada tahap operasional kongkrit, dimana mereka belajar memahami suatu konsep melalui manipulasi benda-benda kongkrit, maka di dalam menyajikan konsep-konsep matematika seringkali guru harus menggunakan peraga-peraga dan ilustrasi kongkrit dari konteks kehidupan nyata di sekitar siswa serta menggunakan teknik analogi, agar konsep abstrak tersebut menjadi lebih mudah dipahami oleh siswa.

B. Nilai Pendidikan Matematika

Sebuah pernyataan klasik yang seringkali kita dengar di tengah masyarakat adalah bahwa matematika merupakan pelajaran yang sulit sehingga orang menjadi takut dan bahkan "alergi" manakala mereka mendengar kata *matematika*. Suatu tantangan bagi guru matematika yakni bagaimana mengubah atau paling tidak mereduksi pandangan semacam ini dengan menyajikan materi matematika secara sederhana dan menarik tetapi juga mudah dipahami oleh siswa.

Dalam paradigma baru pembelajaran di sekolah dasar, matematika harus disajikan dalam suasana yang menyenangkan sehingga siswa termotivasi untuk belajar matematika. Beberapa upaya yang dapat dilakukan guru untuk menarik perhatian dan meningkatkan motivasi siswa dalam belajar matematika antara lain dengan mengkaitkan materi yang disajikan dengan konteks kehidupan riil sehari-hari yang dikenal siswa di sekelilingnya atau dengan memberikan informasi manfaat materi yang sedang dipelajari bagi pengembangan kepribadian dan kemampuan siswa untuk menyelesaikan masalah-masalah selanjutnya, baik permasalahan dalam matematika itu sendiri, permasalahan dalam mata pelajaran lain, maupun permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Untuk dapat melakukan upaya peningkatan motivasi tersebut, maka seorang guru perlu memahami nilai-nilai yang terkandung dalam pendidikan matematika.[3]

Nilai-nilai utama yang terkandung dalam matematika adalah nilai praktis, nilai disiplin dan nilai budaya (Sujono, 1988). Matematika dikatakan memiliki nilai praktis karena matematika merupakan suatu alat yang dapat langsung dipergunakan untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari. Disadari atau tidak, hampir setiap hari dalam kehidupannya, manusia akan melakukan perhitungan-perhitungan matematis, mulai dari tingkat komputasi yang sederhana, seperti menambah, mengurangi, mengalikan dan membagi, sampai pada tingkat komputasi yang rumit. Sebagai contoh sederhana misalkan dalam keseharian seorang ibu rumah tangga. Setiap hari ia harus mempersiapkan makanan untuk seluruh anggota keluarga. Setiap kali sebelum mulai memasak, ia selalu harus melakukan kalkulasi terhadap bahan-bahan masakan yang diperlukan dan kecukupan kebutuhan makan seluruh anggota keluarganya dalam sehari. Jika bahan-bahan yang diperlukan belum tersedia, maka ia harus membelinya di pasar atau pada pedagang keliling. Untuk keperluan ini, jelas ia harus melakukan kalkulasi, baik untuk menentukan total pembayaran atau menghitung jumlah uang kembalian yang harus diterima. Demikian juga dengan si penjual, dalam kegiatan jual beli ini, ia akan melakukan pekerjaan matematika, seperti menimbang, menghitung barang, menghitung uang pembayaran, atau juga menghitung uang kembalian. Paparan ini hanyalah merupakan sebagian kecil dari kebutuhan akan matematika dalam penyelenggaraan sebuah rumah tangga.

Jika dalam keluarga saja *pekerjaan matematika* sudah menjadi bagian dalam menunjang berbagai kegiatan rumah tangga, apalagi dalam dunia usaha. Semua bidang dalam dunia usaha, mulai dari perdagangan, perbankan,

---

[3] Departemen Pendidikan Nasional. *Kurikulum 2004 Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Dasar dan Madrasah Ibtidaiyah*. Jakarta: 2003. Depdiknas. hal. 87.

transportasi, konstruksi, pertanian sampai berbagai usaha jasa, pasti akan melakukan pekerjaan matematika sebagai bagian dalam kegiatan usahanya. Seorang pedagang tentu akan melakukan perhitungan terhadap modal, barang-barang dagangan, harga penjualan dan keuntungan. Staf di bidang perbankan dengan bantuan komputer atau alat komputasi lainnya akan melakukan perhitungan-perhitungan terhadap nilai tukar mata uang, suku bunga simpanan dan pinjaman, ataupun setoran nasabah. Seorang sopir angkutan umum akan melakukan kalkulasi terhadap uang yang didapat dari para penumpang, kebutuhan bahan bakar, setoran dan pendapatan bersih yang bisa dibawa pulang. Seorang tukang bangunan akan melakukan perhitungan kebutuhan bahan bangunan, perbandingan komposisi antara pasir, semen dan kapur, pengukuran ketinggian bangunan, atau bahkan perhitungan kemiringan atap. Seorang petani akan melakukan perhitungan terhadap kebutuhan benih, pupuk dan obat-obatan, jadwal perlakuan terhadap tanaman, serta perkiraan hasil panen. Singkatnya, dalam penyelenggaraan setiap kegiatan dalam dunia usaha tersebut selalu memerlukan matematika sebagai alatnya. Beberapa contoh tersebut menunjukkan bahwa matematika telah menjadi sarana penunjang utama pada setiap kegiatan manusia dalam kehidupan sehari-hari. Pada matematika terdapat nilai-nilai kedisiplinan. Hal ini dimaksudkan bahwa dengan belajar matematika akan melatih orang berlaku disiplin dalam pola pemikirannya. Sebagaimana telah diketahui bahwa hakekat matematika berkenaan struktur-struktur, hubungan-hubungan dan konsep-konsep abstrak yang dikembangkan menurut aturan yang logis.

Matematika terdiri dari sistem-sistem yang terstruktur yang masing-masing terbentuk melalui pola penalaran secara deduktif dengan logika matematika sebagai alat penalarannya. Diawali dengan sebuah konsep pangkal, sebuah sistem dalam matematika disusun dengan rangkaian sebab akibat, sehingga sebuah pernyataan diturunkan dan didasarkan dari pernyataan-pernyataan yang sudah ada sebelumnya, demikian juga suatu pernyataan akan menjadi landasan bagi pernyataan-pernyataan selanjutnya dalam urutan yang logis. Semua pekerjaan dalam matematika, baik untuk menurunkan rumus, membuktikan teorema, maupun menyelesaikan soal atau masalah, juga menggunakan alur penalaran yang serupa. Misalnya dalam pembuktian teorema berikut:

Jika dua garis yang berbeda berpotongan maka titik potongnya merupakan satu-satunya titik sekutu antara dua garis tersebut. diperlukan dasar-dasar pernyataan sebelumnya, seperti

1. *melalui dua titik yang berbeda hanya dapat dibuat satu garis;*
2. *garis merupakan himpunan titik-titik;*
3. *jika* $x \quad A \quad B$ *maka* $x \quad A$ *dan* $x \quad B$.

Menggunakan dasar tersebut, kita dapat memulai pembuktian dengan melakukan pengandaian:

- *Misalnya dua garis yang berbeda tersebut adalah k dan l dan titik potongnya adalah P.*
- *Andai P bukan satu-satunya titik sekutu, maka berarti ada titik lain yang juga merupakan titik sekutu, misalnya Q, dimana Q P.*
- *Jika Q k l maka Q k dan Q l. Sementara P k l maka P k dan P l.*
- *Karena Q k dan P k maka PQ k. Karena Q l dan P l maka PQ l.*
- *Karena PQ k dan PQ l maka k l.*
- *Sampai disini terjadi kontradiksi, yakni k l dan k l.*
- *Karena terjadi kontradiksi maka pengandaian bahwa "P bukan satu-satunya titik sekutu" adalah salah, dan yang benar adalah negasi dari pengandaian tersebut, yakni "P adalah satu-satunya titik sekutu".*

Jelas dalam pembuktian tersebut terjadi pola sebab akibat, artinya setiap langkah dalam pembuktian merupakan akibat dari langkah sebelumnya dan akan menjadi sebab untuk langkah selanjutnya dalam urutan yang logis sampai akhirnya didapat kesimpulan yang merupakan pembuktian dari teorema di atas. Contoh lain lagi misalnya dalam penyelesaian soal, sebagaimana soal sederhana yang berikut ini.

Harga sebuah buku tulis adalah Rp. 2.500,-, sebuah pensil harganya Rp. 1.500,- dan sebuah penggaris harganya Rp. 3.000,-. Dua kakak beradik, Tiko dan Ana, masing-masing secara berurutan membeli 5 buku tulis, 3 pensil, 2 penggaris, dan 3 buku tulis, 4 pensil, 1 penggaris. Berapa jumlah uang yang harus dibayarkan oleh masing-masing anak tersebut? Jika untuk semua barang yang dibeli mereka memberikan uang Rp. 50.000,- kepada si penjual, berapa uang kembali yang harus mereka terima?

Penyelesaian soal cerita semacam ini diawali dengan sebuah identifikasi tentang apa saja yang diketahui dan apa yang ditanyakan. Dengan identifikasi ini maka persoalan akan semakin jelas sehingga pembentukan model matematikanya juga semakin mudah. Penyelesaian secara matematis merupakan penyelesaian dari model matematika, sedangkan jawaban dari soal cerita diberikan oleh interpretasi dari penyelesaian matematis tersebut. Tahap demi tahap penyelesaian dari soal di atas dapat dirumuskan sebagai berikut.

Diketahui: harga buku tulis = 2500; harga pensil = 1500;
harga penggaris = 3000;
Tiko beli 5 buku tulis; 3 pensil; 2 penggaris
Ana beli 3 buku tulis; 4 pensil; 1 penggaris

Ditanya: a) Jumlah yang harus dibayar masing-masing anak.
b) Uang kembali jika mereka membayar Rp. 50.000,-
a) Jika jumlah yang harus dibayar Tiko = s, maka

jawab: s = 5 x 2500 + 3 x 1500 + 2 x 3000
= 12500 + 4500 + 6000 = 23000

Jika jumlah yang harus dibayar Ana = b, maka b = 3 x 2500 + 4 x 1500 + 1 x 3000
= 7500 + 6000 + 3000 = 16500

Jadi jumlah yang harus dibayar Tiko adalah Rp. 23.000,-dan yang harus dibayar Ana adalah Rp. 16.500,-

Jika jumlah uang kembali adalah u maka u = 50000 – s – b
50000 – 23000 – 16500
10500

Jadi jika mereka membayar Rp. 50.000,- maka jumlah uang kembalinya adalah Rp. 10.500,-

Dari ilustrasi-ilustrasi di atas terlihat bahwa bekerja dalam matematika harus dilakukan secara sistematis, tegas dan jelas serta setiap tahap dalam proses penyelesaian harus memiliki landasan yang benar. Antara tahap yang satu dengan tahap yang lainnya (baik sebelum maupun sesudahnya) harus menunjukkan implikasi yang jelas. Selain itu dalam matematika juga digunakan simbul-simbul dan variabel-variabel. Hal ini dimaksudkan selain untuk mempersingkat sebuah kalimat (model) matematika, juga agar bahasa matematika yang dihasilkan akan menjadi lebih universal. Oleh karena itu pemakaian simbul dan variabel dalam pekerjaan matematika harus dilakukan dengan tertib dan jelas sebab jika tidak akan bisa menimbulkan salah tafsir dan kurang komunikatif, dalam artian hasil pekerjaan seseorang tidak dapat dipahami oleh orang lain, walau pekerjaan tersebut benar sekalipun.

Berdasarkan uraian di atas maka jelas bahwa bekerja dalam matematika harus disiplin dalam pemikiran. Setiap langkah harus memiliki alur yang jelas dan tepat. Kedisiplinan baik dalam menyusun langkah pekerjaan maupun dalam mempergunakan simbul-simbul dan variabel-variabel ini akan mengantar seseorang pada penemuan hasil maupun penarikan kesimpulan yang benar dalam matematika. Selain kedisiplinan, kecermatan juga sangat diperlukan bila bekerja dalam matematika, sebab sedikit kesalahan dalam suatu langkah akan mengakibatkan kesalahan pada langkah berikutnya, atau paling tidak akan terjadi implikasi yang tidak logis antar langkah dalam sebuah pekerjaan. Mengingat karakteristik pekerjaan dalam matematika yang demikian, maka dengan belajar matematika secara benar, orang akan terlatih untuk bekerja secara disiplin dan cermat. Untuk dapat melatihkan nilai-nilai kedisiplinan ini terhadap siswa sembari menyajikan konsep-konsep matematika, maka guru dituntut tidak hanya mampu menyampaikan konsep matematika secara benar tetapi juga cermat dan disiplin dalam membimbing pekerjaan siswa. Mengapa kecermatan dan kedisiplinan guru dalam membimbing pekerjaan siswa perlu ditekankan disini? Hal ini tidak lain karena berdasarkan pengamatan penulis selama mengajar mata kuliah Matematika, Pendidikan Matematika I dan Pendidikan Matematika II, masih banyak mahasiswa S-1 PGMI yang mengabaikan alur langkah yang sistematis dan logis dalam pekerjaan matematika. Hal ini terlihat saat mereka harus mensimulasikan sebuah pembelajaran dalam *peer-teaching*, atau bahkan pada saat mereka mengerjakan sendiri soal-soal matematika di depan kelas atau dalam ujian. Coba anda perhatikan contoh hasil pekerjaan berikut.

$$45 : 9 = 45 - 9 - 9 - 9 - 9 - 9 - 0$$

Jadi $45 : 9 = 5$

Ini pernah terjadi pada sebuah *peer-teaching* dengan bahasan "pembagian sebagai pengurangan secara berulang". Baik "guru" maupun "siswa" tidak ada yang menyanggah atau mempertanyakan redaksi pekerjaan ini, karena mereka menganggap hal ini sudah jelas dan hasil akhirnya benar. Tetapi begitu mendapat pertanyaan dari dosen pembina mata kuliah: "*apakah benar 45 : 9 = 0 ?*", mereka baru menyadari letak kesalahan dalam kalimat matematika tersebut. Bila hal yang demikian terbawa untuk mengajar pada siswa SD yang sesungguhnya, maka bisa jadi siswa akan mengikuti contoh pekerjaan dari guru. Walaupun konsep yang mereka terima dan pahami bisa saja benar, tetapi redaksi kalimat matematika yang diekspresikan akan menjadi sebuah kesalahan yang fatal dalam pekerjaan matematika. Hal ini jelas sama sekali tidak menunjukkan nilai-nilai kedisiplinan dan kecermatan dalam pendidikan matematika.

Redaksi pekerjaan di atas haruslah direvisi sedemikian rupa sehingga alur langkahnya dapat tertata secara sistematis dan logis. Misalnya dengan menambahkan beberapa kalimat seperti di bawah ini.

Sebagaimana telah ditekankan di depan bahwa untuk dapat melatih kedisiplinan dalam diri siswa melalui pendidikan matematika, diperlukan kecermatan dan kedisiplinan dari guru dalam membimbing pekerjaan siswanya. Namun demikian hal ini tentu tidak dimaksudkan bahwa seorang guru matematika harus bersikap keras terhadap siswanya, tetapi justru harus sebaliknya bahwa penerapan sikap disiplin dan cermat itu tetap dalam koridor dan nuansa pembelajaran matematika yang menarik dan menyenangkan. Dengan demikian upaya untuk meningkatkan motivasi siswa belajar matematika dan sekaligus mendidik siswa untuk memiliki kedisiplinan dan kecermatan dalam bekerja dapat berjalan secara seimbang.

Nilai utama berikutnya yang terkandung dalam matematika adalah nilai budaya. Memang nampaknya asing kedengarannya bahwa matematika dikaitkan dengan budaya. Tetapi bila kita perhatikan maka sebenarnya matematika sangat erat kaitannya dengan perkembangan budaya manusia. Ditinjau dari latar belakang sejarahnya, sejak awal peradabannya, manusia telah menggunakan matematika untuk melakukan perhitungan-perhitungan sederhana, seperti menghitung banyaknya ternak, hari dan sebagainya. Mereka menggunakan batu-batu atau menorehkan pahatan di dinding-dinding gua untuk menyatakan kalkulasinya. Pada perkembangan selanjutnya manusia berusaha menciptakan simbul-simbul sebagai lambang bilangan dan juga menyusun sistem numerasinya untuk lebih memudahkan mereka dalam menyatakan sebuah kuantitas. Matematika bukanlah sebuah ilmu yang hanya berdiri untuk menopang dirinya sendiri, melainkan juga berperan banyak dalam perkembangan bidang ilmu pengetahuan yang lainnya. Bidang-bidang ilmu seperti fisika, biologi, kimia, farmasi, kedokteran, ekonomi, sejarah, dan bahkan bahasa dalam perkembangannya sangat dibantu oleh matematika. Dan bukan hanya itu saja, sebagaimana telah kita ketahui, matematika juga telah menjadi sebuah kebutuhan di semua aspek kehidupan manusia, seperti dalam bidang-bidang pertanian, industri, transportasi, konstruksi, perekonomian, pendidikan, jasa, pertambangan, macam-macam teknologi, informasi, dan lain sebagainya.

Sementara itu perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi serta bidang-bidang kegiatan manusia, pada gilirannya akan mendukung kemajuan peradaban budaya manusia. Kita bisa membandingkan bagaimana pola kehidupan masyarakat 20-30 tahun yang lalu dengan sekarang ini. Tinjau saja suatu bidang misalnya informasi. Sekian tahun yang lalu jika seseorang membutuhkan sebuah informasi maka ia harus mengumpulkan buku-buku, majalah, atau surat kabar dan jika diperlukan ia harus membuat kliping dari beberapa artikel, atau jika menginginkan informasi langsung dari narasumbernya maka ia harus mendatanginya atau menghubunginya melalui surat, dan hal ini tentunya membutuhkan waktu yang relatif lama. Tetapi sekarang, dengan berkembangnya komputer lebih-lebih internet, untuk mendapatkan informasi yang dibutuhkan, dengan cepat orang bisa mendapatkannya melalui media internet, atau jika ingin mendapatkan dari narasumbernya langsung, ia bisa menghubunginya melalui e-mail.

Contoh lain misalnya dalam hal berkomunikasi. Dulu, komunikasi antar dua orang yang berada di tempat yang berbeda dilakukan hanya dengan menggunakan surat dan hal ini tentu membutuhkan waktu berhari-hari untuk sekedar menunggu respon atau jawaban dari orang yang dihubungi; pada perkembangan selanjutnya orang bisa berkomunikasi secara langsung melalui telepon rumah, dan hal ini tentu saja hanya bisa dilakukan jika dua orang yang akan berkomunikasi berada di suatu tempat tertentu, misalnya di kantor atau di rumah. Tetapi sekarang, dengan telah begitu pesatnya perkembangan teknologi telepon selular, orang bisa berkomunikasi dimana saja dan kapan saja. Bahkan, janji untuk bertemu atau undangan untuk rapat, terutama yang non formal, tidak lagi harus melalui surat, orang sudah biasa melakukannya menggunakan *short message service (sms)* melalui handphone.

Berkenaan dengan perkembangan telepon selular ini, sepuluh atau bahkan lima tahun yang lalu, belum banyak orang yang memiliki dan bahkan banyak yang berpandangan bahwa handphone merupakan barang mewah yang dibutuhkan oleh kalangan pengusaha, tetapi sekarang hampir setiap orang memiliki dan membutuhkannya dan bukan lagi menjadi barang mewah. Tidak hanya suara atau pesan pendek saja yang bisa dikomunikasikan melalui handphone ini, tetapi juga gambar dan bahkan rekaman peristiwa yang terjadi secara *live*. Namun demikian, kemajuan teknologi informasi dan komunikasi ini tentu tidak hanya membawa manfaat positif bagi kehidupan manusia, tetapi juga bisa berdampak negatif terutama bila pemanfaatan teknologi tersebut disalahgunakan.

Dari ilustrasi-ilustrasi singkat tersebut, kita bisa memiliki sebuah gambaran bahwa perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi sangat berpengaruh pada perkembangan pola hidup dan budaya manusia. Sementara perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi sangat tergantung pada matematika. Dari sini jelaslah betapa eratnya hubungan matematika dengan sejarah kemajuan peradaban dan budaya manusia. Matematika muncul sebagai hasil budaya manusia dan berperan besar dalam perkembangan budaya itu sendiri. Mengajarkan matematika merupakan sebuah proses pewarisan budaya kepada generasi yang akan datang. Namun demikian, satu hal yang perlu diperhatikan bahwa perkembangan sebuah teknologi tentu saja memiliki dampak baik positif maupun negatif terhadap kehidupan manusia dan budayanya. Oleh karenanya dalam proses pewarisan ilmu pengetahuan, teknologi dan budaya, perlu disertai dengan penanaman etika dan norma dalam kehidupan bermasyarakat.

C. Peranan Matematika di Sekolah Dasar

Setelah memahami hakekat dan nilai-hilai yang terkandung dalam matematika, maka sekarang kita lebih berfokus pada pendidikan matematika di sekolah dasar. Pemahaman terhadap peranan pengajaran matematika di sekolah dasar akan sangat membantu para guru untuk memberikan materi matematika pada siswanya secara proporsional sesuai dengan tujuannya.

Sebagaimana tercantum dalam dokumen Standar Kompetensi mata pelajaran matematika untuk satuan SD dan MI pada kurikulum 2004 disebutkan fungsi matematika adalah sebagai berikut.

Matematika berfungsi untuk mengembangkan kemampuan bernalar melalui kegiatan penyelidikan, eksplorasi dan eksperimen, sebagai alat pemecahan masalah melalui pola pikir dan model matematika, serta sebagai alat komunikasi melalui simbol, tabel, grafik, diagram, dalam menjelaskan gagasan (Depdiknas, 2003).

Fungsi ini merupakan suatu implemantasi dari substansi matematika itu sendiri dimana pengembangan setiap konsep matematika dikaji melalui proses penalaran yang sistematis dan logis. Pembahasan setiap topik dalam matematika sangat memungkinkan untuk dilakukan melalui kegiatan penyelidikan, eksplorasi, atau eksperimen. Misalnya pada pembahasan materi tentang jumlah besar sudut dalam sebuah segitiga. Pada siswa guru bisa memberikan pertanyaan arahan berikut.

Berapa jumlah besar sudut dalam sebuah segitiga?
atau
Benarkah jumlah besar sudut dalam sebuah segitiga adalah 180 ^{o}?

Untuk menjawab pertanyaan ini, melalui pendekatan secara induktif, siswa bisa diminta untuk membuat gambar segitiga-segitiga dalam bermacam-macam tipe dan ukurannya, katakanlah masing-masing siswa membuat 10 buah gambar segitiga. Selanjutnya menggunakan busur derajad, mereka diminta untuk mengukur besar setiap sudut dan menghitung jumlahnya untuk masing-masing segitiga yang dibuatnya. Andai dalam satu kelas terdapat 40 siswa, maka kegiatan penyelidikan tersebut dilakukan terhadap 400 buah segitiga. Dengan pengukuran yang benar maka setiap siswa akan berkesimpulan bahwa jumlah besar sudut dalam sebuah segitiga adalah 180 ^{o}. Dalam melakukan kegiatan ini, untuk mendapatkan kesimpulan tersebut, siswa akan melakukan penalaran secara induktif.

Setelah mereka benar-benar memahami hasil yang mereka peroleh dari proses penyelidikan tersebut, guru hendaknya memberikan penguatan atau penegasan terhadap hasil itu melalui proses penalaran secara deduktif. Hal ini karena pada dasarnya obyek-obyek dalam matematika dibangun melalui proses penalaran secara deduktif, sedangkan pendekatan induktif dilakukan agar siswa mudah memahami konsep-konsep baru di awal pembelajaran.

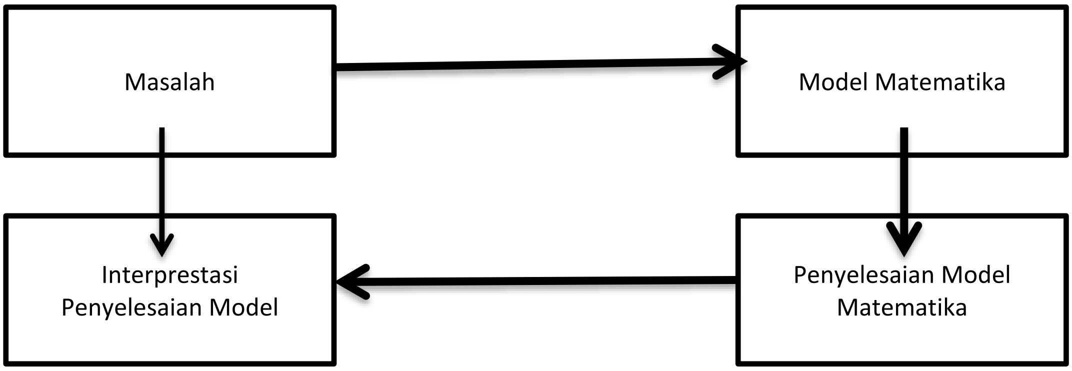
Obyek-obyek dalam matematika tidak hanya ada untuk dipahami dan dikaji saja, tetapi juga dapat dipergunakan sebagai alat untuk memecahkan masalah. Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, terlebih-lebih yang berkaitan dengan penalaran dan komputasi, yang dapat diselesaikan menggunakan matematika. Oleh karenanya seringkali untuk memberikan motivasi pada siswa untuk belajar matematika, guru memulai membuat analogi pada kehidupan sehari- hari, misalnya pada bahasan perbandingan, guru bisa mengawali dengan mengajukan permasalahan berikut ini:

Ibu Juliana memiliki 100 buah kelereng dan akan membagikannya kepada kedua anaknya dengan perbandingan 3:2. Berapa kelereng yang akan diterima oleh masing-masing anak?

Contoh lain, misalnya untuk bahasan penerapan konsep luas sisi bangun ruang, guru bisa memberikan permasalahan berikut ini:

Pak Cahyo akan membuat kolam renang dengan kedalaman 2 m, lebar 5 m dan panjang 10 m. Bila untuk menutup 1 m^2 dinding diperlukan 9 buah keramik, berapa banyaknya keramik yang dibutuhkan untuk menutup seluruh permukaan dinding bagian dalam kolam tersebut?

Permasalahan-permasalahan tersebut selain untuk membangkitkan motivasi pada siswa, juga untuk menunjukkan bahwa matematika dapat dijadikan sebagai alat untuk memecahkan masalah sehari-hari.



Gambar 1.4 Alur pemecahan masalah menggunakan matematika

Langkah-langkah penggunaan matematika untuk memecahkan masalah diawali dengan penyusunan model dari permasalahan yang akan dipecahkan, kemudian model tersebut diselesaikan menggunakan konsep-konsep dasar matematika yang terkait secara sistematis dan logis, dan akhirnya pemecahan dari masalah didapat dari hasil interpretasi terhadap hasil penyelesaian model matematika.

Tujuan pembelajaran matematika adalah melatih dan menumbuhkan cara berpikir secara sistematis, logis, kritis, kreatif dan konsisten, serta mengembangkan sikap gigih dan percaya diri dalam menyelesaikan masalah (Depdiknas, 2003).[4]

Tujuan ini sejalan dengan nilai-nilai yang ada dalam pendidikan matematika. Sebagaimana telah diketahui bahwa dalam hakekatnya, matematika merupakan kumpulan sistem-sistem abstrak yang dibangun melalui proses penalaran deduktif dan tersusun secara sistematis dan logis. Oleh karenanya bekerja dengan matematika harus memperhatikan hakekat tersebut. Bila seorang siswa telah terbiasa bekerja dalam matematika secara benar, maka ia akan terlatih untuk berpikir secara sistematis, logis dan konsisten. Sejalan dengan fungsinya sebagai alat untuk latihan bernalar secara benar, alat untuk memecahkan masalah, dan alat untuk mengekspresikan gagasan-gagasan, maka bekerja dengan matematika juga memungkinkan seseorang terlatih untuk berpikir secara kritis dan kreatif. Dan dengan ketegasan dan kejelasan langkah-langkah dalam pekerjaan matematika maka juga akan mengembangkan sikap tangguh dan percaya diri seseorang dalam menyelesaikan masalah.

Melalui pemahaman terhadap fungsi dan tujuan pengajaran matematika, maka seorang guru dapat memiliki visi dan arah yang jelas dalam menyampaikan konsep-konsep matematika. Sudah barang tentu, dalam penyampaian konsep-

[4] Departemen Pendidikan Nasional. 2003. *Kurikulum 2004 Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Dasar dan Madrasah Ibtidaiyah*. Jakarta: 2003. Depdiknas. hal.90.

konsep tersebut harus juga memperhatikan tingkat perkembangan kognitif dan kemampuan intelektual siswa. Suatu pokok bahasan memiliki kedalaman kajian yang berbeda antara satu tingkatan kelas dengan yang lainnya di sekolah dasar, apalagi antar jenjang sekolah. Oleh karena itu, selain agar guru memiliki visi dan arah yang jelas dalam pengajaran matematika, juga mampu menyampaikan materi matematika secara proporsional, maka diperlukan suatu

perumusan standar kompetensi. Standar kompetensi untuk mata pelajaran matematika pada satuan Sekolah Dasar (SD) dan Madrasah Ibtidaiyah (MI) meliputi 3 aspek, yakni bilangan, pengukuran dan geometri, dan pengelolaan data (Depdiknas, 2003).

Aspek Bilangan:

1. Menggunakan bilangan dalam pemecahan masalah;
2. Menggunakan operasi hitung bilangan dalam pemecahan masalah;
3. Menggunakan konsep bilangan cacah dan pecahan dalam pemecahan masalah;
4. Menentukan sifat-sifat operasi hitung, faktor, kelipatan bilangan bulat dan pecahan serta menggunakannya dalam pemecahan masalah;
5. Melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan, serta menggunakannya dalam pemecahan masalah.

Aspek Pengukuran dan Geometri:

1. Melakukan pengukuran, mengenal bangun datar dan bangun ruang, serta menggunakannya dalam pemecahan masalah sehari-hari;
2. Melakukan pengukuran, menentukan unsur bangun datar dan menggunakannya dalam pemecahan masalah;
3. Melakukan pengukuran keliling dan luas bangun datar dan menggunakannya dalam pemecahan masalah;
4. Melakukan pengukuran, menentukan sifat dan unsur bangun ruang, menentukan kesimetrian bangun datar serta menggunakannya dalam pemecahan masalah;
5. Mengenal sistem koordinat pada bidang datar.

Aspek Pengelolaan data

1. Mengumpulkan, menyajikan dan menafsirkan data.

Standar kompetensi ini dimaksudkan sebagai orientasi kemampuan matematika siswa SD dan MI setelah mereka menyelesaikan pelajaran matematika. Selanjutnya pada tiap tingkatan kelas, standar kompetensi

ini kemudian dijabarkan menjadi kompetensi dasar pada setiap materi pokok, implementasi dari kompetensi dasar dituangkan ke dalam hasil-hasil belajar dan untuk mengontrol ketercapaian setiap hasil belajar dirumuskanlah indikator-indikator.

Hal yang terpenting dalam implementasi kurikulum 2004 ini adalah pembelajaran berbasis pada kompetensi siswa. Pembelajaran berfokus pada siswa yang belajar dan bukan berpusat pada guru. Siswa lebih banyak dilibatkan pada kegiatan pembelajaran yang bersifat eksplorasi dan ekperimental, sementara guru lebih banyak berperan sebagai fasilitator. Kegiatan pembelajaran semacam ini juga dimaksudkan untuk lebih mendekatkan matematika dengan kehidupan riil di sekitar siswa. Model-model pembelajaran seperti *cooperative learning, realistic mathematics, atau outdoor mathematics*, akan banyak mendukung konsep tersebut sejauh disesuaikan dengan kemampuan dan kondisi siswa serta lingkungan sekitarnya. Misalnya, untuk menerapkan konsep kesebangunan segitiga atau konsep tentang sudut elevasi, siswa bisa diajak keluar kelas dan diberi permasalahan-permasalahan riil, seperti: 1) menentukan tinggi tiang bendera tanpa harus merobohkan atau memanjatnya; atau 2) menentukan jarak antara dua pohon yang dipisahkan oleh sungai tanpa harus menyeberangi sungai; atau 3) menentukan jarak dua gedung di kejauhan yang hanya terlihat puncaknya saja tanpa harus mendatangi gedung yang bersangkutan. Atau pada pembelajaran untuk menguatkan konsep tentang bangun-bangun datar, siswa bisa diminta untuk mengidentifikasi benda-benda yang berbentuk persegi, persegipanjang, lingkaran dan segitiga yang ada di sekitar sekolah.

Contoh-contoh di atas adalah sebuah kegiatan pembelajaran yang membawa siswa melakukan kontak langsung dengan obyek nyata di sekitarnya dalam rangka menerapkan konsep-konsep matematika yang sudah dipelajari di kelas. Namun demikian konsep *realistik* dalam pembelajaran matematika tidak selalu harus membawa siswa keluar kelas, tetapi dengan memberikan contoh-contoh riil yang terjangkau oleh penalaran siswa, juga sudah merupakan konteks matematika realistik yang akan mendekatkan matematika dengan lingkungan nyata di sekitar siswa. Hal lain yang tak kalah penting adalah membina hubungan social yang harmonis antara siswa dengan lingkungan sekitarnya, khususnya dengan teman-teman sekelasnya. Upaya ini bisa dilakukan mislnya dengan menerapkan *cooperative learning*. Penerapan model pembelajaran ini selain berguna untuk memupuk persaudaraan dan kerjasama diantara siswa, juga akan dapat memantabkan pemahaman konsep pada diri siswa, sebab dengan belajar bersama maka akan terjadi *sharing* pengetahuan dan ketrampilan sehingga akhirnya orang-orang yang terlibat dalam pembelajaran ini akan memiliki tingkat pengetahuan dan ketrampilan yang setara.

Pada konsep pembelajaran berbasis kompetensi siswa, semua kegiatan pembelajaran juga diarahkan pada bagaimana siswa mencapai kemampuan tertentu untuk memecahkan permasalahan. Dalam hal ini konteks algoritma formal dalam matematika, seperti algoritma operasi hitung bilangan bulat yang selama ini telah diajarkan, memang penting, tetapi yang lebih ditekankan adalah bagaimana siswa dengan kemampuan dan pengetahuan yang dimilikinya mampu untuk menyelesaikan permasalahan. Misalnya untuk menjawab pertanyaan:

"berapakah faktor persekutuan terbesar dari 42 dan 36?"

bisa muncul teknik-teknik yang bervariasi yang digunakan siswa tergantung kemampuan mereka, misalnya ada yang mengerjakan dengan cara pertama:

Faktor-faktor dari 42 adalah 1,2,3,6,7,14,21,42
Faktor-faktor dari 36 adalah 1,23,4,6,9,12,18,36
Faktor-faktor persekutuannya adalah 1,2,3,6
Jadi FPB dari 42 dan 36 adalah 6

Atau dengan cara kedua:

$$42 \quad = 2 \, X \quad 3 \, X \quad 7$$
$$36 \quad = \underbrace{2}_{2} \, X \, 2 \, X \underbrace{3}_{3} \, X \, 3$$

Jadi FPB dari 42 dan 36 adalah 2 x 3 = 6.

Hal tersebut menunjukkan adanya variasi kemampuan dasar siswa untuk menyelesaikan suatu soal sesuai dengan konsep-konsep yang pernah mereka terima. Walau pada dasarnya semua cara telah diajarkan oleh guru tetapi bisa jadi ada sekelompok siswa yang hanya mampu menggunakan cara pertama, ada yang sudah bisa mengerjakan dengan cara kedua, dan bahkan ada yang sudah mampu dengan cara ketiga.

Untuk keperluan evaluasi, cara apapun yang digunakan oleh siswa asalkan logis dan menghasilkan jawaban benar maka kita harus memberikan skor yang sama kepada ketiganya, karena hal ini sudah menjadi sebuah implikasi logis jika pertanyaannya adalah: *"berapakah faktor persekutuan terbesar dari 42 dan 36?"*, dan dengan cara yang logis dijawab dengan *"FPB dari 42 dan 36 adalah 6"*.

Lalu bagaimana kita bisa melihat perbedaan tingkat kemampuan mereka bila ditinjau dari cara mereka mengerjakan soal? Jika ini yang menjadi tujuan evaluasi, maka yang dapat dilakukan oleh guru adalah memberikan mereka soal serupa dalam jumlah yang banyak tetapi dengan waktu yang terbatas, dimana batas waktu ini merupakan standar waktu yang dibutuhkan untuk mengerjakan soal dengan cara yang paling cepat. Misalnya, untuk soal serupa dengan contoh di atas diberikan 20 soal dan harus dikerjakan dalam 20 menit. Dengan kondisi yang demikian, maka siswa yang mampu menggunakan cara ketiga akan mampu menyelesaikan soal lebih banyak dari mereka yang menggunakan cara kedua; dan mereka yang menggunakan cara kedua akan mampu menyelesaikan soal lebih banyak dari mereka yang hanya mampu mengerjakan dengan cara pertama. Hasil inilah yang nantinya akan menunjukkan tingkat kemampuan siswa dalam mengerjakan sebuah soal.

Pada akhirnya, pemahaman guru terhadap hakekat matematika dan nilai-nilai pendidikan matematika akan memberikannya suatu visi dan arah terhadap pengajarannya pada mata pelajaran matematika. Untuk pembelajaran matematika di SD, tentu saja arah dan visi tersebut harus dikontrol melalui pemahaman terhadap tujuan dan kedudukan pembelajaran matematika di sekolah dasar supaya guru dapat menyajikan materi secara proporsional.

BAB II

PENALARAN DALAM MATEMATIKA

Setiap orang pernah dan bahkan hampir setiap saat melakukan kegiatan berpikir karena setiap kesan yang ditangkap oleh panca inderanya selalu akan diproses di dalam alam pikirannya. Melihat suatu peristiwa, orang akan berpikir tentang penyebabnya, bagaimana kronologis kejadiannya, siapa saja yang mengalami, bagaimana kondisi mereka, bagaimana kelanjutan persitiwanya, atau apa yang harus dilakukan menanggapi peristiwa tersebut, atau seandainya orang acuh tak acuh terhadap peristiwa yang dilihatnya, paling tidak ia akan berpikir: "*peduli apa dengan peristiwa itu, yang penting aku melanjutkan kegiatanku".* Mendapati sepeda motor yang tiba-tiba mogok, orang tentunya akan berpikir tentang apa yang menyebabkan, mungkinkah bensinnya sudah habis, atau businya harus diganti, atau karburatornya bermasalah, lalu bagaimana memperbaikinya, adakah bengkel terdekat, dan bahkan mungkin orang tidak hanya berpikir tentang kerusakan sepeda motor, tetapi mungkin juga tentang keterlambatan sampai di tempat kerja, alasan-alasan yang akan diberikan pada atasan, dan sebagainya. Mendengar suara-suara yang mencurigakan, orang akan berpikir tentang apa yang tengah terjadi, suara apa, darimana asalnya, jika membahayakan bagaimana mengantisipasinya. Merasakan bahwa teh yang akan diminum masih panas, mungkin orang akan berpikir untuk membuka tutup gelasnya, atau merendam gelasnya di air dingin, atau meniupnya supaya segera hangat dan dapat diminum, atau bisa juga berpikir untuk menunggunya sampai cukup hangat atau cukup dingin untuk diminum. Singkatnya, setiap kesan yang ditangkap oleh indera manusia akan menjadikannya melakukan kegiatan berpikir.

Kegiatan berpikir tidak hanya terjadi sebagai akibat dari *aksi* yang terjadi di luar diri seseorang, tetapi juga dilakukan oleh orang sebelum ia melakukan suatu tindakan maupun ucapan. Pada saat sepeda motor mogok, orang akan berpikir tentang penyebab kerusakan dan bagaimana langkah penanganannya sebelum melakukan tindakan perbaikan. Pada saat mendapat pertanyaan, orang akan berpikir dulu sebelum menjawabnya. Sebelum memimpin sebuah rapat, seseorang akan berpikir tentang agenda permasalahan yang akan dibicarakan, dan sebagainya.

Dari sekian banyak macam kegiatan berpikir tersebut, mungkin suatu saat orang harus melakukannya secara sistematis dan logis untuk mendapatkan sebuah kesimpulan atau keputusan. Kegiatan berpikir yang semacam ini disebut dengan kegiatan bernalar. Untuk dapat melakukan suatu kegiatan penalaran yang benar sehingga menghasilkan sebuah kesimpulan atau keputusan yang tepat, dibutuhkan data-data dan fakta serta kaidah-kaidah yang benar yang dirangkai dalam suatu alur yang sistematis dan logis. Misalnya untuk mendapatkan kesimpulan tentang penyebab matinya lampu di ruang belajar, orang harus meninjau beberapa hal, seperti apakah ada pemadaman dari PLN atau tidak, apakah terjadi arus pendek atau tidak, apakah saklar lampu di ruang belajar sedang *off* atau tidak, apakah ada kabel yang putus atau tidak, apakah ada kerusakan pada *fitting* atau tidak. Jika semua pertanyaan tersebut jawabnya *tidak*, maka bisa disimpulkan bahwa lampunya yang rusak, sehingga keputusannya adalah membeli lampu baru.

Konsep-konsep yang muncul dalam setiap bidang ilmu pasti merupakan hasil dari suatu proses penalaran, terlebih dalam bidang matematika. Matematika pada hakekatnya berkenaan dengan struktur dan ide-ide abstrak yang disusun secara sistematis dan logis melalui proses penalaran deduktif. Oleh karenanya untuk dapat memahami konsep-konsep matematika secara benar maka terlebih dahulu harus memahami bagaimanakah pola penalaran dan kaidah-kaidah logika yang digunakan sebagai alat berpikir kritis dalam matematika.

A. Pola Penalaran dan Alat Berpikir Kritis

Mempelajari matematika kurang tepat bila dilakukan dengan cara menghafal. Karena konsepnya yang berkenaan dengan obyek-obyek abstrak dan ditampilkan dengan menggunakan simbol-simbol, maka matematika dapat dipelajari dengan baik dengan cara mengerjakan latihan-latihan. Dalam proses bekerja tersebut, mulai dari merumuskan masalah, merencanakan penyelesaian, mengkaji langkah-langkah penyelesaian, membuat dugaan bila data yang disajikan kurang lengkap, dan juga membuktikan teorema-teorema, diperlukan sebuah kegiatan berpikir yang disebut sebagai *berpikir kritis*. Dalam proses berpikir kritis ini, orang akan mengolah data dan atau fakta, merangkainya dalam suatu alur pemikiran yang sistematis dan logis didasarkan pada kaidah-kaidah yang berlaku untuk menghasilkan sebuah kesimpulan atau keputusan. Berkenaan dengan hal ini, ada dua pola penalaran yang dapat dipergunakan orang untuk menarik sebuah kesimpulan atau membuat suatu keputusan, yakni pola *penalaran induktif* dan pola *penalaran deduktif*.[5]

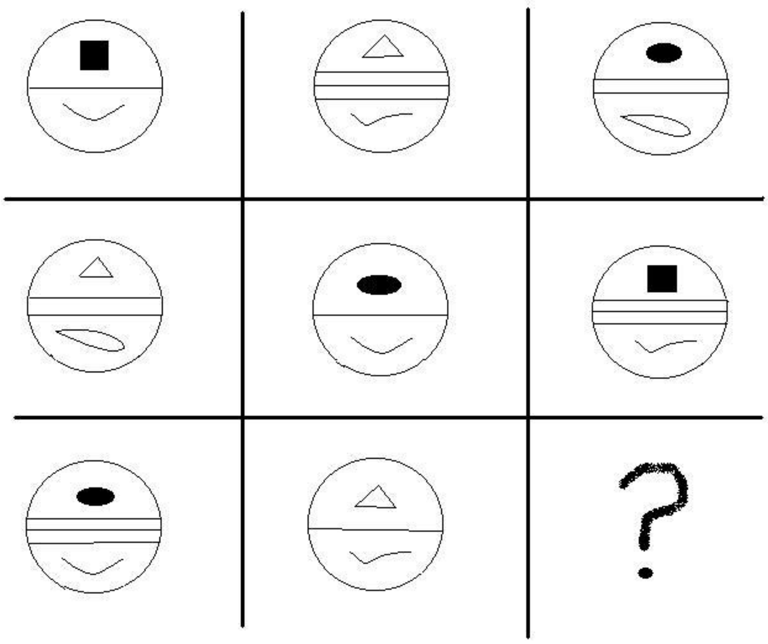
1) Penalaran Induktif

Penalaran induktif merupakan sebuah bentuk penalaran yang berjalan dari hal-hal yang bersifat khusus ke hal-hal yang bersifat umum. Oleh karena itu proses berpikir induktif meliputi pengenalan pola, dugaan dan pembentukan generalisasi. Ketepatan sebuah dugaan atau pembentukan generalisasi dalam pola penalaran ini sangatlah tergantung dari data dan pola yang tersedia. Semakin banyak data yang diberikan atau semakin spesifik pola yang diberikan, maka akan menghasilkan sebuah dugaan atau generalisasi yang semakin mendekati kebenaran. Sebaliknya, semakin sedikit data yang diberikan atau

[5] H. Hudoyo, H. 1979. *Pengembangan Kurikulum Matematika dan Pelaksanaannya di Depan Kelas*. Surabaya: Usaha Nasional.

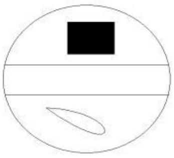
semakin kurang spesifiknya pola yang disediakan, maka dugaan atau generalisasi bisa semakin jauh dari sasaran, dan bahkan bisa memunculkan dugaan atau generalisasi ganda.

Misalkan diberikan sebuah barisan bilangan 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ..., maka pengenalan pola dimaksudkan sebagai suatu identifikasi tentang tata aturan penulisan barisan tersebut. Dari contoh ini dapat dilihat bahwa untuk mendapatkan bilangan berikutnya, maka sebuah bilangan dalam barisan tersebut harus ditambah dengan 3. Setelah mengetahui polanya, selanjutnya dapat dilakukan dugaan-dugaan tentang bilangan-bilangan yang akan muncul pada urutan yang lebih tinggi, misalnya dugaan tentang 3 bilangan yang akan muncul pada urutan ke 8, 9 dan 10. Selanjutnya hasil dari proses pengenalan pola dan pendugaan tersebut dapat digunakan untuk membentuk sebuah generalisasi, yakni dengan menyusun formula untuk menentukan bilangan yang akan muncul pada urutan ke n. Sekarang coba anda perhatikan pola dalam gambar berikut ini.



Gambar 2.1 Pola gambar

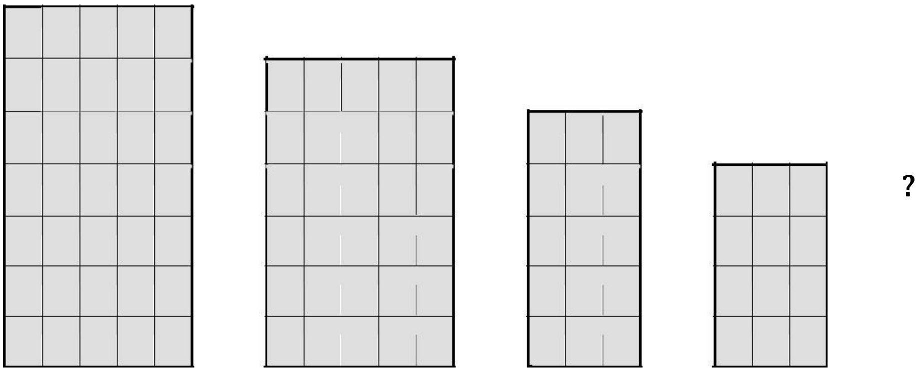
Dengan melakukan penelusuran pola-pola gambar-gambar yang muncul pada baris pertama dan kedua, dapatkah anda menyatakan gambar yang bagaimana yang akan muncul pada posisi "*?*". Jika demikian pertanyaannya, dimungkinkan banyak orang akan memiliki gambar yang sama sebagai jawabnya, yakni



Gambar 2.2 Kemungkinan gambar yang masih tersembunyi

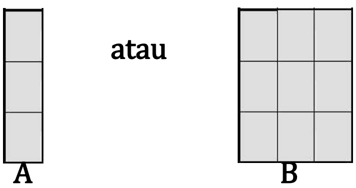
Tetapi jika penelusuran dilakukan pada pola-pola gambar yang muncul pada kolom pertama dan kolom kedua, maka akan sulit ditentukan gambar yang bagaimana yang akan muncul pada baris terakhir kolom ketiga, atau jika tidak akan ada banyak variasi jawaban yang muncul, karena pola yang muncul sepanjang kolom pertama dan kolom kedua kurang spesifik, berbeda dengan pola yang muncul sepanjang baris pertama dan baris kedua yang sudah lebih spesifik.

Variasi dugaan juga bisa muncul pada penelusuran pola geometris pada gambar berikut ini.



Gambar 2.3 Pola geometris

Pola jumlah baris dalam ilustrasi ini lebih spesifik yakni 7, 6, 5, 4, ..., sehingga akan banyak yang memprediksikan bahwa bangun yang ditanyakan akan memiliki 3 baris. Tetapi pola jumlah kolomnya kurang spesifik, karena dengan pola 5,5,3,3, bisa memunculkan dugaan jumlah kolom pada bangun yang ditanyakan adalah 1 bagi yang berasumsi bahwa pola jumlah kolom adalah 5,5,3,3,1,1 (gambar 2.4 a) atau bisa juga muncul dugaan bahwa jumlah kolom pada bangun yang ditanyakan adalah 3 bagi yang berasumsi bahwa pola jumlah kolom adalah 5,5,3,3,3,1,1,1,1 (gambar 2.4 b)



Gambar 2.4 Kemungkinan bentuk berikutnya

Dilihat dari proses yang terlibat dalam penalaran secara induktif tersebut, maka pola penyimpulan yang dihasilkannya bisa tidak tunggal. Sebuah contoh, diberikan barisan bilangan 3, 6, 10, 15, ..., lalu tentukan dua bilangan pada urutan ke 5 dan 6. Dengan menggunakan kunci selisih 3,4,5,6,7 maka akan didapat jawaban 21 dan 28, atau bila menggunakan kunci selisih 3,4,5,7,9 maka akan didapat jawaban 22 dan 31.

Dari uraian di atas, nampak jelas bahwa penalaran induktif merupakan proses penyimpulan secara umum dari hasil observasi yang terbatas. Hasil kesimpulan yang diperoleh bisa jadi kurang valid atau bisa mengakibatkan kesalahan penafsiran apabila data yang dipergunakan kurang lengkap atau pola yang diamati kurang spesifik. Oleh karenanya penalaran induktif lebih cocok untuk bidang non-matematika yang hasil perumusan konsepnya sering harus diperbaiki agar teori-teori yang muncul sesuai dengan hasil penelitian yang terbaru. Sementara itu konsep-konsep dalam matematika tidak pernah mengalami perubahan, jikalaupun ada itu sifatnya hanyalah penambahan karea adanya temuan-temuan baru dan tidak sampai merubah konsep yang sudah ada sebelumnya. Hal ini karena sistem yang ada dalam matematika merupakan sistem-sistem deduktif, dimana kebenaran suatu konsep didasarkan pada konsep-konsep sebelumnya. Oleh karenanya sistem penalaran yang paling banyak berperan dalam matematika adalah penalaran deduktif.

2) Penalaran Deduktif

Jika penalaran induktif dilakukan dengan melakukan pengamatan terhadap pola-pola pada unsur-unsur khusus yang kemudian digeneralisasikan pada semua unsur dalam himpunan semesta, maka alur dalam penalaran deduktif berjalan sebaliknya. Penalaran deduktif berlangsung dari pernyataan yang berlaku secara umum yang diterapkan pada unsur-unsur khusus. Lalu bagaimana untuk mendapatkan pernyataan yang berlaku secara umum tersebut? Proses untuk membangun sebuah sistem deduktif dalam matematika diawali dengan membuat suatu *konsep pangkal*. Konsep pangkal ini diperlukan sebagai sarana komunikasi untuk menyusun pernyataan-pernyataan selanjutnya, baik berupa definisi, aksioma maupun teorema. Misalnya, konsep *titik* pada geometri. Selanjutnya kebenaran suatu konsep didasarkan pada kebenaran konsep-konsep sebelumnya dan mendasari proses penyusunan konsep-konsep selanjutnya.

Jika tadi telah dinyatakan bahwa sistem penalaran yang banyak berperan dalam matematika adalah penalaran secara deduktif, lalu bagaimana dengan sebuah metode pembuktian yang bernama *induksi matematika*? Walaupun namanya *induksi matematika*, namun proses penalarannya tetapi menggunakan penalaran deduktif.

Coba anda perhatikan pembuktian secara induktif. Pada penalaran ini, pembuktian dijalankan dengan menyelidiki kebenaran rumus untuk $n = 1, 2, 3, 4,$ dan 5. Dan setelah terbukti kebenarannya untuk kelima contoh empiris, kemudian digeneralisasikan untuk semua bilangan asli. Penarikan kesimpulan secara demikian memiliki kelemahan, sebab penyelidikan baru dilakukan pada 5 bilangan asli yang pertama, dan belum terbukti untuk 6, 7, 8, 9, 10, ... dan seterusnya.

Sementara itu coba kita tinjau pembuktian secara induksi matematika. Awalnya didapatkan kebenaran rumus untuk $n=1$. Dengan asumsi bahwa rumus benar untuk $n = k$, maka selanjutnya terbukti bahwa rumus juga benar untuk $n = k+1$. Hal ini memberikan suatu implikasi:

Jika untuk $n = 1$ dan $n = k$ benar maka untuk $n = k + 1$ juga benar. Dengan implikasi ini maka sudah dapat disimpulkan bahwa rumus akan berlaku untuk semua bilangan asli, sebab diawali bahwa rumus benar untuk $n = 1$ maka juga benar untuk $n = 1 + 1 = 2;$ karena benar untuk $n = 2$ maka juga benar untuk $n = 2 + 1 = 3;$ karena benar untuk $n = 3$ maka juga benar untuk $n = 3 + 1 = 4;$ karena benar untuk $n = 4$ maka juga benar untuk $n = 4 + 1 = 5;$ karena benar untuk $n = 5$ maka juga benar untuk $n = 5 + 1 = 6;$ demikian seterusnya. Dengan demikian jelaslah bahwa dengan pembuktian kebenaran satu implikasi di atas maka hal tersebut sudah dapat diterapkan pada seluruh bilangan asli dan bahwa pola penalaran yang digunakan dalam induksi matematika adalah pola penalaran secara deduktif.

3) Logika Matematika

Logika merupakan sebuah alat yang penting untuk berpikir kritis dan penalaran deduktif. Dalam logika diperlukan adanya **proposisi**, yakni pernyataan yang bernilai benar saja atau salah saja. Contoh:

"Jumlah dua bilangan genap adalah genap" merupakan proposisi bernilai benar;

"Kota Surabaya terletak di propinsi Jawa Barat" merupakan proposisi bernilai salah;

"Kerjakan tugasmu" bukan merupakan proposisi.

Proposisi-proposisi pada contoh di atas merupakan proposisi-proposisi **sederhana**. Sedangkan proposisi yang dirangkaikan dengan **perangkai logika** "dan", "atau", "tidak", "jika ... maka", disebut **proposisi majemuk**. Dalam logika matematika, nilai kebenaran untuk sebuah proposisi majemuk sudah dirumuskan secara pasti, sehingga setiap proses penarikan kesimpulan menggunakan logika matematika selalu dapat dikontrol kevalidannya. Beberapa proposisi majemuk yang akan diuraikan dalam bab ini adalah negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi.

a. Negasi

Negasi dari suatu proposisi p dinotasikan $\sim p$. Nilai kebenaran dari ~p berkebalikan dengan nilai kebenaran dari p. Contoh: negasi dari $a \quad b \quad c$ adalah $a \quad b \quad c$. Selanjutnya **negasi rangkap** adalah negasi dari negasi. Negasi rangkap p

dinotasikan dengan $\sim(\sim p)$. Nilai kebenaran dari $\sim(\sim p)$ sama dengan nilai kebenaran dari p. Negasi dari sebuah proposisi majemuk akan memiliki karakteristik tertentu dan hal ini dapat ditunjukkan melalui nilai kebenarannya.

p	$\sim p$
B	S
S	B

Tabel 2.1 Nilai Kebenaran untuk Negasi

Negasi suatu proposisi seringkali dipergunakan dalam pembuktian-pembuktian yang memanfaatkan sebuah kontradiksi. Misalnya untuk membuktikan bahwa *0 adalah satu-satunya elemen identitas dalam operasi penjumlahan bilangan bulat,* kita bisa mengawali dengan sebuah pengandaian bahwa yang benar adalah negasi dari pernyataan itu, yakni *andaikan 0 bukan satu-satunya elemen identitas dalam operasi penjumlahan bilangan bulat.* Melalui proses penalaran secara deduktif, kita akan sampai pada sebuah pernyataan *kontradiktif,* yakni sebuah proposisi yang selalu bernilai salah. Karena menghasilkan sebuah kontradiksi, maka pengandaian yang diambil adalah salah, sehingga yang benar adalah negasi dari pengandaian tersebut, dan ini merupakan pembuktian terhadap pernyataan di atas.

b. Konjungsi

Konjungsi adalah proposisi majemuk yang menggunakan perangkai "*dan*". Proposisi "*p dan q*" dinotasikan $p \wedge q$. Sebuah proposisi majemuk berperangkai *"dan"* mempersyaratkan terpenuhinya masing-masing unsurnya. Misalnya pada pernyataan *"Saya membaca buku dan makan apel"*.

Pernyataan ini mengandung pengertian bahwa pada saat yang sama *saya membaca buku* dan sekaligus *saya juga makan apel*. Apabila ternyata *saya hanya membaca buku saja tanpa makan apel,* atau *saya makan apel saja tanpa membaca buku,* atau *saya tidak melakukan keduanya*, maka pernyataan tersebut menjadi sebuah pernyataan yang salah. Oleh karenanya nilai kebenaran untuk sebuah konjungsi adalah: $p \wedge q$ bernilai *benar* hanya bila p dan q keduanya benar.

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Tabel 2.2 Nilai Kebenaran untuk Konjungsi

Contoh:

Pernyataan *"Aku sekarang berada di Banyuwangi dan di Malang"*, menurut logika matematika jelas merupakan pernyataan yang *salah* karena tidak mungkin kedua unsur proposisinya sama-sama bernilai benar, artinya tidak mungkin bagi seseorang pada saat yang sama berada secara fisik di dua tempat yang berbeda. Tetapi akan lain lagi nilai kebenarannya apabila pernyataan tersebut diubah menjadi *"Aku sekarang memiliki rumah di Banyuwangi dan di Malang"*.

c. Disjungsi

Disjungsi adalah proposisi majemuk yang menggunakan perangkai "*atau*". Poposisi "*p atau q*" dinotasikan $p \quad q$. Tidak seperti pernyataan berperangkai *"dan"* yang mempersyaratkan terpenuhinya kebenaran semua unsurnya, pernyataan berperangkai *"atau"* menawarkan suatu pilihan, artinya jika paling tidak salah satu dari kedua unsur proposisinya terpenuhi maka hal ini sudah cukup untuk pernyataan tersebut dikatakan *benar*. Misalnya pada pernyataan *"Para orang tua siswa bersedia menyumbangkan uang atau buku untuk memajukan perpustakaan sekolah"* Jika pada kenyataannya *orang tua siswa bersedia menyumbangkan uang saja,* atau *bersedia menyumbangkan buku saja,* atau *bersedia menyumbangkan keduanya,* maka pernyataan tersebut akan menjadi pernyataan yang benar. Dan pernyataan tersebut akan salah hanya bila pada kenyataannya *para orang tua siswa tidak bersedia menyumbangkan baik uang maupun buku*. Oleh karenanya nilai kebenaran untuk sebuah disjungsi adalah: $p \quad q$ bernilai *salah* hanya bila p dan q keduanya salah. Disjungsi dengan aturan kebenaran seperti ini seringkali disebut sebagai *disjungsi inklusif*.

P	***q***	$p \quad q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Tabel 2.3 Nilai Kebenaran untuk Disjungsi Inklusif

Contoh:

Pernyataan *"mahasiswa yang tidak boleh mengikuti ujian akhir semester adalah mereka yang belum mengumpulkan tugas atau tidak memenuhi syarat kehadiran perkuliahan"*, memiliki konsekwensi bahwa seorang mahasiswa baru boleh mengikuti ujian apabila ia telah mengumpulkan tugas dan memenuhi syarat kehadiran perkuliahan. Coba anda pikirkan apabila pernyataan tersebut berperangkai *"dan"*!

Pada konteks kehidupan riil, kadangkala sebuah pilihan hanya memperbolehkan seseorang untuk memilih satu unsur saja dari dua unsur yang disediakan. Coba anda perhatikan pernyataan berikut.

"hanya ada dua kemungkinan bagi mahasiswa yang terlambat melaksanakan daftar ulang di awal semester, yakni melanjutkan perkuliahan dengan maksimal 12 sks atau mengajukan cuti selama 1 semester."

Dengan aturan tersebut maka bagi mahasiswa yang terlambat melakukan daftar ulang di awal semester hanya ada 2 pilihan yang harus dipilih salah satu; tidak boleh dipilih kedua-duanya; dan juga tidak boleh untuk tidak memilih. Jika tidak bersedia melanjutkan perkuliahan dengan maksimal 12 sks maka ia harus mengajukan cuti selama 1 semester, dan sebaliknya jika tidak mengajukan cuti selama 1 semester maka ia harus melanjutkan perkuliahan dengan beban maksimal 12 sks; dan tidak ada kemungkinan lain. Bentuk disjungsi semacam ini disebut *disjungsi eksklusif* dan dinotasikan dengan . Sebuah pernyataan disjungsi eksklusif akan bernilai benar hanya jika nilai kebenaran masing-masing proposisi yang membentuknya adalah berbeda.

Tabel 2.4 Nilai Kebenaran untuk Disjungsi Eksklusif

P	***q***	***p q***
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Perhatikan proposisi *"Aku lahir di Jawa Timur atau di Jawa Tengah".* Masalah tempat kelahiran bagi seseorang pastilah tunggal, sehingga dalam konsep disjungsi eksklusif proposisi tersebut merupakan proposisi yang salah karena tidak mungkin *"Aku lahir di Jawa Timur"* dan sekaligus *"Aku lahir di Jawa Tengah".* Harus hanya ada satu saja unsur yang benar dalam disjungsi ini, artinya, proposisi tersebut akan bernilai salah jika kedua unsur yang membentuknya sama-sama bernilai benar atau sama-sama bernilai salah.

Untuk kepentingan proses penalaran deduktif dalam matematika, maka disjungsi yang sering dipergunakan adalah *disjungsi inklusif* atau *"dan/atau"*, yakni disjungsi yang hanya akan bernilai salah apabila kedua unsurnya bernilai salah. Dengan demikian untuk selanjutnya dalam buku ini apabila disebutkan mistilah *disjungsi* saja makan yang dimaksudkan adalah *disjungsi inklusif.*

d. Implikasi

Bila proposisi *p* dan *q* dirangkaikan menjadi proposisi "*jika p maka q*" (dinotasikan *p q*) maka proposisi tersebut dinamaka kondisional atau implikasi. Pernyataan *p* disebut *antisenden (hipotesis)* sedangkan pernyataan *q* disebut *konsekuen (simpulan)*. Pernyataan *p* merupakan *syarat cukup* untuk pernyataan *q* dan pernyataan *q* merupakan *syarat perlu* untuk pernyataan *p*. Coba anda perhatikan ilustrasi berikut.

Dengan berbekal peta dan petunjuk rute, anda bermaksud melakukan sebuah pendakian dengan tujuan mencapai puncak gunung Semeru di Jawa Timur. Ada 4 kemungkinan sebagai hasil dari kegiatan ini, yakni:

Kemungkinan 1:	Anda mengikuti peta dan petunjuk rute dengan benar dan anda sampai di puncak Semeru
Kemungkinan 2:	Anda mengikuti peta dan petunjuk rute dengan benar tetapi anda tidak sampai di puncak Semeru.
Kemungkinan 3:	Anda tidak mengikuti peta dan petunjuk rute dengan benar tetapi pada akhirnya anda sampai di puncak Semeru.
Kemungkinan 4:	Anda tidak mengikuti peta dan petunjuk rute dengan benar dan pada akhirnya anda tidak sampai di puncak Semeru.

Perhatikan kemungkinan 1, 3 dan 4 dalam ilustrasi di atas. Jika yang terjadi adalah kemungkinan 1, maka sudah menjadi suatu hal yang logis apabila anda mengikuti peta dan petunjuk rute dengan benar sehingga mencapai tujuan yakni puncak Semeru. Jika yang terjadi adalah kemungkinan 3, yakni walaupun anda tidak mengikuti peta dan petunjuk rute dengan benar tetapi pada akhirnya anda sampai di puncak Semeru, maka hal ini bisa saja terjadi dengan asumsi bahwa anda telah menjelajahi rute yang lain, walaupun bukan rute yang ditetapkan, untuk mencapai puncak Semeru yang merupakan tujuan dari pendakian anda. Jika yang terjadi adalah kemungknan 4, maka sudah menjadi suatu hal yang logis apabila anda tidak mengikuti peta dan petunjuk rute dengan benar dan anda tidak sampai di puncak Semeru.

Lalu bagaimana jika yang terjadi adalah kemungkinan 2? Secara logis hal ini akan menjadi sebuah pertanyaan sebab anda sudah mematuhi peta dan mengikuti petunjuk rute dengan benar, tetapi mengapa tidak sampai di puncak Semeru? Anda tentunya tidak bisa menerima kejadian ini dan akan mengajukan "protes" kepada panitia penyelenggara pendakian. Demikian pula halnya dalam sebuah implikasi logis, kemungkinan 2 tersebut tidak bisa diterima kebenarannya secara logika. Oleh karenanya nilai kebenaran dalam sebuah implikasi adalah : $p \quad q$ bernilai *salah* hanya bila p benar dan q salah.

Tabel 2.5 Nilai Kebenaran untuk Implikasi

P	q	$p \quad q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh:

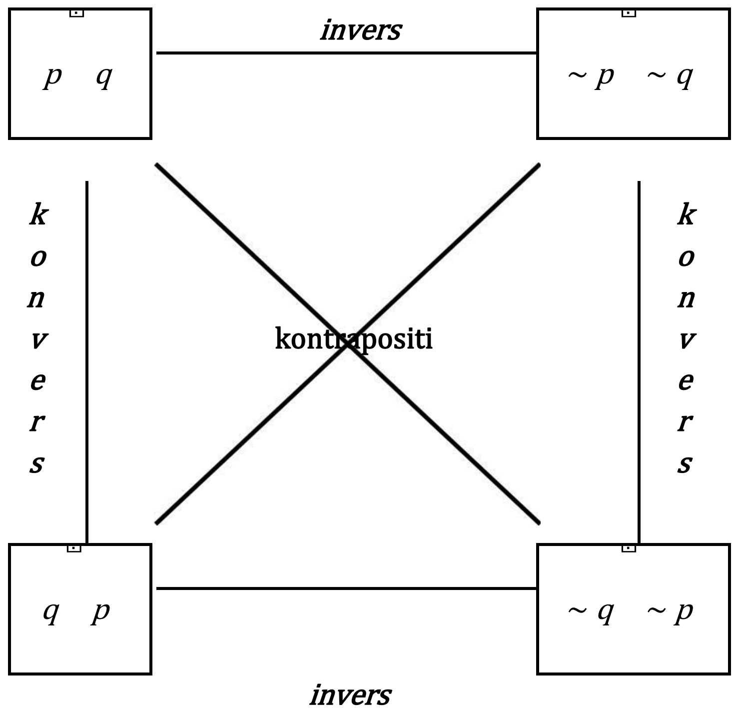
Pernyataan "*jika melanggar lampu lalu lintas maka ditilang polisi*", merupakan sebuah implikasi yang hanya berlaku satu arah, artinya (sesuai dengan pernyataan tersebut) jika seorang pengguna jalan raya melanggar lampu lalu lintas maka sebagai akibatnya dia pasti ditilang polisi, tetapi sebaliknya, jika seseorang pada kenyataannya ditilang polisi maka belum tentu karena ia melanggar lampu lalu lintas.

Untuk kondisional $p \quad q$, maka

$q \quad p$ disebut konvers dari $p \quad q$

$\sim p \quad \sim q$ disebut invers dari $p \quad q$

$\sim q \quad \sim p$ disebut kontrapositif dari $p \quad q$



Gambar 2.5 Skema invers, konvers dan kontrapositif

Contoh: jika diberikan sebuah implikasi *"Jika hujan maka tanah basah"* maka konversnya adalah *"jika tanah basah maka hujan"*; inversnya adalah *"jika tidak hujan maka tanah tidak basah"*; dan kontrapositifnya adalah *"jika tanah tidak basah maka tidak hujan"*.

e. Biimplikasi

Sebuah biimplikasi atau bikondisional *"p jika hanya jika q"* (yang dinotasikan oleh $p \quad q$) merupakan implikasi dua arah, yakni "*jika p maka q*" dan "*jika q maka p*". Pernyataan *p* merupakan syarat perlu dan cukup untuk pernyataan *q*, demikian juga sebaliknya, pernyataan *q* merupakan syarat perlu dan cukup untuk pernyataan *p*. Sebagai konsekwensi dari konjungsi $(p \quad q) \quad (q \quad p)$, maka biimplikasi $p \quad q$ bernilai *benar* hanya bila *p* dan *q* keduanya benar atau keduanya salah.

Tabel 2.6 Nilai Kebenaran untuk Biimplikasi

p	q	$p \quad q$	$q \quad p$	$(p \quad q) \quad (q \quad p)$	$p \quad q$
B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	B	S	S	S
S	S	B	B	B	B

Contoh:

Pernyataan "*ditilang polisi jika hanya jika melanggar peraturan lalu lintas*", merupakan sebuah implikasi dua arah yang mengikat kedua unsur yang menyusun biimplikasi tersebut, artinya (sesuai dengan pernyataan tersebut) jika seorang pengguna jalan raya melanggar peraturan lalu lintas maka sebagai akibatnya dia pasti ditilang polisi, demikian juga sebaliknya, jika seseorang pada kenyataannya ditilang polisi maka pasti karena ia melanggar peraturan lalu lintas. Hal ini juga mengandung pengertian bahwa jika seseorang tidak melanggar peraturan lalu lintas maka iapun juga tidak akan ditilang polisi.

f. Pernyataan Ekivalen

Setiap kali untuk dapat mengartikan atau memahami pengertian sebuah pernyataan, kita membutuhkan formulasi pernyataan lain yang memiliki pengertian yang sama (*atau ekivalen*) dengan pernyataan tersebut. Misalnya pada sebuah pernyataan: *"Jika hujan maka tanah basah"*

Apakah berarti *jika tidak hujan maka tanah tidak basah?* Belum tentu, karena walaupun tidak hujan, bisa jadi tanahnya basah (mungkin karena disiram seseorang atau karena ada air yang tumpah dan sebagainya). Lalu apakah berarti *jika tanah basah maka berarti hujan?* Jawabannya: belum tentu juga, karena sesuai dengan pernyataannya yang merupakan implikasi satu arah, maka hal ini berarti *hujan akan mengakibatkan tanah basah*, tetapi *tanah basah tidak selalu diakibatkan oleh hujan*. Oleh karena itu pernyataan yang memiliki pengertian yang sama dengan pernyataan di atas adalah *"Jika tanah tidak basah maka pasti tidak hujan".*

Penentuan suatu pernyataan yang ekivalen dalam logika matematika tentunya tidak dilakukan dengan cara coba-coba seperti ilustrasi di atas (walau analisis dalam ilustrasi tersebut masuk akal), tetapi sudah ada metode yang tepat yakni dengan cara menyelidiki nilai kebenarannya. Proposisi p dan q dikatakan ***ekivalen***, dinotasikan dengan $p \quad q$, jika p memiliki nilai kebenaran yang sama dengan nilai kebenaran q; akibatnya, jika p ekivalen dengan q maka $p \quad q$ akan selalu bernilai benar.

Contoh:

suatu kondisional ekivalen dengan kontrapositifnya, $(p \quad q) \quad (\sim q \quad \sim p)$, sehingga pernyataan $(p \quad q)$

$(\sim q \quad \sim p)$ selalu bernilai benar; sedangkan kondisional, $p \quad q$, tidak ekivalen baik dengan konversnya, $q \quad p$ maupun dengan inversnya, $\sim p \quad \sim q$. Pernyataan *"jika ada pemadaman lsitrik maka lampu mati"* memiliki pengertian yang sama (ekivalen) dengan *"jika lampu tidak mati maka berarti tidak ada pemadaman listrik"*, dan tidak sama pengertiannya dengan *"jika tidak ada pemadaman maka lampu tidak mati"* atau *"jika lampu mati maka berarti ada pemadaman"*.

Table 2.7 Nilai Kebenaran Implikasi, Konvers, Invers dan Kontrapositifnya

p	Q	$p \quad q$	$q \quad p$	$\sim p \quad \sim q$	$\sim q \quad \sim p$	$(p \quad q) \quad (\sim q \quad \sim p)$
B	B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	B	S	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	B	B	B

Pada tabel di atas terlihat bahwa sebuah impliasi memiliki nilai kebenaran yang sama dengan kontrapositifnya, tetapi tidak demikian dengan konvers maupun inversnya.

Konsep ekivalensi semacam ini juga dapat dimanfaatkan untuk menentukan *negasi* dari suatu *konjungsi* maupun *disjungsi*. Perhatikan tabel kebenaran berikut.

Table 2.8 Ekivalensi Negasi Konjungsi dan Disjungsi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \quad q$	$\sim (p \quad q)$	$\sim p \quad \sim q$	$p \quad q$	$\sim (p \quad q)$	$\sim p \quad \sim q$
B	B	S	S	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S	S	B	B
S	B	B	S	B	S	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B	S	B	B

Ekivalen Ekivalen

Dari tabel di atas didapat bahwa

$\sim (p \quad q)$ ekivalen dengan $(\sim p \quad \sim q)$;

$\sim (p \quad q)$ ekivalen dengan $(\sim p \quad \sim q)$.

Dengan demikian maka *negasi* dari sebuah disjungsi adalah konjungsi dari negasi masing-masing komponennya, dan *negasi* dari sebuah konjungsi adalah disjungsi dari negasi masing-masing komponennya. Ini dikenal sebagai *hukum De Morgan*. Coba anda analisis kebenaran masing-masing contoh berikut.

- ✓ Negasi dari *"Pak Didik mengajar Logika Matematika atau Teori Himpunan"* adalah *"Pak Didik tidak mengajar Logika Matematika dan Teori Himpunan"*;
- ✓ Pernyataan bahwa "*harga BBM naik atau subsidi dikurangi*" akan menjadi pernyataan yang salah jika kenyataannya "*harga BBM tidak naik dan subsidi tidak dikurangi*";

- ✓ Negasi dari *"Dafik berangkat ke Australia dan melanjutkan studinya"* adalah *"Dafik tidak berangkat ke Australia atau tidak melanjutkan studinya"*.
- ✓ Pernyataan bahwa "*gajinya dinaikkan dan rumahnya diperbaiki*" akan menjadi pernyataan yang salah jika kenyataannya "*gajinya tidak dinaikkan atau rumahnya tidak diperbaiki*".
- ✓ Pernyataan bahwa *"Susanto mengajak Suharto untuk membeli sepeda"* akan menjadi sebuah pernyataan yang salah jika ternyata *"Susanto tidak mengajak Suharto atau tidak membeli sepeda".*

Ekivalensi juga terjadi antara sebuah disjungsi dengan implikasi dan negasi implikasi dengan konjungsi. Perhatikan tabel kebenaran berikut ini.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \quad q$	$\sim p \quad q$	$p \quad q$	$\sim(p \quad q)$	$p \quad \sim q$
B	B	S	S	B	B	B	S	S
B	S	S	B	B	B	S	B	B
S	B	B	S	B	B	B	S	S
S	S	B	B	S	S	B	S	S

ekivalen ekivalen

Dari tabel di atas didapat adanya ekivalensi antara

$p \quad q$ dan $\sim p \quad q$;

$p \quad \sim q$ dan $\sim(p \quad q)$.

Coba anda analisis kebenaran masing-masing contoh berikut.

- ➢ Untuk menghimbau pemakaian helm bagi pengendara sepeda motor dan sabuk pengaman bagi pengendara mobil, di jalan-jalan sering kita jumpai spanduk atau baliho yang bertuliskan *"klik atau tilang".* Hal ini dimaksudkan *"jika pengendara sepeda motor tidak mengenakan helm atau pengendara mobil tidak mengenakan sabuk pengaman secara benar maka mereka akan kena tilang".*
- ➢ Pernyataan *"belajar atau tidak naik kelas"* ekivalen dengan sebuah implikasi *"jika tidak belajar maka tidak naik kelas".*
- ➢ Sebuah peringatan *"merokok atau sehat"* dimaksudkan sebagai *"jika seseorang tidak merokok maka ia akan sehat"*.
- ➢ Aturan *"mahasiswa berpakaian sopan atau tidak diperkenankan masuk kampus"* mengandung konsekwensi *"jika mahasiswa tidak berpakaian sopan maka ia tidak diperkenankan masuk kampus".*
- ➢ Pernyataan *"jika tidak malas membaca maka akan bertambah pengetahuan"* dapat dinyatakan melalui ungkapan *"malas membaca atau bertambah pengetahuan".*
- ➢ Penyangkalan dari pernyataan *"jika bayi diberi mainan maka ia akan berhenti menangis"* adalah *"bayi sudah diberi mainan tetapi ia tidak berhenti menangis".*

- Kenyataan bahwa *"mahasiswa sudah melakukan demonstrasi tetapi tingkat korupsi tetap tidak turun"* memberikan kesimpulan *"tidak benar bahwa jika mahasiswa melakukan demonstrasi maka tingkat korupsi akan turun".*
- Pernyataan *"jika menggunakan telepon genggam maka biaya komunikasi dapat dihemat"* akan menjadi sebuah pernyataan yang salah jika pada kenyataanya *"penggunaan telepon genggam tidak dapat menghemat biaya komunikasi".*

g. Kuantifikasi

Untuk mengidentifikasi sifat-sifat elemen dalam suatu himpunan, seringkali kita menggunakan kuantitas dan mengekspresikannya dengan kata-kata "semua", "setiap", "beberapa", "ada". Misalnya

- Semua gula rasanya manis;
- Ada cabe yang tidak pedas;
- Setiap gajah memiliki belalai;
- Beberapa mahasiswa FITK UIN SU mengikuti pelatnas sepak bola di Stadion Teladan;
- Semua bilangan genap habis dibagi 2
- Ada bilangan prima yang bukan merupakan bilangan ganjil.

Pernyataan-pernyataan tersebut menunjukkan sebuah keberadaan dari elemen-elemen suatu himpunan yang memiliki sifat atau karakteristik tertentu. Pernyataan semacam ini disebut sebagai *proposisi kuantifikasi.* Kuantifikasi dikelompokkan ke dalam kuantifikasi universal dan kuantifikasi eksistensial.

1) Kuantifikasi Universal

Kuantifikasi universal merupakan suatu proposisi yang benar secara menyeluruh dalam suatu semesta pembicaraan. Kuantifikasi ini mempergunakan kata "semua" atau "setiap". Proposisi yang mempergunakan kata "semua" atau "setiap" dapat dinyatakan sebagai suatu kondisional, yakni "*semua p adalah q*" dapat dinyatakan sebagai "*jika p maka q*".

Contoh:

- "*Semua bilangan genap habis dibagi dua*" dapat dinyatakan sebagai "*Jika bilangan genap maka habis dibagi dua*";
- "*Untuk setiap bilangan cacah a, a* 2 2 *a* " dapat dinyatakan sebagai "*Jika a bilangan cacah, maka a* 2 2 *a* "

2) Kuantifikasi Eksistensial

Proposisi ini dimaksudkan untuk menyatakan bahwa paling tidak ada satu unsur yang membuat proposisi itu benar. Proposisi semacam ini mempergunakan kata-kata "beberapa" atau "ada". Proposisi berikut bernilai sama;

- ada pemain basket yang bertubuh pendek;
- paling tidak ada seorang pemain basket yang bertubuh pendek;
- beberapa pemain basket bertubuh pendek.

Catatan: kalimat yang dimulai dengan kata "hanya" dapat diganti dengan kalimat yang dimulai dengan kata "semua" asalkan subyek dan predikatnya harus saling dipertukarkan. Contohnya, "*hanya mahasiswa yang mendapat nilai A yang diluluskan*" dapat diganti dengan "*semua mahasiswa yang diluluskan mendapat nilai A*".

3) Negasi Kuantifikasi

Aturan negasi untuk kuantifikasi diatur sebagai berikut.

- "*semua P adalah Q*" negasinya "*beberapa P tidak Q*"
- "*beberapa P adalah Q*" negasinya "*semua P tidak Q*"

Contoh:

- "*semua manusia tidak berekor*" negasinya "*beberapa manusia berekor*";
- "*beberapa pejabat mengisi daftar hadir*" negasinya "*semua pejabat tidak mengisi daftar hadir*".

Berdasarkan konsep negasi kuantifikasi ini maka untuk menunjukkan bahwa sebuah proposisi kuantifikasi universal bernilai salah, kita cukup menunjukkan satu contoh penentang *(counter-example)*.

Misalnya,

- untuk menyatakan bahwa pernyataan *"Semua murid SD sudah bisa membaca pada saat pertama masuk di kelas I"* merupakan pernyataan yang salah, kita harus menunjukkan bahwa paling tidak ada satu murid SD yang belum bisa membaca pada saat pertama masuk di kelas I.
- 2 adalah bilangan prima yang juga genap merupakan sebuah *counter-example* yang membuktikan bahwa pernyataan *"semua bilangan prima adalah ganjil"* merupakan pernyataan yang salah.

Sedangkan untuk menunjukkan bahwa sebuah proposisi kuantifikasi eksistensial bernilai salah, maka kita harus menunjukkan bahwa semua kemungkinan kasus adalah salah.

Misalnya,

- Untuk membuktikan bahwa pernyataan *"pada beberapa kelas di SD pelajaran matematika tidak diajarkan"* merupakan pernyataan yang salah, maka kita harus menunjukkan bahwa di kelas 1 matematika diajarkan, di kelas 2 matematika diajarkan, di kelas 3 matematika diajarkan, di kelas 4 matematika diajarkan, di kelas 5 matematika diajarkan, dan di kelas 6 matematika diajarkan. Ini menunjukkan bahwa di semua kemungkinan kelas di SD, pernyataan tersebut adalah salah.

- Untuk menunjukkan bahwa pernyataan *"ada bilangan bulat yang bila ditambah dengan 2 akan menghasilkan bilangan yang lebih kecil dari dirinya"* merupakan pernyataan yang salah, maka kita harus meninjau bahwa untuk semua kemungkinan, pernyataan tersebut adalah salah, misalnya kemungkinan bilangan tersebut adalah bilangan ganjil atau genap, atau kemungkinannya bilangan tersebut adalah bilangan negatif, nol atau bilangan positif. Jika pada semua kemungkinan terbukti bahwa tidak ada bilangan yang apabila ditambah dengan 2 akan menghasilkan bilangan yang lebih kecil dari dirinya, maka ini akan menunjukkan bahwa pernyataan di atas adalah salah.

  Sejalan dengan hal di atas, coba anda pikirkan beberapa hal berikut.

❖ Bagaimana caranya untuk menunjukkan bahwa sebuah proposisi kuantifikasi eksistensial bernilai benar?

❖ Bagaimana pula caranya untuk menunjukkan bahwa sebuah proposisi kuantifikasi universal bernilai benar?

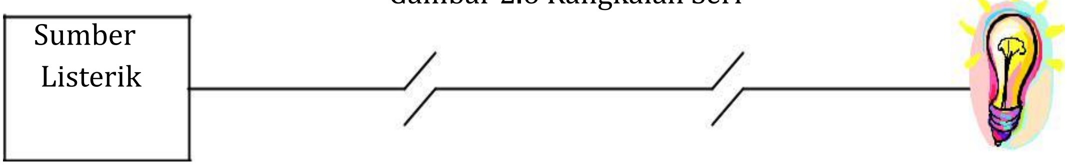
4) Beberapa Penerapan Logika Matematika

Logika matematika dengan nilai kebenarannya tidak hanya berguna untuk menetapkan benar atau salahnya sebuah pernyataan, tetapi secara praktis memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu bentuk penerapan logika matematika ini adalah pada rangkaian listrik.

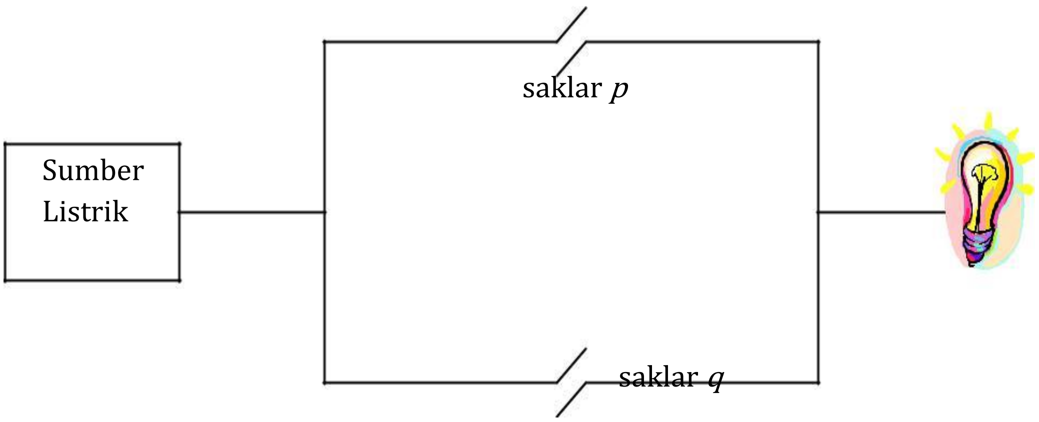
a. Penerapan pada Rangkaian Listrik

Secara umum rangkaian listrik yang sering kita jumpai dalam peralatan elektronika dibedakan menjadi dua, yakni *rangkaian seri* dan *rangkaian pararel*. Perhatikan ilustrasi-ilustrasi berikut ini.

Gambar 2.6 Rangkaian Seri



Pada rangkaian seri, lampu akan menyala hanya apabila saklar p maupun saklar q keduanya dalam keadaan "ON". Jika tidak maka lampu akan mati. Hal ini merupakan konsep dari *konjungsi* $p \wedge q$, yang akan bernilai benar hanya jika p benar dan q benar. Selain kondisi ini maka $p \wedge q$ akan bernilai salah.



Gambar 2.7 Rangkaian Pararel

Pada rangkaian pararel, lampu akan mati apabila kedua saklar p dan q sama-sama dalam keadaan "OFF". Jika salah satu atau keduanya dalam keadaan "ON" maka lampu akan selalu menyala. Hal ini sejalan dengan konsep *disjungsi* $p \vee q$, yang akan bernilai salah hanya jika p salah dan q salah. Selain kondisi ini maka $p \vee q$ akan bernilai benar.

b. Pemanfaatan Logika dalam Penarikan Kesimpulan

Bentuk aplikasi berikutnya merupakan penerapan utama dari logika, yakni pemanfaatannya dalam penarikan kesimpulan. Nilai kebenaran untuk setiap jenis proposisi majemuk dalam logika matematika adalah tetap, sehingga dengan meninjau nilai kebenaran tersebut, kita bisa mengontrol validitas sebuah penarikan kesimpulan. Skenario sebuah penarikan kesimpulan dinyatakan dalam bentuk argumen. **Argumen** merupakan himpunan proposisi-proposisi yang dikelompokkan ke dalam dua bagian, yakni *premis* dan *konklusi*. Premis tersusun atas proposisi-proposisi yang digunakan sebagai data untuk menghasilkan sebuah proposisi baru yang merupakan konklusi.

Sebuah penarikan kesimpulan dikatakan *valid* jika kebenaran konjungsi proposisi-proposisi pada premis mengakibatkan secara logik kebenaran konklusi. Dan apabila argumennya dinyatakan sebagai sebuah implikasi maka implikasi tersebut merupakan sebuah tautologi. Tetapi jika tidak demikian, yakni bila kebenaran proposisi-proposisi pada premis tidak menghasilkan secara logik kebenaran konklusi, maka argumen tersebut dinyatakan tidak valid, dan disebut *sesat pikir*.

B. Mengajak Siswa SD Bernalar dengan Benar

Setelah seorang guru memahami proses penalaran dalam matematika, maka hal selanjutnya yang perlu dipikirkan adalah bagaimana mengajak siswa SD supaya juga memiliki penalaran yang benar.

1. Pembelajaran dengan Pendekatan Induktif

Matematika merupakan bidang ilmu yang pola penalarannya adalah deduktif, sebab penurunan suatu teorema dalam matematika tidak didasarkan pada generalisasi dari hasil observasi terbatas, tetapi didasarkan pada definisi, aksioma, dan teorema-teorema yang sudah ada sebelumnya. Dan selanjutnya teorema tersebut akan dapat diimplementasikan pada semua elemen himpunan semesta. Sehingga, secara ilustratif, pola penalaran dalam matematika **bukan** "*karena 2+3=3+2 maka operasi penjumlahan bilangan bulat bersifat komutatif*", **melainkan** "*karena operasi penjumlahan bilangan bulat bersifat komutatif maka 2+3=3+2*".

Mengingat pola penarannya secara deduktif, maka skenario pembelajaran matematika di sekolah-sekolah lanjutan berjalan dari penurunan rumus atau sifat-sifat umum yang kemudian diimplementasikan pada contoh-contoh khusus. Namun demikian pola pendekatan pembelajaran semacam ini kurang sesuai bila diterapkan pada siswa SD, khususnya pada kelas-kelas rendah. Perkembangan mental siswa SD umumnya masih berada pada tahap operasional kongkrit. Pada tahap ini anak mengembangkan konsep dengan memanipulasi benda-benda kongkrit untuk menyelidiki model-model abstrak. Oleh karena itu pendekatan pembelajaran matematika pada siswa SD sebaiknya menggunakan pendekatan induktif. Misalnya seorang guru akan menanamkan konsep komutatif pada operasi penjumlahan bilangan bulat, maka dia tidak bisa langsung menyatakan pada siswa bahwa "*operasi penjumlahan bilangan bulat bersifat komutatif*", karena anak akan kesulitan menangkap pernyataan abstrak semacam ini. Guru harus mulai dengan banyak contoh penjumlahan dua buah bilangan bulat dan menunjukkan bagaimana jika urutan suku dalam penjumlahan tersebut dibalik. Dengan melihat pola-pola dari contoh kongkrit semacam ini, maka akan mudah bagi siswa menangkap konsep komutatif tersebut.

Satu hal yang perlu diperhatikan oleh guru adalah bahwa pola induktif tersebut hanya digunakan sebagai pendekatan pembelajaran matematika pada siswa SD, dan tidak digunakan sebagai alat generalisasi dalam matematika. Namun sebaliknya kita juga tidak perlu kawatir bahwa dengan pendekatan pembelajaran secara induktif, anak akan terbiasa berpola pikir induktif pula sampai dewasa, sebab manakala seorang anak sudah memasuki tahap operasional formal maka dia sudah dapat berpikir secara abstrak dan tidak terlalu tergantung dari benda-benda kongkrit dalam mengembangkan konsepnya. Apalagi dengan pendekatan pembelajaran yang mengenalkan siswa

pada proses pembuktian maupun penurunan suatu konsep di tingkat sekolah lanjutan, maka siswa akan dapat merubah pola pikirnya dari induktif ke deduktif. Dan bahkan pada siswa SD kelas tinggi, kelas 5 dan 6, pendekatan pembelajaran deduktif semacam itu sudah dapat diterapkan, karena pada usia ini siswa sudah memasuki masa transisi dari tahap operasional kongkrit menuju tahap operasional formal. Pendekatan pembelajaran secara induktif juga akan membantu siswa SD lebih memantabkan kemampuannya dalam berhitung. Suatu contoh misalnya dalam soal-soal berikut ini,

1,3,5,7,…,…,…
30,25,20,…,10,…,0
1,2,4,7,11,…,…

siswa diajak untuk melihat pola dari bilangan-bilangan yang diketahui dalam deret yang diberikan dan dengan ketrampilannya dalam operasi penjumlahan dan pengurangan, siswa akan dapat menentukan bilangan-bilangan yang ditanyakan.

Contoh-contoh berikut secara induktif juga akan membantu siswa mmenangkap sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian.

$23 + 14 = \ldots + 23$
$46 \quad \ldots = 11 + 46$
$\ldots. + 31 = 31 + 8$
$76 + 37 = 37 + \ldots$

$24 + (12 + 7) = (24 + \ldots) + 7$
$53 \quad (14 + \ldots) = (53 + 14) + 20$
$\ldots. + (31 + 11) = (5 + 31) + 11$
$8 + (26 + 34) = (8 + 26) + \ldots$

$10 \text{ x } 56 = 56 \text{ x } \ldots$
$36 \quad \ldots = 11 \text{ x } 36$
$\ldots. \text{ x } 9 = 9 \text{ x } 41$
$17 \text{ x } 15 = \ldots \text{ x } 17$

$24 \text{ x } (12 \text{ x } 7) = (24 \text{ x } \ldots) \text{ x } 7$
$53 \quad (14 \text{ x } \ldots) = (53 \text{ x } 14) \text{ x } 20$
$\ldots. \text{ x } (31\text{x } 11) = (5 \text{ x } 31) \text{ x } 11$ $8 \text{ x } (26 \text{ x } 34) = (8 \text{ x } 26) \text{ x } \ldots.$

$8 \text{ x } (11 + 16) = (8 \text{ x } 11) + (8 \text{ x } \ldots)$
$12 \quad (28 + \ldots) = (12 \text{ x } 28) + (12 \text{ x } 15)$
$\ldots. \text{ x } (19 + 22) = (3 \text{ x } 19) + (3 \text{ x } 22)$
$43 \text{ x } (\ldots + 27) = (\ldots \text{ x } 11) + (\ldots \text{ x } 27)$ $57 \text{ x } (29 + 37) = (\ldots \text{ x } \ldots.) + (\ldots. \text{ x} \ldots)$

Dalam hal ini siswa diajak memperhatikan pola-pola yang disajikan dan setelah mengisi titik-titik dengan bilangan yang benar, maka siswa akan dapat melihat adanya sifat komutatif dan asosiatif pada operasi penjumlahan dan perkalian; serta sifat distributif operasi perkalian terhadap penjumlahan.

2. Membantu Siswa Berpikir Deduktif

Sarana lain yang dapat dipergunakan untuk melatih siswa berpikir kritis adalah dengan memberikan soal cerita. Umumnya untuk dapat menyelesaikan soal cerita siswa harus menggunakan penalaran secara deduktif. Pertama-tama siswa harus mampu mentransfer soal cerita tersebut ke dalam model matematika, selanjutnya dengan konsep-konsep yang sudah dimilikinya siswa akan menyelesaikan model tersebut. Interpretasi dari penyelesaian model matematika inilah yang akhirnya digunakan sebagai jawaban atas soal cerita.

Coba anda perhatikan soal cerita berikut. Tante pergi berbelanja ke pasar dengan membawa uang Rp. 60.000,- Sepertiga dari uang tersebut dibelikan buah jeruk yang harga perkilonya adalah Rp. 5.000,- dan buah jeruk tadi akan dibagikan sama rata kepada dua orang temannya yang baru melahirkan. Berapa berat buah jeruk yang diterima oleh masing-masing teman tante?

Kalimat matematika untuk persoalan ini cukuplah sederhana yakni, jika a merupakan berat buah jeruk yang diterima masing-masing teman tante, maka $2a = \frac{60000}{3x5000}$ sehingga didapat $a = 2$, artinya masing-masing teman tante akan menerima 2 kg jeruk. Namun demikian bagi siswa SD proses perumusan kalimat matematika ini mungkin akan sangat membingungkan, oleh karena itu mereka perlu diarahkan untuk menyelesaikan soal cerita ini tahap demi tahap dengan menggunakan logika sebagai berikut.

- jika sepertiga uang tante dibelikan buah jeruk maka uang yang digunakan membeli buah jeruk adalah $\frac{60000}{3} = 20000$ rupiah
- jika harga buah jeruk adalah Rp. 5.000,- perkilogram maka tante akan mendapatkan $\frac{20000}{5000} = 4$ kg jeruk
- jika buah jeruk tersebut diberikan kepada dua orang teman tante, maka masing-masing akan mendapatkan $\frac{4}{2} = 2$ kg jeruk

Dengan demikian persoalan tersebut dapat dibagi ke dalam 3 sub persoalan berurut yang masing-masing dapat dinyatakan dalam bentuk implikasi. Logika ini yang kemudian akan memudahkan siswa untuk menentukan kalimat matematika yang sesuai dengan masing-masing sub persoalan.

Prosedur semacam ini, yakni dengan membagi suatu persoalan menjadi beberapa sub persoalan yang masing-masing dapat dinyatakan dalam bahasa logika matematika, hanya merupakan salah satu cara yang dapat dipergunakan untuk membantu siswa SD berpikir secara deduktif. Namun demikian perlakuan semacam ini harus dilakukan secara perlahan, karena tingkat perkembangan mental siswa SD masih dalam taraf oprasional kongkrit, sehingga tidak dapat secara cepat berubah dari pola pemikiran induktif ke deduktif. Diperlukan pula kreatifitas guru dalam menyajikan materi, sehingga anak tidak merasa "*dipaksa*" untuk bernalar secara deduktif. Oleh karenanya kesiapan dan kemampuan siswa sangat perlu untuk diperhatikan agar upaya guru membimbing siswa dapat berjalan efektif.

Banyak sekali materi matematika SD yang dapat disajikan sedemikian hingga penyajian tersebut akan dapat mengajak siswa bernalar secara benar, baik itu materi matematika SD untuk kelas rendah maupun kelas tinggi. Coba anda pilih suatu materi dan buatlah prosedur-prosedur sederhana yang akan dapat mengajak siswa berpikir kritis. Sebagai latihan coba anda buat:

- sebuah kegiatan siswa, yang dengan pendekatan induktif, menuntun siswa memperoleh rumus luas lingkaran!
- sebuah kegiatan siswa, yang dengan pendekatan deduktif, menuntun siswa memperoleh rumus luas segitiga!

BAB III

ASPEK TEORI

A. Aspek Teori

Mungkin sekali belajar tentang mengajar melalui observasi bagaimana seorang guru mengajar dan kemudian menirukannya. Kita dapat mengobservasi guru matematika bagaimana guru tersebut meberikan tugas, memberikan pertanyaan, menerangkan apabila siswanya tidak mengerti, memberikan tes dan sebagainya. Namun mungkin kita tidak mengetahui bagaimana guru itu memberikan motivasi kepada siswanya. Tanpa instruksi didaktis dari guru ataupun sumber lain, seorang pengamat oleh jadi tidak memahami hal-hal tertentu mengapa seorang guru berbuat sesuatu. Jelaslah observasi tanpa intruksi didaktis mungkin tidak menghasilkan sesuatu yang efektif. Observasi dengan bimbigan sekalipun tanpa penjelasan-penjelasan mengapa guru berbuat sesuatu dalam situasi tertentu, seorang pengamat hanya akan mendapat pengertian yang minim.

Teori membuat kita tidak hanya menyadari adanya fenomena dan hubungan-hubungan tertentu, tetapi juga mengerti fenomena dan hubungan-hubungan tersebut. Kita menjadi tahu mengapa fenomena dan hubungan-hubungan itu terjadi dan bagaimana mengontrolnya jika memang memungkinkan.

Teori sangat efisien dipelajari secara didaktis daripada hanya dengan melakui observasi. Ini tidak berhenti bahwa observasi bukan merupakan bagian dari teori belajar. Observasi membantu memberikan arti kepada teori dan memberikan ksempatan untuk mengaplikasikannya.

B. Kegiatan Mengajar

Untuk mengamati bagaimana mengajar itu perlu kita amati apa yang dikerjakan guru. Dari sini kita dapat mengetahui bagaimana interaksi yang terjadi di dalam suatu kelas.

Apabila kita mempelajari apa yang dikerjakan guru, kita akan melihat bebrapa aktivitas yang berhubugan erat dengan mengajar, mendemontrasikan, menerangkan, mengoreksi kesalahan siswa, memberikan motivasi dan sejenis ini merupakan hal-hal yang menunjukkan aktivitas guru. Kegiatan-kegiatan yang termasuk dalam kategori itu disebut kegiatan yang berpusat pengajaran.

Apabila kegiatan yang berpusat kepada pengajaran ini kita perhatikan, kita dapatkan beberapa di antaranya dapat dipelajari dengan analisis yang logic. Menerangkan, membrikan penalaran, menggeneralisasikan, mengaplikasika prinsip-prinsip dan membuktikan merupakan contoh-contoh yang cocok. Apakah sesuatu argument mengembangkan suatu bukti, hal ini ditentukan dengan menganalisis argument mengembangkan suatu bukti, hal ini ditentukan dengan menganalisis argument dalam arti kriteria dikembangkan. Kegiatan seperti ini disebut kegiatan yang berpusat kepada pnalaran.

Guru mengajar sedemikian hingga siswa-siswanya dapat belajar. Karena itu seorang guru mengajar banyak hal, karena semuanya itu memberikan fasilitas belajar. Dengan menekankan betapa pentingnya apa yang dipelajari siswa, guru mengaharapkan timbulnya kemauan untuk belajar. Demikian menjukkan kesalahan-kesalahan yang biasa dikerjakan siswa, guru mencoba mengembangkan kemampuan siswa tersebut. Dengan memusatkan kepada kepentingan siswa dalam arti positif, guru mengharapkan siswanya tertarik kepada materi yang diberikan dalam hal ini materi matematika.

Dari uraian di atas terlihat bahwa kegiatan yang berpusat kepada pengajaran bisa memberikan efek kepada belajarnya siswa. Siswa menjadi aktif belajar. Kalau perhatian sudah tertuju kepada keaktifan belajar siswa maka hal ini disebut kegiatan yang berpusat kepada siswa.

Adapun metode atau keaktivias guru dalam merencanakan suatu strategi mencapai tujuan umum seperti penguasaan konsep-konsep, prinsip-prinsip, dan keterampilan, mengajar siswa bagaimana menyelesaikan masalah dan menumbhkan sikap menyukai matematika merupakan kedua bentuk kegiatan yang berpusat kepada penalaran dan siswa. Di dalam merencakan suatu program pengetahuan, keterampilan dan sikap guru matematika harus memperhatikan tidak hanya hakekat matematika tetapi juga psikologi. Akekat matematika dan psikologi ini akan membantu guru menetukan pengorganisasian topic-topik matematika dan pengalaman belajar, bagaimana cara penyampainnya, bagaimana memberikan motivasi dan pengulangan-ngulangan agar lebih mantap kepada anak-anak. Kesemuanya itu untuk memberikan fasilitas belajar siswa.

Untuk mempermudah tugas seorang guru, perlu disusun suatu program (dalam hal ini program matematika). Program tersebut dapat disusun oleh seorang guru atau pengembsng kurikulum. Namun untuk program yang lebih terinci sehingga dapat dipergunakan mengajar di depan kelas aeyogyanya diserahkan penyusunanya kepada guru yang bersangkutan. Hal ini disebabkan siswa merupakan pusat perhatian. Segala kegiatan pe-ngajaran harus memberikan asilitas belajar siswa. Gurulah yang paring mengetahui dan mengenal anak didiknya bagaimana kemampuan siswanya di dalam belajar.

C. Kurikulum Matematika

Program yang disusun terinci sehigga menggambarkan kegiatan siswa di sekolah dengan bimbingan guru disebut kurikulum. Dengan perkataan lain suatu kurikulum mengacu pengalaman-pengalaman belajar yang direncanakan untuk kepentingan siswa dengan bimbingan guru; pengalaman-pengalaman belajar yang terdiri dari pengetahuan keterampilan dari sikap tersedia untuk siswa selama waktu sekolah. Dengan demikian suatu kurikulum matematika matematika adalah suatu kurikulum yang berhubungan dengan matematika dan cara mengorganisasikan materi matematika menggunakan jawab pertanyaan;

mengapa, apa, bagaimana dan kepada siapa pemilik matematika diajarkan di sekolah.

Tentu saja kurikulum maematika yang disusun itu harus ditangani oleh guru-guru yang kompeten. Bagaimanapun baiknya krikulum apabila ditangani oleh guru yang tidak kompeten, pprestasi belajar siswa tidak dapat diharapkan berhasil baik. Lebih baik guru yang kompeten dengan kurikulum jelek daripada guru yang tidak kompeten dengan kurikulum baik. Dengan kurikulum yang baik ditangani guru yang kompeten, kurikulum tersebut akan dapat dilaksanakan di depan. Pelaksanaan kurikulum di depan kelas benar-benar sangat bergantung kepada kemampuan dan keterampilan seorang guru.

D. Faktor-Faktor Yang Perlu Diperhatikan

Agar kurikulum itu dapat dilaksanakan di depan kelas faktor-faktor berikut ini perlu mendapatkan perhatian.

1. Kesatuan yang utuh. Kurikulum matematika harus disusun menurut kesatuan yang utuh; komponen-komponen yang terdapat di dalam kurikulum harus saling berkaitan.
2. Erumusan tujuan. Suatu program perlu tujuan. Tujuan itu harus dirumuskan dengan jelas hingga tidak terjadi salah tafsir bagi pelaksanaan program.
3. Pemilihan dan pengorganisasian bahan-bahan. Pemilihan dan pengorganisasian bahan-bahan yang relevan dengan tujuan dan sesuai dengan tingkat kemampuan siswa. Di dalam pemilihan bahan-bahan, perlu diperhatikan pula arah perkembangan matematika. Karena itu dalam mengorganisasi bahan-bahan harus diperhatikan:
    a. Perkembangan intelektual anak didik;
    b. Pengalaman belajar siswa yang lampau;
    c. Hakekat matematika

    Dapat sisi nampak diperlukan metode penyampaian bahan kepada siswa. Metode mengajar ini akan baik bila didasarkan kepada teori mengjar yag didasarkan teori belajar.
4. Strategi penyampain. Bahan pelajaran yang terorganisir itu perlu disampaikan kepada anak didik. Untuk ini perlu suatu strategi. Kita menyadari, kita tidak bisa memperhitungkan kebutuhan manusia aktu mendatang. Keadaan yang akan datang sangat kompleks sehingga sukar diperhitungkan. Karena itu para pendidik telah sepakat bahwa siswa harus kita mampu menyelesaikan masalah-masalah yang dihadapi di kelak kemudian hari. Jelaslah strategi yang relevan yang kita pili ialah pemecahan masalah.
5. Keberhasilan. Suatu program yang sedang berjalan memdapatkan penilain, apakah program tersebut berhasil atau tidak berhasil. Dengan mengetahui berhasil atau tidaknya suatu program, informasi itu dapat dipergunakan untuk umpan balik. Kelemahan-kelemahan segera dapat

kita ketahui untuk segera dapat kita perbaiki. Dengan demikian penilaian dan program berjalan beriringan, proses pengembangan kurikulum berjalan terus secara kontinyu.

E. Latihan

Latihan 1.1	Anda seorang yang mempunyai bekal matematika yang cukup untuk bahan mengajar di sekolah menengah. Kemudian dalam beberapa minggu Anda melihat bagaimana seorang guru maematika yang cukup "senior" menajar maematika. Dapatkah Anda dilepaskan untuk kemudian mengajar matematika?
Latihan 1.2	Apa yang dimaksud denan kegiatan yang berpusat kepada pengajaran, kegiatan yang perpusat kepada penalaran dan kegiata yag berpusat kepada siswa? Adakah hubungan ketiganya?
Latihan 1.3	Seorang ahli matematika tentu mampu mengajar matematika di sekolah. Bagaimana pendapat Anda mengenai penyataan tersebut?
Latihan 1.4	Apabila seseorang dibekali "cukup" tentang bagaimana cara mengajar, maka orang tersebut akan mampu mengajar matematika di sekolah. Bagaimana pendapat Anda tentang pertanyaan itu?
Latihan 1.5	Bagaimana menurut Anda sebaikna seorang guru matematika itu dipersiapkan?
Latihan 1.6	Buatlah ringkasan dari Bab 1 tersebut!

BAB IV

PENGEMBANGAN KURIKULUM MATEMATIKA

Kerjasamaan internasional di daam pendidikan matematika melalui komperensi-komprensi para ahli membenarkan kenyataan bahwa perombakan kurikulum matematika untuk semua Negara dan demi keuntungan manusia dapat dilaksanakan. Dengan perkata lain, saling tukar ide oleh manusia dapat yang berkemampuan profesi tinggi sangatlah bermanfaat untuk pengembangan kurikulum matematika. Karena itu, wajarlah kiranya, bahwa pengembangan kurikulum matematika di Indonesia dapat diperlancar dengan melihat dan memperhatikan hasil kerja yang dilakukan oleh Negara-negara lain. Topik-topik yang diajarkan di luar negeri (bila memang diperlukan) dapat dipilih dan disesuaikan dengan kebutuhan Indonesia. Masalahnya ialah bagaimana topik-topik semacam itu dapat diorganisasikan sehingga topik-topik itu membentuk suatu kurikulum yang lengkap dan merupakan suatu kebulatan. Untuk maksud ini, perlu kiranya dibuat suatu model pengembangan kurikulum. Model itu akan disusun sedemikian cocok dengan empat macam pertanyaan kurikulum: Mengapa, Apa, Bagaimana dan keada siapa topik- topik matematika tertentu diajarkan. Model pengembangan kurikulum yang sudah disusun dengan keempat macam pertanyaan kurikulum itu akan membatasi diri untuk tidak menjiplak kurikulum matematika dari luar negeri. Dengan perkataan lain pengebangan kurikulum matematika yang kita jalankan dengan kebutuhan Indonesia.

A. Model Pengembangan Kurikulum

Model pengembangan kurikulum di dalam buku ini dilukiskan oleh empat komponen, yakni: obyektif, pemilihan topic dan pengalaman belajar, organisasi dan integrasi atas topik-topik dan pengalaman belajar, serta penilaian yang saling berkaitan sedemikian hingga merupakan suatu lingkaran (Gambar 2.1)

Gambar 2.1 Model Pengembangan Kurikulum

Obyektif

Wajar kiranya, bila seseorang akan memulai dengan suatu aktivitas, ia harus menentukan apa yang ia hendak capai, tidak sekedar berbuat tanpa berpikir tentang tujuannya.

Dasar asumsinya ialah tjuan pendidikan untuk mengubah tingkah laku siswa. Perubahan tingkah laku itu dapat dilihat pada akhir pendidikan dan diharapkan perubahan itu akan permanen. Karena itu, di dalam model yang kita pergunakan pertama-tama kita harus menyatakan obyektif.

Program harus diatur hingga sesuai dengan obyektif yang kita susun. Untuk mempermudah did alam menyusun suatu program, obyektif itu dinyatakan dengan istilah-istilah tingkah laku dan melukiskan hasil. Penyataannya akan menunjukkan akan seperti apa siswa itu bila ia telah selesai menjalani program. Obyektif ini akan mengarah perencana kurikulum atau guru di dalam membuat keputusan hal apa saja yang dicakup, hal ang ditekankan, topik apa yang dipilih, dan pengalaman belajar yang mana yang ditekankan sehingga kurikulum matematika dapat diorganisir secara lebih baik. Bagaimana merumuskan obyektif itu akan dibicarakan lebih lanjut di Bab 3.

Pemilihan topik dan pengalaman

Belajar merupakan suatu proses aktif, siswa harus berpartisipasi dalam belajar. Motivasi terbaik sehingga belajar bisa efektif ialah bahwa siswa haruslah aktif, tidak pasif sebagai penerima seonggok pengetahuan yang sudah siap dijejalkan.

Pengalaman belajar didefinisikan sebagai interaktif antara siswa dan topik-topik matematika sehingga interaksi itu menyebabkan perubahan tingkah laku siswa. Pengalaman belajar ini dipilih sedemikian sesuai dengan obyektif yang telah dirumuskan. Penekanannya ialah pengelaman belajar yang mana yang kita kehendaki agar hasil yang kita inginkan dapat tercapai.

Kriteria pemilihan pengalaman belajar adalah sebagai berikut.

a. Validitas-pengalaman-pengalaman belajar harus sangat berkaitan dengan obyektif. Pengalaman-pengalaman belajar harus dapat mengubah tingkah laku sehingga tercapai hasil yang kita inginkan.
b. Variasi-bermacam-macam pengalaman belajar untuk konsep-konsep atau struktur matematika yang sama harus dipilih agar obyektif dapat dicapai.
c. Kesiapan-pengalaman belajar yang dipilih harus cocok dengan tahap berkembangan kognitif siswa. Pengalaman belajar yang terdahulu sangat berharga untuk mempelancar pemahaman pengalaman baru.

Di dalam pemilihan pengalaman belajar memang sangat erat dengan pemilihan topik. Topik-topik harus dipilih untuk menopang obyektif yang telah dirumuskan.

Kriteria pemilihan topik adalah sebagai berikut.

a. Validitas-topik harus membantu mempelancar pencapaian tingkah laku yang dikehendaki.
b. Signifikansi topik-topik harus saling berkaitan satu sama lain.
c. Kesiapan intelektual dan kegunaan-topik harus dapat diajarkan di depan kelas dan bermakna bagi siswa. Bermakna yang dimaksud disini adalah bahwa topik yang dipilih itu sesuai dengan tahap perkembangan intelektual siswa dan pengalaman yang telah dimiliki siswa. Tingkat kesulitan harus dipilih sehingga dapat dipelajari siswa. Lagi pula materi yang dipilih harus berguna bagi siswa.

Organisasi dan integrasi topik-topik dan pengalaman belajar

Topik dan pengalaman belajar haruslah dikombinasikan menurut urutan pedagogik sehingga efektif. Artinya, topik disusun menurut urutan, kontiniutas dan organisir secara logis sesuai dengan pengalaman belajar terdahulu dan perkembangan intelektual anak. Misalnya, topik-topik disusun menurut pola spiral untuk menjaga keseimbangan anatara pendekatan konkret dan formal. Jadi siswa akan menjumpai topik yang sama berulangkali menurut urutana dan sesuai dengan latar belakang dan pengalaman.

Penilain

Kurikulum tidak hanya amengenai bagaimana topik dan pengalaman belajar disusun dan diintegrasikan, melainkan juga seperti apa hasilnya. Hasil ini perlu dinilai untuk kepentingan umpan balik. Kesimpulan tentang keberhasilan atau kegagalan suatu program menjadi penting. Karena itu, hasil yang dicapai siswa dan kurikulum itu sendiri merupakan bagian yang integral dari suatu proses pendidikan, penilain berjalan sepanjang kurikulum itu dilaksanakan. Dengan menilai hasil siswa, hasil penilain itu dapat memberikan umpan balik terhadap kurikulum yang dikembangkan itu sehingga kelemahan dan keekurangan dari program itu dapat diketahui. Di dalam kegiatan kelas, guru biasanya menggunakan suatu tes sebagai suatu alat ukur dan menetapkan apakah obyektif yang dirumuskan tercapai atau tidak. Hasilnya dapat digunakan sebagai suautu alat diagnosa tentang kelemahan dan kekuatan komponen-komponen mana yang perlu perbaiki atau diubah. Dengan demikian guru dapat dapat memperbaiki, mislanya, metode mengajarnya.

B. Empat Pertanyaan Kurikulum Yang Harus Dijawab

Pertanayan-pertanyaan kurikululm matematik: Mengapa, Apa, Bagaimana dan Kepada siapa topik-topik matematika tertentu harus diajarkan perlu dijawab agar supaya kurikulum matematika itu menjadi suatu kebulatan yang utuh.

Mengapa topik-topik matematika tertentu harus diajarkan

Kegunaan dan hakekat matematika haruslah menjadi dasar untuk menjawab pertanyaan di atas. Jika jawaban pertanyaan tersebut terlampau mendasarkan kepada “kegunaan” matematika, dikawatirkan bahwa penekanan guru akan nyelewang, misalnya kepada keterampilan hitung menghitung saja tanpa pengertian konsep atau struktur matematika. Jika jawaban pertanyaan tersebut terlampau mendasarkan “hakekat matematika”, dikawatirkan bahwa penekanan guru akan nyelewang terlampau formal, tidak menghiraukan kemampuan siswa. Sebagai akibatnya akan terjadi bahwa siswa akan menghafal proses pengerjaan matematika tanpa pengertian.

Jadi setiap usaha haruslah diarahkan kepada aplikasi matematika, sementara itu pengertian terhadap konsep dan struktur matematika harus diperhatikan. Pengertian tentang konsep dan struktur itu sangat penting sebab hal itu dapat membawa siswa untuk mampu berpikir dan menyelesaikan masalah-masalah yang tidak tepat serupa dengan jenis masalah yang dihadapi di kelas.

Dengan demikian pertanyaan kurikulum “mengapa” itu harus dijawab dengan menentukan obyektif yang merupakan komponen pertama dari model yang telah dibicarakan.

Topik matematika apa yang harus diajarkan

Terdapat kecenderungan bahwa makin banyak topik-topik yang diajarkan kepada siswa, akan semakin terdidiklah siswa tersebut. Bahkan ada yang mempercayai (misalnya Bruner) bahwa topik-topik matematika lanjutan yang biasanya diajarkan di perguruan tinggi dapat diajarkan di sekolah, asalkan dengan menggunakan metode dan bahsa yang sesuai dengan perkembangan intelektual siswa. Nah, kalau demikian silabus matematika yang akan diajarkan akan memuat terlampau banyak topik-topik. Kriteria pemilihan topik seperti yang sudah dikemukakan (merupakan komponen kedua dari model kita) perlu menjadi dasar untuk menjawab pertanyaan kurikulum “Apa” tersebut di atas. Di samping itu perlu pula diperhatikan kecenderungan pemilihan topik-topik itu adalah konsep-konsep dan struktur matematika.

Bagaimana dan Kepada siapa topik-topik matematika itu diajarkan

Jawab kedua pertanyaan tersebut akan menyangkut psikolog pendidikan.

Sebuah teori menyatakan bahwa situasi itu harus dilihat secara keseluruhan terlebih dahulu, bukanlah unsur-unsur secara individu dari situais yang dipelajari secara terinci. Dengan demikian yang dipelajari itu mengenai konsep-konsep serta hubungan-hubungannya. Bila unsur-unsur dari suatu situasi dipahami menurut hubungan-hubungannya untuk keseluruhan situasi, tercapailah pengertian yang mendalam terhadap situasi tersebut. Bila generalisasi terkuasai, transfer belajar akan tercapai. Dari teori nampaknya cocok sebagai jawab pertanayaan bagaiamana topik-topik matematika tertentu diajarkan kepada siswa tertentu.

Pertanayaan kurikulum “Kepada siapa” topik matematika tertentu diajarkan perlu pula dijawab karena masalah perbedaan individu pada saat ini menjadi isyu yang menonjol. Bahkan jawab pertanyaan “Bagaimana” tadi juga harus memperhitungkan perbedaan individu siswa. Pertanyaan-pertanyaan “Bagaimana” dan “Kepada siapa” itu dapat dijawab dengan memperhatikan teori piaget yakni mengenai perkembangan kognitif. Tahap perkembangan intelektual anak perlu diketahui agar supaya pengalaman-pengalaman belajar yang diberikan bisa cccok dengan topik-topik yang dipelajari. Dengan menyajikan pengalaman-pengalaman yang cocok, pengertian terhadap topik yang disajikan itu bisa tercapai. Nampak jelas di sini, walaupun perumusan obyektif penting, cara mengajar yang cocok juga esensial.

Jadi metode mengorganisasikan dan menyajikan topik-topik matematika harus sesuai dengan perkembangan intelektual siswa sehingga siswa itu dapat belajar secaar efektif dan efesien. Jelasnya, baik pengaruh matematika maupun psikologi bersama-sama berusaha menjawab pertanyaan bagaimana topik-topik matematika tertentu diajarkan di sekolah diorganisasikan. Tetapi urutan psikologis tidaklah harus selalu sama dengan urutan matematika. Dalam hal ini urutan psikologis yang harus dipentingkan. Ini berarti cara mengorganisasikan topik-topik matematika haruslah didasrkan kepada urutan psikologis. Dengan demikian psikologi belajar menjadi bermanfaat untuk pengembangan kurikulum matematika.

Dari uraian di atas, nampaknya jelas, jawab terhadap pertanyaan kurikulum “Bagaimana” dan “Kepada siapa” berhubungan erat dengan komponen ketiga dari model pengembangan kurikulum kita.

Sebagai peenutup, dapatlah dikatakan di dalam mengembangkan kurikulum mtematika perlu menggunakan suatu model yang di dalam pemikiran pengembangan kurikulum atau guru sekaligus berusaha menjawab empat pertanyaan kurikulum matematika itu. Pertanyaan kurikulum “Mengapa” harus dijawab obyektif. Dari sini pengembangan kurikulum atau guru berusaha menjawab pertayaan kurikulum “Apa”. Jawabnya ialah pemilihamn pengalaman belajar dan topik matematika. Selanjutnya pertanyaan “bagaimana” dan “kepada siapa” perlu dijawab. Jawaban pertanayaan ini ialah organisasi dan integrasi dan pengalaman belajar. Jika keempat pertanyaan kurikulum itu sudah terjawab, maka terjadilah suatu program matematika.

Untuk mendapatkan umpan balik tentang kekuatan dan kelemanahan program tersebut perlu diadakan penilain terhadap program itu. Demikianlah program matematika yang telah disusun itu menjadi satu kesatuan yang utuh.

Untuk mendapatlan gambaran menyeluruh, diagram yang menunjukkan hubungan anatara empat pertanyaan kurikulum matematika dan model pengembagan kurikulum (Gambar 2.2) dapat membantu memperjelas uraian di aats.

C. Latihan

1. Mengapa diperlukan suatu model untuk mengembangkan suatu kurikulum?
2. Mengapa kita perlukan obyektif untuk melaksanakan suatu kegiatan?
3. a) Apa bedanya pengalaman belajar dengan topik? b) Apa hubungannya pengalaman belajar/topik dengan obyektif? c) Adakah kriteria untuk memilih pengalaman belajar dan topik yang akan diajarkan?
4. Untuk apa kita ahrus mengadakan penilaian terhadap suatu program?
5. Apa hubungan empat macam pertanyaan kurikulum matematika dengan komponen-komponen model pengembangan kurikulum?
6. Realitiskah menurut anada tentang pendapat bahwa seorang guru matematika seyogyanya mengerti bagaimana mengembangkan kurikulum matematika? Buatlah ringkasan Bab 2 tersebut!

BAB V

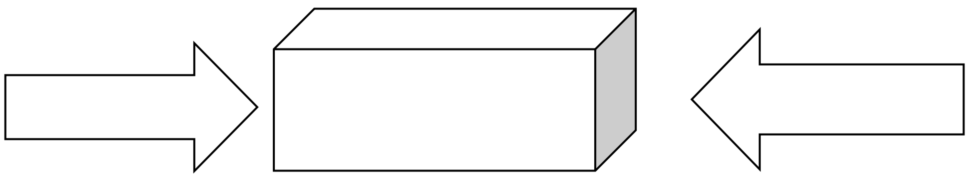
PERUMUSAN OBYEKTIF

Sebagaiamana yang sudah dikemukakan di bab 2, obyektif merupakan komponen pertama dari model pengembangan kurikulum yang kita pergunakan. Matematika sebagai suatu ilmu pengetahuan murni ataupun terpakai berkembang dengan pesat dan hingga pada saat ini tidak terbilang banyaknya cabang-cabang matematika yang bermunculan.

Kita dapat membayangkan bagaimana perkembangan matematika pada saat ini dan tahun-tahun mendatang. Sebagai akaibat perkembangan yang demikian eksplosif ini terbentuklah cabang-cabang matematika sebagai mata ajaran baru. Tentu saja ini akan mempengaruhi pendidikan matematika. Walaupun banyak materi matematika yang dapat dipelajari anak-anak kita, namun waktu yang tersedia di sekolah sangat terbatas. Karena itu, materi matematika itu perlu dipilih yang cocok untuk para siswa dan bisa bermanfaat di masa yang akan datang. Jadi tentunya sangat bijaksana bila kita sebelum mengajar, akan bertanya pada diri kita sendiri. "Mengapa matematika harus diajarkan"?. Pertanyaan ini berkenaan dengan psikologis yang harus dijawab dengan menetapkan tujuan mempelajari matematika tujuan yang berbeda antara perumusan obyektif dan pembacanya. Di dalam bab 3 ini akan kita bicarakan bagaimana merumuskan obyektif itu.

A. Obyektif Dan Fungsiya

Barangkali banyak orang mempergunakan kata obyektif tersebut. Bagi pengikut padangan behavioris, perumusan obyektif mempunyai pedoman tertentu. Obyektif didefinisikan sebagai suatu pernyataan hasil yang dikehendaki yaitusuatu pernyataan yang menunjukkan sebagai apa belajar itu bila pelajar tersebut telah meyelesaikan dengan sukses proses pengalaman belajarnya (Mager, 1962). Dengan demikian obyektif itu harus dinyatakan sebagai tingkah laku siswa dan bukan dinyatakan sebagai proses (Gambar 3.1)



Gambar 3.1 Obyektif tingkah laku

Jadi untuk mengembangkan obyektif itu, kita perhatikan hal-hal berikut.

a. Fokus perhatiannya lebih kepada tingkah laku siswa daripada tingkah laku guru Mislanya: " Siswa akan mampu menyelesaikan....." tetapi bukan "Untuk mengajar sisiwa bagaimana menyelesaikan...."

b. Obyektif melukiskan suatu hasil dan bukan suatu proses Misalnya: "Siswa mampu membedakan...." dan bukan "untuk mengembangkan pengertian...."

Prinsip yang bertitik tolak lebih kepada siswa kepada guru itu merupakan prinsip utama dalam belajar, sebab belajar itu dikejarkan oleh siswa, bukan oleh guru. Siswa sendirilah yang harus mengerjakan untuk dirinya sendiri.

Adapun fungsi obyektif adalah sebagai berikut.

a. Untuk mengarahkan pengembangan kurikulum atau guru di dalam memilih materi dan pengalaman belajar matematika apa yang dicakup dan apa yang ditekankan atau dipentingkan.
b. Untuk mengarah penilai atau guru di dalam menyusun alat-alat penilaian. Obyektif itu dicapai dengan sukses oleh seorang siswa apabila siswa itu dapat mendemonstasikan hasil yang dicapai itu.

B. Cara Merumuskan Obyektif

Untu merumuskan obyektif, menurut Mager (1962), perlu diperhatikan langkah-langkah berikut.

a. Bermakna

Obyektif kita itu bermakna apabila kita berhasil mengkomunikasikan obyektif itu kepada pembaca apa yang kita maksud[6]. Misalkan kita rumuskan suatu obyektif untuk seseorang dan kemudian ia mengajar siswa-siswanya. Siswa-siswa itu bertindak seperti apa yang kita pikirkan; ini berarti obyektif yang kita susun itu bermakna, tidak disalah tafsirka namun perlu diketahui, banyak kata-kata yang mempunyai interpretasi luas, misalnya: mengetahui, mengeti, mengembangkan, mempercayai dan menyenangi. Walaupun kata-kata kerja tersebut hampir tidak bermakna untuk komunikasi teknis seperti yang telah diutarakan, kata-kata kerja itu masih dapat digunakan apabila kata-kata kerja itu diikuti dengan penjelasan sedemikian sehingga pernyataannya melukiskan tingkah laku. Kata-kata kerja seperti menyelesaikan, mengidentifikasi, membedakan, membentuk dan membandingkan merupakan kata-kata kerja yang relatif lebih sempit intepretasinya daripada kata-kata kerja yang disebut sebelumnya.

b. Mengidentifikasi tingkah laku

Yang dimaksud tingkah laku terminal adalah tingkah laku siswa yang kita kehendaki, yakni siswa itu mampu mendemontrasikan apa yang kita ajarkan epadanya pada akhir program (Gambar 3.1). jadi kita dapat mengobservasi penampilan siswa-siswa itu pada akhir program. Dengan perkataan lain, aktivitas siswa langsung dapat dilihat atau didengar atau langsung dapat dinilai.

[6] *Pengertian bermakna- meaningful, istilah Mager (1962) hanya dipergunakan di bab 3 ini, selama berkaiatan dengan perumusan obyektif.hal.58.*

Dengan demikian kita harus mengidentifikasi jenis penampilan yang akan disepakati sebagai bukti bahwa siswa-siswa itu telah mencapai obyektif yang kita rumuskan.

Misalnya: "Mengembangkan pengertian persamaan kuadrat " Ini tidak dinyatakan di dalam penampilan sebab kita tidak dapat mengobservasikan apa yang sedang dikerjakan siswa ketika ia mengerti persamaan kuadrat. Sebenarnya pernyataan itu tidak jelas dan karena itu komunikasi menjadi gagal. Lebih baik bila obyektif itu dirumuskan sebagai berikut. " Mampumenyelesaikan persamaan kuadrat" sebab obyektif ini mengatakan bahwa siswa akan menyelesaikan persamaan kuadrat pada akhir program.

c. Menetapkan tingkah laku terminal

Marilah kita pergunakan contoh di atas. " Mampu menyelesaikan persamaan kuadrat. " Kita perlu menanyakan lagi: " Perlukah obyektif itu dijelaskan lebih lanjut yaitu diikuti oleh suatu prosedur khusus, atauakah hanya jawab yang asal benar saja yang dipandang penting?". Dengan demikian kita perlu menyatakan suatu obyektif yang akan mengkonsumsikan dengan sukses kehendak edukatif kita, yang kadang-kadang kita harus menetapkan tingkah laku terminal lebih lanjut dengan menyatakan persyaratan tertentu; kita merasa puas apabila siswa dapat mendemontrasikan penguasaan obyektif. Misalnya: "Siswa harus mampu menyelesaikan persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus abc. "Obyektif ini lebih terinci daripada obyektif yang dinyatakan sebelumnya sebab guru matematika yang lain akan mengerti apa yang kita kehendaki yaitu tidak hanya suatu jawab yang benar saja melainkan juga suatu prosedur khusus.

d. Menyatakan kriteria

Untuk menilai apakah tingkah laku terminal itu dapat dicapai, diperlukan suatu kriteria. Apabila kita dapat mengspesifikasikan paling sedkit penampilan yang dapat diterima untuk setiap obyektif, kita akan memiliki suatu standar penampilan yang dapat untuk menguji program kita. Ini berarti memiliki kriteia keberhasilan. Biasanya jalan untuk menyatakan kriteria keberhasilan itu adalah dengan mengspesifikasikan suatu batas waktu. Apabila kita tidak ingin dengan pembatasan waktu, kita perlu menyatakan batas waktu tersebut. Misalnya: "Siswa harus mampu menyelesaikan paling sedikit 5 buah persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus abc dalam wakti 15 menit. "Jadi obyektif ini memasukkan persyaratan waktu. Cara lain untuk menyatakan suatu kriteria keberhasilan adalah dengan mengspesifikasikan jumlah minimum jawab yang benar. Misalnya "Diberikan 10 persamaan kuadrat, siswa harus mampu menyelesaikan dengan benar paling sedikit 8 soal dengan menggunakan rumus abc. "Obyektif ini menunjukkan bahwa keterampialan minimum yang dapat diterima dinyatakan dengan jumlah soal yang diselesaikan. Namun dapat juga dinyatakan persentase sebagai ganti dari jumlah. Misalnya: "Siswa harus mampu menyelesaikan dengan benar paling sedkit 80% dari soal-soal persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus abc.

Dengan menambahkan kriteria, seorang guru dapat menentukan apakah siswanya itu telah mencapai obyektif itu dan langkah selanjutnya guru dapat merencanakan pengajaran remedial atau pengayaan.

C. Taksonomi Pendidikan

Agar komunikasi dapat lebih jelas, kita pergunakan taksonomi pendidikan. Yang dimaksudkan dengan taksonomi pendidikan adalah suatu bentuk klasifikasi tingkah laku siswdan mempersiapkana yang melukiskan hasil yang dikehendaki dari proses pendidikan. Dengan menggunakan taksonomi pendidikan itu, kita menjadi mudah merencanakan pengalaman belajar dan mempersipkan alat-alat penilaian. Menurut Bloom et al (1956), pembagian utama obyektif pendidikan di dalam taksonomi adalah tiga ranah tingkah laku, yaitu: kognitif, afektif dan psikomotor.

Ranah kognitif

Ranah meliputi ingatan dan pengemabangan kemampuan dan keterampilan intelektual. Karena itu ranah kognitif tersebut dibagi menjadi dua bagi.

1. Penegtahuan-tekanan kepada proses psikologi ingatan Misalnya: "Siswa mampu menyebutkan definisi fungsi"
2. Kemampuan dan keterampilan ini merupakan tingkat lebih tingg daripada hanya sekedar ingatan. Prosesnya melibatkan berpikir kritis dan pemecahan masalah. Ranah kognitif tingkat tinggi ini terdiri dari berikut ini.
    2.1. Pengertian ini meliputi interpretasi dan terjemanahan hasil-hasil manipulasi natematik. Mislanya "Siswa mampu menginterpretasikan suatu grafik ke dalam kehidupan sehari-hari".
    2.2. Aplikasi – siswa setelah menguasai konsep-konsep, struktur matematika akan mengaplikasikan ke situasi yang lain. Kemampuan untuk mengorganisasikan pengalaman belajar yang lalu untuk membuktikan teorema-teorema baru termasuk aplikasi ini. Misalnya: " Ssiwa mampu menggunakan rumus-rumus integral ke dalam fisika".
    2.3. Analisis ini berkenan dengan penguraian suatu atau informasi ke dalam unsur-unsur atau komponen-komponen pembentuknya hubungan-hubungan antar bagian-bagian dengan keseluruhan serta cara bagaimana mereka itu diorganisasikan.
    Misalnya: "Siswa mampu menuliskan hubungan antara grup, ring dan field".
    2.4. Sintesis ini berkenan dengan pernyataan unsur-unsur atau komponen-komponen untuk membentuk suatu kesatuan yang utuh sehingga polanya menjadi jelas. Di matematika nampak jelas kepada kemampuan penyusun konsep-konsep matematika untuk

menciptakan struktur matematika tertentu. Penciptaan teori-teori baru pada matematika termasuk kepada sisntesis ini misalnya: "Diberikan suatu masalah matematika, siswa mampu menghasilkan penyelsaian dengan dua cara atau lebih yang berbeda"

2.5. Evaluasi ini berkenan dengan penilaian suatu ide dan metode-metode dengan menggunakan kriteria. Evaluasi ini merupakan tingkat kognitif yang tertinggi, karena jenis ini melibatkan pengetahuan, pengertian, aplikasi, analisis dan sintesis agar bisa tercapai tujuan evaluasi tersebut. Misalnya: "Siswa mampu memilih rumus diderensial dan integral untuk menyelesaikan masalah-masalah yang menyangkut harga ekstrim.

Ranah afektif

Ranah ini meliputi sikap, emosi, nilai tingkah laku siswa, yang direfleksikan dengan perasaan tertarik atau senang. Misalnya: "Siswa tertarik kepada logika dengan menunjukkan tingkah laku bahwa pada saar-saat senggangnya ia memilih buku-buku mengenai logika untuk dipelajar. "obyektif yang dirumuskan ini melukiskan sikap siswa yang tertarik kepada topik logika.

Ranah psikomotor

Ranah ini berkenan dengan keterampilan yang baik menyangkut kognitif. Dengan perkataan lain ranah ini menyangkut keterampilan otot, misalnya: mengetik. Misalnya: " Siswa mampu mengetik 300 huruf di dalam tempo 5 menit".

Dengan adanya taksonomi pendidikan, nampaknya membantu mempermudah perumusan obyektif secara jelas. Namun demikian obyektif pendidikan biasanya cenderung kepada ranah kognitif dan tujuan afektif hanya untuk memberi dukungan saja.[7] Hal ini bukanlah berarti tujuan afektif ini kurang penting, tetapi tujuan afektif ini sangat sulit dirumuskan karena kekurangan kata kerja yang dapat menyatakan secara jelas. Sebenarnya ranah afektif ini sangat esensial sebab ranah ini dapat mempengaruhi ranah kognitif.

Misalnya, obyektif "tertatik" kepada suatu topik matematika menunjukkan pentingnya aspek situasi belajar karena siswa lebih suka belajar sehingga ia akan dapat memahami topik tersebut. Karena itu, para guru biasanya mengharapkan siswanya tetaptertarik kepada matematika yang diajarkan itu.

Adapun ranah psikomotor di dalam pendidikan matematika kurang diperlukan sebab obyektif psikomotor ini hanya menggambarkan keterampilan otot sedang matematika menyangkut keterampilan kognitif. Dari uraian sejauh ini, dapatlah kita simpulkan bahwa:

---

[7] Turmudi (ed). *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer (Common Text Book)*. Bandung: JICA – Universitas Pendidikan Indonesia (UPI).2001.hal.78

1. Obyektif seharusnya dirumuskan yang jelas yaitu dengan istilah-istilah tingkah laku siswa dan bukan dinyatakan dengan kata kerja yang menunjukkan proses.
2. Obyektif haruslah bermakna (ingat meaningfu istilah Mager) sehingga tidak terjadi salah pengertian bagi pembaca obyektif itu.
3. Dengan adanya taksonomi pendidikan, pengembang kurikulum dan guru akan lebih mudah merumuskan obyektif. Namun dipengajarkan matematika kita biasanya lebih cenderung memilih obyektif ranah kognitif sedang ranag afektif untuk mendukungnya.

D. Latihan

Apakah obyektif ini menunjukkan istilah tingkah laku?

Apakah setiap obyektif berikut ini menunjukkan tingkah laku siswa yang mendemontrasikan bahwa siswa telah mencapai obyektif.

	ya	tidak
1. Mengerti prinsip-prinsip logika	-	-
2. Mampu menulis tiga contoh grup	-	-
3. Mampu mengerti arti fungsi	-	-
4. Mampu menyebut ciri-ciri isomorpismo antara dua himpunan	-	-
5. Mampu menyusun tabel kebenaran disjungsi, konjugsi dan implikasi	-	-
6. Mengetahui peranan matematika di dalam kehidupan sehari-hari	-	-

Lingkarilah pada jawaban yang paling tepat

1. Siswa mampu menghitung hasil kali sebuah monomial dan binomial. Obyektif ini adalah:
   a. Pengertian
   b. Aplikasi
   c. Analisis
   d. Sintesis
2. Siswa dapat menetukan rumus yang paling praktis untuk dipergunakan menghitung simpangan buku dari data yang diketahui. Obyektif ini adalah:
   a. Pengetahuan
   b. Analisis
   c. Sintesis
   d. Evaluasi
3. Siswa mampu menemukan pola-pola bilangan bila ia dihadapkan kepada barisan bilangan. Obyektif ini adalah:
   a. Pengetahuan
   b. Pengertian

c. Analisis
d. Sintesis

4. Siswa mampu menulis hubungan bilangan-bilangan pada proses perkalian, obyektif ini adalah:
   a. Pengetahuan
   b. Pengertian
   c. Analisis
   d. Evaluasi
5. Siswa mampu mengubah dari bahasa matematika atau simbul-simbil ke bentuk grafik dan sebaliknya. Obyektif ini adalah:
   a. Pengertian
   b. Aplikasi
   c. Analisi
   d. Sintesis
6. Siswa dapat menggunakan hukum-hukum trigonometri untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Obyektif ini adalah:
   a. Pengertian
   b. Aplikasi
   c. Sintesis
   d. Evaluasi
7. Siswa dapat mengaplikasikan dalail phytagiras. Obyektif ini adalah:
   a. Pengertian
   b. Aplikasi
   c. Sintesis
   d. Evaluasi
8. Siswa mampu merumuskan jarak-jarak yang koordinatnya diketahui. Obyektif ini adalah:
   a. Aplikasi
   b. Analisis
   c. Sintesis
   d. Evaluasi
9. Siswa mampu menyatakan syarat-syarat kesebangunan antara dua segitiga. Obyektif ini adalah:
   a. Pengetahuan
   b. Pengertian
   c. Aplikasi
   d. Analisis
10. Diberikan data matematik, siswa mampu merumuskan generalisasinya. Obyektif ini adalah:
    a. Pengertian
    b. Aplikasi
    c. Sintesis
    d. Evaluasi

BAB VI

PEMILIHAN MATERI DAN PENGALAMAN BELAJAR MATEMATIKA

Perhatian terhadap perkembangan kurikulum matematika pada 20 sampai 30 tahun terakhir di banyak negara di dunia ini menunjukkan bahwa sistem pendidikan matematika tidak sesuai lagi untuk kebutuhan. Kebutuhan hidup di masa kini terus berkembang bergantung kepada, dan dipengaruhi oleh ilmu pengetahuan dan teknologi. Kecendrungan semacam itu memerlukan akumulasi pengetahuan dan kemampuan yang lebih besar sehingga siswa mengerti benar-benar bagaimana ia harus hidup. Orang harus memperbarui pengetahuan dan kemampuannya sehingga ia mampu menyesuaikan dirinya terhadap perubahan-perubahan maupun masalah-masalah yang dihadapi.

Kemajuan negara-negara maju, hingga sekarang menjadi dominan ternyata 60%-80% menggantungkan kepada matematika (Santosa, 1976). Indonesia pun sebagai negara yang sedang berkembang memerlukan matematika. Matematikanya sendiri telah berkembang dengan pesat sehingga, mengingat efektivitas dan efisiennya, tidak mungkin kita menjejali siswa dengan setmpuk matematika tanpa memperdulikan kriteria tertentu. Dengan demikian pertanyaannya menjadi: “Materi matematika yang mana diperlukan agar materi yang tersusun di silabus matematika cukup memberikan dasar untuk memperoleh kemampuan pengembangan diri sendiri?”

Negara-negara yang maju secara kontinu mengembangkan kurikulum matematikanya yang disesuaikan dengan kebutuhannya. Perbedaan filosofi dan sosial budaya mempuyai peranan yang penting di dalam menjawab empat pertanyaan kurikulum matematika (lihat di bab 2). Karena itu walaupun matematika itu bersifat universal, isi silabus matematika seyogyanya tidak menjiplak silabus matematika dari negara lain. Hal ini dapat mengalami kegagalan. Misalnya silabus matematika Papua New Guinea yang mengambil alih silabus Australia, hasilnya sangat mengecewakan bahkan gagal total.

Karena itu diseleksi disesuaikan bila ingin mencontoh suatu silabus dari negara asing, perlu diseleksi dan disesuaikan dengan di Indonsia. Dengan demikian perlu diseleksi disesuaikan dengan keadaan Indonseia. Dengan demikian perlu kiranya dipikirkan bagaimana cara memilih materi matemati yang diperlukan dan berguna bagi siswa. Sekaligus kita pikirkan juga bagaimana cara memilih pengalaman belajar yang cocok untuk sisiwa itu. Jadi sebenrnya kita sekarang berusaha mengisi komponen kedua dari model pengembangan kurikuum yang kita bicarakan di bab 2.

A. Pemilihan Materi Matematika

Pemilhan materi merupakan jawab pertanyaan kurikulum "Apa"

Yaitu materi matematika yang mana yang kita pilih. Pemilihan materi matematika tidak harus berorientasi pada perguruan tinggi, sebab walaupun banyak profesi-profesi pada perguruan tinggi memerlukan matematika, harus diingat tidak semua siswa akan memasuki perguruan tinggi. Karena itu pemilihan materi matemtika harus memerhatikan kepntingan siswa.

Nampaknya orang percaya bahwa makin banyak materi matematika yang diajarkan kepada siswa, makin terpelajarlah siswa itu karena menurut Prof. Bachtiar Rivai (1976) mengatakan bahwa matematika sudah menjadi bahasa ihnu pengetahuan dalamarti kata yang dalam. Adapun Bruner (1960) mengatakan bahwa banyak materi matematika yang dapat diajarkan kepada siswa yang biasanya diajarkan di perguruan tinggi asalkan bahasa dan metode yang dipergunakan dapar dimengerti oleh siswa. Sheppard (1975) di dalam laporannya juga mengatakan bahwa siswa-siswa pada tahap operasi konkret mampu menyelesaikan suatu masalah secara logika bila masalah tersebut terpilih dengan menggunakan bahasa yang sederhana, tidak menggunakan bahasa yang kompleks.

Di dalam sidang konperensi matematika nasional bulan juli 1976, banayak pembicara yang menunjukkan kegunaan matematika disegala ilmu pengetahuan dan teknologi sampai kepada perencanaan kota. Tidak dapat dpungkiri, pendidikan maematika di sekolah, mulai dari SD ke S antara lain adalah untuk mempersiapkan ahli-ahli ilmu pengetahuan dan teknologi sampai kepaa ahli perencanaan kota tersebut. Jelas, materi matematika yang dianggap perlu diajarkan di sekolah menjadi sangat banyak bahkan menjadi "terlampau sarat" mengingat waktu studi matematika di sekolah sangat terbatas. Jadi memilih materi tersebut sudah dipikirkan juga tentang pengalaman belajar yang lalu dan yang akan disajikan kepada siswa. Karena matematika itu merupakan ilmu yang berstruktur dan cara memikirkannya menggunakan abstraksi dan generalisasi, maka kesiapan intelektual merupakan syarat mutlak bagi siswa yang mempelajari matematika. Kita hars menyadari juga bahwa cara berpikir siswa itu berbeda dngan cara berpikir orang dewasa. Misalnya kita sulit untuk memnuntut siswa di tingkat permulaan sekolah lanjutan untuk berpikir aksiomatik ebab pada tingkat ini anak pada umumya di dalam tahap transisi dan tahap berpikir operasi konkret ke operasi formal. (lihat teori perkembangan intelektual oeh Piaget di bab 6). Dengan berpegang kepada teori perkembangan intelektual itu, kita tidak akan memperkosa kemampuan intelektual anak, tetapi kita membimbing agar secara siswa wajar mencapai tahap opersi formal. Dengan demikian matematika yang dipelajari siswa itu sesuai dengan perkembangan intelektualnya sehingga matematika dipelajari tidak dirasakan sebagai paksaan melainkan engan perencanaan senang atau wajar saja. Siswa tidak ariori dihinggapi matematika fobi.

B. Kriteria pemiliham materi matematika

Dari uraian di atas, jelas bahwa dalam menetukan materi matemtika yang diajarkan di sekolah, kita terbentuk pada masalah tentang "porsi" yang tepat. Yang dimaksud adalah usaha untuk mencapai suatu komposisi materi matematika yang teat dan kedalamaan yang cukup hingga silabus matematika di sekolah dapat dipertanggungjawabkan. Dengan kedalaman yang cukup berarti materi yang disajikanitu tidak berlebihan, tetapi cukup untuk memberikan dasar kepada siswa agar kelak mereka mampu mengembangkan dirinya baik terhadap aplikasinya maupun matematika sebagai ilmu murni.

Kecenderungan pemilihan materi matematika adalah konsep-konsep dasar untuk menjamin kemampuan dasar. Penekanannya lebih kepada pembentukan konsep dan struktur daripada sekadar teknik-teknik manipulasi sehingga diharapkan siswa mengerti matematika yang ia pelajari. Ini buksn berarti keterampilan melakukan operasi matematika kita hilangkan sebab hal ini penting selalu digunakan.

Kecenderungan tersebut di atas harus menjadi perhatian bagi seirang pengembang kurikulum matematika, namun sebagaimana yang telah dikemukakan di bab 2, kriteria pemilihan materi matematika secara umum adalah: Validitas, signifikasi serta kesiapan dan kegunaan.

Validitas

Materi yang dipilih harus mendukung tercapainya tujuan yang telah dirumuskan. Dengan demikian materi yang kita pilih itu tidak menyimpang dari tujuan yang sudah kita tetapkan. Misalnya obyektif yang telah kita tetapka sebagai berikut. "Siswa mampu menyelesaikan masalah sehari-hari dengan persamaan kuadrat. "Materi yang dipilih untuk mendukung tercapainya tujuan tersebut adalah soal cerita yang penyelesainnya menggunakan perasamaan kuadrat, bukan dengan persamaan panagkat tiga. Soal cerita sering juga "terbatas" persoalan sehari-hari jadi bukan misalnya mengenai sain murni. Dari conto ini jelaslah materi yang kita pilih tidak menjadi "berlebihan".

Signifikasi

Konsep-konsep disusun berhubungan sedemikian hingga berurutan secara hirarki dan merupakan kesatuan yang utuh. Yang perlu diperhatikan juga untuk konsep yang sama, harus dijamin bahwa konsep yang diajarkan disuatu tingkat tidak bertentangan dengan tingkat sebelumnya atau berikutnya. Jadi yang boleh berbeda cara penyampainnya saja. Misalnya kita hendak menyajikan tentang konsep fungsi. Yang dipermasalahkan bagaimana ide fungsi diajarkan pada suatu tingkat tertentu.

Kesiapan dan Kegunaan

Materi yang dipilih untuk disajikan harus mudah dipeajari siswa dan dapat dilaksanakan di depan kelas. Jadi di sini nampak jelas, di dalam memilih materi kesiapan siswa perlu mendapat perhatian yang serius. Di samping itu kegunaan dari materi yang dipilih itu perlu mendapat perhattian. Suatu topic yang dapat dipelajari dan dapat di diajarkan did depan kelas namun tidak bergunabagi anak sebaiknya tidak dipilih. Misalnya bilangan dengan basis 13 dapat dipelajari anak tetapi barangkali kurang berguna bagi anak sebaiknya materi semacam itu tidak kita pilih. Demikian juga operasi terhadap operasi (seperti *terhadap himpunan bilangan real yang didefinisikan sebagai $a*b = a + 3\ ab + b$) sangat sulit dipelajari siswa yang masih berada di tahap berpikir operasi konkret yang belum siap menerima pelajaran semacam itu. Eksperimen semacam itu telah dilakukan oleh Collis (1975) dan ia membenarkan hal tersebut. Karena itu materi semacam itu sebaiknya tidak dipilih untuk materi SD.

Mengenai kosep himpunan tidak hanya berguna untuk mempelajari matematika selanjutnya, tetapi juga mudah dipelajari oleh siswa pada tahap berpikir operasi konkret. Kemdian siswa mempelajari konsep himpunan itu dijamin oleh teori Piaget. Siswa-siswa pada tahap berpikir operasi konkret itu mampu mengaklifikasikan obyek-obyek. Dengan demikian siswa atau bahwa suatu himpunan itu merupakan himpunan bagian keseluruhan.

Dengan demikian konsep himpunan sudah sewajarnya kalau dipilih untuk diajarkan di SD.

Jelaslah bahwa tinjuan kita tidak hanya materi itu berguna bagi siswa saja tetapi juga konsep-konsep yang disajikan itu haruslah sesuai dengan kemampuan siswa. Pengalaman-pengalaman belajar yang lalu juga sangat bermanfaat untuk mendapatkan pengalaman-pengalaman belajar baru.

C. Langkah-langkah memilih materi matematika

Berikut ini suatu contoh langkah-langkah untuk memilih suatu materi matematika, misalnya untuk SMU, dengan menggunakan kriteri berikut.

1. Misalnya obyektif yang telah dirumuskan sebagai berikut.
   "Siswa mampu menggunakan rumus-rumus hasil bagi diferensial untuk menyelesaikan masalah-masalah matematika. "Materi yang mendukung pencapaian obyekti itu adalah rumus-rumus hasil bagi diferensial dan turunannya. Rumus-rumus integral tidak pada tempatnya untuk dipilih walaupun sbenarnya integral merupakan kebalikan dari hasil diferensial. Dengan demikian pemilihan materi hasil bagi diferensial dan turunannya didsarkan ats kriteria validitas.
2. Konse-konsep hasil bagi diferensial dan turunannya erlu kita susun secara hirarki hingga memungkinkan untuk menyelesaikan masalah-masalah matematika.

Konsep harga ekstrim

Turunan jenis ke n

Turunan jenis ke 2

Konsep turunan

Rumus-rumus hasil bagi diferensial

Sifat-sifat hasil bagi diferensial

Konsep hasil bagi diferensial

Gambar 4.1. Urutan konsep hasil bagi diferensial sampai harga ekstrim

Dalam hal menjelaskan konsep harga ekstrim dengan menggunakan konsep turunan harus dijaga jangan sampai terjadi kontradiksi dengan pada saat menjelaskan konse dengan menggunakan grafik. Yang diutamakan di sini bagaimana menjelaskan ide harga ekstrim dengan menggunakan konse turunan. Langkah ke 2 ini menunjukkan kriteria signifikasi menjadi perhatian kita dalam menyusun materi yang akan kita ajarkan kepada siswa.

3. Siswa SMU ada umumnya sudah berada dalam tahap berpikir formal. Penjelasan-penjelasan yang menggunakan siat-sifat dan grafik sudah dapat dimengerti para siswa. Rumus-rumus juga sudah dapat ditangkap dengan baik oleh para siswa. Degan demikian para siswa memang sudah siap menerima materi semacam itu.

Hanya ekstrim dengan menggunakan turunan itu memudahkan penyelesaian masalah-masalah matematika yang elementer dan merupakan konsep-konsep serta teknik-teknik ekstrik sangat berguna untuk matematika terapan. Jelas pemilihan materi-materi matematika tersebut menggunakan kriteria ksiapan dan kegunaan.

Dari uraian di atas itu jelas bahwa untuk mencapai obyektif "Siswa mampu menggunakan rumus-rumus hasil bagi diferensial untuk menyelesaikan masalah-masalah matematika. "Materi matematika yang diperlukan adalah konsep hasil bagi diferensial dan rumus-rumusnya sampai kepada konsep harga ekstrim. Pekanan kiranya cukup kepada jenis ke 2 sebagai alat untuk menyelesaikan masalah-masalah sederhana yang berkaitan dengan harga ekstrim.

D. Pemilihan Pengalaman Belajar

Pemilihan pegaalaman belajar ini juga merupakan juga jawab pertanyaan kurikulum “Apa” yakni pengalaman belajar yang mana akan dipilih. Sebagaimana yang telah dikemukakan di dalam halaman 9 pengalaman belajar dilukiskan sebagai interaksi antara siswa dan materi matematika yang dipelajari siswa sehingga interaksi itu menyebabkan perubahan tingkah laku siswa. Jadi disini Nampak bahwa pengalaman belajar merupakan suatu proses dan bukan menunukkan hasil. Jelas pula bahwa tidak sebarang pengalaman belajar akan menjamin terjadinya proses interaksi antara siswa dan materi matematika yang disajikan. Dengan demikian pemilihan pengalaman belajar memerlukan kriteria sehingga pengalamana belajar yang kita pilih dapat menjamin terjadinya interaksi antara siswa dan materi matematika yang kita pilih.

Kriteria pemilihan pengalaman belajar

Proses belajar akan berjalan sebaigamana mestinya bila siswa ikut perpartisipasi dengan aktif. Pemilihan jenis pengalaman belajar cenderung kepada bagaimana mengaktifkan siswa didalam mempelajari materi matematika. Tentu saja pengalaman belajar yang lampau sangat mempengaruhi proses belajar yang sedang dialami siswa. Kalau pengalaman belajar yang hanya sekedar berlatih keterampillan memanipulasi ssimbol-simbol tanpa pengertian, dikhawatirkan proses pemahaman terhadap konsep-konsep baru tidak dapat tercapai.

Mirip dengan kriteria pemilihan materi yang telah disebutkan. Terdapat tiga kriteria pemilihan pegalaaman belajar (lihat halaman 9) , yaitu: validitas, variasi serta kesiapan.

1. Validitas

Penagalaman belajar yang kita pilih haruslah yang dapat membaru tercapaiya obyektf. Pengalaman belajar yang kita berikan kepada siswa hendaknya dapat mengubah tingkah laku siswa sehingga siswa tersebut menampilkan tingkah laku yang sesuai dengan kehendak kita. Misalnya obyektif yang kita rumuskan sebagai berikut: “ Diberikan data matematika, siswa mampu merumuskan generalisasinya.” Jika pengalaman belajar yang diberikan kepada siswa hanya mendengar informasi guru bagaimana membuat generalisasi, maka pada umumnya siswa tidak akan mencapai obyektif itu. Tetapi apabila pengalaman belajar itu berlatih menemukan pola-pola sehingga siswa mampu merumuskan generalisasi, maka pengalaman belajar semacam ini akan menjamin tercapainya obyektif itu. Hal disebabkan pengalaman belajar siswa memang mendukung tercapainya obyekif.

Contoh lain, obyektif dirumuskan sebagai berikut: “ Siswa mampu mengatakan kembali definisi-definisi yang telah dipelajari. “Pengalaman belajar yang dapat mendukung obyektif itu cukup dengan mepelajari defines-definisi melalui membaca atau mendengarkan informasi saja; artinya tidak perlu harus berlatih merumuskan definsi-definisi tersebut dengan bahasa siswa sendiri.

2. Variasi

Untuk memeperlancar tercapainya obyektif, pengalaman belajar yang diberikan kepada siswa untuk satu konsep harus bervariasi. Dengan memberikan pengalaman belajar dalam bentuk situasi yang bermacam-macam untuk satu konsep matematika, siswa akan lebih mudah mencapai obyektif itu. Misalnya "Siswa mampu mengatakan kembali definisi-definisi yang telah dipelajari", informasi yang didengar atau dibaca siswa itu tentunya tidak hanya sekedar terdiri dari satu atau dua kalimat yang dengan tepat mendefinisikan suatu konsep misalnya, tetapi sebelum definisi fingsi yang tepat diberikan siswa menerima informasi berupa contoh-contoh yang menunjukkan fungsi atau bahkan juga yang bukan fungsi sesuai dengan pengalaman belajar siswa yang lampau.

3. Kesiapan

Pengalamana belajar yang diberikan kepada siswa hendaknya sesuai dengan tahap perkembangan inteletua siswa. Misalnya untuk siswa SLIP kelas I, tentunya tidak pada tempatnya bila pengalaman belajar berupa pembuktian teorema-teorema degan metode deduktif. Barangkali cukuplah sudah bila pengalaman belajar yang diberikan kepada siswa SLIP kelas I itu berupa membuktikan teorma-terema secara intuitif saja.

Dengan demikian juga pegalaman-pengalaman belajar yang lampau sangat mempengaruhi pengalaman-pengalaman belajar baru. Pengalaman belajar yang lalu itu memungkinkan adanya struktur kognitif siswa untuk memudahkan asimilasi terhadap pengalaman-pengalaman baru. Faktor-faktor tahap berpikir siswa dan pengalaman belajar yang lampau menetukan kesiapan siswa untuk menerima pengalaman-pengalaman baru.

Langkah-langkah memilih pengalaman belajar

Berikut ini diberikan suatu contoh langkah-langkah untuk memilih pengalaman belajar, misalnya untuk SMU dengan menggunakan kriteria di atas. Adapun materi matematika yang kita pilih sama dengan apa yang telah dikemukakan di halaman 9.

1. Obyektif yang dirumuskan: " Siswa mampu mengggunakan rumus hasil bagi diferensial untuk menyelesaikan masalah-masalah matematika. "Pengalaman belajar yang relevan dengan obyektif ini misalnya, mendengar informasi, berlatih menghitung turunan untuk bermacam-macam fungsi, berlatih menggunakan aturan-aturan hasil bagi diferensial untuk menyelesaikan masalah-masalah matematika. Adapun pengalaman belajar yang berupa berlatih menemukan rumus-rumus hasil bagi

diferensial tidak relevan dengan obyektif tersebut. Dengan demikian pada langkah ini, kriteria validitas kita perhatikan.

2. Sebagaimana yang telah dikemukakan di halaman 32 untuk mengaplikasikan rumus-rumus hasil bagi diferensial di dalam pemecahan masalah matematika yang ditekankan adalah turunan sampai jenis ke 2. Karena itu, pengalaman belajar yang cocok adalah mengobservasi segala macam bentuk grafik yang mempunyai harga ekstrim (bahkan grafik yang tidak mempunyai harga ekstrim) dan sekaligus mengaitkan interpretasi geometric dari konsep turunan. Dengan mengobservasi segala macam grafik itu berarti kriteria variasi menjadi perhatian kita.
3. Pengalaman belajar yang berupa mengobservasi segala macam bentuk grafik dan kemudian mengaitkan interpretasi geomaterik dari konsep turunan berarti siswa menyerap konsep harga ekstrim secara deduktif. Pengalaman belajar yang demikian ini dipilih sebab pendekatan deduktif kaku (rigor) dipandang di luar kemampuan siswa SMU. Dengan demikian di dalam kita memilih pengalaman belajar, kritaria kesiapan kita pergunakan. Dengan memerhatikan langkah-langkah bagaimana memilih pengalaman belajar, Nampak jelas bahwa kita did dalam memilih pengalaman belajar, pikiran kita selalu terkait dengan materi. Cara berp, kepikir yang demikian ini memang sesuai dengan model pengembangan kurikulum (bab 21) di mana pemilihan pengalaman belajar dan materi matematika menjadi satu komponen.

Sebagai penutup dari bab ini, pelu dikemukakan bahwa setelah materi matematika dan pengalaman belajarnya dipilih, kedua hal ini perlu disusun sehingga Nampak jelas dukungan terhadap obyektif yang telah dirumuskan serta kaitan antara materi dan pengalaman belajar yang akan diberikan kepada siswa. Lebih baik lagi bila disamping itu, diberikan komentar. Komentar ini berfungsi untuk lebih menjeleskan hubungan antar materi dan pengalaman belajar. Dengan demikian akan memepermudah guru dalam menjabarkan lebih lanjut materi-materi yang akan disajikan di depan kelas. Untuk jelasnya, sekali lagi, kita pergunakan contoh yang telah kita bicaralan pada halaman 34 dan 36.

E. Latihan.

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan singkat, tetapi jelas.

1) Mengapa diperlukan kriteria untuk menetapkan materi natematika yang akan diajarkan kepada siswa ?
2) Mengapa pengalaman belajar yang dipilih dapat membantu tercapainya obyektif yang telah dirumuskan?
3) Sebutkan kriteria untuk memilih materi matematika yagn diajarkan. Sebutkan juga kriteria untuk memilih pengalaman belajarnya.
4) Misalnya kita ingin menyajikan topic matrik di tingkat SLTP. Bagaimana sebaiknya pertanyaan yang kita ajukan kepada diri kita sendiri.

“ Pada kelas berapa topic matriks itu sebaiknya diajarkan” atau “bagaimana ide matriks diajarkan di SLTP? Mengapa?

Latihan 4.2 Beri tanda lingkaran pada jawaban yang cocok

1) Materi matematika yang mana kriteria validitas terpenuhi untuk obyektif berikut:
   “Siswa mampu memanipulasi operasi-operasi dasar vector”
   Materi:
   a. Operasi penjumlahan, operasi perkalian dengan scalar, perkalian titik dan perkalian silang
   b. Kosep vector, vector posisi, vertor dalam R, pengertian basis dalam R, operasi antar vector dalam R_2
   c. Penjumlahan dua vector, perkalian dengan scalar dan fungsi linier.
2) Pengalaman belajar yang mana kriteria validitas terpenuhi untuk obyekif berikut:
   “Siswa mampu mendemontrasikan bahwa transformasi itu mempunyai pola-pola matematika tertentu.”
   Pengalaman belajar
   a. Berlatih menemukan sifat-sifat transformasi
   b. Mendengarkan informasi tentang transformasi
   c. Mendapatkan sifat-sifat transformasi melalui pertanyaan-pertanyaan
   d. Berlatih menyelesaikan masalah melalui teransformasi
   e. Mempelajari sifat-sifat transformasi
   f. Mengamati dan mencatat sifat-sifat transformasi

BAB VII

PENALARAN DEDUKTIF DALAM METEMATIKA DAN PEMILIHAN KONSEP-KONSEP ESENSIAL

A. Penalaran Deduktif Dalam Metematika

Matematika adalah suatu alat untuk mengembangkan cara berpikir. Karena itu matematika sangat diperlukan baik untuk kehidupan sehari-hari maupun dalam menghadapi kemajuan IPTEK sehingga matematika perlu dibekalkan kepada setia peserta didik sejak SD, bahkan sejak TK. Namun matematika yang ada pada hakekatnya merupakan suatu ilmu yang cara bernalarnya deduktif formal dan abstrak, harus diberikan kepada anak-anak sejak SD yang cara berpikirnya masih pada tahap operasi konkret. Oleh karena itu kita perlu berhati-hati dalam menanamkan konsep-konsep matematika tersebut. Di satu pihak siswa SD berpikirnya masih sangat terbatas, artinya berpikirnya dengan dikaitkannya dengan beda-beda konkret ataupun gamabr-gambar konkret, di pihak lain matematika ittu obyek-obyek penelaahannya abstrak, artinya hanya ada dalam pemikiran manusia sehingga manusia itu hanyalah suatu hasil karya dari kerja otak manusia.[8]

Sebagai guru matematika terlebih lagi di SD perlu disadarkan bahwa matematika itu mempunyai sifat-sifat seperti disebutkan diatas., walaupun dalam menyampaikan bahan-bahan mantematika harus berorientasi kepada kepentingan siswa. Dengan demikian seorang guru SD semestinya tidak keliru dalam menanamkan konsep-konsep matematika kepada siswanya, sebab sekali konsep matematika keliru diterima siswa, sangat sulit untuk mengubah pengertian yang keliru tersebut.

Sampai saat ini belum ada definisi tunggal tentang matematika. Hal ini terbukti adanya puluhan definisi matematika yang belum mendapat kesepakatan di antara para matematikawan. Mereka saling berbeda dalam mendefinisikan matematika. Namun yang jelas, hakekat matematika dapat diketahui, karena obyek penelaahan matematika yaitu sasarannya telah diketahui sehinnga dapat diketahui sehingga dapat diketahui pula bagaimana cara berpikir matematika itu.

Matematika tidak hanya berhubungan dengan bilangan-bilangan serta operasi-oprasinya, melainkan juga unsure ruang sebagai sasarannya. Namun penunjukkan kuantitas seperi itu belum memenuhi sasaran matematika yang lain, yaitu yang ditujukan kepada hubungan, pola, bentuk dan struktur (Tinggih, 1972).

Dari uraian di atas jelas bahwa objek penelaahan matematika tidak sekedar kuantitas, tetapi lebih dititikberatkan kepada hubungan, pola, bentuk dan struktur karena kenyataannya, sasaran kuantitas tidak banyak artinya dalam

---

[8] Soehakso, RMJT. tt. *Pengantar Matematika Modern*. Jakarta: Proyek Pendidikan Tenaga Guru, Dirjen Dikti, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.2007.hal.56

matematika. Dengan demikian, dapat dikatakan matematika itu berkenan dengan gagasan berstruktur yang hubungan-hubungannya diatur secara logis. Ini berarti matematika bersifat sangat abstrak, yaitu berkenan dengan konsep-konsep abstrak dan penalarannya deduktif.

Begle (1979) menyatakan bahwa sasaran atau obyek penelaahan matematika adalah fakta, konsep, operasi dan prinsip. Obyek penelaahan tersebut menggunakan simbul-simbul yang kosong dari arti. Cirri ini yang memungkinkan matematika dapt memasuki wilayah bidang studi/cabang ilmu lain.

Ada hakekatnya, berpikir matematika itu dilandasi oleh keseakatan-kesepakatan yang disebut aksioma. Karena itu matematika merupakan sistem yang aksiomaik yang dapat dikemukakan sebagai berikut.

Suatu pembenaran dari teorema Tn dengan menggunakan teorema T_{n-1} yang sebelumnya sudah diterima kebenarannya. Pembenaran T_{n-1} dengan menggunakan T_{n-2} yang sebelumnya sudah diterima kebenarannya. Dengan demikian seterusnya sehinnga sampai pada suatu proposisi T_0 itu sendiri memerlukan pengertian pangkal yang tidak didefinisikan.

Dalam sistem aksiomatik ini, kumpulan aksioma itu harus memenuhi syarat-syarat berikut.

1. Taat azas (consistent)
   Kumpulan akaioma tersebut tidak boleh terjadi kontrakdiksi di antara akasioma-aksioma dalam kumpulan tersebut. Dalam pengembangannya juga tidak boleh terjadi adanya kontradiksi. Misalnya kita tetapkan akaioma-alsioma berikut.
   A_1 $2+3 = 1$
   A_2 $1+2 = 2$
   A_3 $(2+3) + (1+2) = 8$
   A_4 Dalam hal yang sama ditambah dengan dua hal yang sama menghasilkan dua hal yang sama. Keempat aksioma tersebut tidak taat azas sebab dengan menggunakan A_4, bila A_1 dan A_2 digabung menghasilkan $(2+3)+(1+2)=1+2=3$ konradiksi dengan A_3.

2. Lengkap
   Kelengkapan dalam arti, dalam merumuskan teorema-teorema dalam sistem matematika yang dimaksud. Aksioma-aksioma itu mencukupi. Misalnya, kita hilangkan salah satu dari suatu sistem matematika yang telah kita ketahui, maka kita tidak akan dapat menurunkan teorema-teorema karena aksiomanya tidak lengkap.

3. Hubungan antar aksioma bebas
   Hubugngan antar aksioma tidak saling bergantungan sebab aksioma yang tidak dapat diturunkan dari aksioma yang lain dalam sistem yang sama.
   Misalnya kita tetapkan aksioma-aksioma berikut.

A1 jumlah dua bilangan genap adalah genap

A2 jumlah dua bilangan ganjil adalah ganjil

A3 2+4 adalah genap

Ketiga aksioma tersebut tidak saling bebas sebab A3 dapat diturunkan dari A1.

Dari aksioma yang bersifat umum dapat diturunkan hingga diperoleh sifat-sifst khusus. Polayang demikian ini disebut deduktif. Pola pikir demikianlah yang banyak digunakan dalam berpikir matematika.

Perumusan yang diperoleh dari berpikir induktif, bukan berpikir matematika. Menalar secara induksi (bedakan dengan induksi matematik) memerlukan hal-hal yang khusus dasar argumentasi untuk menarik kesimpulan, antara deduktif dan induktif berbeda.

Walaupun matematika itu menggunakan penalaran deduktif, proses kreatif juga terjadi yang kadang-kadang menggunakan penalaran induktif, mutuisi bahkan dengan coba-coba (trial and eror). Namun pada akhirnya penemuan dari proses kreatif sebut harus diorganisasikan dengan pembuktian secara deduktif. Teorema-teorema yang diperoleh secara deduktif itu kemudian dipergunakan untuk menyelesaikan berbagai masalah termasuk dalam kehidupan nyata.

Uraian di atas dapat disarikan dengan gambar pada halaman berikut ini.

Penalaran dalam matematika adalah deduktif. Penalaran demikiam ini sulit dipisahkan dari logika.

Banyak masalah matematika berkaitan dengan pembuktian. Pembuktian yang menggunakan penalaran deduktof itu menggunakan kalimat yang mengandung "Jika … maka… ". Suatu kebenaran matematika dikembangkan berdasar alasan logik.

Pembuktian pada dasarnya merupakan penarikan kesimpulan yang sah dari premis atau premis-premis. Premis tersebut disebut juga hipotesis.

Beberapa cara pembuktian dapat dikemukakan sebagai berikut.

1. Pembuktian langsung
   a. Aturan dasarmya (p-q) ^p-q disebut modus ponendo ponens merupakan tautologi atau diyulis.

      Hipotesis (1) p-q

      Hipotesis (2) p

      Kesimpulan____

Misalnya, telah diketahui bahwa suatu segitiga samakaki, maka kedua sudut alasnya kongruen. Bila diketahui pula segitiga itu samakaki, maka dapat disimpulkan bahwa kedua sudut alasnya kongruen.

Penjelasan logikanya sebagai berikut.

Suatu teorema menyatakan: " Jika suatu segitiga itu samakaki (p) maka kedua sudut alasnya kongruen (q). Simbol logikanya:

Hipotesis (1) p-q sebagai teorema

Hipotesis (2) p

Kesimpulan____

q yang menyatakan bahwa kedua sudut alasnya segitiga samakaki kongruen.

b. Implikasi transitif (p-q) ^(q-r) – (p-r) merupakan tautologi atau ditulis:

   Hipotesis (1) p-q

   Hipotesis (2) q-r

   Kesimpulan___

   P-r

   Misalnya dibuktikan di dalam himpunan bilangan cacah, kuadrat bilangan ganjil adalah ganjil.

   Simbol logikanya: untuk x € {bilangan cacah} , (x) (x ganjil -x2 ganjil). Proses pembuktiannya adalah sebagai berikut.

   Hipotesis (1): X ganjil- ada n bilangan cacah sehingga

   X=2n+1

   Hipotesis (2): x=2n+1 –x2 = (2n+1)2

   = 2(n2+n)+1 adalah ganjil

   Kesimpulan: x ganjil- x2 ganjil

2. Pembuktian tidak langsung

   a. Ada kalanya kita sulit membuktikan P-q secara langsung. Dalam keadaan demikian kita dapat membuktikan kontrak positifnya, yaitu membuktikan kebenaran –q - -p sebab kedua pernyataan tersebut ekuivalen atau (p-q) – (-q—p) merupakan tauologi. Misalnya, harus dibuktikan proposisi tersebut

      Jika hasil kali dua bilangan asli a dan b ganjil (p) maka kedua bilangan tersebut ganjil (q) yang disimpulkan p-q. untuk membuktikan proposiis tersebut, kita dapat membuktikan kontrak positifnya yang berbunyi: "Jika bilangan asli a dan b kedua-duanya tidak ganjil (-q) maka a . b tidak ganjil (-p) yang disimpulkan:

      -q-p

      Andaikan salah satu dari a dan b tidak ganjil (yang berarti genap), n bilangan asli.

      a=2n- a.b= (2n)b

      = 2(nb)genap(tidak ganjil)

      Pembuktian dengan kontra positif ini juga dapat diubah menjadi (p-q) A –q—P meruakan tautology yang disebt modus tollendo tollens atau ditulis

      Hipotesis(1) p-q

      Hipotesis(2) -q

      Kesimpulan -p

b. Bila kita ingin membuktikan proposisi p, maka kita pandang negasi-nya ialah –p. kita harus membuktikan, dengan –p akan terjadi kontradiksi, misalnya q A –q salah maka pemisalan –p menjadi salah. Dengan demikian –(-p)menjadi benar atau karena –(-p) – p maka p benar.

   dengan kata lain, kita tunjukkan bahwa –(q^-q)- -(-q) tautology). Pembuktian seperti ini disebut *reductio* ad absurdum. Misalnya kita membuktikan suatu teorema dalam geometri Euclides yang berbunyi sebagai berikut: " Jika 1dan m merupakan dua garis yang berlainan yang tidak sejajar, maka 1 dan m itu berpotongan pada satu titik tunggal."

   Proses pembuktiannya sebagai berikut.

   1. 1 dan m tidak sejajar, berarti 1 dan m mempunyia satu titik yang sama.
   2. Karena yang akan dibuktikan adalah ketunggalan titik, dipandang sebaiknya, yaitu 1 dan m dimisalkan mempuyai dua titik potong di A dan B yang berbeda.
   3. Karena itu ada lebih dari satu garis yang melalui dua titik A dan B.
   4. Pernyataan 3 ini bertentanga dengan aksioma/postulat Euclides yang berbunyi" Hanya ada satu garis yang dapat ditarik melalui dua titik A dan B
   5. Disimpulkan 1 dan m berpotongan pada satu titik tunggal.

c. Untuk membuktikan tidak kebenaran dari suatu genelarisasi, kita pergunakan cukup dengan satu contoh saja yang dapat menggalkan genelarisasi tersebut.

   Cara pembuktian seperti iini disebut contoh saja yang dapat menggagalkan generalisasi tersebut.

   (Vz) p(x), x A

   Ila dapat ditunjukkan untuk a A menghasilkan –p(a) maka ini berarti (x)-p(x). ini ekuivalen dengan –((vx) p(x) yan menggagalkan generalisasi yang dikemukakan.

   Misalkan, kita akan membuktikan tidak benarnya proposisi (vn) (n(n+1)+4) adalah bilangan prima untuk n {bilangan asli}. Ambil n=40 maka 40 (40+1)+41=41 bukan bilangan prima. Disini juga sekaligus terlihat bahwa hasil pengamatan (kebenarannya yang khusus) tidak dapat begitu saja kita benarkan bentuk generaalisasinya. Perhatikan kembali contoh di (vn) (n(n+1)+4)) untuk n {bilangan asli} dengan kejadian-kejadian berikut.

Tabel 5.1. pembuktian dengan contoh kontra

N	n(n+1)+41	Keterangan
1	1(1+1)+41=43	Bilangan prima
2	2(2+1)+41=47	Bilangan prima
3	3(3+1)+41=53	Bilangan prima
4	4(4+1)+41=61	Bilangan prima
5	5(5+1)+41=71	Bilangan prima
39	39(39+1)+41=1601	Bilangan prima
40	40(40+1)+41=1681=41^2	Bukan bilangan prima

Penyimpulan dari penalaran induktif tidak dapat dierima sebagai kebenaran deduktif.

3. Induksi matematik

   Induksi matematik biasanya dipergunakan untuk pernyataan-pernyataan yang menyangkut bilangan asli.

   Induksi matematik ini berbeda dengan penalaran induktif yang telah disinggung di atas. Induksi matematik merupakan penalaran deduktif yang pada dasarnya menggunakan modus *ponendo pones*

   Prinsip pembuktian adalah sebagai berikut.

   Misalnya suatu penyataan P tentang bilangan asli dinyatakan dengan P(n)

   Jika kedua hal: 1. P(n) benar untuk a {bilangan asli}

   1. Untuk setiap bilangan asli k > a bila pernyataan P(k) benar maka P(k+1) benar. Maka P(n) benar untuk seua bilangan asli n >a

Penggunaan modus ponendo ponens terlihat berikut ini. Perhatikan P(n), n {bilangan asli}.

1 dan 2 berari P(a)-P(a+1)

P(a+1)—p(a+2)

P (a+2)—p(a+3)

P(k) -- P(k+1)

Jadi pemikiran induksi matematik merupakan penalaran deduktif.

Misalkan ita hendak mencari jumlah:

1+2+3+...+n

1. Penalaran deduktif

   1+2 =3 = 1/2.2.(2+1)

   1+2+3 =6 = 1/2.3.3(3+1)

   1+2+3+4 =10 = 1/2.4.(4+1)

   1+2+3+....+n = 1/2.n.(n+1)....*)

   Hasil *) dalam matematika bukan hasil penalaran deduktif. Disini akan ditunjukkan langkah berikutnya yaitu menggunakan indul matematik.

2. Penalaran deduktif

   Harus dibuktikan P(n) =1+2+3+...+n =1/2.n.(n+1)

Bila P(k) =1+2+3+...+k =1/2.k.(k+1)
Maka P(k+1) =1+2+3...+k+(k+1) =1/2(k+1)(k+2) benar

1. P(1)=1/2.1.(1+1) =1 benar
2. P(k) benar maka P(k+1) = 1+2+3+....+k)+(k+1)
   = 1/2 k (k+1)+(k+1)
   = (k+1)+(k+2) Benar

Jadi P(n) benar untuk setiap n bilangan asli.

B. Pemilihan Konsep-Konsep Esensial

Untuk menetapkan konsep-konsep esensial tidak semudah yang diucapkan. Kita perlu menetapkan kriteria, apa yang dimaksud konsep esensial tersebut. Kriteria tersebut perlu didiskusikan sehingga terjadi kesepakatan tentang deskripsi konsep esensial untuk matematika di sekolah. setelah kriteria itu jelas, barulah kita mendiskusikan pokok bahasan/sub pokok bahasan yang termasuk konsep esensial untuk ruang lingkup matematika di sekolah. kalaupun penetapan konsep esensial untuk matematika sekolah sudah dilaksanakan dengan cara seperti itu, belum tentu kelompok diskusi yang lain akan menyepakatiya, walaupun bidang keahlian pengkaji sama.

Dalam pembicaraan berikut ini akan kita coba menyusun kriteria konsep esensial untuk matematika di SD. Konsep esensial yang dimaksud dapat berupa fakta, definisi, operasi dan prinsip dasar untuk matematika SD.

1. Validitas
   Konsep yang dipilih harus mendukung tercapainya tujuan yang telah dirumuskan.
2. Signifikansi
   Konsep-kosep yang dipilih seyogyanya saling berhubungan sehingga dapat diurut secara hirarkis dan merupakan satu kesatuan yang utuh sebaagi bahan matematika SD yang rinciannya adalah sebagai berikut.
   a. Konsep yang mendasari konsep lainnya.
   b. Konsep yang memang dapat dipahami anak normal. Dengan perkataan lain, konsep-konsep tersebut harus sesuai dengan kesiapan anak normal.
   c. Konsep yang memang bermanfaat untuk bekal kehidupan anak.
   d. Konsep yang banyak digunakan sebagai pengenalan saja di SD, walaupu sangat diperlukan untuk tingkat pendidikan yang lebih tinggi tidak termasuk dalam kriteria yang kita tetapkan.

Dengan kriteria di atas, kita coba menetapkan konsep esensial untuk matematika di SD.

Asumsinya, bagi siswa SD pada umumnya, mereka memerlukan kemampuan hitung-menghitung untuk bekal kehidupannya. Asumsi ini mendasari rumusan tujuan. Misalya, himpunan.

1. Validitas
   Konsep himpunan memang diperlukan karena memang mendukung tujuan.
2. Signifikansi
   a. Konsep himpunan sebagai dasar untuk menjelaskan bilangan cacah. Bilangan cacah tidak mungkin diabaikan di matematika SD.
   b. Konsep himpunan mudah dipahami siswa SD, karena pengertian himpunan dapat dijelaskan dengan benda konkret sesuai dengan tahap perkembangan intelektual siswa SD
   c. Konsep himpunan memang sangat mudah dicerna anak dan memang bermanfaat bagi kehidupan, namun konsep abstrak tidak diperukan disini.
   d. Konsep himpunan akan sering digunakan untuk menjelaskan konsep-konsep matematika SD yang lain.

Kesimpulan:Himpunan termasuk konsep esensial.

Misal yang lain, matriks

1. Validitas
   Konsep matrik mungkin tidak diperlukan untuk mendukung tercapainya tujuan
2. Signifikansi
   a. Konsep matriks tidak mendasari konsep-konsep matematika SD yang berkaitan dengan hitung menghitung.
   b. Konsep matriks dapat dicerna siswa, asalkan konsep disajikan dengan contoh-contoh konkret dalam kehidupan sehari-hari.
   c. Konsep matriks ini diperlukan dalam kehidupan sehari-hari bila konsep matriks ini dikembangkan.
   d. Konsep ini rasanya tidak ada kelanjutan dalam matematika ke SD.
   Dengan demikian konsep matriks di SD berfungsi sebagai pengenalan saja.

Kesimpulan: Matriks bukan konsep esensial

Dari kedua contoh di atas, terlihat dalam menetapkan apakah suatu pokok bahasan merupakan konsep esensial, sangat dipengaruhi oleh subyektivitas individu yang menetapkan, walaupun kriteria pemilihan konsep esensial sudah ditetapkan. Karena itu untuk menetapkan apakah suatu pokok bahasan merupakan konsep esensial, perlu forum diskusi yang melibatkan para ahli.

C. Latihan

Latihan 5.1 Apakah sekumulan aksioma berikut taat azas?

A_1: 8.2 = 10

A_2: 5.2 = 6

A_3: 10.6 = 4

A_4: Dua hal yang sama dikalikan dengan dua hal yang sama

Latihan 5.2 Jelaskan sekumpuan aksioma berikut bergantungan.

A_1: Suatu persegi adalah suatu persegi panjang

A_2: Suatu persegi panjang adalah suatu parallelogram

A_3: Suatu persegi adalah suatu paralogram

Latihan 5.3 Diketahui a dan b kedua-duanya bilangan asli

Jika a + b= 2 maka a = 1 dan b = 1

Untuk membuktikan pernyataan berikut, cara pembuktian mana yang anda pilih. Silahkan mengerjakan.

Latihan 5.4 Bila a M dan 0 unsure identitas penjumlahan maka a x 0 = 0

Buktikan

Latihan 5.5 Bila a M maka (-1) x a = -a (petunjuk gunakan tugas 4)

Laihan 5.6 Bila a M maka a x (-b) = -(a x b)(petunjukgunakan tugas 5)

Latihan 5.7 Bentuk kelompok anggotanya terdiri dari 3-4 orang untuk setiap kelompok. Tetapkan kriteria konse esensial (seperti yang telah dikemukakan) sesuai dengan pendapat kelompok. Silahkan mendiskripsikan yang lebih akurat apa konsep esensial matematika untuk SD itu. Selanjutnya berikan contoh beberapa pokok bahasa matematika dari kurikulum matematika SD yang sedang berlaku, mana termasuk esensial dengan menggunakan kriteria yang sudah anda susun.

Latihan 5.8 Sejalan latihan 5.7, tetapkan konsep esensial matematika untuk SMP atau SMU

Latihan 5.9 Buatlah ringkasan Bab 5 tersebut!

BAB VIII

TEORI DASAR BELAJAR MENGAJAR MATEMATIKA

Dengan berpedoman kepada pengembangan kurikulum matematika, salah satu komponennya merupakan jawaban pertanyaan kurikulum yaitu" Bagaimana " dan "kepada siapa" suatu topic matematika diajarkan. Dengan demikian, perlu kiranya kita bicarakan bagaimana belajar dan mengajar matematika itu sebenarnya.

Walaupun belajar dan mengajar itu dua hal yang berbeda, keduanya saling berkaitan. Mengajar akan efektif bila kemampuan berpikir anak diperhatikan dan karena itu perhatian ditujukan kepada kesiapan struktur kognitif siswa. Adapun struktur kognitif mengacu kepada organisasi pengetahuan/pengalaman yang telah dikuasai seorang siswa yang memungkinkan siswa itu dapat mengungkapkan ide-ide/konsep-konsep baru.[9]

Kenyataan menunjukkan bahwa perkembangan intelektual siswa berlangsung bertahap secara kualitatif. Walaupun perkembangan itu nampaknya berjalan dengan sendirinya, nampaknya perlu diarahkan sebab perkembangan tersebut dapat dibantu atau terhalanng oleh keadaan lingkungan.

Ahli-ahli ilmu jiwa yang berhubungan dengan kognitif seperti Gagne, Ausubel, dan Collis menyarankan bahwa kesiapan merupakan suatu variable yang penting di dalam situasi belajar, tetapi kita tidak bisa menantikan kesiapan itu timbul dengan sendiriya. Suatu program aktif untuk membantu pengembangan kesiapan tidak boleh diabaikan bahkan dipandang sangat perlu.

Berdasarkan hal-hal diatas pembicaraan-pembicaraan berikut ini dibagi menjadi tiga sasaran:

1. Kesiapan intelektual
2. Hakekat Matematika
3. Metode mengajar sehingga siswa dapat belajar matematika dengan efektif.

Walaupun ketiga hal itu merupakan satu kesatuan, pembicaraan akan dibagi menjadi tiga sasaran secara terpisah dan akan ditunjukkan bagaimana belajar dan mengajar matematika akan timbul dari ketiga sasaran tersebut.

A. Kesiapan Intelektual Siswa

Di dalam membicarakan kesiapan intelektual siswa akan tercakup hal yaitu: perkembangan intelektual siswa dan pengetahuan belajar telah diperoleh siswa.

Teori perkembangan itelektual siswa yang telah dikemukakan oleh Jian Piaget dirasakan sangat cocok untuk pegajaran matematika sekolah, sebab teori

[9] Hudoyo, H. & Sutawidjaja, A. *Matematika*. Jakarta: Bagian Proyek Pengembangan PGSD Dirjen Dikti Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.1997.hal.54

Piaget itu berhubungan dengan bagaimana siswa berpikir dan bagaimana berpikir mereka itu berubah sesuai dengan usianya. Karena itu tahap-tahap berpikir siswa yang dikemukakan Piaget itu sangat berpengaruh terhadap penyusun kurikulum sekolah. khusunya di dalam menyusun kegiatan belaar mengajar matemaika. Dengan dmikian metode mengajar matematika yang dipergunakan haruslah sesuai dengan perkembangan intelektual siswa.

Untuk memahmi taha-tahap masa berpikir tersebut yang mempunyai implikasi terhadap pengajaran matematika, perlu kiranya ketahui secara ringkas bagaimana Piage mengemukakan gagasannya tentu perkembangan intelektual manusia. Ia berpendapat bahwa struktual intelektual dibenuk di dalam individu sehingga individu berinteraksi dengan lingkungannya. Struktur yang bertumbuh itu akan meningkat kemampuannya untuk mengatasi perkembangan lingkunganya yang semakin pelik.

Piaget mengemukakan istilah”scheme”. Suatu scheme adalah suatu pola tingkah laku yang dapat berulang kembali. Paa mulanya scheme berhubungan dengan reflex pembawaan, misalnya “ngedot pentil” setelah dewasa scheme berkenan denan mental, misalnya scheme klasifikasi, scheme kemungkinan dan scheme operasional atau disingkat operasi. Penguasaan terhadap suatu scheme mempunyai implikasi yang menunjukkan adanya suatu perubahan di dalam perkembangan itelektual anak. Jadi sbenarnya scheme itu meruakan struktur kognitif mana intelektual individu menyesuaikan dengan lingkungan dan mengorganisasikannya.

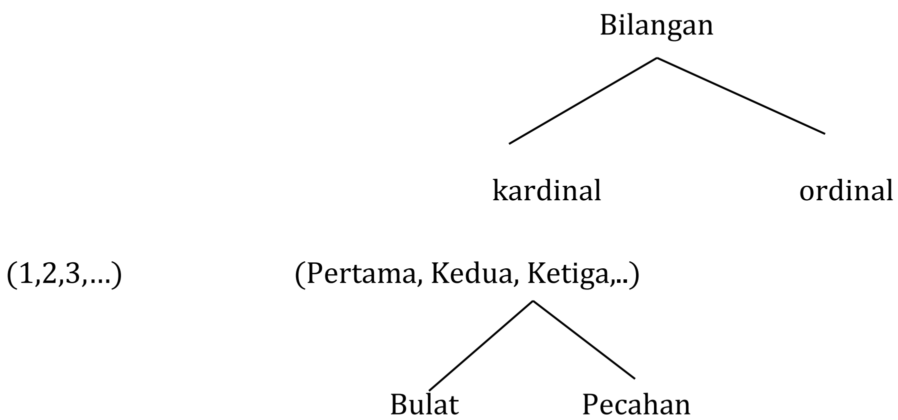
Walaupun perhatian utama Piaget berkenan dengan struktur intelektual, ia menekankan dua aspek lain dari intelegensi yaitu konten dan fungsi. Konten megacu kepada pola tingkha laku khusus dari anak bagai respon terhadap bermacam-macam masalah atau siatuasi yang dihadapi. Adapun fungsi mengacu kepada cara bagaimana suatu organisasi membuat mental berkembang . menurut Piaget, semua oganisme bersifat yang inarian, yaitu oragnisasi dan adaptasi.

Istilah “oragnisasi” melukiskan kemampuan oragnisasi mengasistematiskan atau mengorganisasikan proses-proses fisik atau psikologik dalam sistem yang berkaitan. Misalnya ikan mempunyai sejumlah struktur yang memnugkinkan struktur-struktur itu berfungsi secara efektif di dalam air. Semua struktur bekerja sama-sama secara efisien agar ikan dapat bertahan di dalam lingkungannya. Kondinasi fisik ini merupakan hasil dari fungsi oragaisasi. Ungsi oragnisasi di tingkat fisik ini serupa saja dengan fungsi organisasi di tingkat psikologi. Seorang bayi mempunyai struktur tingkah laku yang terpisah untuk pemusatan visua da usaha meraih. Di dalam perkembangan bayi itu mengoraganisasikan kedua struktur tingkah laku ini ke dalam struktur tingkah laku lebih tingi dengan meraih sesuatu obyek pada saat bayi itu melihat benda tadi. Kemudian organisasi mengitegrasikan struktur fisik dan psikologi ke sistem yang lebih tinggi.

Aspek kedua dari fungsi adalah adaptasi. Semua organism dilahirkan untk menyesuaikan kepada lingkunannya. Cara bagaiman a terjadinya adaptasi berbeda dari organism yang satu ke organism yang lain. Demikian juga halnya fungsi adaptasi di psikologi. Adaptasi itu terdiri dua proses yang disebut asimilasi dan akomodasi yang sering berlawanan, namun kedua prose situ, tidak dapat dipisahkan.

Asimilasi adalah proses mengaborsi pengalaman-pengalaman baru ke dalam scheme yang mudah dimiliki. Akomodasi adalah proses mengaborsi pengalaman-pengalaman baru dengan jalan mengadakan modifikasi scheme yang ada atau bahkan membentuk pengalaman yang benar-benar baru.

Misalnya seorang siswa yang telah memahami bahwa himunan bilangan itu tetap saja walaupun urutannya diubah. Kemudian siswa tersebutu mendapat pegalaman baru tentang adanya bilangan cardinal dan ordinal., serta bilangan bulat an pecahan. Walaupun ada tambahan pengetahuan baru ini struktur kognitif yang ada tetap saja, tidak berubah artinya bahwa sifat bilangan itu tetap sama walaupun pengaturannya diubah. Keadaan yang demikian inin dikatakan bahwa anak telah mengasimilasi pengetahuan baru yaitu adanya bilangan cardinal dan bilangan ordinal, secara bilangan bulat an bilangan pecahan tidak mengubah sifat bilangan yang telah dimiliki siswa (Gambar 6.1)



Gambar 6.1 Asimilasi Bilangan Kardinal dan Ordinal dalam scheme Bilangan

Di dalam pengembangan struktur bilangan lebih lanjut sebenarnya terjadi modifiikasi struktur kognitif yang telah ada. Kalau tadinya sekedar satu kesatuan bilangan, sekarang melengkapi kedua satuan cardinal dan ordinal, serta pecahan. Keadaan yang demikian ini dikatakan bahwa anak harus mengamodokasikan tidak hanya pengalaman itu, mlainkan juga bilangan terbagi menjadi kesatuan-kesatuan yang lain. Dengan perkataan lain, jika seseorang mempunyai suatu pola tingkah laku untuk berinteraksi dengan lingkungannya, ia mengamsimilasi tingkah laku itu; jika tidak mempunyai pola-pola tingkah laku yang cocok yang berkenan suatu situasi, ia harus mengubah pola responnya dan mengamodokasikan lingkungannya.

Melalui kedua macam adaptasi itu, seseorang menginterpretasikan pengalaman-pengalaman barunya yang didasarkan kepada pengalaman-

pengalaman lamanya. Adaptasi merupakan suatu keadaan setimbang dari asimilasi dan akomodasi. Jika di dalam proses asimilasi, individu tidak dapat mengadaptasikan lingkungan, keadaan semacam itu dikatakan berada dalam"ketidakseimbangan". Akomodasi merupakan hasil dari ketidakseimbangan ini, dan strutur yang itampilkan diubah atau timbul yang baru. Petumbuhan intektual merupakan suatu proses yang terus menerus dari keadaan seimbang-tidak seimbang. Tetapi, bila keseimbangan tercapai, individu berada di tingkat intelektual yang lebih tinggi daripada sebelumnya.

Sebagaimana yang telah dikemukakan. Piaget memandang bahwa pertumbuhan berpikir ini sebagai suatu adaptasi pengaruh lingkungan secara kontiniu. Ia menggunakan model dasar pengembangan berpikir (Richmond: 1970, 70) 6.2 berikut.

Asimilasi ——— Akomodasi

Scheme menjadi lebih stabil

Adaptasi untuk mencapai keseimbangan

Proses asimilasi itu semacam inersia tentang struktur-truktur mental, suatu kecenderunan di mana struktur-struktur itu tetap sama dengan kondisi semula tanpa suatu perubahan. Tetapi penggabungan pngalaman-pengalaman baru ke dalam struktur-struktur yang telah dimiliki individu tidak dapat terletakkan akan modifikasi struktru-sturktur yang telah ada itu.

Walaupun akomodasi terhadap lingkungan nmenyebabkan modifikasi dari scheme yang dimiliki siswa secara kontiniu, perubahan itu tidak sekedar kuantitatif. Dalam suatu selang waktu, struktur mental siswa juga berubah secara kualitatif.

Jelas bahwa adaptasi akan terjadi juga di dalam proses belajar. Perkembangan koqnitif bergantung kepada akomodasi. Para siswa hrus memasuki lingkungan yang tidak ketahui dengan maksud belajar. Ia tidak dapat belajar hanya dari apa yang telah diketahui, ia tidak ditapat hanya bergantung kepada asimilasi. Di dalam siauasi di mana proses danya kognitif yang dimiliki siswa tidak digunakan, terjadilah akomodasi bukan asimilasi. Di dalam suatu kegiatan pengajaran yang tidak menampilkan hal-hal yang baru bagi siswa, siswa tersebut barangkali mengasiilasi secara berlebihan; di dalam suatu kegiatan pengajaran di mana seorang tidak dapat mengakap pelajaran yang diberikan barang kali ia mengkomodasikan secara berlebihan. Di dalam kedua situasi yang tlah diuraikan itu tidak akan memberikan fasilitas pertumbuhan kognitf anak.

Selanjutnya marilah kita sekarang memperhatikan bagaimana Piaget indentifikasi empat tahap dasar perkembangan struktur intelektual.

a. Periode Sensori-motor

Tahap ini dicapai anak umur 2 tahun. Karakteristiknya merupakan gerakan-gerakan sebagai akibat reaksi langsung. Misalnya gerakan-gerakan anak, karena anak melihat dan meraba obyek-obyek. Anak belum mempunyai kesadaran adanya konsep obyek yang tetap. Bila obyek itu disembunyikan, maka anak itu tidak akan mencariya. Karena anak secara kontiniu bertambah pengalamannya terhadap lingkungannya, pada akhir periode sensori motor, anak menyadari bahwa obyek yang disembunyikan masih ada dan ia berusahan mencarinya.

b. Periode pra-operasional

Operasinal adalah suatu proses berpikir logis dan merupakan aktivitas mental bukan aktivitas sensori motor. Pada tahap pra oerasi siswa di dalam berpikirnya tidak didasarkan kepada keputusan yang logic meainkan di dasarkan kepada keputusan melainkan didasarkan kepada keputusan yang dapat dilihat seketika. Tahap ini dicapai oleh anak berumur 2-7 tahun. Periode ini disebut juga tahap penyimpulan. Misalnya pada tahap ini kata-kata dipergunakan untuk menyatakan suatu benda. Pada tahap sensori motor anak terpaku kepada kontak langsung dengan lingkngannya, tetapi pada tahap pra operasional siswa mulai memanipulasi symbol dari benda-benda sekitarnya. Walaupun pada tahap permulaan pra operasional ini sudah mampu menggunakan symbol-simbol, ia masih sukar melihat hubungan-hubungan da emngambil kesimpulan secara konsiden.

Pada akhir tahap ini siswa bergerak ke tahap berikutnya yang disebut tahap operasi konkret. Perhatikan eksperimen berikut. 20 kelereng, 16 berwarna merah dan 4 putih diperhatikan kepada seorang siswa dengan pernyataan berikut.

“manakah ang lebih banyak kelereng merah atau kelereng-kelereng itu”

A usia 5 ahun menjawab:”Lebih banyak kekelereng merah”

B usia 7 tahun menjawab:”kelereng lebih banyak dari pada kelereng yang berwarna merah”

Disini Nampak bahwa A tidak mengerti pernyataan yang diajukan, sedang B mampu menghimpun kelereng merah dan putih menjadi satu himpunan kelereng A sangat dipengarhi oleh pengamatan visual sehingga kekeliruan.

c. Periode Operasi Konkret

Tahap ini kira-kira dicapai pada usia 7-11 tahun 12 tahun. Tahap ini ditandai dengan permulaan berpikir matematik logic. Siswa pada periode ini, di dalam berpikirnya demikian operasional. Tahap ini disebut operasi konkret sebab berpikir logiknya didasarkan atas maniulasi fisik dari obyek-obyek. Tahap operasi konkret itu hanyalah menunjukkan kenyataan adanya hubungan dengan pengalaman empiric-kokret yang lampau dan masih mendapat kesukaran dalam mengambil kesimpulan yang logic dari pengalaman-pengalaman khusus. Dengan perkataan lain, pengerjaan-pengerjaan logic dapat dilakukan dengan berorientasi obyek-obyek atau peristiwa-peristiwa yang langsung dialami. Siswa tidak memperhitungkan semua kemungkinan dan kemudian mencoba menemukan yang dari mana kemungkinan-kemungkinan tersebut benar-benar terjadi. Secara singkat dapatlah dikatakan bahwa operasi pada periode ini terikat pada pengalaman pribadi. Pengalaman-pengalaman itu adalah konkret da bukan pengalaman formal. Siswa masih belum mampu menguasai materi abstrak seperti hipotesis dan proposisi-proposisi verbal. Jelas kiranya instrument kogitifnya belum cukup formal untuk memahami hakekat mata pelajaran yang dipelajari, anak belum menangkap struktrunya terdapat di dalam pelajaran tersebut.

Berikut ini merupakan sekelompok operasi konkret yang penting"Kombinasivitas" atau klasifitas, adalah suatu operasi dua kelas atau lebih yang dikombinasikan ke dalam suatu kelas yang lebih besar. Misalnya semua manusia lelaki dan semua perempuan adalah semua manusia. Hubungan A>B dan B>C menjadi A>C.

Untuk pertama kalinya siswa itu dapat membentuk variasi relasi kelas dan mengerti bahwa beberapa kelas dapat di asukkan ke kelas yang lain.

"Reversibilitas" merupakan kriteria utama untuk berpikir operasional di dalam teori Piaget. Hal ini berakibat bahwa setiap operasi logic atau matematika dapat dikerjakan dengan operasi kebalikannya misalnya 5+3;8 dan 8-3=5

"Asosiasivitas" merupakan suatu operasi dimana beberapa kelas di kombinasikan menurut sebarang urutan.

"**Identitas**" merupakan suatu operasi dimana tepat suatu ubsur nol yang bila dikombinasikan dengan suatu unsur atau kelas, hasilnya tidak berubah. Misalnya 5+0=0. Kemudian juga suatu jumlah dapat dinolkandengan mengombinasikan lawannya, misalnya 5-5=0 . Contoh lain, jika kita berjalan 5 km ke arah utara kemudian 5 km ke arah selatan dengan jalan yang sama, kita sampai pada saat kita berangkat. Selain dari itu, pada tahap berpikir operasi konkret ini, siswa mampu mengorespendasikan 1-1 antara obyek-obyek dari dua himpunan.

Dengan menggunakan operasi-operasi di atas, siswa mengembangkan kesadaran prinsip-prinsip konservasi. Adapun konservasi berkenan dengan kesadaran bahwa satu aspek dari benda, misalnya isi, tetap sama sementara itu aspek lainnya berubah (misalnya bentuk, posisi). Misalnya siswa itu dapat mengerti bahwa segelas di tuangkan ke dalam gelas lain yang ukurannya berbeda tidak akan berubah sebab banyak air sama dengan sebelum dituangkan (prinsip-prinsip identitas dan reversibilitas). Mampu perlu diketahui bamun perlu diketahui bahwa konsep konservasi Itu belum secara penuh. Siswa dalam tahap ini dilandasi oleh observasi dari pengalaman dengan obyek-obyek nyata, tetapi ia sudah mulai menggeneralisasi obyek-obyek tadi. Bila generalisasi ini lengkap dan benar, siswa itu sudah berada di tahap ooerasi konkret yang mantap. Tahap ini penting, sebab operasi operasi itu pada tahap operasi konkret meliputi pengklasikasikan, urutan, kontruksi ide bilangan dan semua operasi operasi dasar sederhana dari himpunan dan relasi relasi matematika yang sederhana. Kemampuan seperti belum dimiliki siswa pada peruide pra operasional.

Perhatikan observasi berikut. 6 kelereng dideretkan dengan jarak masing masing 1 cm; 6 kelereng yang lain disusun tepat di bawah barus pertama (Gamabr 6.3)

(1) ○ ○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○ ○

Gambar 6.3 kedudukan dua kelompok kelereng yang berjarak sama

Kemudian keelereng baris kedua dirapatkan (Gambar 6 4)

(2) ○ ○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○ ○

Gambar 6.4 kedudukan dua kelompok kelereng yang berjarak tidak sama

Pertanyaan yang diajukan kepada anak sebagai berikut: “ Manakah lebih banyak (pada kondisi(2) Gambar 6.4) di baris atas ataukah di baris bawah ataukah kedua baris itu sama?”

A usia 5 tahun menjawab: “ Baris di atas lebiih banyak”

B usia 7 tahun menjawab: “ kedua baris itu sama. Susun kembali kedua seperti baris pertama”

A masih sulit melihat hubungan satu dengan yang lain sedang B sudah mampu mengkorespondensikan 1=1 antara dua himpunan kelereng tersebut.

Yang perlu diperhatikan tahap operasi konkret itu ialah bahwa siswa dapat memahami konsep-konsep matematika yang didasarkan pada benda-benda konkret akan lebih mulai daripada memanipulasi istilah-istilah abstrak.

d. Periode Operasi Formal

Periode terakhir adalah tahap berpikir formal atau disebut juga periode operasi hipotetik deduktif. Dengan perkataan lain tahap ini adalah tahal tertinggi dari perkembangan intelektual siswa. Biasanya tahap ini belum tercapai pada usia 11 sampai 12 tahun. Siswa pada tahap inu memberikan alasan dengan menggunakan lebih banyak simbol simbol atau ide daripada obyek obyek yang berkitan dengan benda benda di dalam cara berpikirnya. Siswa tersebut mampu mengoperasikan bentuk dari suatu argumentasi dan tidak lagi mneggunakan benda-benda empirik. Ia mampu menggunakan prosedur hipotik deduktif. Siswa sudah mampu menggunakan logika seperti jika maka dan segalanya.

Siswa menyelesaikan masalah dengan cara lebih baik dan kompleks dari yang masih berada di dalam masa berpikir iperasi konkret . Konsep konservasi yelah yercapai sepenuhnya. Siswa sudah mempunyai kemampuan untuk menggunakan hubungan-hubungan di antara obyek obyek apabila ternyata manipulasi terhadap obyek obyek tidak memungkinkan. Berpikir pada tahap formal tersebut ditandai oleh pembentukan hipotestik yang kemungkinan diikuti dengan mengetes hipotestuk tersebut. Siswa telah mampu melihat hubungan-hubungan abstrak dan menggunakan proposisi-proposisi logik formal termasuk aksioma aksioma dan definisi definisi.

Pada tahap ini siswa juga mampu berpikir kombinatorial. Bila seorang siswa dihadapkan kepada suatu masalah, ia dapat mengisolasi faktor faktor tersendiri atau mengombinasikan faktor-faktor itu untuk sampai kepada penyelesaian masalah tersebut.

Perhatian obsrvasi berikut. Bila 15 kelereng untuk 3 orang, berapa orang bila terdapat 40 kelereng?

A usia 10 tahun menjawab: "tidak tahu " saya tshu bahwa 15 kelereng untuk 3 orang, setiap orang 5 kelereng. Tetapi bagaimana menjawab pertanyaan itu"?

B usia 13 tahun menjawab: "Delapan orang yang menerima kelereng tersebut".

A memang tahu hubungan yang sederhana seperti 15 tahap 3, tetspi ia setelah mendapat masalah yang lebih sulit, ia kehilangan pengertian. Adapun B benar-benar mengerti hubungan antara dua rasio.

Jelas disini walaupun siswa pada tahap operasi konkret telah mengerti relasi, hanya siswa pada tahap operasi formal sajalah yang mengerti dan dapat mneyelesaikan jenis operasi yang sulit yaitu dengan menghubungkan relasi relasi ke dalam hukum hukum.

Untuk memperjelas perbedaan perbedaan yang ada antara tahap tahap berpikir talinya, bagaimana membuat beban lebih berat, bagaimana melepaskan beban dari bernacam macam ketinggian dan bagaimana mendorongnya dengan berbagai gaya. Anak diminta untuk menentukan yang mana dari empat faktor, tersendiri atau dengan kombinasi mempengaruhi kecepatan mengayunnya pendukum tersebut.

Pada anak usia 6 tahun (A), percobaan yang dilakukan tidak menentu. Sulit untuk dianalisis. Sedabgkan B yang berusia 10 tahun mengatakan: "lebih pendek talinya, bersyun lebih cepat."kemudian ia mencoba membuat yang berbeda dengan panjang tali yang sama. Kemudia B mengatakan: "Pemberat yang terbesar beryun lebih cepat, pemberat lebih kecil berayun lebih lambat. "Adapun C yang ysia 15 tahun sebelum ia mengerjakan tugasnya, ia berpikir sebentar. Ia mengayun pemberat tertentu dengan panjang tali tertentu(p) dan kemudian penjang tali diperpendek (Pi). Akhirnya C menyimpulkan:" Panjang tali merupakan faktornya. Tali itulah yang membuat ayunan cepat atau lambat".

A melakukan percobaan tanpa pola dan khusus dan tentu saja tidak bisa mengambil kesimpulan apa apa. Sedang B menunjukkan teknik yang lebih baik tetapi cara pendekatannya kurang tepat. Karena itu percobaanya tidak tersusun secara sistematik sehingga kesimpulan yang diperoleh kurang memuaskan. Adapun C sebelum melaksanakan percobaan, ia merencanakan suatu cara yang meliputi segala kemungkinan kombinasi faktor faktor yang menunjukkan bahwa kemungkinan kemungkinan tersebut sudah di duga sebelumnya. Siswa mengetahui perlunya menetapkan satu faktor sedang faktor lainnya berubah ubah. Anak mampu menggunakan kesimpulannya untuk membuat generalisasi tentang pendulum tersebut.

Tahap tahap berpikir yang dikemukakan ileh Piaget itu pasti dan spontan, namun unsur yang dinyatakan itu sangat fleksibel, terutama selama transisi dari periode ke periode berikutnya. Umur kronologi itu dapat saling tindih bergantung kepada individu. Perlu diingat, janganlah memaksa siswa untuk terlalu cepat berpindag tahap berpikirnya. Artinya, kalau musalnya siswa dalam tahap operasi konkret jangan dipaksa/dipercepat untuk segera pindah tahap operasi formal. Percepatan yang demikian itu, menurut Piaget tidak ada gunanya. Penelitian menunjukkan bahwa percepatan" itu sangat berhasil bila tahap berpikirnya siiswa dalam masa transisi yaitu dekat dengan tahap berpikir berikutnya.

Dari uraian di atas jelas kiranya bahwa siswa itu bukanlah tiruan orang dewasa. Siswa mempunyai kemampuan intelektual yang sangat berbeda dengan kemampuan orang dewasa. Dengan demikian teori Piaget tersebut mempunyai implikasi terhadap pengajaran matematika di sekolah.

Uraiaan berikut ini adalah berhubungan dengan pengalaman belajar siswa dalam menyiapkan kesiapan intelektual siswa.

Di dalam matematika bila konsep A dan konsep B mendasari konsep C, maka konsep C tidak mungkin dipelajari sebelum konsep A dan B dipelajari terlebih dahulu. Demikian pula konsep D baru dapat dipelajari bila konsep C sudah dipahami, demikian seterusnya.

Ini berarti pengalaman belajar yang lalu memegang peranan untuk memahami konsep konsep baru. Jelas bahwa pengalaman belajar matematika di SLTP misalnya akan sangat berpengaruh terhadap kemampuan penguasaan bahan matematika di SMU.

Sebagai contoh bagaimana implikasi teori perkembangan intelektual dan pengalaman belajar terhadap belajar mengajat dapat dikemukakan sebagai berikut.

Seorang siswa akan mampu memahami konsep perkalian apabila konsep penjumlahan (sebagai pengalaman belajar yang lampau) sudah terkuasai oleh siswa tersebut. Dengan titik tolak perkembaangan mental , siswa dapat mempelajari perkalian pada usia kira kira 7 tahun. Siswa sudah mengalikan dua bilangan (kecil) sebagaimana mereka menjumlahkan dua bilangan tersebut karena perkalian itu memang konsepnya sarat dengan penjumlahan. Misalnya, jika 4+4=8, maka berapa 2 emapatan? Jika asumsi tadi benar, perkalian sebagai abstraksi atau simbol seyogyanyadiintroduksikan berurutan setelah penjumlahann kira kirauntuk anak usia 7 tahun. Namun perlu pula diketahui, beberapa orang siswa telah siap menerima konsep penjumlahan dan perkalian pada usia 6 tahun yang lain tidak dapat memahaminya sampai usia 7 ½ tahun. Di dalam keadaan di mana siswa (7 ½ tahun) memang sulit menerima pengertian perkalian, seyogyanya topik ini ditunda, misalnya sampai usia 8 tahun.

Marilah kita kembali kepada masalah " berapa 2 empatan itu". Untuk menjawab pertntaan itu, siswa dihadapkan 8 kelereng, kemudian kelereng itu dikelompokkan menjadi dua himpunan yang sama. Berapa banyaknya kelereng untuk setiap himpunan?

oooooooo=?

Jika masalah itu dapat dikerjakan dengan benar, berikutnya dapat ditanyakan:" Berapa banyaknya dua himpunan empatan itu?

oooo oooo=?

Perlu ditekaknkan disini, simbol hanya dapat disajikan setelah hubungan invers antara perkalian dan pembagian dipahami melalui benda benda konkret. Banyak masalah masalah semacam dapat dikerjakan pada tingalt benda benda konkret dengan menggabungkan dan memisahkan himpunan obyek obyek. Apakah siswa itu memiliki konsep reversibilitas sebagai ciri dari tahap berpikir operasional? Tugas yang diberikan kepada siswa hendaknya memperhatikan kemampuan siswa mengenai konsep reversibilitas itu. Janganlah mereka diberi tugas tentang opersi pembagian setelah siswa itu mendapatkan konsep perkalian sebelum ia dapat mengerjakannya. Misalnya janganlah tergesa gesa memberikan jika 5×3= 15, maka 5×?=15 dan ?×3=15. Demikian juga 15:3=? Dan 15:5=? Namun tunjukkan dulu dengan benda benda konkret, misalnya himpunan kelereng sebagai berikut.

1 ooo
2 ooo
3 ooo = 5×3=15
4 ooo
5 ooo

Demikian juga untuk persamaan 15:5=? Suatu himpunan dari 15 obyek dibagi menjadi 5 himpunan yang sama, berapa obyek di dalam setiap himpunan?

ooooooooooooooo
1 ooo
2 ooo
3 ooo atau ? ? ? ? ?
4 ooo 1 2 3 4 5
5 ooo

Contoh di atas menunjukkan bagaimana seyogyanya kita menyajikan konsep-konsep matematika (dalam hal ini perkalian danpembagian) kepada siswa yang kemampuan berpikirnya di dalam tahap operasi konkret. Pendekatan benda benda empirik akan mempermudah mereka memahami konsep konsep matematika. Bahkan Ausubel (1971 menekankan bahwa sekalipun seirang mahasiswa (dslam tahap operasi formal), bila ia menghadapi suatu konsep yang bebar benar baru, ia mula mula (biasanya) cenderung ke pendekatan operasi konkret. Tentu saja sini Ausubel tidak mengelak, bahwa seorang yang sudah didalam tahap operasi formal akan jauh lebih mudah memahami konsep tersebut daripada anak yang masih di dalam tahap operasi konkret.

Dari uraian sejauh ini, di dalam proses belajar mengajar matematika perlu kiranya guru sekaligus memperhatikan perkembangan intelek dan pengalaman belajar anak yang lampau untuk membantu pengembangan kesiapan anak dalam menerima pengalaman pengalaman belajar berikutnya.

B. Berpikir Matematika

Untuk memahami hakekat matematika yang dikemukakan di bab 5, marilah kita lanjutkan pembahasannya sehingga dapat membayangkan bagaimanaberpikir matematik tersebut.

Matematika seringkali dilukiskan sebagai suatu kumpulan sistem matematika, yang setiap dari sistem sistem itu mempunyai struktur tersendiri yang sifstnya bersifat deduktif.

Suatu sistem deduktif dengan memilih beberapa unsur yang tidak didefinisikan (undefined terms) yang disebut unsur unsur primitif. Unsur unsur tersebut diperlukan sebagai dasar komunikasi. Misalnya dalam geometri, unsur "titik"meruapakan suatu unsur yang tidak didefinisikan untuk semua pernyataaan yang melibatkan titik titik. Dengan demikian aksioma seperti"Dua titik menentukan satu garis" memberikan karakteristik unsur unsur yang tidak didefinisikan tersebut.

Adapun aksioma merupakan asumsi asumsi dasar tertentu. Aksioma aksioma ini dipilih sebagai kesepakatan yang biasanya nampak sesi dengan pengalaman pengalaman kita. Aksioma aksioma tersrbut merupakan pernyataan pernyataan yang menunjukkan hubungan dasar di antara unsur unsur pokok di dalam sistem tersebut. Akhirnya diperoleh teorer teorema tertentu yang dibuktikan dengan sederetan pernyataan pernyataan. Setiap pernyataan itu bisa berupa definisi, aksioma atau teori yang telah dibuktikan. Misalnya pada salah satu sistem matematika dasar yaitu teori himpunan. Di dalam sistem ini unsur unsur yangntidak didefinisikan adalah himpunan dan "elemen". Dengan unsur unsur tersebut operasi "gabungan" (union) dan "interseksi" didefinisikan. Kemudian nyata bahwa operasi operasi "gabungan" dan "interseksi" memenuhi sifat sifat komutatif dan asosiatatif. Selanjutnya teorema teorema tentang himpunan dibuktikan, definisi definisi atau sifat tadi. Pembuktian itu menggunakan penalaran yang logik. Penalaran yang logik ini menggunakan pernyataan yang mengandung "jika-maka". Demikianlah bentuk bukti yang dipergunakan di dalam matematika dari bukti tidak formal untuk SD ke bentuk formal untuk matematika lanjut.[10]

Dari uraian di atas secara singkat dapatlah dikatakan bahwa hakekat matematika berkenan dengan ide ide, struktur dan hubungan hubungannya yang diatur menurut urutan yang logik. Jadi matematika berkenan dengan konsep

---

[10] Seputro, T.M.H.T. *Pengantar Dasar Matematika, Logika dan Teori Himpunan*. Jakarta: 1992. Erlangga.

konsep abstrak. Suatu kebenaran matematik dikembangkan berdasar alasan logik. Namun mencari analogi, dan sebagaimana yang telah dikemukakan di atas, akhirnya merumuskan teorema teorema yang dimulai dari asumsi asumsi dan unsur unsur yang tidak didefinisikan. Ini benar benar merupakan aktivitas mental.

Apabila matematika dipandang sebagai suatu struktur dari hubungan hubungan maka simbol simbol formal diperlukan untuk menyertai himpunan benda benda atau hal hal. Simbol simbol ini sangat penting di dalam membantu memanipulasi aturan aturan yang beroperasi di dalam struktur struktur. Pemahaman terhadap struktur struktur dan proses simbolisasi masing masing merupakan stimulus yang satu terhadap yang lain. Simbolisasi memberikan fasilitas komunikasi dan dari komunikasi ini kita mendapatkan sejumlah besar informasi. Dari informasi informasi ini kita dapat membentuk konsep konsep baru. Dengan demikian simbol simbol bermanfaat untuk kehematan intelektual, sebab simbol simbol itu dapat digunakan mengkomunikasikan ide ide secara efiensi dan efektif. Itu berarti bahwa di belakang setiap simbol ada suatu ide. Agar supaya simbol itu berarti, kita hatus memahami ide yang terkandung di dalam simbol tersebut. Karena itu, hal terpenting adalah bahwa ide harus dipahami sebelum ide itu sendiri disimbolkan. Bila prosedur ini tidak diikuti, penggunaan simbol mungkin sangat membahayakan. Misalnya seorang siswa ingat rumus rumus atau aturan aturan, karenanya ia dapat memanipulasi simbol simbol. Jika aturan aturan ini tidak diikuti pengertian yang mendasari ide ide tersebut, maka kerja yang dilakukan itu bukanlah jenis aktivitas berpikir, melainkan suatu latihan yang merupakan hafalan belaka. Betapa perlunya pandangan tersebut bila kita ingat bahwa ada korespondensi 1-1 antara unsur unsur dari suatu situasi dan unsur unsur dari struktur struktur matematika. Pada mulanya, situasi diterjemahkan simbol simbol pada akhirnya, simbol simbol itu diterjemahkan kembali ke situasi. Karena itu, belajar matematika sebenarnya untuk mendapatkan pengertian hubungan hubungan dan simbol simbol dan kemudian mengaplikasikan konsep konsep yang dihasilkan ke situasi yang nyata.

Menurut Dienes (1963), berpikir matematis berkenan dengan penyeleksian himpunan himpunan unsur matematika, dan himpunan himpunan ini menjadi unsur unsur dari himpunan himpunan baru membentuk himpunan himpunan baru yang lebih rumit dan seterusnya. Dengan perkataan lain, berpikir matematik berhubungan dengan struktur struktur super yang secara tetap terbentuk dari apa yang sudah terbentuk sebelumnya. Karena itu berpikir matematis berarti merumuskan suatu himpunan langsung dari unsur unsur. Proses demikian ini disebut abstraksi. Akhirnya dari himpunan yang terbentuk itu dapat ditentukan apakah suatu unsur menjadi milik suatu himpunan ataukah tidak. Dengan perkataan lain, abstraksi berjalan dari unsur unsur ke himpunan. Proses ini merupakan suatu konsep yang tidak dapat dibalik secara psikologik. Ini berarti setelah membentuk himpunan itu, kita mungkin kembali ke unsur

unsur itu tetapi unsur unsur itu tidak akan pernah tepat seperti semula. Misalnya kita mengadakan penyeleksian terhadap unsur unsur matematikan tertentu katakan saja bahwa di dalam suatu himpunan yang tidak kosong dengan operasi biner* kita ambil:

1. Operasi * adalah tertutup;
2. Operasi * adalah asosiatif;
3. Terdapat unsur identitas;
4. Terdapat unsur invers untuk setiap unsur dalam himpunan tadi.

Unsur unsur matematika di atas kita himpun menjadi suatu himpunan yang disebut suatu grup. Disini kita merumuskan suatu himpunan (yang kita sebut grup) langsung dari unsur unsur matematika. Proses yang demikian yang kita sebut tadi dengan abstraksi. Dari himpunan itu kita dapat saja ke unsur matematika yang membentuk himpunan tadi misalnya unsur operasi * adalah tertutup. Namun unsur ini (setelah menjadi salah satu unsur matematika dari grup), sifanya sudah tidak tepat sama dengan saat akan membentuk grup. Pada saat operasi * adalah tertutup akan membentuk grup, unsur itu benar benar tidak ada kaitannya dengan unsur unsur matematika lainnya dari grup itu. Namun setelah operasi * adalah tertutup menjadi sallah satu unsur matematika dari grup, maka unsur itu sudah terkait dengam unsur unsur matematika lainnya dari grup itu.

Proses generalisasi juga merupakan bagian yang esensial dari berpikir matematik. Proses generalisasi dapat didefinisikan sebagai sebarang himpunan X yang dapat diperluas menjadi himpunan yang lebih luas atau X digeneralisasikan ke Y. Sebagi contoh, proses mendapatkan rumus rumus matematika adalah merupakan proses generalisasi. Proses generalisasi ini dapat dibalik, artinya sangat mungkin dari struktur umum kembali ke struktur khusus.

Bila generalisasi tercapai, suatu simbol diperlukan untuk memastikan suatu konsep tertentu yang telah tercapai tadi. Berdasarkan prinsip ini, jelas kiranya bahwa konsep tertentu yang telah tercapai tadi. Berdasarkan prinsip ini, jelas kiranya bahwa abstraksi berbeda dengan generalisasi. Abstraksi merupakan aspek intensif dari berpikir matematik dan generalisasi merupakan aspek ekstensif dari berpikir matematik.

Selanjutnya sistem matematika adalah konsisten terhadap dirinya dan bebas dari kontradiksi terhadap dirinya. Pendekatan logik yang khas yang dipergunaka dalam matematika adalah bahwa kita mulai dengan definisi definisi dan aksioma aksioma dan kemudian menyimpulkan suatu teorema yang dinyatakan sebagai suatu pernyataan yang dapat dibuktikan dengan menggunakan penalaran deduktif dan kumpulan definisi definisi serta aksioma aksioma yang telah kita sepakati. Jadi kita mulai dengan suatu daftar unsur unsur yang tidak didefinisikan kemudian merumuskan aturan aturan untuk menggabungkan unsur unsur yang tidak didefinisikan tadi, dan kemudian mengaplikasikan aturan aturan itu.

Jadi, aksiomatisasi merupakan suatu alat yang amat ampuh untuk penyelidikan. Siswa belajar bahwa kesimpulan yang diperoleh dengan deduksi mempunyai suatu sifat yang relatif. Anak belajar mencari asumsi yang di dasari argumentasi dan ini merupakan suatu pengalaman untuk berpikir kritis dan merupakan salah satu alasan mengapa matematika dikatakan dapat mengembangkan keterbukaan, pandangan yang kritis dan fleksibelitas dalam berpikir. Misalnya bagi siswa SMU yang telah memasuki tahap berpikir formal telah mampu menggenaralisasikan dan harus mampu mengerjakan operasi operasi logik dengan menggunakan simbol simbol abstrak. Siswa pada tahap ini telah mampu mengerjakan deduksi dengan betul. Tetapi suatu faktor yang perlu diperhatikan adalah bahwa setiap aksioma, definisi atau konsep matematika harus dimengerti dengan menyajikan pertama tama dengan contoh contoh konkret yang melibatkan pengalaman belajar yang terdahulu yang diketahui dengan baik oleh siswa. Jadi walaupun anak sudah memasuki tahap operasi formal, materi yang disajikan kepada siswa haruslah dari hal hal yang telah diketahui ke hal hal yang tidak diketahui sebab siswa akan jauh lebih mudah memahami hal hal yang baru melalui hal hal yang telah dikenal dengan baik baik. Suatu konsep baru tidak sekedar disajikan begitu saja dengan suatu definisi yang tepat kepada siswa siswa itu. Strategi yang disarankan di atas perlu diperhatikan, tetapi strategi tersebut hendaknya untuk persiapan menuju ke tujuan utama yaitu definisi yang tepat, jadi bukan berarti menggantikan kedudukan definisi itu. Dengan demikian, seorang guru haruslah berhati hati bila memperkenalkan konsep matematika yang baru sebagai mana para ahli psikologi pendidikan matematika, misalnya Collis (1967), memperingatkan, sekali struktur kognitif seorang anak sudah terbentuk, maka sukarlah untuk diubah.

Marilah kita mencoba mengaplikasikan strategi di atas, yaitu untuk memperkenalkan konsep fungsi berjalan dari hal konkret yang telah dikenal berdasarkan pengalaman siswa menuju ke definisi fungsi. Perlu dicatat dalam hal ini, konkret di sini termasuk tidak hanya benda benda empirik, tetapi juga semua abstraksi yang telah dikenal dan dipahami siswa

Ada dua himpunan, sebut X =himpunan siswa dan Y = himpunan bapak panah menunjukkan unsur unsur di X berelasi dengan unsur unsur di Y. Relasi dalam hal ini adalah hubungan antar siswa siswa dengan bapak

Ada dua himpunan, sebut X =himpunan siswa dan Y = himpunan bapak panah menunjukkan unsur unsur di X berelasi dengan unsur unsur di Y. Relasi dalam hal ini adalah hubungan antar siswa siswa dengan bapak

Siswa “1” mempunyai bapak “a”
Siswa “ 3” dan “4” mempunyai bapak “c”
Siswa “2” mempunyai bapak …
Siswa “5” dan “7” mempunyai bapak…
Siswa… mempunyai bapak “e”
Siswa….mempunyai bapak “f”
Apakah setiap siswa mempunyai seorang bapak?

Apakah seorang siswa mempunyai lebih dari satu bapak?
Apakah setiap bapak mempunyai seorang anak?
Hubungan antara siswa siswa dan bapak bapak disebut fungsi dan siswa ke bapak bapak. Jika f menunjukkan fungsi itu, situasi di atas itu (Gambar 6.9) dapat ditulis sebagai berikut:
F : X—Y
Notasi matematika semacam itu merupakan penghematan dan proses komunikasi dan pencatatan. Langkah berikutnya, siswa akan mampu menunjukkan hubungan dari bapak bapak ke siswa siswa yang bukan fungsi. Setelah siswa itu mempunyai banyak pengalaman contoh contoh lain yang menunjukkan fungsi atau bukan fungsi, ia harus mampu memberikan definisi fungsi dengan menggunakan bahasanya sendiri. Ia akan mencoba dengan caranya sendiri untuk menfdefinisikan fungsi. Usaha merumuskan ide fungsi dengan, kata katanya sendiri itu akan mematangkan pikirannya. Hal ini merupakan suatu proses kreatif. Strategi demikian itu memasukkan proses simbolisasi, abstraksi dengan generalisasi. Walaupun demikian, penyajiannya didasarkan atas pengalaman siswa sendiri. Langkah berikutnya, beberapa contoh untuk latihan harus diberikan kepada siswa; setiap contoh hatus disertai pertanyaan pertanyaan, misalnya situasi yang dihadapkan kepada siswa itu merupakan fungsi atau bukan fungsi. Langkah berikutnya lagi, siswa harus mampu memberikan contoh fungsi yang lain yang berbeda dengan contoh contoh yang diberikan gurunya. Bila guru itu yakin bahwa siswa siswanya telah mengerti konsep fungsi itu, maka barulah guru memberikan definisi fungsi secara formal dan memperkenankan siswanya bekerja dengan definisi formal yang telah diberikan itu. Bila cara penanaman suatu konsep matematika dijalankan seperti startegi di atas, diharapkan para siswa tidak mempunyai kesulitan untuk memahaminya. Bila konsep fungsi ini sudah dapat ditangkap dan dipahami siswa, maka konsep konsep lainnya yang menyangkut fungsi, misalnya fungsi invers fungsi komposit dan sebagainya akan mudah diserap siswa.

Demikian penjelasan di atas bermaksud untuk menunjukkan bagaimana gurru memperkenalkan suatu konsep baru dengan menggunakan contoh contoh yang didasarkan pengalaman siswa sendiri sebelum menuju ke tahap formal sekalipun siswa misalnya telah mampu secara penih berpikir formal. Ini bukan berarti bahwa siswa harus tetap bergantung kepada pengalaman pengalaman konkret, tetapi semata mata secara di atas hanyalah suatu jalan untuk bergerak ke tahap koqnitif yang lebih abstrak. Siswa bergerak maju ke berpikir formaldan dan proses simbolisasi, abstraksi serta generalisasi menjadi jelas bagi siswa.

Telah dikemukakan di halaman 78 bahwa kebenaran matematika dikembangkan berdasar penalaran logik. Modal terbaik untuk berpikir formal yaitu dengan memanfaatkan logika proposisi.

Untuk memahami pembuktian di dalam matematika kita lihat kembali ke bab 5 (terutama untuk siswa yang sudah berada di tahap berpikir operasi formal), penyataan yang mengandung “ jika-maka” sangat esensial, sebab teorema teorena biasanya dinyatakan dalam bentuk " jika p, maka q " atau "p berakibat q " dan ditulis p-q. Seperti yang sudah kita ketahui, p disebut hipotesis, q disebut kesimpulan.

Pola dasar untuk suatu argument logik berbentuk sebagai berikut. Jika p-q dan q – r , maka p – r. Sifat ini disebut sifat transitif dari implikasi. Misalnya pola tersebut kita gunakan di aljabat berikut.

Kita dapat juga membuktikan "jika x = 8 maka 2x + 7 = 23". Apabila p – q dan q – p maka kita tulis p – q. Kondisi yang demikian kita baca "jika dan hanya jika". Jadi masalah di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:
"2x + 7 = 23 jika dan hanya jika x = 8 "
Untuk menyatakan kontra positif dari p – q ialah q – p dan (p – q) – (-q z -p). Jadi untuk jika 2x + 7 = 23 maka x = 8 berarti jika x 8 maka 2x + 7 = 23.

Agar supaya kesimpulan itu merupakan suatu rangkaian pernyataan berikut yang benar, pernyataan pernyataan yang digunakan harus benar. Karena itu, penyataan pernyataan yang digunakan biasanya adalah definisi definisi, aksioma aksioma atau teorema teorema yang telah dibuktikan. Demikan sekedar contoh secara singkat dan sederhana penggunaan logika proposisi didalam matematika.

Sampai uraian sejauh ini dapatlah kita katakan, bahwa setelah siswa mempunyai konsep matematika atau rumus matematika dengan cara tidak formal atau metode induktif, kemudian siswa perlu melanjutkan langkahnya ke cara yang formal atau metode deduktif. Demgan menggunakan " jika-maka" untuk menduga apa yang bakal terjadi. Kemudian mencari kesimpulan dengan penuh keyakinan apakah dugaanya tadi bertentangan ataukah tidak bertentangan. Metode ini adalah deduktif yang ketat. Isi matematika tidak lain terorganisasi semacam ini. Perlu diingat, deduktif yang ketat. Isi hanyalah hasil terakhir dari kerja matematika. Penyajian secara deduktif ketat yang langsung diketengahkan kepada siswa sering kali tidak bermanfaat dan tidak pernah dikenhendaki di dalam ilmu mendidik. Karena itu belum cara deduktif disajikan kepada siswa, langkah pertama yang disajikan kepada siswa adalah menggunakan metode induktif yaitu melalui pengalaman pengalaman empirik. Sekali lagi metode induktof adalah sekedar suatu cara untuk menuju ke berpikir deduktif. Dengan kata lain metode induktif dan deduktif dilaksanakan sebagai dua hal yang esensial walaupun kedua metode itu saling berlawanan.

C. Teori Mengajar

Mengajar dilukiskan sebagai suatu proses interaksi antara guru dan siswa di mana guru mengharapkan siswanya dapat menguasai pengetahuan, keterampilan dan sikap yang benar benar dipilih oleh guru, pengetahuan, keterampilan dan sikap yang dipilih guru itu hendaknya relevan dengan tujuan pelajaran yang diberikan dan disesuaikan dengan strukur kognitif yang dimilki siswa. Dengan demikian mengajar adalah untuk melihat bagaimana proses belajar berjalam. Tidak hanya sekedar mengatakan dan memerintahkan atau tidak hanya membiarkan siswa belajar sendiri. Mengajar sebenarnya memberi kesempatan kepada yang diajar untuk mencari, bertanya, menebak, menalar dan bahkan mendebat.

Tahun pertama dari suatu jenis sekolah (SLIP dan SMU) merupakan tahun genting bagi siswa yang belajar natematika. Tahun pertama ini merupakan pengalaman sebagai suatu langkah untuk belajar matematika lebih lanjut. Sikap siswa selanjutnya terhadap matematika, umunya ditentukan pengalaman pengalaman pertamanya dalam bidang matematika tersebut. Karena itu, perhatian yang serius haruslah diberikan bagaimana memgembangkan suatu teori mengajar matematika. Suatu kondisi yang perlu untuk suatu pengembangan teori mengajar matematika adalah bahwa teori mengajar tersebut haruslah didasarkan kepada bagaimana siswa dapat belajar secara efektif tanpa mencoba memaksa siswa di luar tahap kesiapan intelektualnya.

D. Teori Belajar

Sampai sejauh ini kita udah sering menggunakann istilah"belajar", namun kita belum memberikanpembatasan apa belajar itu. Memang sebenarnya sangat sulit memberikan arti " belajar" itu. Karena belajar itu menyangkut psikologi kognitif yang dalam dan luas yang tidak sepatutnya dibicaralan dalam buku ini. Walaupun demikian, kita berusaha sekedar memberikan pembatas sederhana sehingga mempermudah uraian uraian berikutnya. " belajar merupakan suatu proses aktif dalam memperoleh pengalaman/ pengetahuan baru sehingga menyebabkan perubahan tingkah laku. Misalnya, setelah belajar matemarika siswa itu mampu mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan matematikanya dimana sebelumnya ia tidal dapat melaksanakannya.

Dihalalam 74 telah dinnyatakan oleh Dienes bahwa belajar matematika melibatkan suatu atuktur hirarki dari konsep lebih tinggi yang dibentuk atasdasar apa yang telah terbentuk sebelumnya. Jadi, asumsi ini berarti bahwa konsep konsep matematika tinggat lebih tinggi tidak mungkin bila prasyarat yang mendahului konsep konsep iti sebwlum dipelajari. Sebenarnya Dienes tidak sendirian didalam menggunakan sebuah model hirarki tersebut. Gagne dan Ausubel pun menggunakan model tersebut. Bagi, Gagne tingkatan urutan itu adalah dari konsep konsep dan prinsip prinsip menuju pemecahan masalah. Pemecahan masalah ini oleh Gagne dipandang sebagai tahap belajar tingkat tinggi. TetapiAusubel mulai dengankonsep konsep yqng paling inklusif dan kemudian memecahkan proses belajar ke dalam konsep konsep belajar yang kurang inklusif. Komsekuensinya hirarkinya Gagne mulai dengan prasyarat sederhana dan berjalan menuju ke tahap yang kompleks sebagaimana yang dikehendaki. Ausubel berpendapat sama sama hirarki tetapi arahnya berbeda yaitu dari kerangka global ke suatu konsep konsep bagian khusus.

Atas dasar struktur kognitif, bahan pelajaran harus disusun menurut urut urutan tingkat kesuksesan yang logik dan berdasarkan atas pengalaman pengalaman belajar yang terdahulu.

Menurut Ausubel (1971) bahan pelajaran yang dipelajari haruslah" bernakna" (meaningful) artinya bahan pelajaran itu cocok dengan kemampuan siswa dan harus relevan dengan struktur kognitif yabg dimiliki siswa. Dengan perkataan lain, pelajaran baru haruslah dikaitkan dengan konsep konsep yang sudah ada demikian hingga konsep konsep benar benar terserap. Dengan demikian intelektual emosional siswa terlibat dalam kegiatan belajar mengajar.

Jelas pula kiranya, matematika sebagai suatu pengetahuan yang tersusun menurut struktur, disajikan kepada siswa dengan cara yang dapat membawa ke belajar yang bermakna seperti pengertian Ausubel tadi belajar yang bernakna adalah bertentangan dengam belajar dengan menghafal. Belajar dengan menghafal berarti bahwa belajar dikerjakan dengan cara mekanis, sekedar suatu latihan mengingat tanpa suatu pengertian. Jika matematika dipelajari dengan hafalan, maka siswa akan menjumpai kesulitan, sebab bahan pelajaran yang diperoleh dengan hafalan belum" siap pakai" untuk menyelesaikan masalah bahkan juga dalam siatuasi situasi yang mirip dengan bahan yang dipelajari itu.

Contoh penanaman konsep fungsi yang telah dipaparkan halaman 83, mendemonstrasikan belajar yang bermakna, sebab konsep fungsi yang disajikan terletak di dalam kurun kemampuan siswa dan dikaitkan dwngan adanya struktur dalm struktur kognitifnya

Belajar" menemukan" (discovery learning) meruapakn proses belajar yang memungkinkan siswa menemukan untuk dirinya melalui suatu rangkaian pengalaman pengalaman konkret. Bahlan yang dipelajari tidak disajikan di dalam bentuk final siswa diwajibkan melaksanakan beberapa aktivitas mental sebelum itu diterima ke dalam struktur kognitifnya.

Merupakan suatu dorongan bagi seorang manusia bahwa ia suka bekerja sendiri bila mana mungkin. Karena itu, belajar haruslah aktif, tidak sekedar pasif saja menerima apa yang diberikan. Jila siswa aktof melibatkan dirinya di dalam menemukan suatu prinsip dasar, siswa itu alan mengerti konsep tersebut lebih baik, ingat lebih lama dan akan mampu menggunakan konsep tersebut di konteks yang lain. Lebih lanjut siswa akan menunjukkan kegembiraan dan minat dan ini akan membawa siswa untuk ingin mencari hubingan hubungannya. Salah satu keuntungan utama dari metode penemuan tersebut adalah bahwa siswa mulai berpikir dan belajar bagaimana belajar itu.

Untuk mendukung konteks tersebut di atas, Dienes (1963) melaksanakan percobaan percobaan. Dienes menterjenahkan ide ide matematika kedalam " permainan" siswa siswa menguasai ide ide matematika melalui permainan. Dienes percaya bahwa cara itu akan mengembangkan pengertian larena belajar dengan cara semacam itu berjalan secara wajar. Fienes mendasarkan metodenya atas empat prinsip empat:

1. **Prinsip dinamis** di dalam bentuk yang sederhana, berarti proses pemahaman konsep berjalan dari pengalaman ke penetapan klasifikasi
2. **Prinsip kontruktivitas** berarti konstruksi harua mengambil bagian sebelum analisis dapat berfungsi secara efektif. Mengkontrusi setiap ide

matematika aras konsep yang menghendaki sifat sifat tertentu adalah konstruktif. Atribut atribut timbul dari pembentukan konsep dan pertanyaan pertanyaan yang diajukan mengenai atribut atribut ini setelah keteraturannya dikembangkan. Ini merupakan aktivitas anlitik yang esensial.

3. **Prinsip variabelitas** persepsi (disebut juga prinsip yang representasi yang bermacam macam) berarti bahwa untuk mencapai suatu abstraksi yang efektif dari struktur matematika, haruslah diakomodasikan sebanyak mungkin situasi situasi yang berbeda untuk struktur atau konsep yang sama. Dengan perkataan lain, untuk memahami konsep konsep atau struktur struktur yang sama harus disajikan bermacam macam persepsi. Aplikasi prinsip ini menjamin abstraksi secaa efektif.
4. **Prinsip variabelitas matematik** berati bahwa setiap konsep matematika menyertakan bila generalisasi variavel yang esensial yang perlu dibuat bermacam macam bila generalisasi dari konsep matematika itu telah tercapai. Aplikasi dari prinsip ini menjamin generalisasi secara efektif.

Agar supaya berpikir matematik itu efektif, abstraksi dan generalisasi itu harus menjadi perhatian utama. Abstraksi dan generalisasi itu merupakan bagian berpikir matematik yang bermanfaat karena keduanya menyebabkan matematika dapat diaplikasikan ke situasi nyata, baik yang belum diketahui maupun yang tidak terduga.

Telah dikemukan berulang kali, penyajian konsep atau ide matematika yang baru harus didasarkan pada pengalaman yang terdahulu ke siswa akan ingat konsep konsep baru lebih baik bila konsep baru itu bertentangan dengan konsep yang telah dikenal sebelumnya. Pandangan ini kita pegang dan prinsip prinsip belajar Dienes akan kita aplikasikan.

Sebagai contoh, pembentukan konsep fungsi sebagaimana yang telah kita bicarakan dapat dipandang sebagai prinsip dinamis secara karena belajar, berjalan dari pengalaman menuju ke pengkatagorisasian, yaitu pembedaanantara fungsi dan bukan fungsi. Contoh tersebut merupakan prinsip konstruktivitas sebab kontruksi konsep fungsi mendahului analisis. Siswa mampu menentukan apakah relasi itu merupakan suatu fungsi atau bukan fungsi setelah ia mengkap definisi. Jadi disini analisis berkembang setahap setelah konstruksi.

Untuk pengerjaan, prinsip representasi yang bermacam macam dapat dipergunakan dalam memahami konsep konsep yang sama, tetapi dengan konteks yang berbeda beda. Pada waktu yang sama, perbedaan yang mencolok harus disajikan kepada siswa.

Dengan menyajikan pengalaman pengalaman yang beranekan ragam untuk suatu konsep (termasuk juga perbedaan perbedaan) kepada siswa pemahaman terhadap konsep fungsi tadi dapat dijamin. Pemahar konsep tersebut dapat dicek apakah siswa itu mampu memberikan sendttjl contoh contoh ataikah tidak. Strategi yang telah dikemukakan itu didasarkan pada prinsip variabelitas persepsi karena abstraksi fungsi dicapai lalui akomodasi, penyajian dari situasi situasi yang berbeda dalam satu konsep fungsi. Itu juga didasarkan atas prinsip variabelitas matematika karena konsep fungsi menyertakan sejumlah kemungkinan variabel. Cara penyampaian yang telah dipaparkan di atas dapat diharapkan bahwa konsep konsep matematika dapat dimengerti oleh para siswa. Barangkali cara penyampaian semacam itu mengurangi perasaan bosan di dalam belajar matematika.

Kembali kepada belajar “ menemukan” sebagimana yang telah dikemukakan metode ini memungkinkan siswa menemukan konsep konsep atau struktur matematik secara aktof. Tetapi perlu diingat bahwa mengajar konsep konsep matematika dengan metode penemuan secara tak yerbatas itu sulit dilaksanakan karena salah satu halangan ialah waktu yang terbatas. Ausubel (1971) menambahkan bahwa metode penemuan itu aplikasinya terbatas dan bahkan menbuang biang waktu saja. Sebagai jalan keluar, tidak seluruh konsep, dan struktur matematika harus diketemukan siswa, melainkan hal hal yang perlu diketemukan dan memang ada kemungkinan untuk diletemukan oleh siswa. Menurut Ausubel pemahaman masalah yang cocok adalah lebih bermanfaat dan merupakan strategi yang efisien di dalam mengajar matwmatika. Kekuatan kekuatan prises pemecahan masalah terletak di dalam kemampuan siswa, mengambil bagian secara aktif asalkan masaalh yang diaajikan itu bwrmakna

Pemecahan masalah didefinsikan oleh Polya (1975) sebagai usaha mencari jalan keluar dari suatu kesulitan, mencapai suatu tujuan yang tidak dengan segera dapat dicapai. Karena itu pemecahan masalah merupakan suatu tingkat aktivitas intelektual yang tinggi. Jenis belajar ini merupakan suatu proses psikologi yang melibatkan tidak hanya sekedar aplikasi dalil dalil atau teorema teorema yang dipelajari.

Sekali lagi ditekankan, pemecahan masalah harus didasarkan atas adannya struktur kognitif yang dimiliki siswa. Bila tidak didasarkan atas struktur kognitif, siswa mempunyai kemungkinan kecil untuk dapat menyelsaikan masalah yang disajikan itu.

Dengan perkataan lain, siswa akan mampu menangkap pengetahuan baru untuk menyelesaikan masalah hanya jika siswa itu benar benar mengetahui prinsip prinsip yang dipelajari sebelumnya. Temtu saja pertanyaan ini mengandung pengertian tentang abstraksi dan generalisasi matematika. Siswa mengorganisasikan kembali pengalaman pengalaman yang lalu yang mana yang relevan dengan masalah yang dihadapi itu. Sebagai konsekuensinya pengajaran yang efektif harus mengubah bentuk permasalahan.ke dalam situasi yang suadah dikenal sehingga ssiwa akan mampu menanggapi masalah yang dijadapi itu tanpa ragu ragu lagi. Jadi nampaknya bimbingan langsung melalui instruksi lisan atau tulisan akan membantu memperlancar suatu konsep atau hubungan hubungan matematika. Tidak dapat diharapkan bahwa semua siswa.akanmmampu menemukan hubungan atas insiatifnya sendiri. Kebanyaakan mereka memrlukan bimbingan dan petunjuk.

Dari uraian di atas jelas bahwa pemecahan masalah melalui penemuan terbimbing akan efektif dan efisien. Pertunjuk yang dimaksud berupa lisan atau tulisan dengan sederatan pertanyaan dan penjelasan. Misalnya, siswa dihadapkan kepada permasalahan apakah hukum asosiatif dari iteraksi dua himpunan berlaku. Untuk menjawab permasalahan ini digunakan penemuan terbimbing. Contoh berikut ini mengasumsikan bahwa siswa telah mempelajari dan memahami konsep himpunan, kesamaan antara dua himpunan, interseksi dan diagram venn.

Prosedurnya adalah sebagai berikut.

a. Diketahui $A = \{1,2,3 \ldots,10\}$
   $B = \{2,4,6 \ldots.,16\}$
   $C = \{4,7,10, \ldots.25\}$
   a 1. Dapatkah kamu menggambarkan diagram venn dari himpunan himpunan A,B dan C?
   a 2. Dapatkah kamu menentukan semua unsur unsur dari A   B?
   a 3. Dapatkah kamu menunjukkan semua unsur unsur dari B   C?
   a 4. Dapatkah kamu menunjukkan semua unsur unsur dari (A B) C?
   a 5. Dapatkah kamu menunjukkan semua unsur unsur dari A (B C)?
   a 6. Dua himpunan sama jika…………………..
b. Jika ada himpunan X = himpunan kendaraan paling sedikit tiga roda, Y = himpunan kendaraan yang mempunyai empat roda, dan Z = himpunan sepeda motor dan bus. Apakah yang kamu ketahui tentang X   (Y   Z) dan (X   Y)   Z?
c. Kesimpulan apa yang dapat kamu tarik tentang (P   Q)   R dan P   (Q   R) bila P, Q dan R merupakan sebarang himpunan?
d. Buktikan kesimpulan di c itu.

Contoh di atas itu harus dikerjakan oleh siswa secara individual bimbingan melewati tulisan yang berupa pertanyaan pertanyaan. Setelah siswa mengetshui berlakunya sifat asosiatif dari operasi interseksi itu, harus membuktikan penemuannya secara deduktif. Jadi permasale yang dihadapi anak bergerak dari induktif (menggunakan penemuan terbimbing) menuju ke deduktif.

Untuk memperjelas ide yang telah dikemukakan, perlu kiranya ulangi lagi sebagai berikut. Fasilitas belajar akan terjamin bila konsep konsep dan struktur matematika yang dipelajari siswa adalah bermakna pengajaran matematika haruslah menekankan kepada pengertian konsep konsep dan struktur matematika serta proses belajarnya melalui pemecahan masalah. Pemecahan masalah tersebut dengan menggunakan metode penemuan terbimbing berjalan dari pengalaman pengalaman konkret menuju ke kesimpulan formal. Jika suatu konsep dipahami, hal ini akan lebih menjamin transfer belajar. Transfer belajar itu tidaklah terjadi secara otomatis, melainkan akan terjadi bila mengajar itu menekankan pengertian. Setelah pengertian. Setelah pengertian dicapai, keterampilan perlu diperoleh. Keterampilan tersebut dapat dicapai melalui dril. Dril dalam pengertian ini, harus mempelancar proses belajar yang bermakna dan digunakan untul stabil memahami konsep dasar, jadi di dalam pembicaraan ini, dril bukan sekedar pengualangan. Setelah keterampilan diperoleh dengan melalui tadi, siswa dapat mengingat konsep lebih baik. Ingatan memegang peranan penting di dalam belajar matematika jika siswa harus mencari jalan menyelesaikan suatu masalah. Yang diperlukan sebagai suatu dasar langkah untuk menyelesaikan suatu masalah adalah mengorganisasikan ingatan tentang konsep konsep matematika sedemikian hingga konsep konsep tersebut dapat digunakan menyelesaikan masalah tersebut secara efektif. Dril untuk jangka waktu yang cukup lama yang didasarkan atas pengertian dapat meresap ke dalam otak. Percobaan percobaan telah menunjukkan bahwa dril yang cukup lama akan lebih efektif dari pada dril yang dikonsentrasikan di dalam periode waktu yang singkat. Perlu dinyatakan disini, bila ini tidak disertai pengertian kosep dan struktur, dril tersebut tidak ada makanya sebab ia dril semacam itu dilanjutkan, keterampilan yang telahdiperoleh akan lenyap dengan segera.

Ringkasan dari uraian yang panjang tersebut adalah sebagai berikut. Untuk menjamin pengertian konsep dan struktur matematika, siswa harus membentuk konsep atau struktur melalui pengalaman sebelumnya. Konsep atau struktur baru itu sendiri haruslah bermakna bagi siswa. Setelah siswa memperoleh pengertian, abstraksi atau generalisasi dari konsep atau struktur matematika perlu dicapai dengan menggunakan bahasa yang tepat (melalui bahasa siswa sendiri ataupun bimbingan guru) dan kemudian diperlukan latihan yang cukup untuk suatu periode waktu, sehingga keterampilan dan pengendapan dicapai. Agar supaya guru yakin bahwa transfer belajar telah tercapai, diperlukan aktivitas kelajutan melalui pemecahan masalah. Masalah tersebut dapat diselesaikan melalui metode deduktif atau induktif atau pertama tama dengan pendekatan intuitif yang kemudian diikuti lebih disiplin dan ketat. Guru harus menetapkan jenis instruksi yang paling efektif yang sekiranya dapat dilaksanakan di depan kelas.

Untuk jelasnya Gambar 6.13 pada halaman akhir bab ini menunjukkan langkah langkah untuk tercapainya transfer belajar.

E. Latihan

Latihan 6.1

Jawablah pertanyaan pertanyaan berikut dengan singkat dan jelas.

a. Berhubungan dengan apakah teori Piaget itu? Mengapa teori Piaget itu sangat berpengaruh kepada penyusunan kurikulum matematika?
b. Bandingkan karakteristik cara berpikir siswa SD dan SLmenurut Piaget
c. Apa yang dimaksud asimilasi dan akomodasi? Berilah contohnya
d. Apa yang dimaksud individu telah mencapai keseimbangan?
e. Apa bedanya konservasi dan reversibilitas?

Latihan 6.2

Pilihlah jawaban yang paling benar (Gorman, 1972) disertai alasannya.

Eksperimen 1

Apakah di halaman kelasmu lebih banyak anak lelaki arau anak anak?

Tini usia 5 tahun menjawab: “Lebih banyak anak lelaki daripada perempuan.”

Tono usia 6 tahun menjawab: “Lebih banyak anak anak; di dalam kelas itu terdapat anak anak lelaki dan perempuan”

Mengapa Tono mampu menjawab dengan benar sedang Tini tidak dapat?

a. Mampu membedakan antara anak anak lelaki dsn pperempuan
b. Mampu menggabungkan bagian bagian ke dalam keseluruhan
c. Mampu mendefinisikan “anak”

Eksperiment 2

Berapa 14 + 5 ? Bagaimana kamu mendapat 14 lagi?

Parto usia 5 tahun menjawab: “Saya tidak tahu”?

Parti usia 7 tahun menjawab: 14 + 5 = 19 ; 19 – 5 = 14”

Apa yang dapat dikerjakan Parti sedang Parto tidak dapat?

a. Menggunakan operasi penjumlahan untuk menyelesaikan sial itu
b. Menangkap bahwa satu operasi dapat diganti dengan suatu operasi invers
c. Menangkap bahwa satu variabel dapat mengopensasi variabel yang lain.

Eksperiment 3

Ada 3 pemuda: Parto, Parman dan Joko. Parto kulitnyalebih kuning daripada Joko; Parto kulitnya lebih hitam daripada Parman.

Siapa yang paling hitam?

Yanti usia 6 tahun menjawab: “Yang tengah saya tidak dapat mengikuti.”

Ati usia 8 tahun menjawab: “Parman”. Mengapa? “ Baiklah, dua orang yang disebut pertama kuning dan Parman hitam.

Nungki usia 10 tahun menjawab: “Parman; tidak. Joko” Mengapa?

“ Saya tidak yakin; saya tidak dapat membayangkan.”

Apa yang dapat kita katakan tentang berpikirnya anak anak SD sebagaimana respon di atas?

a. Anak anak pada usia itu belum dapat menguasai konsep konsep “lebih kuning lebih hitam” dan sejenisnya.
b. Anak anak belum mampu menguasai masalah masalah yang yang dihadapkan dengan cara verbal murni.

Eksperiment 4

Anak anak yang di dalam tahap operasi konkret, menurut pendapat

Anda tipe penalaran yang mana paling tepat?

a. Induktif
b. Deduktif

c. Campuran induktif dan deduktif

Eksperiment 5

Eksperiment 3 diulangi, namun pertanyaan diubah. Apa yang anda simpulkan dari contoh sederhana berikut ini.

Andi usia 9 tahun menjawab: paman, Mengapa? " Baiklah, dua pemuda yang pertama kuning dan Parman lebih hitam".

Pardi usia 13 tahun menjawab: "Joko. Mengapa? " Joko lebih hitam daripada Parto dan Parto lebih hitam daripada Parman. Jadi Joko yang paling hitam"

a. Andi belum mampu meletakkan obyek obyek ke dalam urutan
b. Pardi dapat mengoperasikan secara abstrak yaitu tahap verbal.

Eksperiment 6

Apakah asimilasi dan akomodasi itu merupakan proses yang berbeda ataukah dua aspek yang mempunyai proses sama?

a. Proses yang terpisah….
b. Dua aspek dari proses yang sama

Eksperiment 7

Pada usia berapa, menurut anda, anak mempunyai kemampuan mengaklafikasikan obyek obyek ke dalam struktur struktur struktur?

a. Usia 3 tahun
b. Usia 5 tahun
c. Usia 8 tahun

DAFTAR PUSTAKA

Asmin. 2003. *Implementasi Pembelajaran Matematika Realistik (PMR) dan Kendala yang Muncul di Lapangan*. (dalam Jurnal Pendidikan dan Kebudayaan No. 44 – September 2003). http://www.depdiknas.go.id/Jurnal/44/asmin.htm diakses tanggal 6 Juni 2005

Bueno, O. 2005. *Application of Mathematics and Underdetermination*. Fresno: Department of Philosophy California State University. http://www.socsci.uci.edu/lps/psa2k/application-underdetermination.pdf diakses tanggal 20 Agustus 2005

Departemen Pendidikan Nasional. 2003. *Kurikulum 2004 Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Dasar dan Madrasah Ibtidaiyah*. Jakarta: Depdiknas

Fraleigh, J.B. 1989. *A First Course in Abstract Algebra*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Hudoyo, H. 1979. *Pengembangan Kurikulum Matematika dan Pelaksanaannya di Depan Kelas*. Surabaya: Usaha Nasional.

Hudoyo, H. & Sutawidjaja, A. 1997. *Matematika*. Jakarta: Bagian Proyek Pengembangan PGSD Dirjen Dikti Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Karim, M.A., As'ari, A.R., Muhsetyo, G., Sutawidjaja, A. 1997. *Pendidikan Matematika I*. Jakarta: Bagian Proyek Pengembangan PGSD Dirjen Dikti Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Seputro, T.M.H.T. 1992. *Pengantar Dasar Matematika, Logika dan Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.

Slameto. 1988. *Belajar dan Faktor-faktor yang Mempengaruhinya*. Jakarta: Bina Aksara.

Soehakso, RMJT. tt. *Pengantar Matematika Modern*. Jakarta: Proyek Pendidikan Tenaga Guru, Dirjen Dikti, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Spiegel, M.R. 1992. *Matematika Dasar.* (terjemahan Iskandar, K.). Jakarta: Erlangga

Stinson, D.R. 1995. *Cryptography, Theory and Practice*. Boca Raton, Florida: CRC Press LLC

Sudjana. 2002. *Metoda Statistika.* Edisi ke 6. Bandung:Tarsito

Suharta, I.G.P. 2003. *Matematika Realistik: Apa dan Bagaimana?* (dalam Jurnal Pendidikan dan Kebudayaan edisi 30). http://www.depdiknas.go.id/Jurnal/38/Matematika/Realistik.htm diakses tanggal 6 Juni 2005

Sujono. 1988. *Pengajaran Matematika untuk Sekolah* Menengah. Jakarta: Proyek Pengembangan LPTK, Ditjen Dikti Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Susanta, B. 1990. *Geometri Transformasi*. Jogjakarta: FMIPA Universitas Gajah Mada.

Sutawidjaja, A., Muhsetyo, G., Karim, M.A., Soewito. 1992. *Pendidikan Matematika 3*. Jakarta: Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan, Dirjen Dikti, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Turmudi (ed). 2001. *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer (Common Text Book)*. Bandung: JICA – Universitas Pendidikan Indonesia (UPI).